А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов, Пары Лакса для линейных гамильтоновых систем, *Сиб. матем. журн.*, 2019, том 60, номер 4, 760–776

DOI: 10.33048/smzh.2019.60.405

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2019. Том 60, № 4

УДК 517.926

ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов

Аннотация. Построены пары Лакса для линейных гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. Для вычислений используются в том числе базисы Гребнера. Доказана пуассоновость отображений, возникающих в конструкции пар Лакса. Исследованы различные свойства первых интегралов системы, получившихся из этих пар Лакса.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.405

Ключевые слова: пары Лакса, линейные гамильтоновы системы, первые интегралы, базисы Гребнера.

1. Введение

Целью данной статьи является вычисление пар Лакса для линейной системы дифференциальных уравнений

$$\Gamma\dot{x} = -Px, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^{2n}$ — вектор-столбец, $\Gamma \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $P \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ — матрицы. При этом матрица P предполагается симметрической, а Γ — кососимметрической, т. е.

$$P^{\mathrm{T}} = P \quad \text{и} \quad \Gamma^{\mathrm{T}} = -\Gamma.$$

Также будем предполагать, что $\det\Gamma \neq 0$ (что объясняет четность размерности векторного пространства) и $\det P \neq 0$.

С другой стороны, если рассмотреть произвольную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \tag{2}$$

допускающую квадратичный первый интеграл $\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$, где $x \in \mathbb{R}^r$, $A, P \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $P^{\mathrm{T}} = P$ и $\det A \neq 0$, $\det P \neq 0$, то $\Gamma = -PA^{-1}$ будет невырожденной кососимметрической матрицей (см. статьи В. В. Козлова [1, 2]) и система (2) сразу приводится к виду (1), следовательно, $r = 2n$.

Отметим, что система (1) гамильтонова (см. разд. 2 далее).

Под *парой Лакса размерности* k для системы (1) подразумеваем гладкое отображение

$$\mathrm{LP} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{4k^2}, \tag{3}$$

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 16–01–00378а, 16–51–55012 China–а). Работа выполнена вторым автором при финансовой поддержке Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ (грант Правительства РФ, Договор № 14.641.31.0001).

переводящее решения системы (1) в решения следующего матричного дифференциального уравнения:
$$\dot{L} = [B, L], \tag{4}$$
где $B \times L \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_k(\mathbb{C})$. Другими словами, если τ — векторное поле на $\mathbb{R}^{2n}$, порожденное системой (1), то для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$ L-компонента касательного вектора $\mathrm{dLP}_x(\tau(x))$ в точке $\mathrm{LP}(x)$ определяется системой (4). Отсюда, как известно, следует, что для функции
$$f_l = \mathrm{Tr}(L^l) : \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{где } l \in \mathbb{N},$$
выполнено $\dot{f}_l = 0$, т. е. функция f_l постоянна на решениях системы (4). Следовательно, прообраз любой функциональной комбинации вещественной и мнимой частей функции f_l относительно отображения $\mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{LP}$ является первым интегралом системы (1). Основной проблемой при таком подходе является проверка нетривиальности полученных интегралов, а также вопрос о полноте системы первых интегралов, полученных с помощью разных пар Лакса.

Отметим, что исследование пар Лакса для линейных гамильтоновых систем является первым шагом к нелинейному случаю, поскольку любая нелинейная система дифференциальных уравнений дает линейную систему в первом приближении. Например, если система гамильтонова, то можно разложить в ряд Тейлора гамильтониан системы и оставить для дальнейшего рассмотрения только члены с порядком степени не выше двух.

Для $n = 1$ полностью исследован вопрос про пары Лакса размерности 2 для системы (1) в разд. 3. Для окончательного ответа в этом случае применены также компьютерные вычисления при помощи базисов Гребнера. Использование базисов Гребнера для нахождения пар Лакса, насколько нам известно, никогда не применялось до настоящей работы. Они также использовались для получения ответа в общем случае. Краткий обзор техники, связанной с базисами Гребнера, приведен, например, в [3] или [4].

Для произвольного $n \geq 1$, а также пары: собственное значение и собственный вектор для этого собственного значения матрицы $(P\Gamma^{-1})^2$, строим пару Лакса размерности 2 в разд. 4. Показано, что для разных собственных значений первые интегралы системы (1), построенные по функции $\mathrm{Tr}(L^2)$, находятся в инволюции на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ относительно скобки Пуассона, задаваемой кососимметрической матрицей $-\Gamma$. Эти первые интегралы являются квадратичными функциями на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, и в случае простого спектра у матрицы $P\Gamma^{-1}$ образуют полный набор из n функционально независимых первых интегралов гамильтоновой системы (1) (для комплексных собственных значений и собственных векторов надо брать вещественные и мнимые части у соответствующих функций, как отмечали выше). Таким образом, получаем новое простое доказательство результата Вильямсона (см. [5]) о том, что система (1) допускает n первых квадратичных интегралов, находящихся попарно в инволюции и функционально независимых (см. замечание 4.3). (Подробное обсуждение этого вопроса с дополнительными ссылками содержится в конце [2, § 2].)

В разд. 5 показано, что отображение, возникающее в конструкции пар Лакса, является морфизмом пуассоновых многообразий относительно естественных скобок Пуассона.

Мы благодарны А. Н. Паршину за постановку задачи и многочисленные обсуждения. Отправной точкой нашего исследования был доклад В. В. Козлова

«Симплектическая геометрия линейных гамильтоновых систем и решение алгебраических уравнений» на семинаре отдела алгебры и отдела алгебраической геометрии в МИАНе в сентябре 2017 г.

2. Предварительные сведения

Напомним следующие известные факты про симплектические структуры и скобки Пуассона.

Пусть невырожденная кососимметрическая матрица $W \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R})$, где s — четное число, задает симплектическую структуру на пространстве $\mathbb{R}^s$ при помощи 2-формы

$$\Omega(x,y) = x^{\mathrm{T}} W y, \quad x, y \in \mathbb{R}^s.$$

Векторное поле v на $\mathbb{R}^s$ называется *гамильтоновым* с гамильтонианом H, который является гладкой функцией на $\mathbb{R}^s$, если

$$\Omega(v,w) = -dH(w),$$

где w — любое векторное поле на $\mathbb{R}^s$. Будем обозначать такое векторное поле через $v = \operatorname{sgrad} H$. Для двух гладких функций f и g на пространстве $\mathbb{R}^s$ их скобка Пуассона $\{f,g\}$ определяется следующими равенствами:

$$\{f,g\} = -\Omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) = -dg(\operatorname{sgrad} f) = df(\operatorname{sgrad} g).$$

Тогда в координатах

$$\operatorname{sgrad} g = W^{-1} \cdot \operatorname{grad} g \quad \text{и} \quad \{f,g\} = (\operatorname{grad} f)^{\mathrm{T}} \cdot W^{-1} \cdot \operatorname{grad} g, \tag{5}$$

где столбец из функций, градиент, есть $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_s}\right)^{\mathrm{T}}$, и $x_1, \dots, x_s$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^s$.

Возвращаясь к системе (1) (в этом случае $s = 2n$), несложными выкладками можно получить, что если $W = -\Gamma$, то векторное поле $-\Gamma^{-1}Px$ гамильтоново с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Px$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$ (см. также [2, § 1]). Поэтому система (1) гамильтонова относительно описанной выше симплектической структуры на $\mathbb{R}^{2n}$, задаваемой кососимметрической матрицей $-\Gamma$.

Далее будем использовать следующие утверждения. Предполагаем, что матрицы Γ и P удовлетворяют условиям, как в начале введения.

Предложение 2.1. 1. *Если $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение матрицы $P\Gamma^{-1}$, то $\bar{\lambda}$, $-\lambda$, $-\bar{\lambda}$ тоже собственные значения матрицы $P\Gamma^{-1}$.*

2. *Пусть v_1 и v_2 — (комплексные) собственные векторы матрицы $(P\Gamma^{-1})^2$ с соответствующими собственными значениями λ_1 и λ_2 из $\mathbb{C}$. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то*

$$v_1^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}v_2 = 0.$$

3. *Пусть спектр матрицы $P\Gamma^{-1}$ простой. Если v — собственный вектор матрицы $(P\Gamma^{-1})^2$, не являющийся собственным вектором матрицы $P\Gamma^{-1}$, то*

$$v^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}(P\Gamma^{-1}v) \neq 0.$$

Доказательство. 1. Это свойство следует из того, что матрица $P\Gamma^{-1}$ вещественна, и из равенств

$$0 = \det(P\Gamma^{-1} - \lambda E) = \det(P - \lambda\Gamma) = \det(P - \lambda\Gamma)^{\mathrm{T}}$$
$$= \det(P + \lambda\Gamma) = \det(P\Gamma^{-1} + \lambda E),$$

где E — единичная матрица.

2. Это свойство следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} v_1^{\mathrm T}\Gamma^{-1}v_2 = \big(\lambda_1^{-1}(P\Gamma^{-1})^2 v_1\big)^{\mathrm T}\Gamma^{-1}v_2 = \lambda_1^{-1}v_1^{\mathrm T}\Gamma^{-1}P\Gamma^{-1}P\Gamma^{-1}v_2 \\ = \lambda_1^{-1}v_1^{\mathrm T}\Gamma^{-1}(P\Gamma^{-1})^2 v_2 = \lambda_1^{-1}\lambda_2 v_1^{\mathrm T}\Gamma^{-1}v_2. \end{aligned}$$

3. Так как спектр матрицы $P\Gamma^{-1}$ простой, из п. 1 предложения вытекает, что матрица $(P\Gamma^{-1})^2$ диагонализируется, причем каждому собственному значению отвечает двумерное подпространство собственных векторов. Пусть D — матрица, составленная из столбцов, которые являются линейно независимыми (над $\mathbb{C}$) собственными векторами матрицы $(P\Gamma^{-1})^2$, так что отвечающие одному собственному значению столбцы являются соседними. Тогда у матрицы $D^{\mathrm T}\Gamma^{-1}D$ на (l,j)-м месте находится число $v_l^{\mathrm T}\Gamma^{-1}v_j$, где v_k — k-й столбец матрицы D. Поэтому из п. 2 предложения получаем, что $G = D^{\mathrm T}\Gamma^{-1}D$ — блочно-диагональная матрица с блоками 2×2 на диагонали. Отметим, что $P\Gamma^{-1}v$ тоже собственный вектор матрицы $(P\Gamma^{-1})^2$ с тем же собственным значением, что и вектор v, но вектор $P\Gamma^{-1}v$ не пропорционален вектору v. Поэтому если $v^{\mathrm T}\Gamma^{-1}(P\Gamma^{-1}v) = 0$, то один из 2×2 блоков матрицы G равен нулю. Тогда $\det G = 0$. Следовательно, $\det\Gamma^{-1} = 0$; противоречие. $\square$

3. Пары Лакса для $n = 1$

3.1. Использование квадратного корня из матрицы. В этом разделе приведем пару Лакса размерности 2 для системы (1) в случае $n = 1$, так что функция $\operatorname{Tr}(L^2)$ будет первым интегралом этой системы, совпадающим с $4H$, где $H = \frac{1}{2}x^{\mathrm T}Px$. Позже в разд. 4 приведем общие формулы для пар Лакса размерности 2 для системы (1), но они будут отличаться от этой в случае $n = 1$ и гамильтониан H (для произвольного n) будет получаться только лишь как линейная комбинация первых интегралов, связанных с парами Лакса.

Так как $P^{\mathrm T} = P$, существует симметрическая матрица $T \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ такая, что $T^2 = P$. (Матрица с этим свойством всегда существует, так как сопряжением ортогональными матрицами из $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ матрицу P всегда можно привести к диагональной матрице, из которой берется корень в виде диагональной матрицы и затем применяется обратное сопряжение.) Отметим, что $\det T \neq 0$.

Будем использовать тождество

$$\Gamma\cdot T = \det T\cdot T^{-1}\cdot\Gamma, \tag{6}$$

которое проверяется непосредственными вычислениями для явных матриц

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Пусть $x = (x_1, x_2)^{\mathrm T}$ — столбец стандартных координат в $\mathbb{R}^2$. Введем матрицы

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = T\cdot Z - \Gamma^{-1}\cdot T\cdot Z\cdot\Gamma, \tag{8}$$

$$B = -\frac{1}{2}T\cdot\Gamma^{-1}\cdot T = -\frac{\det T}{2}\cdot\Gamma^{-1}, \tag{9}$$

где для получения последнего равенства использовано равенство (6).

Заметим, что из явного вида (7) для матрицы T и равенства (8) нетрудными вычислениями получаем следующий явный вид для матрицы L:

$$L = \begin{pmatrix} ax_1 + cx_2 & cx_1 + bx_2 \\ cx_1 + bx_2 & -ax_1 - cx_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $L^{\mathrm{T}} = L$ и $\operatorname{Tr} L = 0$. Таким образом, матрица L однозначно определяется своим первым столбцом.

Матрицы B и L образуют пару Лакса размерности 2 для системы (1), как показывает

Предложение 3.1. *Система* (1) *эквивалентна системе*

$$\dot{L} = [B, L]. \tag{10}$$

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{Tr}[B, L] = 0$ и

$$[B, L]^{\mathrm{T}} = (BL - LB)^{\mathrm{T}} = L^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} - B^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} = BL - LB = [B, L],$$

поэтому формулу (10) достаточно проверить лишь для первого столбца получающейся матрицы в левой и правой частях этой формулы. Вычислим

$$BL - LB = -\frac{1}{2} T \cdot \Gamma^{-1} \cdot T \cdot T \cdot Z + \frac{1}{2} T \cdot \Gamma^{-1} \cdot T \cdot \Gamma^{-1} \cdot T \cdot Z \cdot \Gamma \\ + \frac{1}{2} T \cdot Z \cdot T \cdot \Gamma^{-1} \cdot T - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \cdot T \cdot Z \cdot \Gamma \cdot T \cdot \Gamma^{-1} \cdot T.$$

Так как умножение матрицы Z слева на любую матрицу дает матрицу с нулевым вторым столбцом, а умножение последней матрицы на матрицу Γ или Γ^{-1} справа — матрицу с нулевым первым столбцом, из последнего равенства в формуле (9) получаем, что на первый столбец в матрице $[B, L]$ влияют только первое и четвертое слагаемые в сумме. Сумма этих слагаемых (с учетом опять же второго равенства в формуле (9)) равна

$$-\frac{1}{2} T \cdot \Gamma^{-1} \cdot T^2 \cdot Z - \frac{\det T}{2} \Gamma^{-1} \cdot T \cdot Z = -\frac{1}{2} T \cdot \Gamma^{-1} \cdot P \cdot Z - \frac{\det T}{2} T \cdot T^{-1} \cdot \Gamma^{-1} \cdot T \cdot Z \\ = -\frac{1}{2} T \cdot \Gamma^{-1} \cdot P \cdot Z - \frac{1}{2} T \cdot \Gamma^{-1} \cdot T \cdot T \cdot Z = -T \cdot \Gamma^{-1} \cdot P \cdot Z = T \cdot \dot{Z},$$

где в последнем равенстве использована система (1). □

Вычислим $\operatorname{Tr}(L^k)$, где k — натуральное число. Заметим, что для любой матрицы $L = \begin{pmatrix} g & h \\ h & -g \end{pmatrix}$ имеем $L^2 = (g^2 + h^2)E$, где E — единичная матрица. Следовательно, $\operatorname{Tr}(L^k) = 0$, если k нечетно, и $\operatorname{Tr}(L^{2l}) = 2(g^2 + h^2)^l$. В нашем случае $(g, h)^{\mathrm{T}} = Tx$, где $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$, $T^2 = P$ и $T^{\mathrm{T}} = T$. Поэтому получаем

$$g^2 + h^2 = (Tx)^{\mathrm{T}} \cdot Tx = x^{\mathrm{T}} T^{\mathrm{T}} T x = x^{\mathrm{T}} T^2 x = x^{\mathrm{T}} P x.$$

Итак, $\operatorname{Tr}(L^{2l}) = 2(x^{\mathrm{T}} P x)^l = 2(2H)^l$, где H — гамильтониан системы (1).

3.2. Компьютерные вычисления. Рассмотрим общую задачу нахождения пар Лакса размерности 2 для систем вида

$$\dot{x} = \widetilde{\Gamma} \cdot P \cdot x, \tag{11}$$

где $\widetilde{\Gamma}$ — кососимметрическая, а P — произвольная (не обязательно симметрическая) вещественные матрицы размера 2×2. Без ограничения общности (изменив матрицу P) будем считать, что

$$\widetilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Будем искать матрицы L и B такие, что матрица L линейно зависит от координат x в пространстве $\mathbb{R}^2$ (или $\mathbb{C}^2$), а матрица B не зависит от координат x, и система (11) влечет систему

$$\dot{L} = [B, L]. \tag{13}$$

Пусть первый и второй столбцы матрицы L суть

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot x \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \cdot x,$$

а

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное уравнение (13) переписывается в виде системы из восьми уравнений от 12 переменных a_i, y_i, b_i (при этом коэффициенты a_i и y_i определены с точностью до умножения на константу). Эта система поддается исследованию с помощью компьютера. В частности, удается вычислить ее базис Гребнера. Например, первый элемент этого базиса, зависящий только от y_3 и y_4, имеет вид

$$\begin{aligned} p_1^2p_2p_4y_4^2 - p_1^2p_3p_4y_4^2 - p_1\,p_2^2p_3y_4^2 - p_1p_2^2p_4y_3y_4 \\ + p_1p_2p_3^2y_4^2 + p_1p_2p_4^2y_3^2 + p_1p_3^2p_4y_3y_4 - p_1p_3p_4^2y_3^2 \\ + p_2^3p_3y_3y_4 - p_2^2p_3p_4y_3^2 - p_2p_3^3y_3y_4 + p_2p_3^2p_4y_3^2. \end{aligned}$$

(Остальные элементы базиса Гребнера, вычисленного с помощью компьютера, имеют более длинную запись.)

Если дополнительно предположить, что матрица P симметрична, т. е. $p_2 = p_3$, то базис Гребнера упрощается и система имеет следующее решение общего вида:

$$a_1 = -y_3, \quad a_2 = -y_4, \quad a_3 = \frac{p_1y_4(y_1y_4 - 2y_2y_3) + 2p_2y_2{y_3}^2 - p_4y_1y_3^2}{y_2(p_1y_2 - 2p_2y_1) + p_4y_1^2}, \tag{14}$$

$$a_4 = \frac{y_4^2(2p_2y_1 - p_1y_2) + p_4y_3(y_2y_3 - 2y_1y_4)}{y_2(p_1y_2 - 2p_2y_1) + p_4y_1^2}, \tag{15}$$

$$b_2 = -\frac{p_1y_2^2 - 2p_2y_1y_2 + p_4y_1^2}{2(y_2y_3 - y_1y_4)}, \quad b_3 = \frac{p_1y_4^2 - 2p_2y_3y_4 + p_4y_3^2}{2\,(y_2y_3 - y_1y_4)}, \tag{16}$$

$$b_1 = \frac{-b_4y_1y_4 + b_4y_2y_3 + p_1y_2y_4 - p_2y_1y_4 - p_2y_2y_3 + p_4y_1y_3}{y_2y_3 - y_1y_4}, \tag{17}$$

зависящее от свободных переменных b_4, y_1, y_2, y_3, y_4. Матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} -x_1y_3 - x_2y_4 & x_1y_1 + x_2y_2 \\ q & x_1y_3 + x_2y_4 \end{pmatrix},$$

где

$$q = \frac{x_1\,(-p_4 y_1 {y_3}^2 + 2p_2 y_2 y_3^2 + p_1 y_4 (y_1 y_4 - 2y_2 y_3))}{p_4 {y_1}^2 + y_2(p_1 y_2 - 2p_2 y_1)} + \frac{x_2((2p_2 y_1 - p_1 y_2){y_4}^2 + p_4 y_3 (y_2 y_3 - 2y_1 y_4))}{p_4 {y_1}^2 + y_2(p_1 y_2 - 2p_2 y_1)}.$$

След у матрицы L^2 равен

$$\mathrm{Tr}(L^2) = \frac{4(y_2 y_3 - y_1 y_4)^2 H}{y_2(p_1 y_2 - 2p_2 y_1) + p_4 y_1^2},$$

где $H = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} P x$ — гамильтониан системы (1).

Заметим, что знаменатели в формулах (14)–(17) имеют следующую простую интерпретацию:

$$y_2(p_1 y_2 - 2p_2 y_1) + p_4 {y_1}^2 = (y_1, y_2)\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{T}} P \widetilde{\Gamma} (y_1, y_2)^{\mathrm{T}},$$

$$y_2 y_3 - y_1 y_4 = (y_1, y_2)\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{T}} (y_3, y_4)^{\mathrm{T}}.$$

Замечание 3.2. Отметим, что базис Гребнера упрощается не только для симметрических матриц. Рассмотрим такой пример. Пусть матрицы $\widetilde{\Gamma}$ и P будут, как в формуле (12), причем $p_1 = p_4 \neq 0$, $p_2 = -p_3 \neq 0$. Для таких матриц базис Гребнера, вычисленный с помощью компьютера, упрощается и удается найти все пары Лакса. Например, матрица L с точностью до умножения на константу имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} ix_1 - x_2 & (x_2 - ix_1)y_2 \\ \frac{ix_1 - x_2}{y_2} & x_2 - ix_1 \end{pmatrix},$$

где y_2 — свободная переменная. Однако всегда выполнено $L^2 = 0$, поэтому эти пары Лакса не дают никаких нетривиальных первых интегралов! (Ср. с замечанием 4.4 далее, где $\mathrm{Tr}(L^2) = 0$.)

4. Пары Лакса в общем случае

В этом разделе построим пары Лакса размерности 2 для произвольного натурального числа n для системы (1).

Предположим, что выполнены условия на матрицы Γ и P, как в начале введения. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение матрицы $P\Gamma^{-1}$. Определим подпространство $V_\lambda \subset \mathbb{C}^{2n}$:

$$V_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^{2n} : (P\Gamma^{-1})^2 x = \lambda^2 x\}.$$

Имеем $\lambda \neq 0$, и из п. 1 предложения 2.1 получаем, что $-\lambda$ тоже собственное значение матрицы $P\Gamma^{-1}$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda \geq 2$, так как собственные векторы матрицы $P\Gamma^{-1}$ с собственными значениями λ и $-\lambda$ линейно независимы над $\mathbb{C}$ и принадлежат подпространству V_λ. Отметим, что если спектр матрицы $P\Gamma^{-1}$ простой, то $\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda = 2$.

Заметим, что $P\Gamma^{-1} V_\lambda = V_\lambda$, так как $[P\Gamma^{-1}, (P\Gamma^{-1})^2] = 0$ и $\det(P\Gamma^{-1}) \neq 0$.

Выберем произвольный ненулевой вектор-столбец

$$w = (w_1, \ldots, w_{2n})^{\mathrm{T}} \in V_\lambda \subset \mathbb{C}^{2n}$$

такой, что w не является собственным вектором матрицы $P\Gamma^{-1}$. Будем называть такую пару (λ, w) *допустимой*.

Определим вектор-столбец

$$\widehat{w} = i\lambda^{-1}P\Gamma^{-1}w \in V_\lambda \subset \mathbb{C}^{2n},$$

где стандартно $i^2 = -1$. Определим

$$a = x^{\mathrm{T}}w = \sum_{1\le j\le 2n} x_j w_j, \quad d = x^{\mathrm{T}}\widehat{w} = i\lambda^{-1}x^{\mathrm{T}}P\Gamma^{-1}w = -i\lambda^{-1}(\Gamma^{-1}Px)^{\mathrm{T}}w. \tag{18}$$

Введем матрицы B и L размера 2×2:

$$B = -\frac{i\lambda}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a & d \\ d & -a \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Определение 4.1. Определим квадратичную функцию из $\mathbb{C}^{2n}$ в $\mathbb{C}$:

$$I_{\lambda,w} = \mathrm{Tr}(L^2) = 2((x^{\mathrm{T}}w)^2 + (x^{\mathrm{T}}\widehat{w})^2),$$

где последнее равенство следует из явного вида (19) матрицы L.

Так же, как в конце п. 3.1, легко видеть, что $\mathrm{Tr}(L^k) = 0$, если k — нечетное натуральное число, и $\mathrm{Tr}(L^{2l}) = 2(I_{\lambda,w}/2)^l$.

Каждая так построенная пара B, L определяет пару Лакса размерности 2 с интересными свойствами, как показывает

Теорема 4.2. 1. *Пара B, L является парой Лакса размерности 2 для системы (1).*

2. *Пусть (λ_1, w_1) и (λ_2, w_2) — допустимые пары, и пусть $\lambda_1^2 \ne \lambda_2^2$. Тогда*

$$(\mathrm{grad}\, I_{\lambda_1,w_1})^{\mathrm{T}} \cdot \Gamma^{-1} \cdot \mathrm{grad}\, I_{\lambda_2,w_2} = 0.$$

3. *Пусть (λ_j, w_j), где $1 \le j \le l \le n$, — допустимые пары и все числа λ_j^2 попарно различны. Тогда комплексные 1-формы dI_{λ_j,w_j}, где $1 \le j \le l$, линейно независимы над $\mathbb{C}$ на дополнении к объединению не более чем l линейных подпространств коразмерности 2 в $\mathbb{C}^{2n}$.*

Замечание 4.3. Отметим, что если (λ, w) — допустимая пара, то комплексно сопряженная пара $(\bar{\lambda}, \overline{w})$ тоже является допустимой парой. При этом $\overline{I_{\lambda,w}} = I_{\bar{\lambda},\overline{w}}$. Поэтому для вещественных и мнимых частей имеем

$$\mathrm{Re}\, I_{\lambda,w} = \frac{1}{2}(I_{\lambda,w} + I_{\bar{\lambda},\overline{w}}), \quad \mathrm{Im}\, I_{\lambda,w} = \frac{1}{2i}(I_{\lambda,w} - I_{\bar{\lambda},\overline{w}}).$$

Следовательно, из разд. 2 (в частности, формулы (5)) и пп. 2 и 3 теоремы 4.2, беря, если необходимо, вещественные и мнимые части от квадратичных функций $I_{\lambda,w}$, сразу получаем квадратичные функционально независимые первые интегралы для системы (1), которые находятся попарно в инволюции относительно скобки Пуассона для гамильтоновой системы (1). В частности, если спектр матрицы $P\Gamma^{-1}$ простой, то получается n таких первых интегралов. Это в том числе дает новое доказательство результата из [5] (как упомянуто во введении).

Отметим разницу подходов. Для доказательства функциональной независимости набора первых интегралов в [5][1)] использовалась довольно громоздкая теорема из [7] о классификации пары билинейных вещественных форм: симметрической и кососимметрической (формулировка этой теоремы приведена также в [8, добавление 6]). В нашем случае строим набор из n первых квадратичных

[1)] Аналогичный подход при помощи перебора различных случаев содержится в [6].

интегралов в инволюции и очень просто без теоремы о классификации пары форм доказываем (см. ниже), что они функционально независимы. Из общей теории алгебр Ли следует, что все семейства первых квадратичных интегралов в инволюции порождают одно и то же векторное пространство и, следовательно, первые интегралы из [5] тоже функционально независимы. Объясним последнее более подробно.

Пусть M и N — две вещественные симметрические матрицы, задающие квадратичные функции на $\mathbb{R}^{2n}$. Скобка Пуассона, построенная по симплектической форме на $\mathbb{R}^{2n}$, задаваемой кососимметрической матрицей $-\Gamma$, от двух квадратичных функций будет снова квадратичной функцией. Эта скобка перепишется на множестве симметрических матриц следующим образом:

$$\{M, N\} \longmapsto -2(M\Gamma^{-1}N - N\Gamma^{-1}M).$$

Заметим, что отображение $M \mapsto -2M\Gamma^{-1}$ задает изоморфизм между алгеброй Ли симметрических матриц относительно скобки, описанной выше, и матричной подалгеброй Ли, состоящей из матриц B, удовлетворяющих условию $B^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1} + \Gamma^{-1}B = 0$. Последняя алгебра изоморфна симплектической алгебре Ли $sp(2n, \mathbb{R})$ посредством отображения $B \mapsto C^{\mathrm{T}}B(C^{\mathrm{T}})^{-1}$, где $-C^{\mathrm{T}}\Gamma C$ — стандартная симплектическая единица.

Если $P/2$ — симметрическая матрица, задающая квадратичный гамильтониан, и матрица $P\Gamma^{-1}$ имеет простой спектр, то матрица $-C^{\mathrm{T}}P\Gamma^{-1}(C^{\mathrm{T}})^{-1}$ тоже имеет простой спектр, а потому определяет регулярный элемент в простой алгебре Ли $sp(2n, \mathbb{R})$. Тогда подалгебра Картана, содержащая этот элемент, состоит из всех коммутирующих с ним элементов и является абелевой подалгеброй размерности n. Поэтому существует единственное вещественное линейное пространство размерности n, состоящее из квадратичных функций, находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона, и содержащее гамильтониан.

Явные формулы, связывающие наши первые интегралы и первые интегралы из [2, 5], приведены в [9].

Доказательство теоремы 4.2. 1. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & d \\ d & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -a \\ -a & -d \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a & d \\ d & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & a \\ a & d \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрицы BL, LB и $[B, L]$ снова будут симметрическими матрицами со следом нуль. Следовательно,

$$[B, L] = BL - LB = BL - (LB)^{\mathrm{T}} = 2BL.$$

Отсюда получаем, что система (4) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{a} = -i\lambda d, \\ \dot{d} = i\lambda a. \end{cases} \tag{20}$$

Из системы (1) получаем

$$\dot{a} = \dot{x}^{\mathrm{T}} \cdot w = (-\Gamma^{-1}Px)^{\mathrm{T}} \cdot w, \quad \dot{d} = \dot{x}^{\mathrm{T}} \cdot \widehat{w} = (-\Gamma^{-1}Px)^{\mathrm{T}} \cdot (i\lambda^{-1}P\Gamma^{-1}w).$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} (-\Gamma^{-1}Px)^{\mathrm{T}} \cdot w = -i\lambda x^{\mathrm{T}} \cdot (i\lambda^{-1}P\Gamma^{-1}w), \\ (-\Gamma^{-1}Px)^{\mathrm{T}} \cdot (i\lambda^{-1}P\Gamma^{-1}w) = i\lambda x^{\mathrm{T}} \cdot w. \end{cases}$$

Следовательно,
$$\begin{cases} x^{\mathrm{T}} P\Gamma^{-1} w = -i\lambda x^{\mathrm{T}} \cdot (i\lambda^{-1} P\Gamma^{-1} w), \\ x^{\mathrm{T}} P\Gamma^{-1} \cdot (i\lambda^{-1} P\Gamma^{-1} w) = i\lambda x^{\mathrm{T}} \cdot w. \end{cases}$$

Первое уравнение из последней системы выполнено всегда. Чтобы проверить выполнение второго, достаточно доказать, что

$$(P\Gamma^{-1})^2 w = \lambda^2 w.$$

Но вектор $w \in V_\lambda$ и выбран с таким условием.

2. Из определения 4.1 получаем

$$\begin{aligned} I_{\lambda,w} = 2((x^{\mathrm{T}} w)^2 + (x^{\mathrm{T}} \widehat{w})^2) &= 2(x^{\mathrm{T}} w + i x^{\mathrm{T}} \widehat{w}) \cdot (x^{\mathrm{T}} w - i x^{\mathrm{T}} \widehat{w}) \\ &= 2(x^{\mathrm{T}}(E - \lambda^{-1} P\Gamma^{-1}) w) \cdot (x^{\mathrm{T}}(E + \lambda^{-1} P\Gamma^{-1}) w), \end{aligned} \tag{21}$$

где E — единичная матрица. Отметим, что из этой формулы сразу видно, что $I_{\lambda,w} \neq 0$, так как w не является собственным вектором оператора $P\Gamma^{-1}$. Вычислим $\operatorname{grad} I_{\lambda,w}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} I_{\lambda,w} &= 2(\operatorname{grad}(a^2) + \operatorname{grad}(d^2)) = 2(2a \cdot \operatorname{grad} a + 2d \cdot \operatorname{grad} d) \\ &= 4((x^{\mathrm{T}} w) \cdot w + (x^{\mathrm{T}} \widehat{w}) \cdot \widehat{w}) = 4((x^{\mathrm{T}} w) \cdot E - \lambda^{-2}(x^{\mathrm{T}} P\Gamma^{-1} w) \cdot P\Gamma^{-1}) w \\ &= (g_1 \cdot E - g_2 \cdot P\Gamma^{-1}) w, \end{aligned}$$

где E — единичная матрица и линейные фукнции g_1 и g_2 на $\mathbb{C}^{2n}$ суть

$$g_1 = 4x^{\mathrm{T}} \cdot w, \quad g_2 = 4\lambda^{-2} x^{\mathrm{T}} \cdot P\Gamma^{-1} \cdot w.$$

Отсюда получаем следующий вывод. Поскольку при любых значениях $x \in \mathbb{C}^{2n}$ матрица $g_1 \cdot E - g_2 \cdot P\Gamma^{-1}$ коммутирует с матрицей $(P\Gamma^{-1})^2$, при любых значениях $x \in \mathbb{C}^{2n}$ вектор $\operatorname{grad} I_{\lambda,w}$ является собственным вектором матрицы $(P\Gamma^{-1})^2$ с собственным значением λ^2. П. 2 теоремы 4.2 следует из п. 2 предложения 2.1.

3. Так как ненулевые собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы, утверждение п. 3 теоремы следует из явного вычисления градиентов $\operatorname{grad} I_{\lambda,w}$ в доказательстве п. 2. При этом ввиду того, что вектор w не является собственным для матрицы $P\Gamma^{-1}$, градиент $\operatorname{grad} I_{\lambda,w}$ равен нулю только на пересечении двух линейных комплексных гиперплоскостей в $\mathbb{C}^{2n}$: $g_1 = 0$ и $g_2 = 0$. $\square$

Замечание 4.4. Отметим, что если при построении пары Лакса взять собственный вектор w матрицы $(P\Gamma^{-1})^2$, так что он является также собственным для матрицы $P\Gamma^{-1}$, то получим, что $\operatorname{Tr}(L^2) = 0$ (это сразу следует из формулы (21)). Отсюда получаем важность свойства $\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda \geq 2$. Именно отсутствие такого свойства не дает построить пару Лакса с ненулевой функцией $\operatorname{Tr}(L^2)$ для произвольной линейной системы

$$\dot{x} = Cx.$$

Замечание 4.5. Если спектр матрицы $P\Gamma^{-1}$ прост, то можно построить пару Лакса размерности $2n$ такую, что система (4) будет эквивалентна системе (1). Для этого достаточно взять блочно-диагональные матрицы B и L с блоками из матриц размера 2×2, как в формуле (19), с собственными значениями λ_i такими, что $\lambda_i^2 \neq \lambda_j^2$, если $i \neq j$.

Действительно, как видно из доказательства п. 1 теоремы 4.2, система (4) эквивалентна системам (20) с разными парами (λ, w). Но тогда уравнения этих систем переписываются в виде систем

$$(\dot{x}+\Gamma^{-1}Px)^T\cdot w=0, \quad (\dot{x}+\Gamma^{-1}Px)^T\cdot \widehat{w}=0$$

для n разных собственных векторов w. Поскольку все такие векторы $w, \widehat{w}$ линейно независимы, получаем систему (1):

$$\dot{x}+\Gamma^{-1}Px=0.$$

Замечание 4.6. Можно строить пары Лакса размерности $2n$ и другими способами. Пусть, например, матрицы B и L состоят из блоков матриц размера $n\times n$. Зафиксируем собственное значение λ матрицы $P\Gamma^{-1}$. Рассмотрим такие B и L:

$$B=-\frac{i\lambda}{2}\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}, \quad L=\begin{pmatrix}A & D\\ D & -A\end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица размера $n\times n$, A и D — симметрические матрицы размера $n\times n$. Пусть $A=(a_{kl})_{1\le k,l\le n}$, $D=(d_{kl})_{1\le k,l\le n}$. Тогда достаточно задать матричные элементы $a_{k,l}$ и $d_{k,l}$, когда $l\ge k$. Для каждой такой пары k, l зададим $a_{k,l}$ и $d_{k,l}$, как выше задавали a и d (см. формулу (18)) при построении пары Лакса. При этом собственное значение λ должно быть одно и то же, а собственные векторы $w\in V_\lambda$ могут меняться. Отметим, что для такой пары Лакса функция $\mathrm{Tr}(L^2)$ есть сумма функций $I_{\lambda,w}$, изученных выше.

Более того, можно выписать пару Лакса размерности $2n$ с вещественными коэффициентами и учитывающие несколько собственных значений матрицы $P\Gamma^{-1}$. Рассмотрим матрицу B вида $B=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & J\\ -J & 0\end{pmatrix}$, где J — диагональная матрица с числами $i\lambda_1,\dots,i\lambda_n$ на диагонали, при этом для любого $1\le j\le n$ число λ_j — собственное значение матрицы $P\Gamma^{-1}$, и если $\lambda_j^2\notin\mathbb{R}$, то $\bar{\lambda}_j=\lambda_k$ для некоторого $k\ne j$. Возьмем матрицу L, как выше, но с диагональными матрицами A и D, так что j-е числа на диагоналях матриц A и D строятся, как числа a и d в формуле (18) для собственного значения λ_j. Тогда пара B, L определяет пару Лакса размерности $2n$ для системы (1), причем функция $\mathrm{Tr}(L^2)$ — сумма функций $I_{\lambda_j,w}$, введенных выше. Сопрягая матрицы B и L при помощи перестановочных матриц (т. е. переставляя векторы в базисе некоторой перестановкой), получим блочно-диагональную матрицу B с блоками размера 2×2 вида $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & i\lambda\\ -i\lambda & 0\end{pmatrix}$. Если $\lambda^2\in\mathbb{R}$, то либо сам блок, либо его жорданова нормальная форма будут вещественными матрицами. Если $\lambda^2\notin\mathbb{R}$, то два таких блока с комплексно сопряженными числами $\lambda=a\pm bi$ имеют те же самые все различные собственные значения, что и вещественная матрица размера 4×4, записанная в виде блочной матрицы как

$$\begin{pmatrix}0 & N_1\\ N_2 & 0\end{pmatrix}, \quad \text{где } N_1=\begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix},\ N_2=\begin{pmatrix}a & -b\\ -b & -a\end{pmatrix}.$$

Поэтому можно сделать подходящую замену базиса, в котором матрица B вещественна. Тогда получившуюся пару Лакса можно разбить на две вещественных: с вещественной и мнимой частями матрицы L. Поскольку при сопряжении матриц след не меняется, получаются те же интегралы, что и у исходной пары Лакса (вещественная и мнимая части следа матрицы L^2).

Пример 4.7. В случае $n = 1$ всегда можно «отнормировать» (т. е. умножить на комплексное число) вектор w из допустимой пары (λ, w) таким образом, что $I_{\lambda,w} = 4H$, где H — гамильтониан системы (1). А именно, вектор w должен удовлетворять условию

$$w^{\mathrm{T}}\Gamma P\Gamma^{-1}w = -\lambda^2 \cdot \det\Gamma = \det P = p_1p_4 - p_2^2, \tag{22}$$

где коэффициенты в матрице P обозначены, как в правой части формулы (12) с дополнительным условием $p_3 = p_2$. (Так как вектор $P\Gamma^{-1}w$ не пропорционален вектору w, левая часть в формуле (22) не равна нулю.) В этом случае несложными прямыми вычислениями получаем

$$a^2 = (w_1x_1 + w_2x_2)^2, \quad d^2 = \frac{(w_2(p_1x_1 + p_2x_2) + w_1(-p_2x_1 - p_4x_2))^2}{(p_1p_4 - p_2^2)},$$

$$\begin{aligned} I_{\lambda,w} = 2(a^2 + d^2) = 2\big(x_1^2\big(p_1p_4w_1^2 - 2p_1p_2w_1w_2 + p_1^2w_2^2\big) \\ + 2x_1x_2\big(p_2p_4w_1^2 - 2p_2^2w_1w_2 + p_1p_2w_2^2\big) \\ + x_2^2\big(p_4^2w_1^2 - 2p_2p_4w_1w_2 + p_1p_4w_2^2\big)\big)/\big(p_1p_4 - p_2^2\big) = 4H. \end{aligned}$$

Заметим, что условие в (22) переписывается также в виде $w^{\mathrm{T}}P^{-1}w = 1$ при помощи тождества (6) (где T надо заменить на P).

Отметим еще, что в обозначениях п. 3.2 соответствующая пара Лакса из теоремы 4.2 получается, если положить $b_4 = 0$, $(y_3, y_4)^T = -w$, $(y_1, y_2)^T = \widehat{w}$.

Пример 4.8. В случае $n = 2$ рассмотрим, например, такие матрицы. Пусть

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & -b & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \\ b & 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим, как в первой части замечания 4.6,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \\ -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} x^{\mathrm{T}}w & 0 & x^{\mathrm{T}}\widehat{w} & 0 \\ 0 & -x^{\mathrm{T}}\widehat{w} & 0 & x^{\mathrm{T}}w \\ x^{\mathrm{T}}\widehat{w} & 0 & -x^{\mathrm{T}}w & 0 \\ 0 & x^{\mathrm{T}}w & 0 & x^{\mathrm{T}}\widehat{w} \end{pmatrix},$$

где $h = -i\lambda/2 = -\frac{1}{2}(-b+ai)$, $\lambda = a+bi$, и выбраны два собственных вектора для матрицы $(P\Gamma^{-1})^2$ с собственным значением λ^2: $w = (1, 1, i, -i)^{\mathrm{T}}$ и $\widetilde{w} = -\widehat{w} = (-i, i, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. При этом $\widehat{w} = (i, -i, -1, -1)^{\mathrm{T}}$, $\widehat{\widehat{w}} = w$. Матрицы B, L образуют пару Лакса для системы (1). Положим

$$H_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad H_2 = x_1x_4 - x_2x_3.$$

Нетрудно вычислить, что

$$16H_1 = I_{\lambda,w} + I_{\bar{\lambda},\overline{w}}, \quad 16H_2 = i(I_{\lambda,w} - I_{\bar{\lambda},\overline{w}}). \tag{23}$$

Отсюда получаем

$$\mathrm{Tr}(L^2) = 4((x^{\mathrm{T}}w)^2 + (x^{\mathrm{T}}\widehat{w})^2) = 2I_{\lambda,w} = 16H_1 - 16H_2i.$$

5. Пуассоновость отображений, возникающих в конструкциях пар Лакса

В этом разделе покажем, что на образе отображения, возникающего в парах Лакса из разд. 4, существует симплектическая структура такая, что матричное уравнение из пары Лакса гамильтоново, а само отображение, возникающее из конструкции пары Лакса, пуассоново, т. е. сохраняет скобки Пуассона, где на $\mathbb{R}^{2n}$ имеется скобка Пуассона, индуцированная гамильтоновой системой (1) (см. разд. 2).

По допустимой паре (λ, w) такой, что $w \in \mathbb{R}^{2n}$, если $\lambda^2 \in \mathbb{R}$, и по паре Лакса из теоремы 4.2 определим отображение

$$\Phi_{\lambda,w} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_3, \quad x \mapsto a(x) \cdot e_1 + d(x) \cdot e_3.$$

В зависимости от трех случаев: 1) $\lambda \in i\mathbb{R}$, 2) $\lambda \in \mathbb{R}$, 3) $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda^2 \notin \mathbb{R}$, это отображение задает отображения вещественных пространств, для которых сохраним такое же обозначение:

$$\Phi_{\lambda,w} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_3,$$
$$\Phi_{\lambda,w} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}ie_3, \quad x \mapsto a(x) \cdot e_1 + (i^{-1}d(x)) \cdot ie_3,$$
$$\Phi_{\lambda,w} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4,$$
$$x \mapsto (x^{\mathrm{T}}w_1, x^{\mathrm{T}}w_2, x^{\mathrm{T}}\widehat{w}_1, x^{\mathrm{T}}\widehat{w}_2)^{\mathrm{T}},$$

где $w = w_1 + iw_2$, $\widehat{w} = \widehat{w}_1 + i\widehat{w}_2$, $e_2 = ie_1$ и $e_4 = ie_3$.

Теорема 5.1. *Пусть спектр матрицы $P\Gamma^{-1}$ простой. Выберем любую допустимую пару (λ, w) такую, что $w \in \mathbb{R}^{2n}$, если $\lambda^2 \in \mathbb{R}$. Тогда на образе отображения $\Phi_{\lambda,w}$ существует естественная симплектическая структура, относительно которой система, полученная из пары Лакса, гамильтонова, а отображение $\Phi_{\lambda,w}$ пуассоново.*

Доказательство. Определим

$$K_{\lambda,w} = -w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w} = -i\lambda^{-1}w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}P\Gamma^{-1}w = -i\lambda w^{\mathrm{T}}P^{-1}w.$$

Из условий теоремы и п. 3 предложения 2.1 следует, что $K_{\lambda,w} \neq 0$.

Случай 1. Пусть z_1 и z_3 — вещественные координаты на векторах e_1 и e_3 соответственно. Чтобы определить скобку Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ на гладких функциях на пространстве $\mathbb{R}\langle e_1, e_3\rangle$ так, что $\Phi_{\lambda,w}$ было бы морфизмом пуассоновых многообразий, определим

$$\{z_1, z_1\} = \{z_3, z_3\} = 0, \tag{24}$$
$$\{z_1, z_3\} = -\{z_3, z_1\} = \{\Phi^*_{\lambda,w}(z_1), \Phi^*_{\lambda,w}(z_3)\} = \{x^{\mathrm{T}}w, x^{\mathrm{T}}\widehat{w}\} = -w\Gamma^{-1}\widehat{w} = K_{\lambda,w}, \tag{25}$$

где для функций на $\mathbb{R}^{2n}$ скобка Пуассона задается кососимметрической матрицей $-\Gamma$, как для гамильтоновой системы (1). Невырожденная кососимметрическая матрица

$$\Gamma_{\lambda,w} = \begin{pmatrix} 0 & -K^{-1}_{\lambda,w} \\ K^{-1}_{\lambda,w} & 0 \end{pmatrix}$$

задает симплектическую структуру на пространстве $\mathbb{R}\langle e_1, e_3\rangle$ такую, что соответствующие скобки Пуассона (см. разд. 2) будут вычисляться по формулам (24), (25) или, что то же самое, для гладких функций h_1 и h_2 на $\mathbb{R}\langle e_1, e_3\rangle$:

$$\{h_1, h_2\} = K_{\lambda,w}\frac{\partial h_1}{\partial z_1}\frac{\partial h_2}{\partial z_3} - K_{\lambda,w}\frac{\partial h_1}{\partial z_3}\frac{\partial h_2}{\partial z_1}.$$

При этом
$$\{h_1, h_2\} = \{\Phi^*_{\lambda,w}(h_1), \Phi^*_{\lambda,w}(h_2)\}.$$

Напомним, что матричное уравнение, задаваемое парой Лакса (4), эквивалентно системе (20), т. е. системе
$$\begin{cases} \dot z_1 = -i\lambda z_3, \\ \dot z_3 = i\lambda z_1, \end{cases}$$
которая, как легко видеть, эквивалентна системе
$$\Gamma_{\lambda,w}(\dot z_1, \dot z_3)^{\mathrm T} = P_{\lambda,w}(z_1, z_3)^{\mathrm T},$$
где $P_{\lambda,w}$ — скалярная матрица с вещественными числами $i\lambda K^{-1}_{\lambda,w}$ на диагонали. Из разд. 2 сразу получаем, что эта система гамильтонова относительно симплектической формы, задаваемой кососимметрической матрицей $\Gamma_{\lambda,w}$.

Случай 2. Пусть z_1 и z_4 — вещественные координаты на векторах e_1 и ie_3 соответственно. Положим
$$\{z_1, z_1\} = \{z_4, z_4\} = 0,$$
$$\{z_1, z_4\} = \{\Phi^*_{\lambda,w}(z_1), \Phi^*_{\lambda,w}(z_4)\} = \{x^{\mathrm T} w, i^{-1}x^{\mathrm T}\widehat w\} = iw^{\mathrm T}\Gamma^{-1}\widehat w = -iK_{\lambda,w}.$$
Невырожденная кососимметрическая матрица
$$\widetilde\Gamma_{\lambda,w} = \begin{pmatrix} 0 & -iK^{-1}_{\lambda,w} \\ iK^{-1}_{\lambda,w} & 0 \end{pmatrix}$$
задает симплектическую структуру на пространстве $\mathbb R\langle e_1, ie_3\rangle$ так, что для любых двух гладких функций h_1 и h_2 на пространстве $\mathbb R\langle e_1, ie_3\rangle$ выполнено
$$\{h_1, h_2\} = \{\Phi^*_{\lambda,w}(h_1), \Phi^*_{\lambda,w}(h_2)\}.$$
Матричное уравнение, определяемое парой Лакса, эквивалентно системе (20), что в нашем случае переписывается как
$$\begin{cases} \dot z_1 = \lambda z_4, \\ \dot z_4 = \lambda z_1, \end{cases}$$
которая эквивалентна системе
$$\widetilde\Gamma_{\lambda,w}(\dot z_1, \dot z_4)^{\mathrm T} = \widetilde P_{\lambda,w}(z_1, z_4)^{\mathrm T},$$
где $\widetilde P_{\lambda,w}$ — диагональная матрица с вещественными числами $-i\lambda K^{-1}_{\lambda,w}$, $i\lambda K^{-1}_{\lambda,w}$ вдоль диагонали. Последняя система гамильтонова относительно симплектической формы, заданной кососимметрической матрицей $\widetilde\Gamma_{\lambda,w}$.

Случай 3. Пусть z_k — вещественная координата на векторе e_k, где $1 \le k \le 4$. Тогда
$$\Phi^*_{\lambda,w}(z_1) = x^{\mathrm T}w_1, \quad \Phi^*_{\lambda,w}(z_2) = x^{\mathrm T}w_2, \quad \Phi^*_{\lambda,w}(z_3) = x^{\mathrm T}\widehat w_1, \quad \Phi^*_{\lambda,w}(z_4) = x^{\mathrm T}\widehat w_2.$$
Определим скобки Пуассона:
$$\begin{aligned}\{z_1, z_2\} &= -\{z_2, z_1\} = w_1^{\mathrm T}(-\Gamma^{-1})w_2 \\ &= \left(-\frac{w+\overline w}{2}\right)^{\mathrm T}\cdot\Gamma^{-1}\cdot\frac{w-\overline w}{2i} = \frac{i}{4}(w^{\mathrm T}\Gamma^{-1}w - \overline w^{\mathrm T}\Gamma^{-1}\overline w - 2w^{\mathrm T}\Gamma^{-1}\overline w) = 0,\end{aligned}$$

где использовано то, что $w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\overline{w} = 0$ по п. 2 предложения 2.1, так как $\overline{w}$ — собственный вектор матрицы $(P\Gamma^{-1})^2$ с собственным значением $\bar{\lambda}^2$, и $\bar{\lambda}^2 \neq \lambda^2$.

Аналогичными выкладками получается, что $\{z_3, z_4\} = -\{z_4, z_3\} = 0$, так как $\widehat{w}$ и $\overline{\widehat{w}}$ суть собственные векторы матрицы $(P\Gamma^{-1})^2$ с собственными значениями λ^2 и $\bar{\lambda}^2$ соответственно. Вычислим

$$\{z_1, z_3\} = -w_1\Gamma^{-1}\widehat{w}_1 = -\left(\frac{w+\overline{w}}{2}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \Gamma^{-1} \cdot \frac{\widehat{w}+\overline{\widehat{w}}}{2}$$
$$= -\frac{1}{4}(w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w} + \overline{w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w}}) = \frac{1}{4}(K_{\lambda,w} + \overline{K}_{\lambda,w}),$$

где использовано то, что

$$\overline{w}^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w} = 0 = w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\overline{\widehat{w}}$$

вследствие п. 2 предложения 2.1. Аналогично вычисляем

$$\{z_2, z_4\} = -w_2\Gamma^{-1}\widehat{w}_2 = -\left(\frac{w-\overline{w}}{2i}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \Gamma^{-1} \cdot \frac{\widehat{w}-\overline{\widehat{w}}}{2i}$$
$$= \frac{1}{4}(w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w} + \overline{w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w}}) = -\frac{1}{4}(K_{\lambda,w} + \overline{K}_{\lambda,w}) = -\{z_1, z_3\},$$

$$\{z_1, z_4\} = -w_1^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w}_2 = -\left(\frac{w+\overline{w}}{2}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \Gamma^{-1} \cdot \frac{\widehat{w}-\overline{\widehat{w}}}{2i}$$
$$= \frac{i}{4}(w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w} - \overline{w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w}}) = \frac{i}{4}(-K_{\lambda,w} + \overline{K}_{\lambda,w}),$$

$$\{z_2, z_3\} = -w_2^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w}_1 = -\left(\frac{w-\overline{w}}{2i}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \Gamma^{-1} \cdot \frac{\widehat{w}+\overline{\widehat{w}}}{2}$$
$$= \frac{i}{4}(w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w} - \overline{w^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\widehat{w}}) = \frac{i}{4}(-K_{\lambda,w} + \overline{K}_{\lambda,w}).$$

Таким образом, матрица попарных скобок Пуассона между координатными функциями $z_1, \ldots, z_4$ есть следующая вещественная кососимметрическая матрица размера 4×4, которую представим в виде блочной матрицы с блоками размера 2×2:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & R \\ -R & 0 \end{pmatrix},$$

где R — вещественная симметрическая матрица со следом нуль размера 2×2. При этом

$$\det R = \frac{1}{16}(-(K_{\lambda,w} + \overline{K}_{\lambda,w})^2 + (-K_{\lambda,w} + \overline{K}_{\lambda,w})^2)$$
$$= \frac{1}{16}((-2K_{\lambda,w})(2\overline{K}_{\lambda,w})) = -\frac{1}{4}|K_{\lambda,w}|^2 \neq 0.$$

Отметим, что R^{-1} снова симмметрическая со следом нуль матрица. Из проведенных вычислений следует, что кососимметрическая невырожденная матрица

$$Y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -R^{-1} \\ R^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

задает симплектическую структуру на пространстве $\mathbb{R}^4$ так, что отображение $\Phi_{\lambda,w}$ пуассоново по отношению к этой симплектической структуре и симплектической структуре для системы (1) (см. разд. 2), т. е. отображение обратного образа $\Phi^*_{\lambda,w}$ функций сохраняет скобку Пуассона.

Пусть $\lambda = \alpha_1 + i\alpha_2$, где α_1 и α_2 — вещественные числа. Тогда матричное уравнение, задаваемое парой Лакса (4), эквивалентно системе (20), т. е. системе

$$\begin{cases} \dot z_1 + i\dot z_2 = (\alpha_2 - i\alpha_1)(z_3 + iz_4), \\ \dot z_3 + i\dot z_4 = (-\alpha_2 + i\alpha_1)(z_1 + iz_2). \end{cases}$$

Последняя система эквивалентна следующей системе:

$$(\dot z_1, \dot z_2, \dot z_3, \dot z_4)^{\mathrm{T}} = C(z_1, z_2, z_3, z_4)^{\mathrm{T}}, \tag{26}$$

где $C = \begin{pmatrix} 0 & F \\ -F & 0 \end{pmatrix}$ — блочная матрица размера 4×4, $F = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ — (2×2)-матрица. Так как произведение симметрической матрицы со следом нуль размера 2×2 на матрицу F снова симметрическая матрица со следом нуль, матрица $Q = Y^{-1}C$ — симметрическая блочно-диагональная матрица вида

$$Q = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

где M — вещественная симметрическая матрица со следом нуль размера 2×2 и $\det M \neq 0$. Поэтому система (26) эквивалентна системе

$$-Y^{-1}(\dot z_1, \dot z_2, \dot z_3, \dot z_4)^{\mathrm{T}} = -Q(z_1, z_2, z_3, z_4)^{\mathrm{T}}, \tag{27}$$

которая согласно разд. 2 гамильтонова с симплектической структурой, задаваемой кососимметрической матрицей Y^{-1}. $\square$

Из теоремы 5.1 и п. 2 предложения 2.1 получаем

Следствие 5.2. *В условиях теоремы* 5.1 *рассмотрим несколько допустимых пар* (λ_j, w_j), *где* $1 \le j \le l$, *таких, что* $\lambda_{j_1}^2 \neq \lambda_{j_2}^2$ *и* $\lambda_{j_1}^2 \neq \overline{\lambda_{j_2}^2}$ *для любых натуральных чисел* $1 \le j_1 < j_2 \le l$. *Зададим на образе отображения* $\prod\limits_{j=1}^{l} \Phi_{\lambda_j, w_j}$ *блочно-диагональную симплектическую структуру, где каждый блок отвечает симплектической структуре для пары* (λ_j, w_j) *из теоремы* 5.1. *Тогда отображение* $\prod\limits_{j=1}^{l} \Phi_{\lambda_j, w_j}$ *пуассоново.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В. В.* Линейные системы с квадратичным интегралом // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56, № 6. С. 900–906.
2. *Kozlov V. V.* Linear Hamiltonian systems: Quadratic integrals, singular subspaces and stability // Regul. Chaotic Dyn. 2018. V. 23, N 1. P. 26–46.
3. *Аржанцев И. В.* Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений. М.: МЦНМО, 2003.
4. *Cox D. A., Little J., O'Shea D.* Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. New York: Springer-Verl., 1997.
5. *Williamson J.* An algebraic problem involving the involutory integrals of linear dynamical systems // Amer. J. Math. 1940. V. 62. P. 881–911.
6. *Kocak H.* Linear Hamiltonian systems are integrable with quadratics // J. Math. Phys. 1982. V. 23, N 12. P. 2375–2380.

7. *Williamson J.* On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems // Amer. J. Math. 1936. V. 58, N 1. P. 141–163.

8. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.

9. *Жеглов А. Б., Осипов Д. В.* О первых интегралах линейных гамильтоновых систем // Докл. АН. 2018. Т. 483, № 5. С. 486–488.

Поступила в редакцию 11 октября 2018 г.
После доработки 11 октября 2018 г.
Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Жеглов Александр Борисович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
azheglov@mech.math.msu.su

Осипов Денис Васильевич
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8, Москва 119991;
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
лаборатория зеркальной симметрии,
ул. Усачёва, 6, Москва 119048;
Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»,
Ленинский проспект, 4, Москва 119049
d_osipov@mi-ras.ru