С. Б. Вакарчук, О приближении дифференцируемых функций многих переменных, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 37–44

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

О ПРИБЛИЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

С. Б. Вакарчук

Постановка задачи о приближении заданной функции функциями меньшего числа переменных является наиболее общей среди задач аппроксимации функций многих переменных [1—7]. Вопросы приближения функций многих переменных обобщенными полиномами с помощью некоторых линейных процессов приближения рассматривались, например, в работах [1, 6]. Данная заметка посвящена изучению аппроксимаций периодических функций нескольких переменных обобщенными многочленами.

Приведем обозначения и некоторые понятия, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $\Omega_n=\prod_{i=1}^n\Delta$ $(\Delta=[0,2\pi])$ — n-мерный куб; $L_p(\Omega_n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ — множество функций, 2π-периодических по каждой переменной и таких, что

$$\|f\|_p=\left(\int_{\Omega_n}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}<\infty,\qquad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\|f\|_\infty=\operatorname{vrai\,sup}\{|f(x)|:\quad x\in\Omega_n\}<\infty,\ \ p=\infty.$$

Используя символику [1], напомним, что наиболее общей формой представления обобщенных полиномов, линейно зависящих от функций $(n-1)$ переменных, является полином порядка $\overline{M}_n=\{M_1,\ldots,M_n\}$ ранга $(n-1)$

$$F_{\overline{M}_n}^{(n-1)}=\sum_{i=1}^n\sum_{m_i=1}^{M_i}\widetilde{F}_{m_i}^{(i)}(\bar{x}_n-x_i)\,c_{m_i}^{(i)}(x_i),\tag{1}$$

где $\bar{x}_n-x_i=\{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\}$, M_i — целые числа; $\overline{C}_n=\{\{c_{m_i}^{(i)}\ (x_i)\}_{m_i=1}^{M_i}\}_{i=1}^n$ — заданный набор базисных функций, линейно независимых при каждом фиксированном i, т. е. $\forall i\in\mathbf{N}$, $i\leqslant n$, $\{c_{m_i}^{(i)}\}_{m_i=1}^{M_i}$ — базис некоторого подпространства $U_{M_i}^{(i)}$. Здесь предполагается, что $\widetilde{F}_{m_i}^{(i)}(\bar{x}_n-x_i)\in L_p(\Omega_{n-1})$, $c_{m_i}^{(i)}(x_i)\in L_p(\Delta)$ $(i=\overline{1,n};\ m_i=\overline{1,M_i})$. Множество обобщенных полиномов обозначим символом $\mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n}$. Нетрудно показать (см. например, [5, 6]), что $\mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n}$ — замкнутое выпуклое множество.

Введем следующие величины:

$$\mathscr{E}(f; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n})_p = \inf\{\|f - F^{(n-1)}_{\overline{M}_n}\|_p \colon F^{(n-1)}_{\overline{M}_n} \in \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n}\},$$

$$\mathscr{E}(\mathfrak{M}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n})_p = \sup\{\mathscr{E}(f; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n})_p \colon f \in \mathfrak{M}\}.$$

Здесь $\mathscr{E}(f; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n})_p$ характеризует наилучшее приближение фиксированного элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $\mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n}$, а $\mathscr{E}(\mathfrak{M}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n})_p$ — отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $\mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n}$ в нормированном пространстве $L_p(\Omega_n)$.

Используя определение поперечника множества по А. Н. Колмогорову, величину

$$D_{\overline{M}_n}(\mathfrak{M}; L_p(\Omega_n)) = \inf\{\mathscr{E}(\mathfrak{M}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n})_p \colon \{c^{(i)}_{m_i}\}^{M_i}_{m_i=1};\ i = \overline{1, n}\}$$

будем называть $(M_1 + \ldots + M_n)$-мерным квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$.

При решении задач о приближении классов функций многих переменных функциями меньшего числа переменных величины, аналогичные $D_{\overline{M}_n}$ ранее изучались в работах В. Н. Темлякова [2] и М.-Б. А. Бабаева [3]. Однако следует отметить, что для рассмотренных в [2, 3] аппроксимативных характеристик точные оценки не были получены.

Пусть Λ — линейный оператор, действующий на функцию $f \in \mathfrak{M}$, образ которого принадлежит $\mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n}$.

Обозначим

$$e(\mathfrak{M}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n})_p = \inf\{e(\mathfrak{M}; \Lambda)_p \colon \Lambda(f) \in \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n}\},$$

где

$$e(\mathfrak{M}; \Lambda)_p = \sup\{\|f - \Lambda(f)\|_p \colon f \in \mathfrak{M}\}.$$

Величину

$$\overline{D}_{\overline{M}_n}(\mathfrak{M}; L_p(\Omega_n)) = \inf\{e(\mathfrak{M}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n})_p \colon \{c^{(i)}_{m_i}\}^{M_i}_{m_i=1};\ i = \overline{1, n}\}$$

будем называть $(M_1 + \ldots + M_n)$-мерным линейным квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$.

Очевидно, справедливы неравенства

$$e(\mathfrak{M}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n})_p \geqslant \mathscr{E}(\mathfrak{M}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}_n})_p;$$

$$\overline{D}_{\overline{M}_n}(\mathfrak{M}; L_p(\Omega_n)) \geqslant D_{\overline{M}_n}(\mathfrak{M}; L_p(\Omega_n)).$$

В связи с этим определенный интерес представляет отыскание экстремальных наборов базисных функций $\{c^{*(i)}_{m_i}(x_i)\}_{m_i=1}^{M_i}$ $(i=\overline{1,n})$, для которых

$$e(\mathfrak{M};\mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n,\overline{c}^*_n})_p=\mathscr{E}(\mathfrak{M};\mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n,\overline{c}^*_n})_p=$$
$$=\overline{D}_{\overline{M}_n}(\mathfrak{M};L_p(\Omega_n))=D_{\overline{M}_n}(\mathfrak{M};L_p(\Omega_n)).$$

Полагаем $\bar{r}_n=(r_1,\ldots,r_n)$, где $r_k\in\mathbf{N}\,(k=1,n)$; $f^{(r_1,\ldots,r_n)}(x_1,\ldots,x_n)=$ $=\partial^{r_1+\ldots+r_n}f(x_1,\ \ldots,\ x_n)/\partial x_1^{r_1}\ldots\partial x_n^{r_n}$. Если $r_1=r_2=\ldots=$ $=r_n=r$, то будем писать $\bar{r}=\bar{r}_n$. Введем множество $\mathfrak{N}^{\bar{r}_n}(\Omega_n)$ заданных в n-кубе Ω_n 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, у которых частные производные $f^{(i_1,\ldots,i_n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ $(i_k=\overline{0,\ r_{k-1}};\quad k=\overline{1,\ n})$ непрерывны в Ω_n, а производные $f^{(r_1,i_2,\ldots,i_n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $f^{(i_1,r_2,i_3,\ldots,i_n)}(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $\ldots$, $f^{(i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},r_n)}(x_1,\ldots,x_n)$ $(i_k=$ $=\overline{0,\ r_k};\ k=\overline{1,\ n})$ всюду в Ω_n существуют, существенно ограничены и кусочно-непрерывны. При этом смешанные производные допускают перемену порядка дифференцирования. Под $\mathfrak{N}(\Omega_n)$ понимаем множество существенно ограниченных и кусочно-непрерывных функций, т. е. $\mathfrak{N}(\Omega_n)\subset L_\infty(\Omega_n)$. Символом $W^{\bar{r}_n}_{n,q}$ $(q\geqslant 1)$ обозначим класс функций $f\in\mathfrak{N}^{\bar{r}_n}(\Omega_n)$, для которых $\|f^{(r_1,\ldots,r_n)}\|_q\leqslant 1$. В случае функций одного переменного будем писать $W^r_{1,q}$.

Используя общий критерий ближайшего элемента в выпуклом замкнутом множестве (см., например, [8, с. 34]) и тот факт, что любому линейному функционалу $\Phi\in L_p^*(\Omega_n)$ $\quad(1\leqslant p<\infty)$ (L_p^* — пространство, сопряженное с L_p) взаимно однозначно соответствует функция $\psi\in L_{p'}(\Omega_n)$ $(1/p+1/p'=1)$ такая, что для произвольного $f\in L_p(\Omega_n)$

$$\Phi(f)=\int_{\Omega_n}f\cdot\psi\,\mathrm{d}x_1\ \ldots\ \mathrm{d}x_n,\quad \|\Phi\|=\|\psi\|_{p'},$$

приведем вспомогательное

Предложение. *Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое выпуклое множество пространства $L_p(\Omega_n)$ $(1\leqslant p<\infty)$, $f\in L_p(\Omega_n)$. Функция $g\in\mathfrak{M}$ тогда и только тогда удовлетворяет соотношению*

$$\|f-g\|_p=\inf\{\|f-u\|_p\colon u\in\mathfrak{M}\},$$

когда существует функция $\psi\in L_{p'}(\Omega_n)$, для которой выполняются условия: 1) $\|\psi\|_{p'}=1$; 2) $\|f-g\|_p=\int_{\Omega_n}(f-g)\,\psi\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$;

3) $\int_{\Omega_n}g\psi\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\sup\left\{\int_{\Omega_n}u\cdot\psi\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\colon u\in\mathfrak{M}\right\}$.

Если $\mathfrak{M}$ является подпространством пространства $L_p(\Omega_n)$, то условия 2), 3) *заменяются соответственно на* $2')\ \| f - g \|_p = \int_{\Omega_n} f\psi \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$, $3')\ \int_{\Omega_n} u\psi \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = 0 \quad \forall u \in \mathfrak{M}$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть для некоторых p и q ($1 \leqslant p < \infty$; $p \leqslant q$) в одномерном случае существует линейный оператор Λ_i: $L_p(\Delta) \to U^{*(i)}_{M_i}$, который на классе функций $W^{r_i}_{1,q}$ ($r_i \in \mathrm{N}$) дает оценку погрешности приближения, совпадающую с величиной $d_{M_i}(W^{r_i}_{1,q}; L_p(\Delta))$, M_i-мерным поперечником по Колмогорову, и для любой функции $f \in W^{r_i}_{1,q}$ выполняется равенство*

$$f(\tau) - \Lambda_i(f, \tau) = \int_\Delta K_i(\tau, t) f^{(r_i)}(t)\, \mathrm{d}t, \tag{2}$$

где $K_i(\tau, t) \in \mathfrak{R}(\Omega_2)$ $(i = \overline{1, n})$.

Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}^*_n})_p = e(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}^*_n})_p = \\ = \overline{D}_{\overline{M}_n}(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; L_p(\Omega_n)) = D_{\overline{M}_n}(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; L_p(\Omega_n)) = \\ = \prod_{i=1}^n d_{M_i}(W^{r_i}_{1,q}; L_p(\Delta)).\end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Пусть Λ_i $(i = \overline{1, n})$ — линейные операторы, удовлетворяющие условию теоремы и переводящие пространство суммируемых в p-той степени 2π-периодических функций $L_p(\Delta)$ соответственно в подпространства $U^{*(i)}_{M_i}$, порожденные базисами $\{c^{*(i)}_{m_i}(x_i)\}^{M_i}_{m_i=1}$. Полагаем, что каждый из операторов Λ_i действует на $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in W^{\overline{r}_n}_{n,q}$, как на функцию, зависящую только от переменной x_i при фиксированных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Для произвольной функции $f \in W^{\overline{r}_n}_{n,q}$ запишем выражение

$$G^{(n-1)}_{\overline{M}_n}(f; x) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1 \\ (i_1 < i_2 < \ldots < i_k)}}^n (-1)^{k-1} (E^{n-k} \Lambda_{i_1} \Lambda_{i_2} \ldots \Lambda_{i_k}) f,$$

где E — единичный оператор, $(\Lambda B) f$ — произведение операторов Λ и B, $E^m = \underbrace{E \ldots E}_{m}$. Очевидно, что $G^{(n-1)}_{\overline{M}_n}(f; x) \in \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}^*_n}$.

Воспользуемся далее схемой получения оценок погрешности приближения так называемым тензорным произведением одномерных пространств (см., например, [9, с. 324—326]). Учитывая, что операторы Λ_i $(i = \overline{1, n})$, дающие оценку погрешности аппроксимации, совпадающую с величиной колмогоровского поперечника, перестановочны и удовлетворяют (2), запишем

$$D_{\overline{M}_n}(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; L_p(\Omega_n)) \leqslant \mathscr{E}(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}^*_n})_p \leqslant e(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}^*_n})_p \leqslant$$
$$\leqslant e(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; G^{(n-1)}_{\overline{M}_n})_p = \sup\{\|((E-\Lambda_1)(E-\Lambda_2)\ldots$$
$$\ldots(E-\Lambda_n))f\|_p: f \in W^{\overline{r}_n}_{n,q}\} = \prod_{i=1}^{n} d_{M_i}(W^{r_i}_{1,q}; L_p(\Delta)). \quad (4)$$

Аналогичным образом имеем

$$D_{\overline{M}_n}(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; L_p(\Omega_n)) \leqslant \overline{D}_{\overline{M}_n}(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; L_p(\Omega_n)) \leqslant$$
$$\leqslant e(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; \mathscr{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n, \overline{C}^*_p}) \leqslant \prod_{i=1}^{n} d_{M_i}(W^{r_i}_{1,q}; L_p(\Delta)). \quad (5)$$

Чтобы получить оценку снизу величины $D_{\overline{M}_n}(W^{\overline{r}_n}_{n,q}; L_p(\Omega_n))$, рассмотрим множество функций $\widetilde{W}^{\overline{r}_n}_{n,q} \subset W^{\overline{r}_n}_{n,q}$ где

$$\widetilde{W}^{\overline{r}_n}_{n,q} = \left\{f\colon f = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i); \ f_i \in W^{r_i}_{1,q} \quad (i = \overline{1, n})\right\}.$$

Пусть $\tilde{f} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{f}_i$ — произвольная функция из $\widetilde{W}^{\overline{r}_n}_{n,q}$ и $\overline{C}_n$ — произвольная система базисных функций $\{\{c^{(i)}_{m_i}(x_i)\}^{M_i}_{m_i=1}\}^{n}_{i=1}$. В конечномерном подпространстве $U^{(i)}_{M_i}$ для функции $\tilde{f}_i \in W^{r_i}_{1,q}$ существует элемент наилучшего приближения $g_i(x_i) = \sum_{m_i=1}^{M_i} a^{(i)}_{m_i} c^{(i)}_{m_i}(x_i)$ ($a^{(i)}_{m_i}$ — константы) в пространстве $L_p(\Delta)$ (см., например, [8, с. 20]).

В одномерном случае ($n = 1$) в силу условий 1), 2′), 3′) предложения существует функция $\psi_i(x_i) \in L_{p'}(\Delta)$ $(1/p + 1/p' = 1)$, для которой выполнены следующие равенства:

$$\|\psi_i\|_{p'} = 1, \quad \|\tilde{f}_i - g_i\|_p = \int_{\Delta} f_i(t)\psi_i(t)\,\mathrm{d}t, \quad (6)$$

$$\int_{\Delta} u(t)\psi_i(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall u \in U^{(i)}_{M_i}. \quad (7)$$

Полагая $\psi_* = \prod_{i=1}^{n}\psi_i(x_i)$, покажем, что выражение

$$Q^{(n-1)}_{\overline{M}_n}(\tilde{f}; x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1 \\ (i_1 < i_2 < \ldots < i_k)}}^{n} (-1)^{k-1} \tilde{f}_1(x_1)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot\tilde{f}_{i_1-1}(x_{i_1-1})\tilde{f}_{i_1+1}(x_{i_1+1})\cdot\ldots\cdot\tilde{f}_{i_2-1}(x_{i_2-1})\tilde{f}_{i_2+1}(x_{i_2+1})\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot\tilde{f}_{i_k-1}(x_{i_k-1})\tilde{f}_{i_k+1}(x_{i_k+1})\cdot\ldots\cdot\tilde{f}_n(x_n)\,g_{i_1}(x_{i_1})\cdot g_{i_2}(x_{i_2})\cdot\ldots\cdot g_{i_k}(x_{i_k})$$

является обобщенным многочленом наилучшего приближения функции $\tilde{f}$ в метрике пространства $L_p(\Omega_n)$. На основании соотношений (6)—(7) запишем

$$\|\psi_*\|_{p'}=1, \tag{8}$$

$$\int_{\Omega_n}(\tilde{f}-Q^{(n-1)}_{\overline{M}_n}(\tilde{f}))\,\psi_*\,dx_1\ldots dx_n=\prod_{i=1}^{n}\int_{\Delta}(\tilde{f}_i-g_i)\,\psi_i\,dx_i=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\int_{\Delta}\tilde{f}_i\psi_i\,dx_i=\prod_{i=1}^{n}\|\tilde{f}_i-g_i\|_p. \tag{9}$$

Но поскольку

$$\|\tilde{f}-Q^{(n-1)}_{\overline{M}_n}(\tilde{f})\|_p=\prod_{i=1}^{n}\|\tilde{f}_i-g_i\|_p, \tag{10}$$

то из равенств (9)—(10) получаем

$$\|\tilde{f}-Q^{(n-1)}_{\overline{M}_n}(\tilde{f})\|_p=\int_{\Omega_n}(\tilde{f}-Q^{(n-1)}_{\overline{M}_n}(\tilde{f}))\,\psi_*\,dx_1\ldots dx_n. \tag{11}$$

Исходя из представления (1) элементов множества $\mathcal{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n,\overline{C}_n}$ и формулы (7), для произвольного $F^{(n-1)}_{\overline{M}_n}\in\mathcal{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n,\overline{C}_n}$ имеем

$$\int_{\Omega_n}F^{(n-1)}_{\overline{M}_n}\cdot\psi_*\,dx_1\ldots dx_n=0. \tag{12}$$

Учитывая, что $Q^{(n-1)}_{\overline{M}_n}\in\mathcal{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n,\overline{C}_n}$, и сравнивая (8), (11), (12) с приведенными в предложении условиями 1)—3), получаем

$$\mathscr{E}(\tilde{f};\mathcal{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n,\overline{C}_n})_p=\|\tilde{f}-Q^{(n-1)}_{\overline{M}_n}(\tilde{f})\|_p=\prod_{i=1}^{n}E_{M_i}(\tilde{f}_i;\,U^{(i)}_{M_i})_{L_p(\Delta)}, \tag{13}$$

где $E_{M_i}(\tilde{f}_i;\ U^{(i)}_{M_i})_{L_p(\Delta)}$ — величина наилучшего приближения в $L_p(\Delta)$ функции $\tilde{f}_i$ подпространством $U^{(i)}_{M_i}$.

Из формулы (13) следует, что

$$\mathscr{E}(\widetilde{W}^{\overline{r}_n}_{n,q};\mathcal{F}^{(n-1)}_{\overline{M}_n,\overline{C}_n})_p=\prod_{i=1}^{n}E(W^{r_i}_{1,q};U^{(i)}_{M_i})_{L_p(\Delta)}. \tag{14}$$

Здесь

$$E(W^{r_i}_{1,q};U^{(i)}_{M_i})_{L_p(\Delta)}=\sup\{E_{M_i}(\tilde{f}_i;U^{(i)}_{M_i})_{L_p(\Delta)}:\ \tilde{f}_i\in W^{r_i}_{1,q}\}.$$

Используя определение поперечника по Колмогорову и введенное выше понятие колмогоровского квазипоперечника, из (14) получаем

$$D_{\overline{M}_n}(\widetilde{W}^{\overline{r}_n}_{n,q};L_p(\Omega_n))=\prod_{i=1}^{n}d_{M_i}(W^{r_i}_{1,q};L_p(\Delta)). \tag{15}$$

Поскольку

$$D_{\overline{M}_n}(W^{\overline{r}_n}_{n,q};\ L_p(\Omega_n))\geqslant D_{\overline{M}_n}(\widetilde{W}^{\overline{r}_n}_{n,q};\ L_p(\Omega_n)), \tag{16}$$

то формула (3) следует из сопоставления соотношений (4)—(5) и (15)—(16), чем и завершается доказательство теоремы.

Проиллюстрируем применение теоремы в конкретной ситуации, связанной с приближением класса функций $W_{n,\infty}^{\bar{r}_n}$ функциями меньшего числа переменных в пространстве $L_1(\Omega_n)$.

Полагаем $\overline{M}_n^* = \{2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_n\}$, где k_i — натуральные числа. В качестве конечномерных пространств $U_{2k_i}^{*(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ рассмотрим подпространства $S_{2k_i}^{r_i-1}$ 2π-периодических сплайнов порядка $r_i - 1$ и дефекта 1, построенных по разбиениям

$$\Delta_{2k_i}\colon\ \tau_{m_i, r_i-1} = (\pi m_i + (1 + (-1)^{r_i-1})\,\pi/4)/k_i \qquad (m_i = 0, 1, \ldots, 2k_i - 1).$$

Напомним, [9], что базис в подпространстве $S_{2k_i}^{r_i-1}$ образуют 2π-периодические фундаментальные сплайны $l_{m_i}^{(i)}(\tau)$ $(m_i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 2k_i - 1)$ степени $r_i - 1$ дефекта 1, которые удовлетворяют условиям $l_j^{(i)}(\tau_{m_i, r_i-1}) = \delta_{j, m_i}$ $(m_i = 0, 1, \ldots, 2k_i - 1;\ \delta_{j, m_i}$ — символ Кронекера). Оператор Λ_i определим следующим образом: каждой функции $f \in W_{1,\infty}^{r_i}$ сопоставим единственный сплайн $\sigma_{k_i, r_i-1}(f)$ из $S_{2k_i}^{r_i-1}$, интерполирующий f в точках τ_{m_i, r_i-1}, т. е. $\sigma_{k_i, r_i-1}(f; \tau_{m_i, r_i-1}) = f(\tau_{m_i, r_i-1})$ $(m_i = 0, 1, \ldots, 2k_i - 1)$. Сплайн $\sigma_{k_i, r_i-1}(f, \tau)$ может быть записан в виде

$$\sigma_{k_i, r_i-1}(f, \tau) = \sum_{m_i=0}^{2k_i-1} f(\tau_{m_i, r_i-1})\, l_{m_i}^{(i)}(\tau).$$

В [10] получено следующее интегральное представление для функций одной переменной:

$$f(\tau) - \sigma_{k_i, r_i-1}(f, \tau) = \int_\Delta K_{r_i}(\tau, t)\, f^{(r_i)}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{17}$$

где

$$K_{r_i}(\tau, t) = -\frac{1}{\pi}\Big[\mathscr{D}_{r_i}(\tau) - \mathscr{D}_{r_i}(\tau - t) - \\ - \sum_{m_i=0}^{2k_i-1} l_{m_i}^{(i)}(\tau)\,(\mathscr{D}_{r_i}(\tau_{m_i, r_i-1}) - \mathscr{D}_{r_i}(\tau_{m_i, r_i-1} - t))\Big],$$

$\mathscr{D}_r(u)$ — функция Бернулли, определяемая равенствами

$$\mathscr{D}_r(u) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(ku - \frac{\pi r}{2}\right);$$

$$\mathscr{D}_1(u) = (\pi - u)/2 \quad (0 < u < 2\pi); \quad \mathscr{D}_r'(u) = \mathscr{D}_{r-1}(u).$$

Поскольку (см., например, [10])

$$\sup\{\|f - \sigma_{k_i, r_i-1}(f)\|_1 : f \in W_{1,\infty}^{r_i}\} = d_{2k_i}(W_{1,\infty}^{r_i}; L_1(\Delta)) = \\ = 4k_i^{-r_i}\cdot \mathscr{K}_{r_i+1}, \tag{18}$$

где $\mathcal{K}_r = (4/\pi) \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-(r+1)} \cdot (-1)^{k(r+1)}$ — константа Фавара $(1 = \mathcal{K}_0 < \mathcal{K}_2 < \mathcal{K}_4 < \ldots < 4\pi < \ldots < \mathcal{K}_3 < \mathcal{K}_1 = \pi/2)$, то в силу (17)—(18) получаем, что условия теоремы выполнены. Следовательно,

$$\mathcal{E}\,(W^{\bar{r}n}_{n,\infty};\, \mathcal{F}^{(n-1)}_{\overline{M}^*_n,\, \bar{C}^*_n})_1 = e\,(W^{\bar{r}n}_{n,\infty};\, \mathcal{F}^{(n-1)}_{\overline{M}^*_n,\, \bar{C}^*_n})_1 = \bar{D}_{\overline{M}^*_n}\,(W^{\bar{r}n}_{n,\infty};\, L_1(\Omega_n)) =$$

$$= D_{\overline{M}^*_n}\,(W^{\bar{r}n}_{n,\infty};\, L_1(\Omega_n)) =$$

$$= 4^n \prod_{i=1}^{n} k_i^{-r_i} \cdot \mathcal{K}_{r_i+1} \qquad (k_i, r_i = 1, 2, \ldots);$$

здесь $\bar{C}_n = \{\{l^{(i)}_{m_i}(x_i)\}^{2k_i-1}_{m_i=0}\}^{n}_{i=1}$.

Таким образом, доказанная теорема позволяет в определенном смысле перенести некоторые окончательные результаты, полученные для функций одного переменного, на n-мерный случай.

Институт геотехнической
механики АН УССР

Поступило
20.03.87
Переработанный вариант
30.03.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вайндинер А. Н. Приближение непрерывных и дифференцируемых функций многих переменных обобщенными полиномами (конечной линейной суперпозицией функций меньшего числа переменных) // ДАН СССР. 1970. Т. 192, № 3. С. 483—486.
[2] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. Т. 178. М.: Наука, 1986. С. 3—112.
[3] Бабаев М.-Б. А. Приближение соболевских классов функций суммами произведений меньшего числа переменных // Тр. МИАН. Т. 180. М.: Наука, 1987. С. 30—32.
[4] Потапов М. К. Изучение некоторых классов функций при помощи приближения «углом» // Тр. МИАН. Т. 117. М.: Наука, 1972. С. 256—291.
[5] Respess J., Cheney E. W. Best Approximation problems in tensor-product space // Pacif. J. Math. 1982. V. 102, N 2. P. 437—446.
[6] Cheney E. W. Best approximation in tensor-product space // Lect. Notes Math. 1980. V. 773. P. 25—32.
[7] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
[8] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
[9] Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984.
[10] Korneicuk N. P. Exact error bound of approximation by interpolating splines in L-metric on the classes W^r_p $(1 \leqslant p < \infty)$ of periodic functions // Anal. Math. 1977. V. 3, N 2. P. 109—117.