A. Kronrod, On permutation of terms of numerical series, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 1946, Volume 60, Number 2, 237–280

https://www.mathnet.ru/eng/sm6276

1946 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 18 (60), N. 2
RECUEIL MATHÉMATIQUE

О перестановках членов числовых рядов

А. С. Кронрод (Москва)

Настоящая работа* возникла из решения следующей задачи, поставленной М. А. Крейнесом: Если перестановка P переводит сходящийся числовой ряд α в ряд сходящийся, но к другому числу, то всегда ли найдется сходящийся ряд β, который перестановка P переводит в расходящийся?

§ 1. Классификация перестановок

Перестановку P членов бесконечного ряда, вызываемую подстановкой $\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_k & , \ldots \\ a_{n_1}, & a_{n_2}, & \ldots, & a_{n_k} & , \ldots \end{pmatrix}$ его членов, назовем нейтральной перестановкой, если:

каков бы ни был сходящийся числовой ряд

$$\alpha \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ с конечной суммой } A, \text{ ряд}$$

$$P\alpha \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \text{ сходится и } \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = A; \tag{1.1}$$

каков бы ни был расходящийся числовой ряд

$$\beta \equiv \sum_{i=1}^{\infty} b_i, \text{ ряд}$$

$$P\beta \equiv \sum_{i=1}^{\infty} b_{n_i} \text{ расходится.} \tag{1.2}$$

Пусть теперь перестановка P такова, что не выполнена первая часть условия (1.1), т. е. существует числовой сходящийся ряд α такой, что ряд $P\alpha$ расходится. Назовем в этом случае перестановку P левой перестановкой.

Пусть, далее, перестановка R такова, что не выполнено условие (1.2), т. е. существует расходящийся числовой ряд β такой, что ряд $P\beta$ сходится. В этом случае перестановку мы назовем правой перестановкой.

Левую перестановку, не являющуюся правой, мы назовем левой односторонней перестановкой. Соответственно правую перестановку, не являющуюся левой, мы назовем правой односторон-

* За ценные советы при оформлении настоящей работы приношу глубокую благодарность Д. Е. Меньшову.

ней перестановкой. Перестановку, являющуюся и левой и правой одновременно, назовем **двусторонней** перестановкой.

Пусть теперь перестановка P такова, что не выполнена вторая часть условия (1.1), т. е. существует такой сходящийся числовой ряд α с суммой A, что ряд $P\alpha$ сходится, но сумма его не равна A. В этом случае перестановку P мы назовем **существенной** перестановкой.

Легко видеть, что если перестановка P — левая, то перестановка P^{-1} — правая. Если P — односторонняя перестановка, то и P^{-1} — односторонняя. Если, наконец, P — существенная перестановка, то и P^{-1} — существенная.

Пусть P — некоторая перестановка. Определим для каждого натурального N целочисленные функции $\overline{\Lambda}_p(N)$, $\underline{\Lambda}_p(N)$ и $\Lambda_p(N)$.

Пусть $l_1 < l_2 < \ldots < l_r \leqslant N$ — все натуральные числа такие, что

$$P(l_i) > N.$$

Тогда совокупность натуральных чисел $l_1, l_2, \ldots, l_r$ распадается на некоторое число не пересекающихся и не касающихся отрезков натурального ряда. Положим $\underline{\Lambda}_P(N)$ равным числу этих отрезков.

Пусть, далее, $N < m_1 < m_2 < \ldots < m_s$ — все натуральные числа, такие, что

$$P(m_i) \leqslant N.$$

Положим $\Lambda(N)$ равным числу непересекающихся и не касающихся отрезков натурального ряда, на которые распадается совокупность чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$.

Функцию $\Lambda_P(N)$ положим равной

$$\Lambda_P(N) = \underline{\Lambda}_P(N) + \overline{\Lambda}_P(N). \tag{1.3}$$

Таким образом, $\Lambda_P(N)$ — целочисленная неотрицательная функция, определенная для любой перестановки P и любого натурального N.

Будем в дальнейшем через $\sum^{M}\alpha$ обозначать M-ю частную сумму ряда α, через $\sum_{M}^{N}\alpha$ — разность $\sum^{N}\alpha - \sum^{M}\alpha$ при $M < N$.

Теорема 1. *Для того чтобы перестановка P была левой, необходимо и достаточно условие:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\Lambda_P(n) = \infty. \tag{1.4}$$

Доказательство необходимости. Пусть при любом натуральном n имеет место

$$\Lambda_P(n) < K,$$

где $K > 1$ — некоторое постоянное число. Пусть, далее, $\varepsilon > 0$ — произвольно и α — сходящийся ряд, причем

$$\sum^{\infty}\alpha = A.$$

Покажем, что найдется такое N, для которого

$$\left|\sum^{M} P\alpha - A\right| < \varepsilon \text{ при } M > N. \tag{1.5}$$

Этим будет доказана необходимость условия (1.4).

Так как ряд α сходится, то найдется такое N_1, что при $M_2 \geqslant M_1 \geqslant N_1$

$$\left|\sum_{M_1}^{M_2} \alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2K}. \tag{1.6}$$

Пусть теперь $N > N_1$ таково, что при $k \leqslant N_1$

$$P(k) < N. \tag{1.7}$$

Покажем, что неравенство (1.5) удовлетворяется. Пусть $M > N$. Оценим разность

$$\sum^{M} P\alpha - \sum^{M} \alpha.$$

Эта разность равна сумме всех членов ряда α с номерами, большими M, получающими после перестановки P номера, меньшие или равные M (или, как мы будем говорить, перебрасываемыми перестановкой P через M-е место справа налево), минус сумма всех членов с номерами, меньшими или равными M, получающими после перестановки P номера, большие M (или, как мы будем, говорить, перебрасываемыми перестановкой P через M-е место слева направо). Номера как тех, так и других членов составляют не более K не пересекающихся и не касающихся отрезков натурального ряда (или, как мы будем говорить, соответствующие члены образуют не более K отрезков), а сумма членов, составляющих отрезок с номером первого члена, большим N_1 (что выполнено в силу (1.7) для членов, перебрасываемых через M направо, и в силу $M > N > N_1$ для членов, перебрасываемых через M налево), согласно условию (1.6) не превосходит $\frac{\varepsilon}{2K}$. Таким образом, если учесть, что число указанных отрезков меньше K, получим

$$\left|\sum^{M} P\alpha - \sum^{M} \alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.8}$$

В силу (1.6) из сходимости ряда α к A следует

$$\left|\sum^{M} \alpha - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Из неравенств (1.8) и (1.9) вытекает неравенство (1.5) и, следовательно, необходимость условия (1.4) доказана.

Доказательство достаточности. Пусть задана перестановка P, удовлетворяющая условию (1.4). Определим натуральные N_k и M_k при любом натуральном k. N_1 выберем так, чтобы

$$\Lambda_P(N_1) \geqslant 1 + 2.$$

Пусть уже выбраны $N_1, \ldots, N_{k-1}$. Тогда выберем M_k столь большим, чтобы

$$P(r) < M_k \quad \text{при} \quad r \leqslant N_{k-1}$$

и

$$P(r) > N_{k-1} \quad \text{при } r \geqslant M_k.$$

Далее, выберем $N_k > M_k$ так, чтобы

$$\Delta_P(N_k) \geqslant k+2,$$
$$P(r) < N_k \quad \text{при} \quad r \leqslant M_k,$$
$$P(r) > M_k \quad \text{при} \quad r \geqslant N_k,$$

что всегда возможно в силу условия (1.4).

Построим теперь ряд α. Для этого рассмотрим члены, перебрасывающиеся через N_k. Они образуют не менее $k+2$ отрезков; следовательно, число отрезков, заключенных между отрезками, перебрасываемыми через N_k направо, плюс число отрезков, заключенных между отрезками, перебрасываемыми через N_k налево, не меньше k. Положим первый член каждого из таких «промежуточных» отрезков, стоящих слева от N_k, равным $\frac{1}{k}$, а ему предшествующий член равным $-\frac{1}{k}$. Наоборот, для членов, стоящих справа от N_k, положим первый член каждого «промежуточного» отрезка равным $-\frac{1}{k}$, а ему предшествующий член равным $\frac{1}{k}$. Остальные члены положими равным нулю.

Очевидно, построенный нами ряд α сходится к нулю.

Рассмотрим теперь ряд $P\alpha$. Имеем

$$\sum^{M_k} P\alpha \leqslant 0,$$

а

$$\sum^{N_k} P\alpha \geqslant 1$$

при любом k. Следовательно, ряд $P\alpha$ расходится, т. е. перестановка P — левая, что и требовалось доказать.

Заметив, что перестановка P — правая тогда и только тогда, когда P^{-1} — левая перестановка, получаем необходимое и достаточное условие того, чтобы перестановка была правой.

Определим целочисленные неотрицательные функции $\overline{\Pi}_P(N), \underline{\Pi}_P(N)$ и $\Pi_P(N)$, положив

$$\overline{\Pi}_P(N) = \underline{\Delta}_P^{-1}(N) \qquad \underline{\Pi}_P(N) = \overline{\Delta}_P^{-1}(N),$$
$$\Pi_P(N) = \underline{\Pi}_P(N) + \overline{\Pi}_P(N) = \Delta_P^{-1}(N).$$

Таким образом, $\Pi_P(N)$ есть число отрезков, на которые распадаются после перестановки P члены, перебрасываемые перестановкой P через N-е место. Оказывается справедливой

Теорема 2. *Для того чтобы перестановка P была правой, необходимо и достаточно условие:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Pi_P(n) = \infty. \tag{1.10}$$

Из доказательства необходимости условия (1.4) следует, что, коль скоро условие (1.4) не выполнено, перестановка переводит любой сходящийся ряд в ряд, сходящийся к той же сумме. Следовательно, если перестановка существенна, она удовлетворяет условию (1.4), откуда в силу достаточности условия (1.4) следует:

Всякая существенная перестановка является левой.

Но перестановка, обратная существенной, также существенна. Следовательно,

Всякая существенная перестановка является правой (как обратная к левой), Таким образом, доказана

Теорема 3. *Всякая существенная перестановка является двусторонней.*

Построим теперь правую одностороннюю перестановку.

Задаем натуральное L_0 произвольно и полагаем при $0 < m \leqslant L_0$

$$\begin{aligned} &P(m) = L_0 + 2m, \\ &P(L_0 + m) = m, \\ &P(2L_0 + m) = L_0 + 2m - 1. \end{aligned}$$

Пусть $L_1 = 3L_0$ и пусть уже заданы $L_1, \ldots, L_k$, так что перестановка P определена для членов с номерами до L_k. Полагаем $L_{k+1} = 4L_k$. На отрезке (L_k, L_{k+1}) * определяем перестановку P, положив при $0 < m \leqslant L_k$

$$\begin{aligned} &P(L_k + m) = 2L_k + 2m, \\ &P(2L_k + m) = L_k + m, \\ &P(3L_k + m) = 2L_k + 2m - 1. \end{aligned}$$

Построенная перестановка P — правая, так как при любом k

$$\underline{\Pi}_P(2L_k) = L_k$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \underline{\Pi}_P(n) = \infty.$$

Перестановка P — не левая, так как через любое место перестановка P перебрасывает как слева направо, так и справа налево члены, стоящие подряд, и, следовательно,

$$\underline{\Delta}_P(n) \leqslant 1 \text{ и } \overline{\Delta}_P(n) \leqslant 1,$$

т, е.

$$\Delta_P(n) \leqslant 2$$

при любом n, что и требовалось доказать.

Построим теперь двустороннюю несущественную перестановку. Для этого зададим последовательность натуральных $L_0, L_1, \ldots, L_k, \ldots$ так же, как в предыдущем примере, и обозначим через P построенную там правую одностороннюю перестановку.

Строим теперь перестановку R: между 0 и L_0 и между L_{2n} и L_{2n+1} $(n = 0, 1, \ldots)$ полагаем R совпадающей с P; между L_{2n-1} и L_{2n} $(n = 1, 2, \ldots)$ полагаем перестановку R совпадающей с P^{-1}.

---

* Через (L, M) обозначаем отрезок натурального ряда от L до M, включая M и не включая L.

Очевидно,

$$\Lambda_R(2L_{2k+1}) > L_{2k+1} \text{ и } \Pi_R(2L_{2k}) > L_{2k},$$

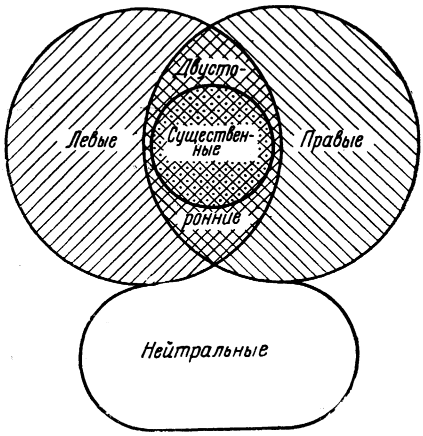
т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Lambda_R(n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Pi_R(n) = \infty$$

и, следовательно, в силу теорем 1 и 2 перестановка R двусторонняя.

С другой стороны, у любого ряда перестановка R не меняет его L_k-е частные суммы. Следовательно, R — несущественная перестановка.

Итак, структура множества перестановок выражается следующей схемой:



Теорема 4. *Произведение двух нелевых (неправых) перестановок есть нелевая (неправая) перестановка.*

Действительно, каков бы ни был сходящийся ряд, нелевая перестановка переводит его в ряд, сходящийся к той же сумме. Следовательно, и вторая нелевая перестановка не может изменить ни сходимости, ни суммы этого ряда.

Переходя к обратным перестановкам, получаем доказательство для случая неправых перестановок.

Теорема 5. *Всякая перестановка P может быть представлена как произведение $P = P_1P_2$, где P_2 — неправая, а P_1 — несущественная перестановки.*

Пусть P — произвольная перестановка. Строим перестановку P_2 следующим образом: полагаем $N_0 = 0$, N_1 выбираем произвольно и обозначаем через $r_1^{(1)} < r_2^{(1)} < \cdots < r_{s_1}^{(1)}$ номера таких членов, для которых

$$P(r_j^{(1)}) \leqslant N_1.$$

Очевидно, $s_1 = N_1$. Полагаем

$$P_2(r_j^{(1)}) = j.$$

Таким образом, перестановка P_2 определена для всех членов, переводимых перестановкой P на отрезок $(0, N_1)$.

Пусть теперь перестановка P_2 определена для всех членов, переводимых перестановкой P на отрезок $(0, N_k)$. Тогда выбираем N_{k+1} так, чтобы

$$P(n) < N_{k+1} \text{ при } n \leqslant N_k$$

и

$$n < N_{k+1} \text{ при } P(n) \leqslant N_k.$$

Обозначим через $r_3^{(r+1)} < r_2^{(k+1)} < \cdots < r_{s_{k+1}}^{(k+1)}$ номера таких членов, для которых

$$N_k < P(r_j^{(k+1)}) \leqslant N_{k+1}.$$

Очевидно $s_{k+1} = N_{k+1} - N_k$. Полагаем

$$P_2(r_j^{(k+1)}) = N_k + j.$$

Итак, перестановка P_2 полностью определена.

Покажем, что P_2 — неправая перестановка. Пусть

$$N_k < N \leqslant N_{k+1}.$$

Оценим $\Pi_{P_2}(N)$. По построению перестановки P_2 через N перебрасываются лишь члены с индексами a, для которых $P(a)$ лежат на отрезке (N_{k+1}, N_{k+2}). Члены, перебрасываемые через N направо, образуют после перестановки P_2 максимум два отрезка. То же имеет место для членов, перебрасываемых через N налево. Таким образом,

$$\Pi_{P_2}(N) \leqslant 4,$$

т. е. перестановка P_2 действительно направая. Остается определить перестановку P_1.

Пусть $P(l) = m$ и $P_2(l) = n$. Полагаем $P_1(n) = m$. Тогда $P = P_1 P_2$. Покажем, что перестановка P_1 несущественна. Действительно, перестановка P_1 не перебрасывает через N-е место ни одного члена, а лишь меняет порядок членов внутри отрезков (N_k, N_{k+1}). Следовательно, N_k-е частные суммы не меняются перестановкой P_1, т. е. перестановка P_1 несущественна. Теорема 5 доказана. Из нее следует, в частности, в силу теоремы 3, что и существенную, т. е. меняющую сумму некоторого сходящегося ряда перестановку можно представить как последовательность двух перестановок, первая из которых превращает этот ряд в расходящийся, а вторая переводит его обратно в сходящийся, но уже к другой сумме.

Из теоремы 5 вытекают два следствия.

Следствие 1. *Всякий условно сходящийся ряд может быть переведен в расходящийся односторонней левой перестановкой.*

Следствие 2. *Всякая перестановка P может быть представлена как произведение $P = P_1 P_2$, где P_2 — несущественная, а P_1 — нелевая перестановки.*

Доказательство. Перестановка P^{-1} по теореме 5 может быть представлена произведением

$$P^{-1} = P_1^* P_2^*,$$

где P_2^* — неправая, а P_1^* — несущественная перестановки. Отсюда получаем

$$P = (P^{-1})^{-1} = P_2^{*-1} P_1^{*-1},$$

где P_1^{*-1} — несущественная, а P_2^{*-1} — нелевая (как обратная к неправой) перестановки. Положив

$$P_1 = P_2^{*-1} \text{ и } P_2 = P_1^{*-1},$$

получаем искомое представление перестановки P.

Теорема 6. *Пусть α — сходящийся ряд и P — такая перестановка, что*

$$\varliminf_{n\to\infty} \min\left[\Lambda_P(n), \Pi_P(n)\right] \neq \infty. \tag{1.11}$$

Тогда, если ряд $P\alpha$ сходится, то к той же сумме, что и ряд α.

Доказательство. Из (1.11) следует либо

$$\varliminf_{n\to\infty} \Lambda_P(n) \neq \infty, \tag{1.12}$$

либо

$$\varliminf_{n\to\infty} \Pi_P(n) \neq \infty. \tag{1.13}$$

Пусть для определенности выполняется (1.12) и, вопреки нашему утверждению, ряды α и $P\alpha$ сходятся соответственно к S и S_1, причем $S \neq S_1$. В силу сходимости ряда α, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$\left|\sum_L^M \alpha\right| < \varepsilon \quad \text{при } M > L \geqslant N. \tag{1.14}$$

В силу (1.12) найдется такое натуральное T и такая последовательность натуральных $K_1 < K_2 < \ldots$, что

$$\Lambda_P(K_i) < T \text{ при любом } i. \tag{1.15}$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{|S - S_1|}{2(T+1)} \tag{1.16}$$

и найдем N, соответствующее этому значению ε в неравенстве (1.14); тогда при $M > N$

$$\left|\sum^M \alpha - S\right| \leqslant \varepsilon. \tag{1.17}$$

Выберем $N_1 > N$ так, чтобы

$$P(r) < N_1 \text{ при } r \leqslant N \tag{1.18}$$

и оценим разность

$$\left|\sum^{K_i} P\alpha - S\right| \text{ при } K_i > N_1.$$

Разность

$$\sum^{K_i} P\alpha - \sum^{K_i} \alpha$$

складывается в силу (1.15) из членов, образующих до перестановки P менее T отрезков. Согласно (1.14) и (1.18) абсолютная величина суммы членов для каждого из этих отрезков не превышает ε, где ε

определяется из (1.16). Отсюда

$$\left|\sum^{K_i} P\alpha - S\right| \leqslant \left|\sum^{K_i} P\alpha - \sum^{K_i} \alpha\right| + \left|\sum^{K_i} \alpha - S\right| <$$

$$< T\varepsilon + \varepsilon = \frac{(T+1)\,|S-S_1|}{2\,(T+1)} = \frac{|S-S_1|}{2}. \tag{1.19}$$

Из (1.19) следует, что

$$\left|\sum^{K_i} P\alpha - S_1\right| > \frac{|S-S_1|}{2}$$

для всех достаточно больших i, т. е. S_1 не есть сумма ряда $P\alpha$.

Таким образом, для случая (1.12) наша теорема доказана.

Пусть теперь имеет место условие (1.13). Тогда для перестановки P^{-1} выполнено (1.12). По доказанному перестановка P^{-1} несущественна, а потому несущественна и обратная ей перестановка P.

Теорема 6 полностью доказана.

Следствие. *Невыполнение условия* (1.11) *есть необходимое условие существенности перестановки* P.

Докажем теперь вспомогательную лемму.

Вспомогательная лемма. *Пусть для перестановки* P

$$\Lambda_P(n) < T \text{ при любом } n, \tag{1.20}$$

где T — *некоторое натуральное число. Тогда члены, образующие после перестановки* P *любой произвольный отрезок* (L, M), *до перестановки составляют не более* $6T$ *отрезков.*

Действительно, члены, образующие после перестановки P отрезок (L, M), распадаются на 3 класса: 1) члены, перебрасываемые перестановкой P на отрезок (L, M) через L направо, 2) члены, перебрасываемые перестановкой P на отрезок (L, M) через M налево и 3) члены отрезка (L, M), остающиеся после перестановки P на этом же отрезке.

Все члены, перебрасываемые перестановкой P через L направо, образуют согласно (1.20) до перестановки P менее T отрезков. Из этих отрезков вычитается не более T отрезков, образованных членами, перебрасываемыми перестановкой P через M направо. Геометрическая разность T_1 и T_2 отрезков составляет не более $T_1 + T_2$ отрезков, так как вычитание одного отрезка из системы отрезков увеличивает число отрезков системы не более чем на 1. Таким образом, число отрезков, на которые распадаются члены, перебрасываемые перестановкой P на отрезок (L, M) через L направо, меньше $2T$.

По аналогии заключаем, что число отрезков, на которые распадаются до перестановки P члены, перебрасываемые перестановкой P на отрезок (L, M) через M налево, также меньше $2T$.

Далее, члены отрезка (L, M), перебрасываемые через L налево, составляют до перестановки менее T отрезков, так как вообще все члены, перебрасываемые через L налево, образуют до перестановки P менее T отрезков.

Аналогично менее T отрезков образуют до перестановки члены отрезка (L, M), перебрасываемые через M направо. Следовательно, общее число отрезков, на которые распадаются до перестановки члены отрезка (L, M), лежащие после перестановки вне (L, M), не превышает $2T-2$. Отсюда следует, что число отрезков, образуемых до перестановки P членами, лежащими как до, так и после перестановки P на отрезке (L, M), не превосходит $2T-2+1<2T$.

Суммируя оценки чисел отрезков, на которые распадаются до перестановки P члены каждого из трех указанных классов, составляющие после перестановки P отрезок (L, M), получаем, что суммарное число этих отрезков меньше $6T$. Вспомогательная лемма доказана.

Лемма 1. *Пусть перестановка P удовлетворяет требованию* (1.12) *и пусть P^* — нейтральная перестановка. Тогда перестановка PP^* удовлетворяет требованию* (1.12).

В силу (1.12) найдется такое натуральное U и такая последовательность натуральных $K_1 < K_2 < \ldots$, что

$$\Delta_P(K_i) < U. \tag{1.21}$$

Так как перестановка P^* нейтральна, то найдется такое натуральное T, что при любом n

$$\Delta_{P^*}(n) < T \tag{1.22}$$

и

$$\Pi_{P^*}(n) < T. \tag{1.23}$$

Члены, перебрасываемые перестановкой PP^* через K_i направо, состоят из членов, перебрасываемых перестановкой P^* через K_i направо, минус те из них, которые перебрасываются перестановкой P обратно через K_i налево, плюс члены, перебрасываемые перестановкой P через K_i направо, минус те из них, которые были переброшены перестановкой P^* через K_i налево.

Члены, перебрасываемые перестановкой P^* через K_i направо, составляют после перестановки P^* согласно (1.23) не более T отрезков. Члены, перебрасываемые через K_i перестановкой P налево, образуют согласно (1.21) до перестановки P менее U отрезков. Следовательно, члены, переброшенные через K_i перестановкой P^* направо и не перебрасываемые перестановкой P обратно налево, составляют после перестановки P^* систему σ, содержащую не более чем $T+U$ отрезков (так как геометрическая разность T и U отрезков состоит не более чем из $T+U$ отрезков).

Согласно вспомогательной лемме члены, образующие после перестановки P^*, подчиненной требованию (1.22), произвольный отрезок, составляют до перестановки P^* не более $6T$ отрезков. А так как всех отрезков в системе σ не более $T+U$, число отрезков, на которые распадаются члены отрезков системы σ до перестановки P^*, не превышает $6T(T+U)$.

Далее, члены, перебрасываемые через K_i направо перестановкой P, образуют до перестановки P согласно (1.21) систему σ_1, содержащую меньше чем U отрезков. Согласно вспомогательной лемме члены, образующие после перестановки P^* отрезки системы σ_1, распадаются до перестановки P^* не более чем на $6T \cdot U$ отрезков.

Обозначим через σ_2 систему отрезков, полученную от вычитания из этих не более чем $6TU$ отрезков полупрямой $(K_i, +\infty)$. Число отрезков σ_2 также, очевидно, не превышает $6TU$. Отрезки системы σ_2 и будут как раз состоять из всех членов, лежащих как до, так и после перестановки P^* левее K_i и перебрасываемых перестановкой P через K_i направо.

Суммируя полученные оценки чисел отрезков систем σ и σ_2, находим для $\underline{\Delta}_{PP^*}(K_i)$ оценку

$$\underline{\Delta}_{PP^*}(K_i) \leqslant 6T(T+U)+6TU = 6T(T+2U) \tag{1.24}$$

и аналогично для $\overline{\Delta}_{PP^*}(K_i)$

$$\overline{\Delta}_{PP^*}(K_i) \leqslant 6T(T+2U). \tag{1.25}$$

Из (1.24) и (1.25) следует

$$\Delta_{PP^*}(K_i) \leqslant 12T(T+2U),$$

что эквивалентно требованию (1.12). Лемма 1 доказана.

§ 2. Применение перестановок к рядам с действительными членами

В этом параграфе рассматриваются лишь ряды с действительными членами.

Пусть ряд α таков, что для любого K найдется такое натуральное N_k и такое $W > 0$, что

$$\sum^{T>N_k} \alpha > K \tag{2.1}$$

и

$$\sum_{L}^{M} \alpha > -W \text{ при любых } L \text{ и } M > L. \tag{2.2}$$

Такой ряд α мы назовем с х о д я щ и м с я к $+\infty$, что несколько расходится с обычной терминологией. Если условия (2.1) и (2.2) выполняются с обратными знаками, мы назовем ряд α с х о д я щ и м с я к $-\infty$. В отношении односторонних перестановок ряд, сходящийся к $\pm\infty$, ведет себя как обычный сходящийся ряд, т. е. имеет место

Т е о р е м а 7. *Правая односторонняя перестановка переводит ряд, сходящийся* к $+\infty$ $(-\infty)$, *в ряд, также сходящийся* к $+\infty$ (*соответственно к* $-\infty$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P — односторонняя правая перестановка и, следовательно, найдется такое натуральное S, что

$$\Delta_P(n) < S \text{ при любом } n. \tag{2.3}$$

Пусть, далее, α — ряд, для которого выполнены условия (2.1) и (2.2). Покажем, что ряд $P\alpha$ тоже сходится к $+\infty$. Пусть $K > 0$ — произвольно. Выберем $N_1(K)$ и $N_2(K)$ столь большими, чтобы

$$\sum^{T\geqslant N_1(K)} \alpha > K+SW \tag{2.4}$$

и

$$P(r) < N_2(K) \quad \text{при} \quad r \leqslant N_1(K). \tag{2.5}$$

Пусть теперь задано произвольное $M > N_2(K)$. Оценим $\sum^M P\alpha$. Пусть $p+1$ — номер первого члена, перебрасываемого перестановкой P через M направо, а если таковых нет, то положим $p=M$. Из (2.5) и (2.4) следует

$$\sum^{p} \alpha > K+SW. \tag{2.6}$$

После переброски перестановкой P нескольких отрезков через M слева направо между p и M остается столько же или на один меньше «промежуточных» отрезков, члены которых входят в $\sum^M P\alpha$. Пусть $\Delta_P(M) = d$. Тогда отрицательный привнос в $\sum^M P\alpha$ членов оставшихся «промежуточных» отрезков, в силу (2.2), не превышает по абсолютной величине dW. Сумма $\sum^M P\alpha$ складывается из $\sum^M \alpha$, уже оцененного привноса членов «промежуточных» отрезков и привноса членов, перебрасываемых перестановкой P через M справа налево. Но число отрезков, составленных из этих последних членов, не превышает $S-d$, а сумма членов по каждому из отрезков согласно (2.2) не меньше $-W$. Отсюда следует, что общий отрицательный привнос членов по оставшимся промежуточным отрезкам и по отрезкам, перебрасываемым через M налево, не превышает по абсолютной величине SW. Учитывая (2.6), получаем окончательно

$$\sum^{M} P\alpha \geqslant \sum^{p} \alpha - SW > K,$$

чем доказано выполнение (2.1) для ряда $P\alpha$. Остается доказать выполнение условия (2.2). Для этого достаточно заменить в условии (2.2) число $W>0$ для ряда α числом $6SW$ для ряда $P\alpha$. Действительно, $\sum_L^{M>L} P\alpha$ складывается, согласно вспомогательной лемме и условию (2.3), из членов, образующих до перестановки P не более $6S$ отрезков. Отсюда, учитывая (2.2), получаем для $\sum_L^M P\alpha$ оценку

$$\sum_L^M P\alpha > -6SW.$$

Таким образом, условие (2.2) также выполняется для ряда $P\alpha$, и теорема 7 полностью доказана.

Докажем теорему, обобщающую теорему 6 на случай рядов с действительными членами, сходящихся* к $\pm\infty$.

Теорема 6а. *Пусть α — сходящийся ряд с действительными членами, причем* $\sum\limits^{\infty}\alpha=\pm\infty$. *Пусть P — такая перестановка, что*

$$\varliminf_{n\to\infty}\min\left[\Delta_P(n),\Pi_P(n)\right]\neq\infty. \tag{2.7}$$

Тогда, если ряд $P\alpha$ сходится, то к той же сумме, что и ряд α.

Доказательство. Из (2.7) следует либо

$$\varliminf_{n\to\infty}\Delta_P(n)\neq\infty; \tag{2.8}$$

либо

$$\varliminf_{n\to\infty}\Pi_P(n)\neq\infty. \tag{2.9}$$

Пусть для определенности выполняется (2.8), $\sum\limits^{\infty}\alpha=+\infty$ и ряд $P\alpha$, вопреки нашему утверждению, сходится к $S_1\neq+\infty$. В силу (2.8) найдется такое конечное T и такая последовательность натуральных $K_1<K_2<\ldots$, что

$$\Delta_P(K_i)<T \quad \text{при любом } i. \tag{2.10}$$

Пусть N таково, что

$$\sum^{N}\alpha>S_1^*+2TW+1, \tag{2.11}$$

где W определяется условием (2.2), $S_1^*=|S_1|$ при конечном S_1 и $S_1^*=0$ при $S_1=-\infty$. Выберем, далее, N_1 так, чтобы

$$P(r)<N_1 \quad \text{при } r\leqslant N. \tag{2.12}$$

При $K_i>N_1$ разность

$$\sum^{K_i}P\alpha-\sum^{N}\alpha$$

складывается в силу (2.12) из суммы членов, перебрасываемых перестановкой P через K_i налево, и суммы членов отрезка (N, K_i), не перебрасываемых перестановкой P через K_i направо. В силу (2.10) число отрезков, на которые распадаются до перестановки P члены, перебрасываемые через K_i налево, меньше T. Число отрезков, перебрасываемых через K_i направо, также меньше T, и, следовательно, число отрезков, составленных до перестановки P остальными членами отрезка (N, K_i), не больше T. В силу (2.2) при $K_i>N_1$

$$\sum^{K_i}P\alpha-\sum^{N}\alpha>-2TW, \tag{2.13}$$

а из (2.11) и (2.13) при любом $K_i>N_1$ получаем

$$\sum^{K_i}P\alpha>S_1^*+1.$$

* Сходимость к $\pm\infty$ понимается в нашем определении, данном в начале § 2.

При P_1 конечном это означает, что

$$\sum^{K_i} P\alpha > |S_1| + 1,$$

т. е., что ряд $P\alpha$ не сходится к S_1. При $S_1 = -\infty$

$$\sum^{K_i} P\alpha > 0,$$

т. е. ряд $P\alpha$ опять-таки не сходится к S_1.

Мы рассмотрели случай, когда выполняется условие (2.8). Если же выполняется (2.9), то для перестановки P^{-1} выполнено условие (2.8).

Если бы сумма ряда $P\alpha$ была равна $-\infty$, то по доказанному и сумма ряда $P^{-1}P\alpha \equiv \alpha$ должна была бы быть равной $-\infty$, так как ряд α сходится. Если же сумма ряда $P\alpha$ была бы конечной, то к ряду $P\alpha$ и перестановке P^{-1} была бы приложима теорема 6 и мы бы снова пришли к противоречию, так как ряд $P^{-1}P\alpha \equiv \alpha$ не сходился бы к бесконечной сумме. Теорема 6а доказана.

Определение. Назовем действительный числовой ряд $\alpha \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ условно расходящимся, если

$$\text{ряд } \alpha \text{ не сходится (в том числе и к } \pm\infty) \tag{2.14}$$

и

$$\lim_{i\to\infty} a_i = 0. \tag{2.15}$$

Для условно расходящихся рядов справедлива

Теорема 8. *Всякий условно расходящийся ряд действительных чисел может быть переведен в ряд, сходящийся к любой данной конечной сумме S, несущественной перестановкой P, причем перестановка P может быть выбрана так, чтобы она представляла собой произведение нелевой перестановки P_1 на неправую $P_2 (P = P_1 P_2)$ и чтобы*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \Delta_P(n) \neq \infty.$$

Доказательство. Предварительно докажем нашу теорему для случая, когда число S лежит между пределами неопределенности l и L нашего условно расходящегося ряда $\alpha \equiv \sum a_i$. Коль скоро $l \leqslant S \leqslant L$, то можно задать бесконечную последовательность ε_i

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots, \quad \lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0 \tag{2.16}$$

и бесконечную последовательность натуральных N_i

$$N_1 < N_2 < \ldots$$

так, чтобы при любом k

$$\left| \sum^{N_k} \alpha - S \right| < \varepsilon_k \tag{2.17}$$

и

$$|a_i| < \varepsilon_k \quad \text{при } i > N_k. \tag{2.18}$$

Зададим на отрезке (N_k, N_{k+1}) перестановку P_2 следующим образом: пусть $N_k+d_i^{(k)}$ — номера всех положительных, а $N_k+g_j^{(k)}$ — номера всех неположительных членов ряда α на отрезке (N_k, N_{k+1}), причем

$$N_k < N_k+d_1^{(k)} < N_k+d_2^{(k)} < \ldots < N_k+d_{r_k}^{(k)} \leqslant N_{k+1},$$
$$N_k < N_k+g_1^{(k)} < N_k+g^{(k)} < \ldots < N_k+g_{s_k}^{(k)} \leqslant N_{k+1}.$$

Положим

$$P_2(N_k+d_j^{(k)}) = N_k+j,$$
$$P_2(N_k+g_j) = N_k+r_k+j.$$

Пусть на отрезке $(0, N_1)$ перестановка P_2 оставляет все члены на месте.

Покажем, что перестановка P_2 — неправая. Действительно, ни один положительный член не сдвигается перестановкой P_2 вправо и ни один неположительный — влево. Далее, и положительные и неположительные члены сохраняют (каждые между собой) порядок следования и образуют на всяком отрезке (N_k, N_{k+1}) после перестановки P_2 по одному отрезку каждые.

Так как перестановка P_2 оставляет члены каждого отрезка (N_k, N_{k+1}) на этом же отрезке, то при любом N

$$\overline{\Pi}_{P_2}(N) \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \underline{\Pi}_{P_2}(N) \leqslant 1,$$

т. е. перестановка P_2 действительно неправая.

Построим теперь перестановку P_1 на каждом отрезке (N_k, N_{k+1}).

Первый слева член ряда $P_2\alpha$ оставим на месте. Пусть перестановка P_1 уже задача для членов $a_1^*, \ldots, a_\nu^*$ ряда $P_2\alpha$, занимающих после перестановки P_1 первые слева ν мест на отрезке (N_k, N_{k+1}). Если

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i^* \geqslant 0,$$

то пусть на $(\nu+1)$-е место слева перестановка P_1 переводит первый слева на отрезке (N_k, N_{k+1}) неположительный член ряда $P_2\alpha$ из числа членов, для которых перестановка P_1 еще не задана. Если таких членов нет, то на оставшиеся места ставим оставшиеся еще неиспользованными положительные члены ряда $P_2\alpha$, сохраняя их порядок. Если же

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i^* < 0,$$

то на $(\nu+1)$-е место ставим первый слева из положительных членов отрезка (N_k, N_{k+1}) из числа тех, для которых еще не задана перестановка P_1. Если все положительные члены уже исчерпаны, то на оставшиеся места ставим, сохраняя их порядок, оставшиеся неположительные члены (т. е. попросту оставляем их на месте).

Перестановка P_1 — нелевая. Действительно, на каждом отрезке (N_k, N_{k+1}) положительные члены образуют до перестановки P_1 один отрезок и сдвигаются перестановкой P_1 только вправо с сохранением порядка следования. Неположительные члены образуют до перестановки P_1 также один отрезок и сдвигаются перестановкой P_1 только влево, причем их порядок следования также сохраняется. Мы имеем, следовательно,

$$\overline{\Lambda}_{P_1}(N)\leqslant 1 \quad \text{и} \quad \underline{\Lambda}_{P_1'}(N)\leqslant 1$$

для любого N, т. е.

$$\Lambda_{P_1}(N)\leqslant 2$$

при любом N, что и означает, что перестановка P_1 — нелевая.

Покажем теперь, что ряд $P\alpha$, где $P=P_1P_2$, сходится к S. Пусть $N_k < N \leqslant N_{k+1}$. Тогда, в силу условия (2.17),

$$\left|\sum^{N_k}\alpha - S\right| < \varepsilon_k.$$

Далее, по построению перестановки P_1, в силу (2.18) и (2.16), имеем

$$\left|\sum_{N_k}^{N} P\alpha\right| \leqslant \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k < 3\varepsilon_k. \tag{2.19}$$

Из равенства

$$\sum^{N} P\alpha = \sum^{N_k}\alpha + \sum_{N_k}^{N} P\alpha$$

получаем, используя (2.17) и (2.19),

$$\left|\sum^{N} P\alpha - S\right| < 4\varepsilon_k,$$

что и означает, что ряд $P\alpha$ сходится к S.

Наконец,

$$\Lambda_P(N_k) = \Pi_P(N_k) = 0$$

при любом k, что доказывает для перестановки P выполнение условия (1.12), откуда, в силу следствия теоремы 6, вытекает несущественность перестановки P.

Теорема 8 доказана нами для случая, когда число S лежит между пределами неопределенности ряда α.

Пусть теперь S лежит вне пределов неопределенности ряда α. Построим такую нейтральную перестановку P_3, чтобы S лежало между пределами неопределенности ряда $P_3\alpha$. Этим будет полностью доказана теорема 8. Действительно, ряд $P_3\alpha$ по доказанному может быть переведен в ряд, сходящийся к S, перестановкой $P=P_1P_2$, где P, P_1 и P_2 удовлетворяют требованиям теоремы 8. От умножения же неправой перестановки на нейтральную она не перестает быть неправой; от умножения несущественной перестановки на нейтральную она остается несущественной, а условие (1.12) не перестает выполняться в силу леммы 1. Следовательно, для полного доказательства теоремы 8 остается построить перестановку P_3.

Рассмотрим сначала случай, когда пределы колебаний ряда конечны. Пусть L и l соответственно верхний и нижний пределы неопределенности ряда α и для определенности $S > L$. Тогда для любого N можно найти такие $K_2 > K_1 > N$, что

$$\sum_{K_1}^{K_2} \alpha > \frac{L-l}{2}.$$

Пусть натуральное r таково, что

$$r\frac{L-l}{2} > S-l. \tag{2.20}$$

Построим последовательность N_i:

N_1 выбираем так, чтобы

$$l < \sum^{N_1} \alpha < L.$$

Далее, выбираем последовательность $K_i^{(1)}$

$$N_1 < K_1^{(1)} < K_2^{(1)} < \ldots < K_{2r}^{(1)}$$

так, чтобы при $n = 1, 2, \ldots, r$

$$\sum_{K_{2n-1}^{(1)}}^{K_{2n}^{(1)}} \alpha > \frac{L-l}{2}.$$

Пусть уже выбрано $K_{2r}^{(s-1)}$. Тогда выберем $N_s > K_{2r}^{(s-1)}$ так, чтобы

$$l < \sum^{N_s} \alpha < L,$$

а последовательность $K_i^{(s)}$

$$N_1 < K_1^{(s)} < K_2^{(s)} < \ldots < K_{2r}^{(s)}$$

выберем так, чтобы

$$\sum_{K_{2n-1}^{(s)}}^{K_{2n}^{(s)}} \alpha > \frac{L-l}{2} \quad \text{при } n = 1, 2, \ldots, r. \tag{2.21}$$

Пусть суммарное число членов по отрезкам $(K_1^{(s)}, K_2^{(s)}), \ldots, (K_{2r-1}^{(s)}, K_{2r}^{(s)})$ равно t_s. Перестановку P_3 на каждом из отрезков (N_s, N_{s+1}) задаем следующим образом: на первые слева t_s мест отрезка (N_s, N_{s+1}) ставим с сохранением их естественного порядка t_s членов отрезков $(K_1^{(s)}, K_2^{(s)}), \ldots$ $\ldots, (K_{2r-1}^{(s)}, K_{2r}^{(s)})$. Остальные члены отрезка (N_s, N_{s+1}) ставим с сохранением их порядка следования на оставшиеся места. На отрезке $(0, N_1)$ перестановка P_3 оставляет все члены на месте.

Перестановка P_3 нейтральна, так как при любом n

$$\Lambda_{P_3}(n) \leqslant 2r+1 \quad \text{и} \quad \Pi_{P_3}(n) \leqslant 2r+1 \ ^*.$$

Далее, согласно выбору N_s,

$$\sum^{N_s} P_3\alpha = \sum^{N_s} \alpha < L < S, \tag{2.22}$$

* Имеет место даже $\Pi_{P_3}(n) \leqslant 2$.

а из (2.20) и (2.21) следует

$$\sum^{N_s+t_s} P_3\alpha > l + r\frac{L-l}{2} > l+S-l=S. \tag{2.23}$$

Неравенства (2.22) и (2.23) вместе и доказывают, что S лежит между пределами неопределенности ряда $P_3\alpha$.

Пусть теперь один из пределов неопределенности L и l ряда α бесконечен. Для определенности пусть $L=+\infty$. Если l конечно или $l=-\infty$, то для случая $S \geqslant l$ теорема 8 нами уже доказана. Значит, остается разобрать случаи $S<l$ и $l=+\infty$. В обоих случаях перестановку мы строим одним и тем же способом.

Члены ряда α стремятся к 0 и $L=+\infty$. Так как ряд α не сходится к $+\infty$, то условие (2.2) нарушается и, следовательно, для любого натурального N и $W>0$ найдутся такие $K_2>K_1>N$, что

$$\sum_{K_1}^{K_2} \alpha < -W.$$

Выберем N_1 так, чтобы

$$\sum^{N_1} \alpha > |S|.$$

$K_1^{(1)}$ и $K_2^{(1)}$ выберем так, чтобы

$$K_2^{(1)} > K_1^{(1)} > N_1$$

и

$$\sum_{K_1^{(1)}}^{K_2^{(1)}} \alpha < -2\sum^{N_1} \alpha.$$

Пусть уже выбрано $K_2^{(s-1)}$. Тогда выберем $N_s > K_2^{(s-1)}$ так, чтобы

$$\sum^{N_s} \alpha > |S| \tag{2.24}$$

и $K_2^{(s)} > K^{(s)} > N_s$ — так, чтобы

$$\sum_{K_1^{(s)}}^{K_2^{(s)}} \alpha < -2\sum^{N_s} \alpha. \tag{2.25}$$

Пусть на отрезке $(0, N_1)$ перестановка P_3 оставляет все члены на месте. На каждом из отрезков (N_s, N_{s+1}) задаем перестановку P_3 так, что члены отрезка $(K_1^{(s)}, K_2^{(s)})$ окажутся расположенными в их естественном порядке на отрезке $(N_s, N_s+K_2^{(s)}-K_1^{(s)})$, а остальные члены отрезка (N_s, N_{s+1}) расположатся в их естественном порядке на отрезке $(N_s+K_2^{(s)}-K_1^{(s)}, N_{s+1})$.

Перестановка P_3 — нейтральна, так как при любом n

$$\Lambda_{P_3}(n) \leqslant 2 \text{ и } \Pi_{P_3}(n) \leqslant 2.$$

Далее, согласно (2.24),

$$\sum^{N_s} P_3\alpha = \sum^{N_s} \alpha > |s| \geqslant S \tag{2.26}$$

и согласно (2.25)

$$\sum^{N_s+K_2^{(s)}-K_1^{(s)}} P_3\alpha = \sum^{N_s} P_3\alpha + \sum_{N_s}^{N_s+K_2^{(s)}-K_1^{(s)}} P_3\alpha =$$

$$= \sum^{N_s} \alpha + \sum_{K_1^{(s)}}^{K_2^{(s)}} \alpha < -|s| \leqslant S. \tag{2.27}$$

Неравенства (2.26) и (2.27) вместе показывают, что S лежит между пределами неопределенности $P_3\alpha$.

Таким образом, искомая нейтральная перестановка P_3 построена, чем и завершается доказательство теоремы 8.

Из следствия 1 теоремы 5 и теоремы 8 получаем:

Всякий условно сходящийся ряд может быть переведен в ряд, сходящийся к данной конечной сумме S перестановкой P, представимой произведением трех перестановок

$$P = P_1 P_2 P_3,$$

где P_3 — неправая, P_2 — неправая и P_1 — нелевая перестановки. Но произведение двух неправых перестановок есть неправая перестановка. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Теорема 9. *Всякий условно сходящийся ряд с действительными членами можно перевести в ряд, сходящийся к произвольно заданному конечному числу S, перестановкой P, представимой произведением $P = P_1P_2$, где P_1 — односторонняя правая, а P_2 — односторонняя левая перестановка.*

Действительно, как уже было сказано, мы можем найти соответствующую перестановку P, являющуюся произведением нелевой и неправой перестановок. Если S не является суммой ряда α, то каждая из перестановок сомножителей автоматически не является нейтральной, так как в противном случае произведение было бы односторонней или даже нейтральной (в случае нейтральности обоих сомножителей) перестановкой.

Если же S является суммой ряда α, то за P достаточно принять тождественную перестановку, за P_2 — произвольную одностороннюю левую перестановку и, наконец, перестановку P_1 положить равной P_2^{-1}.

Таким образом, теорема 9 полностью доказана. Ее обобщением служит теорема 12 § 3. Самая же теорема 9 является в некотором смысле усиленной теоремой Римана о перестановках условно сходящихся рядов.

§ 3. Применение перестановок к рядам с комплексными членами

Лемма 2. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — комплексные числа и*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

Тогда можно подобрать такую перестановку $P = P_1 P_2$, определенную на отрезке $(0, n)$, чтобы при любом $r \leqslant n$

$$\left| \sum^{r} P\alpha \right| \leqslant 3 \max |a_i|, \tag{3.1}$$

где $\alpha \equiv \sum a_i$,

$$\Lambda_{P_1}(r) \leqslant 4 \tag{3.2}$$

и

$$\Pi_{P_2}(r) \leqslant 4. \tag{3.3}$$

Представим числа $a_1, \ldots, a_n$ в виде векторов, зададим произвольную полярную систему координат и переставим векторы $a_1, \ldots, a_n$ в порядке возрастания их аргументов в этой полярной системе. Получим выпуклую замкнутую ломаную K. Выберем одну из пар точек этой ломаной, расстояние между которыми максимально. Пусть это будут вершины A и B ломаной K. Зададим прямоугольную систему координат (x, y), ориентация которой совпадает с ориентацией K, так, чтобы положительное направление оси x совпало с прямой AB и разобьем векторы $a_1, \ldots, a_n$ на четыре класса:

К классу I отнесем векторы ломаной K, начиная от вектора с началом в точке B и кончая последним вектором с максимальной координатой y его конца, но не далее, чем вектором с концом в A.

К классу II отнесем векторы, начиная от последнего вектора первого класса и кончая вектором с концом в A.

К классу III отнесем векторы, начиная от вектора с началом в A и кончая вектором, конец которого имеет минимальную координату y.

К классу IV отнесем векторы от последнего вектора класса III до первого вектора класса I.

Классы II, IV или классы и II и IV могут оказаться пустыми. В этом случае векторы классов I, III или соответственно классов и I и III лежат на оси x.

Зададим перестановку P_2: пусть суммарное число членов первых r классов есть m_r $(r = 1, 2, 3, 4)$. Очевидно, $m_4 = n$. На первые m_1 мест перестановка P_2 ставит члены класса I, сохраняя их порядок следования друг относительно друга. На следующие $m_2 - m_1$ мест перестановка P_2 ставит члены класса II, также с сохранением их порядка следования друг относительно друга. На следующие $m_3 - m_2$ мест ставятся члены класса III и на последние $m_4 - m_3$ мест — члены класса IV, также с сохранением порядка следования членов внутри каждого из классов.

Для любого s члены одного и того же класса, перебрасываемые через s-е место, образуют после перестановки P_2 (в силу сохранения порядка следования членов внутри каждого класса) не более 1 отрезка.

Отсюда

$$\Pi_{P_2}(s) \leqslant 4 \text{ при любом } s \leqslant n.$$

Введем обозначения $x(a)$ и $y(a)$ для координат x и y вектора a. Для $P_2\alpha$ обозначим через $a_1^*, \ldots, a_{m_1}^*$ члены первого класса, через $a_{m_1+1}^*, \ldots, a_{m_2}^*$ — члены второго, через $a_{m_2+1}^*, \ldots, a_{m_3}^*$ — члены третьего и через $a_{m_3+1}^*, \ldots, a_{m_4}^*$ — члены четвертого класса.

Далее, строим перестановку P_1 как произведение двух перестановок:

$$P_1 = P_1^{(2)} P_1^{(1)}.$$

На первое место внутри первых двух классов перестановка $P_1^{(1)}$ ставит член a_1^*. Пусть уже определены члены, переводимые перестановкой $P_1^{(1)}$ на первые k мест ($k < m_2$). Если

$$y\left(\sum^{k} P_1^{(1)} P_2 \alpha\right) > 0,$$

то на $(k+1)$-е место перестановка $P_1^{(1)}$ ставит член с наименьшим номером из числа членов второго класса, для которых перестановка $P_1^{(1)}$ еще не определена (такой всегда найдется, поскольку $y\left(\sum^{m_2} P_2\alpha\right) = 0$). Если же

$$y\left(\sum^{k} P_1^{(1)} P_2 \alpha\right) \leqslant 0,$$

то на $(k+1)$-е место перестановка $P_1^{(1)}$ ставит член с наименьшим номером из числа еще неиспользованных членов первого класса (такой член всегда найдется при $k < m_2$ в силу неравенства $y(a_r^*) < 0$ при $m_1 < r \leqslant m_2$ и равенства $y\left(\sum^{m_2} P_2\alpha\right) = 0$).

Аналогично строим перестановку $P_1^{(1)}$ для членов двух последних классов.

Векторы первых двух классов в их порядке после перестановки $P_1^{(1)} P_2$ обозначим через $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m_2}$; векторы последних двух классов в их порядке после перестановки $P_1^{(1)} P_2$ обозначим через $\underline{a}_{m_2+1}, \ldots, \underline{a}_{m_4}$.

По построению перестановки $P_1^{(1)}$ имеем

$$\left| y\left(\sum^{r} P_1^{(1)} P_2 \alpha\right)\right| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m_2} |y(\bar{a}_i)| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y(a_i)| \text{ при } 1 \leqslant r \leqslant m_2 \quad (3.4)$$

и

$$\left| y\left(\sum_{m_2}^{r} P_1^{(1)} P_2 \alpha\right)\right| \leqslant \max_{m_2 < i \leqslant m_4} |y(\underline{a}_i)| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y(a_i)| \text{ при } m_2 < r \leqslant m_4. \quad (3.5)$$

Для последовательности $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m_2}$ координата

$$x\left(\sum_{i=1}^{r \leqslant m_2} \bar{a}_i\right)$$

неположительна и не возрастает с возрастанием r, что следует из максимальности расстояния AB. Аналогично для последовательности

$\underline{a}_{m_2+1}, \ldots, \underline{a}_{m_4}$ координата

$$x\left(\sum_{i=m_2+1}^{r\leqslant m_4} \underline{a}_i\right)$$

неотрицательна и не убывает с возрастанием r, что также следует из максимальности расстояния AB. Наконец,

$$x\left(\sum_{i=1}^{m_2} \overline{a}_i\right) = -x\left(\sum_{i=m_2+1}^{m_4} \underline{a}_i\right). \tag{3.6}$$

Строим теперь перестановку $P_1^{(2)}$. На первое место перестановка $P_1^{(2)}$ ставит член $\overline{a}_1$. Пусть перестановка $P_1^{(2)}$ уже задана для членов, занимающих после перестановки $P_1P_2 = P_1^{(2)}P_1^{(1)}P_2$ первые $k < m_4$ мест. Если

$$x\left(\sum^{k} P_1P_2\alpha\right) \geqslant 0,$$

то на $(k+1)$-е место перестановка $P_1^{(2)}$ ставит член с наименьшим номером из числа членов $\overline{a}_i$, для которых еще не задана перестановка $P_1^{(2)}$, если таковой найдется, что, в силу (3.6), всегда имеет место в случае строгого неравенства. Если же

$$x\left(\sum^{k} P_1P_2\alpha\right) < 0,$$

то на $(k+1)$-е место перестановка $P_1^{(2)}$ ставит член с наименьшим номером из числа еще неиспользованных членов.

Такой член в силу (3.6) всегда найдется. Наконец, если

$$x\left(\sum^{k} P_1P_2\alpha\right) = 0$$

и все члены $\overline{a}_i$ уже исчерпаны, то на оставшиеся места ставим оставшиеся члены $\underline{a}_i$ в порядке возрастания их номеров. Очевидно, в этом случае координата x каждого из них равна 0.

Имеем

$$\left|x\left(\sum^{r} P_1P_2\alpha\right)\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x(a_i)| \text{ при } 1 \leqslant r \leqslant n. \tag{3.7}$$

Далее, по построению перестановки $P_1^{(2)}$ всякая сумма

$$\sum^{r\leqslant n} P_1P_2\alpha$$

складывается из двух сумм вида

$$\sum^{r_1\leqslant m_2} P_1^{(1)}P_2\alpha \text{ и } \sum_{m_2}^{m_2+r-r_1} P_1^{(1)}P_2\alpha,$$

а потому из (3.4) и (3.5) следует оценка

$$\left|y\left(\sum^{r} P_1P_2\alpha\right)\right| \leqslant 2\max_{1\leqslant i\leqslant n} |y(a_i)| \text{ при } 1 \leqslant r \leqslant n. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) следует

$$\left|\sum^{r} P\alpha\right| = \left|\sum^{r} P_1 P_2 \alpha\right| \leqslant 3 \max |a_i| \text{ при } 1 \leqslant r \leqslant n.$$

Заметим теперь, что при перестановке P_1 члены каждого из четырех классов сохраняют порядок следования внутри своего класса. Отсюда следует, что члены одного и того же класса, перебрасываемые перестановкой P_1 через любое s-е место, образуют до перестановки P_1 не более одного отрезка, так как члены каждого из четырех классов стоят подряд. Итак,

$$\Lambda_{P_1}(r) \leqslant 4 \text{ при любом } r \leqslant n.$$

Лемма 2 доказана.

Пусть теперь $a_1, \ldots, a_n$ — комплексные числа и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = A. \tag{3.9}$$

Переходя к числам $a_i - \frac{A}{n}$ и применяя лемму 2, мы строим перестановку P, удовлетворяющую требованиям леммы 2, причем неравенство (3.1) переходит в неравенство

$$\max \left| \sum^{r} P\alpha - \frac{rA}{n} \right| \leqslant 3 \max \left| a_i - \frac{A}{n} \right| \quad (\alpha \equiv \sum a_i). \tag{3.10}$$

В силу (3.9)

$$\max |a_i| \geqslant \frac{A}{n}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) получаем

$$\max \left| \sum^{r} P\alpha - \frac{rA}{n} \right| \leqslant 6 \max |a_i|. \tag{3.12}$$

Таким образом, доказана

Лемма 3. *Если $a_1, \ldots, a_n$ — комплексные числа и*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = A,$$

то существует перестановка $P = P_1 P_2$ такая, что при любом $r \leqslant n$

$$\max \left| \sum P\alpha - \frac{rA}{n} \right| \leqslant 6 \max |a_i|,$$

где $\alpha \equiv \sum a_i$,

$$\Lambda_{P_1}(r) \leqslant 4$$

и

$$\Pi_{P_2}(r) \leqslant 4.$$

Определение. Назовем расходящийся ряд $\alpha \equiv \sum a_i$ с комплексными членами условно расходящимся, если

$$\lim_{i \to \infty} a_i = 0.$$

Для таких рядов справедлива

Теорема 10. *Пусть α — условно расходящийся ряд с комплексными членами, а S — одна из предельных точек последовательности*

$$\sum^{n} \alpha \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда найдется перестановка $P = P_1 P_2$ такая, что ряд $P\alpha$ сходится к S, причем перестановки P, P_1 и P_2 удовлетворяют требованиям теоремы 8.

Доказательство. Пусть

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Пусть, далее, последовательность натуральных r_i такова, что

$$\left| \sum^{r_n} \alpha - S \right| < \varepsilon_n. \tag{3.13}$$

Применяя к каждому из отрезков (r_n, r_{n+1}) лемму 3, получаем искомую перестановку $P = P_1 P_2$, определенную на каждом из отрезков (r_n, r_{n+1}), т. е. на всей числовой прямой.

P_2 — неправая перестановка, так как согласно (3.3) при любом m

$$\Pi_{P_2}(m) \leqslant 4.$$

P_1 — нелевая перестановка, так как согласно (3.2) при любом m

$$\Lambda_{P_1}(m) \leqslant 4.$$

P — несущественная перестановка, так как при любом n

$$\Pi_P(r_n) = \Lambda_P(r_n) = 0.$$

Отсюда также следует и выполнение требования (1.12).

Пусть теперь M_n таково, что

$$|a_j| < \frac{\varepsilon_n}{6} \quad \text{при} \quad j \geqslant M_n.$$

Пусть, далее,

$$r_{k+1} \geqslant N > r_k > M_n.$$

Тогда из (3.12) и (3.13), учитывая, что

$$\sum^{r_k} \alpha = \sum^{r_k} P\alpha \text{ и } \varepsilon_k > \varepsilon_{k+1},$$

получаем неравенство

$$\left| \sum^{N} P\alpha - S \right| < \varepsilon_k + 6 \cdot \frac{\varepsilon_n}{6} + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k < 3\varepsilon_k + \varepsilon_n,$$

доказывающее сходимость ряда $P\alpha$ к S. Теорема 10 доказана.

Для дальнейшего нам потребуется

Лемма 4. *Пусть Λ — ориентированная ломаная с началом в точке A и концом в точке B, не пересекающая отрезка AB. Тогда длины хорд с концами на Λ, параллельных AB и того же направления, принимают по крайней мере все значения между 0 и $|AB|$.*

Доказательство. Очевидно, что, не сужая общности, можно считать ломаную Λ не самопересекающейся.

Пусть A — начало прямоугольной системы координат (x, y) и положительное направление оси x совпадает с лучом AB. Докажем нашу лемму для случая, когда $y(l) \neq y(m)$, если l и m — различные вершины Λ, отличные от A и B.

Пусть Λ_1 — часть ломаной Λ, заключенная между точкой A_1 — последней, считая по ходу Λ, точкой пересечения Λ с прямой AB не правее A, и точкой B_1 — первой, считая по ходу Λ, точкой пересечения Λ с прямой AB не левее B. Очевидно,

$$|A_1B_1| \geqslant |AB|$$

и ломаная Λ_1 не пересекает не только отрезок, но и прямую AB.

Пусть l $(0 < l \leqslant |A_1B_1|)$ произвольно. Через Λ_2 обозначим ломаную, получившуюся из Λ_1 путем параллельного переноса ломаной Λ_1 на l параллельно оси x в положительном направлении. Точке A_1 ломаной Λ_1 будет соответствовать точка A_2 ломаной Λ_2, точке B_1 — точка B_2.

Пусть D_1 — максимально удаленная от оси x точка ломаной Λ_1 (по предположению точка D_1 единственна) и D_2 — соответствующая D_1 точка ломаной Λ_2.

Часть ломаной Λ_2 между A_2 и D_2 разделяет на две части полосу между осью x и прямой $y = y(D_2)$, причем точки D_1 и B_1 лежат в различных частях. Следовательно, часть ломаной Λ_1 между D_1 и B_1 пересекает ломаную Λ_2 между A_2 и D_2. Обозначим эту точку пересечения v. Тогда v лежит на части ломаной Λ_1 между D_1 и B_1, а точка u с координатами

$$y(u) = y(v), \quad x(u) = x(v) - l$$

лежит на части ломаной Λ_2 между A_2 и D_2. Таким образом, хорда (u, v) параллельна (A, B), имеет то же направление и произвольно заданную длину $l \leqslant |A_1B_1|$.

Пусть теперь Λ — произвольная ломаная, удовлетворяющая условиям леммы. Пусть

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Ломаные Λ_i при $i = 1, 2, \ldots$ мы получим, сдвигая каждую из вершин (кроме A и B) ломаной Λ не больше чем на ε_i так, чтобы

$$y(l_i) \neq y(m_i),$$

где l_i и m_i — вершины ломаной Λ, отличные от концов, и так, чтобы ломаная Λ_i не пересекала отрезка AB.

По доказанному на каждой ломаной Λ_i найдется для любого l $(0 < l \leqslant |AB|)$ пара точек A_i и B_i таких, что хорда AB удовлетворяет требованиям леммы. Выбираем из последовательности A_i сходящуюся последовательность A_{i_j} и из последовательности соответствующих B_{i_j} сходящуюся подпоследовательность $B_{i_{j_q}}$. Тогда точки

$$A^* = \lim_{g\to\infty} A_{i_{j_g}} \quad \text{и} \quad B^* = \lim_{g\to\infty} B_{i_{j_g}}$$

лежат на Λ и хорда A^*B^* параллельна AB, имеет то же направление и длину l. Так как $l (0 < l \leqslant |AB|)$ произвольно, то лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть точки $A_1, \ldots, A_k$ — предельные точки последовательности частных сумм*

$$\sum^{n} \alpha \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ряда α. Пусть, далее, P — нейтральная перестановка и B — одна из предельных точек последовательности частных сумм ряда $P\alpha$. Тогда существует нейтральная перестановка P^* такая, что для последовательности частных сумм ряда $P^*\alpha$ точки $A_1, \ldots, A_n$ и B являются предельными.

Доказательство. Пусть заданы действительные числа

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Выберем натуральные $N_1^{(1)} < \ldots < N_k^{(1)}$ так, чтобы при любом натуральном $l \leqslant k$

$$\left| \sum^{N_l^{(1)}} \alpha - A_l \right| < \varepsilon_1.$$

Пусть $M_1 > N_k^{(1)}$ таково, что

$$P(r) < M_1 \text{ при } r \leqslant N_k^{(1)}$$

и

$$P(r) > N_k^{(1)} \text{ при } r \geqslant M_1.$$

Выберем $N_1^* > M_1$ так, чтобы

$$\left| \sum^{N_1^*} P\alpha - B \right| < \varepsilon_1.$$

Положим

$$P^*(r) = r \text{ при } r \leqslant N_k^{(1)}.$$

Для членов, перебрасываемых перестановкой P через N_1^*, перестановку P^* задаем следующим образом:

Члены, перебрасываемые перестановкой P через N_1^* слева направо, ставятся (с сохранением порядка их следования до перестановки P) перестановкой P^* на места членов, перебрасываемых перестановкой P через N_1^* справа налево.

Члены, перебрасываемые перестановкой P через N_1^* справа налево, ставятся (с сохранением их первоначального порядка следования) перестановкой P^* на места членов, перебрасываемых перестановкой P через N_1^* слева направо. Это всегда возможно, так как число членов, перебрасываемых какой-либо перестановкой через данное место слева направо, равно числу членов, перебрасываемых этой перестановкой через то же место справа налево.

Пусть L_1 — номер самого правого из членов, перебрасываемых перестановкой P через N_1^*, а если таковых нет, то пусть $L_1 = N_1^*$. Члены отрезка $(0, L_1)$, для которых перестановка P^* еще не определена, пусть оставляются ею на месте. Пусть уже выбрано L_{n-1}. Тогда выберем последовательность

$$L_{n-1} < N_1^{(n)} < N_2^{(n)} < \ldots < N_k^{(n)}$$

так, чтобы при любом $r \leqslant k$

$$\left| \sum^{N_r^{(n)}} \alpha - A_r \right| < \varepsilon_n. \tag{3.14}$$

Далее, выберем M_n и $N_n^* > M_n$ так, чтобы

$$P(r) < M_n \text{ при } r \leqslant N_k^{(n)},$$
$$P(r) > N_k^{(n)} \text{ при } r \geqslant M_n$$

и

$$\left| \sum^{N_n^*} P\alpha - B \right| < \varepsilon_n. \tag{3.15}$$

Члены, перебрасываемые перестановкой P через N_n^* слева направо, перестановка P^* ставит (с соблюдением их порядка следования до перестановки P) на места членов, перебрасываемых перестановкой P через N_n^* справа налево.

Члены, перебрасываемые перестановкой P через N_n^* справа налево, перестановка P^* ставит, сохраняя их порядок следования, на места членов, перебрасываемых перестановкой P через N_n^* слева направо.

Пусть L_n — номер крайнего правого из членов, перебрасываемых перестановкой P через N_n^*, а если таковых нет, то пусть $L_n = N_n^*$. Все члены отрезка (L_{n-1}, L_n), для которых перестановка P^* еще не определена, пусть оставляются перестановкой P^* на месте.

Перестановка P^* нейтральна, так как если

$$\Delta_P(n) < T_1 \text{ и } \Pi_P(n) < T_2$$

при любом n, то и

$$\Delta_{P^*}(n) < T_1 \text{ и } \Pi_{P^*}(n) < T_2$$

при любом n, а перестановка P — нейтральна.

По построению перестановки P^* имеем

$$\sum^{N_r^{(n)}} P^*\alpha = \sum^{N_r^{(n)}} \alpha$$

при любом n и любом $r \leqslant k$.

Далее,

$$\sum^{N_n^*} P^*\alpha = \sum^{N_n^*} P\alpha$$

при любом n. Но тогда условия (3.14) и (3.15) означают, что ряд $P^*\alpha$ действительно имеет точки $A_1, \ldots, A_n$ и B предельными для последовательности своих частных сумм. Лемма 5 доказана.

Теорема 11. *Пусть $\alpha = \sum a_i$ — условно расходящийся ряд с комплексными членами, удовлетворяющий условию*

$$\varliminf_{n\to\infty} \left| \sum^{n} \alpha \right| \neq \infty. \tag{3.16}$$

Тогда:

1°. *Существует прямая AB такая, что для любой точки S этой прямой найдется перестановка P, удовлетворяющая требованиям теоремы 8, такая, что ряд $P\alpha$ сходится к S.*

2°. *Если в прямоугольной системе координат (x, y) с осью y, совпадающей с AB,*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left| x\left(\sum^{n} \alpha\right)\right| \neq 0, \tag{3.17}$$

то для любой точки плоскости найдется перестановка P, удовлетворяющая требованиям теоремы 8, такая, что ряд $P\alpha$ сходится к этой точке.

3°. *Если*

$$\lim_{n\to\infty}\left| x\left(\sum^{n} \alpha\right)\right| = 0,$$

то перестановка P, удовлетворяющая условию (1.12), *не может перевести ряд α в ряд, сходящийся к точке, лежащей вне прямой AB.*

Доказательство. Для того чтобы доказать, что для какой нибудь точки S существует перестановка P, переводящая ряд α в ряд $P\alpha$, сходящийся к S, и удовлетворяющая требованиям теоремы 8, нам достаточно построить нейтральную перестановку P^* такую, чтобы S была одной из предельных точек последовательности

$$\sum^{n} P^*\alpha \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Это следует из теоремы 10, так как от умножения справа перестановки, удовлетворяющей требованиям теоремы 8, на нейтральную, она не перестает удовлетворять этим требованиям (условие (1.12) не нарушается в силу леммы 1). Таким образом, доказательство 1° и 2° сводится к построению соответствующих нейтральных перестановок.

Доказательство 1°. Если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum^{n} \alpha\right| \neq \infty,$$

то в силу расходимости ряда α найдется пара точек A и B, предельных для последовательности

$$\sum^{n} \alpha \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.18}$$

Если же

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum^{n} \alpha\right| = \infty, \tag{3.19}$$

то в силу условия (3.16) мы можем провести окружность O_1 с произвольным центром столь большого радиуса, чтобы векторная ломаная K, звенья которой суть векторы, соответствующие членам ряда α, пересекала O_1 бесконечное число раз. В силу (3.19) ломаная K также бесконечное число раз пересекает концентрическую с O_1 окружность O_2

большего радиуса. Отсюда следует, что на каждой из окружностей O_1 и O_2 найдется по предельной точке для последовательности (3.18). Обозначим эти точки через A и B. Утверждаем, что в обоих случаях прямая AB удовлетворяет требованиям 1^0.

Пусть сначала точка S лежит на отрезке AB. Выберем последовательность действительных

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{3.20}$$

Пусть теперь натуральные $M_1 < N_1 < M_2 < N_2 < \ldots$ таковы, что при любом натуральном k

$$\left|\sum^{M_k} \alpha - A\right| < \varepsilon_k, \tag{3.21}$$

$$\left|\sum^{N_k} \alpha - B\right| < \varepsilon_k \tag{3.22}$$

и

$$|a_j| < \varepsilon_k \text{ при } j \geqslant M_k. \tag{3.23}$$

На каждом из отрезков (N_k, M_{k+1}) и на отрезке $(0, M_1)$ перестановка P^* оставляет все члены на их старых местах. На каждом из отрезков (M_k, N_k) перестановка P^* задается следующим образом.

Обозначим точки

$$A_k = \sum^{M_k} \alpha \text{ и } B_k = \sum^{N_k} \alpha.$$

За точку S_k примем ближайшую к S точку отрезка A_kB_k. Из (3.21) и (3.22) следует

$$|S - S_k| < \varepsilon_k. \tag{3.24}$$

Обозначим через $K_{(k)}$ часть векторной ломаной K между M_k-й и N_k-й вершинами. Возможны два случая:

1) Если точка S_k лежит на векторной ломаной $K_{(k)}$, то за Q_k принимаем номер ближайшей к S_k вершины: $M_k \leqslant Q_k \leqslant N_k$. Имеем

$$\left|\sum^{Q_k} \alpha - S\right| < 2\varepsilon_k, \tag{3.25}$$

что следует из (3.23) и (3.24).

2) Если точка S_k лежит вне $K_{(k)}$, то через $\underline{S}_k$ и $\overline{S}_k$ обозначим ближайшие к S_k точки пересечения $K_{(k)}$ с отрезком A_kB_k, лежащие слева и справа от S_k, причем $\underline{S}_k$ предшествует $\overline{S}_k$ в естественной ориентации ломаной K. Согласно лемме 4 найдется хорда $\underline{S}_k^*\overline{S}_k^*$ с концами на $K_{(k)}$, параллельная и того же направления, что $\underline{S}_k\overline{S}_k$ и имеющая длину $|\overline{S}_k - \underline{S}_k|$. Пусть $\underline{Q}_k$ и $\overline{Q}_k$ — номера вершин, ближайших к $\underline{S}_k^*$ и $\overline{S}_k^*$. В силу (3.23)

$$\left|\sum_{\underline{Q}_k}^{\overline{Q}_k} \alpha - (\overline{S}_k - \underline{S}_k)\right| < 2\varepsilon_k. \tag{3.26}$$

Обозначим через T_k номер ближайшей к $\underline{S}_k$ вершины $K_{(k)}$.

В первом случае перестановка P^* оставляет на месте все члены отрезка (M_k, N_k).

Во втором случае перестановка P^* оставляет на отрезке (M_k, N_k) на месте все члены до T_k, На следующие $\overline{Q_k}-\underline{Q}_k$ мест ставим в их естественном порядке члены от $a_{\underline{Q}_k+1}$ до $a_{\overline{Q}_k}$. Остальные члены отрезка (M_k, N_k) перестановкой P^* переводятся с сохранением порядка их следования на оставшиеся $N_k-T_k-\overline{Q_k}+\underline{Q}_k$ мест. Имеем

$$\sum^{T_k} P^*\alpha = \sum^{T_k} \alpha, \tag{3.27}$$

откуда в силу выбора T_k и, учитывая (3.23), получаем

$$\left|\sum^{T_k} P^*\alpha-\underline{S}_k\right| = \left|\sum^{T_k} \alpha-\underline{S}_k\right| < \varepsilon_k. \tag{3.28}$$

Из определения перестановки P^* следует

$$\sum^{T_k+\overline{Q}-\underline{Q}_k} P^*\alpha = \sum^{T_k} P^*\alpha + \sum_{\underline{Q}_k}^{\overline{Q}_k} \alpha. \tag{3.29}$$

Подставляя в (3.29) оценки из (3.28), (3.26) и (3.24), получим

$$\left|\sum^{T_k+\overline{Q}_k-\underline{Q}_k} P^*\alpha - S\right| < \varepsilon_k+2\varepsilon_k+\varepsilon_k = 4\varepsilon_k. \tag{3.30}$$

Неравенства (3.25) и (3.30) показывают, что точка S действительно является предельной для последовательности

$$\sum^{n} P^*\alpha \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Оценим теперь $\Delta_{P^*}(r)$ и $\Pi_{P^*}(r)$, Если $N_k < r \leqslant M_{k+1}$, то

$$\Delta_{P^*}(r) = \Pi_{\ \ *}(r) = 0.$$

Если $M_k < r \leqslant N_k$ и на отрезке (M_k, N_k) перестановка P^* оставляет все члены на месте, то также

$$\Delta_{P^*}(r) = \Pi_{P^*}(r) = 0.$$

Если, наконец, $M_k < r \leqslant N_k$, но P^* не оставляет на отрезке (M_k, N_k) все члены на месте, то

$$\Delta_{P^*}(r) \leqslant 2 \quad \text{и } \Pi_{P^*}(r) \leqslant 2.$$

Таким образом, P^* действительно нейтральная перестановка.

Пусть теперь S лежит на прямой AB, но вне отрезка AB. Примем для определенности, что точка B лежит между точками A и S. Тогда

$$L-1 < \frac{S-A}{B-A} \leqslant L, \tag{3.31}$$

где L — некоторое натуральное число.

Зададим нейтральную перестановку P^{**} так, чтобы точки A и $A+L(B-A)$ были предельными для ряда $P^{**}\alpha$. Этим утверждение 1° будет доказано полностью.

Пусть ε_i, M_i и N_i — числа, заданные условиями (3.20), (3.21), (3.22) и (3.23). На каждом из отрезков $(M_{rL+1}, N_{(r+1)L})$ зададим перестановку P^{**} следующим образом: пусть суммарное число членов по отрезкам

$$(M_{rL+1}, N_{rL+1}),\ (M_{rL+2}, N_{rL+2}),\ \ldots,\ (M_{(r+1)L}, N_{(r+1)L})$$

есть t_r. Тогда перестановка P^{**} ставит на первые t_r мест, начиная с $M_{rL+1}+1$, члены отрезков

$$(M_{rL+k}, N_{rL+k}) \quad (k=1, 2, \ldots, L)$$

в их естественном порядке. На оставшиеся $N_{(r+1)L}-M_{rL+1}-t_r$ мест перестановка P^{**} ставит члены $L-1$ отрезков

$$(N_{rL+k}, M_{rL+k+1}) \quad (k=1, 2, \ldots, L-1)$$

также с сохранением их естественного порядка. Члены, для которых перестановка P^{**} еще не задана, пусть оставляются ею на месте.

Так как перестановка P^{**} перемещает на каждом из отрезков $(M_{rL+1}, N_{(r+1)L})$ по $2L-2$ отрезка, причем каждый из них сдвигается как целое, то

$$\Lambda_{P^{**}}(r) \leqslant 2L-2 \text{ и } \Pi_{P^{**}}(r) \leqslant 2L-2 \text{ *}$$

при любом r, т. е. перестановка P^{**} нейтральна.

Далее,

$$\sum^{M_{rL+1}} P^{**}\alpha = \sum^{M_{rL+1}} \alpha$$

и из (3.21) следует

$$\lim_{r\to\infty} \sum^{M_{rL+1}} P^{**}\alpha = A. \tag{3.32}$$

Оценим

$$\sum^{M_{rL+1}+t_r} P^{**}\alpha.$$

Из (3.21) и (3.22), учитывая (3.20), получаем

$$\left|\sum_{M_{rL+1}}^{M_{rL+1}+t_r} P^{**}\alpha - L(B-A)\right| < 2L\varepsilon_{rL-1}.$$

Это означает, что

$$\lim_{r\to\infty} \sum^{M_{rL+1}+t_r} P^{**}\alpha = A+L(B-A); \tag{3.33}$$

(3.32) и (3.33) вместе доказывают утверждение 1°.

* Имеет место даже $\Pi_{P^{**}}(r) \leqslant 2$.

Попутно мы показали, что за прямую AB может быть принята любая прямая, две точки которой являются предельными для последовательности

$$\sum^{n} P^{*}\alpha,$$

где P^{*} — произвольная нейтральная перестановка.

Доказательство 2°. Покажем, что если выполнено условие (3.17), то найдется такая нейтральная перестановка P_1^{*}, что для последовательности

$$\sum^{n} P^{*}\alpha \quad (n=1, 2, \ldots)$$

существует предельная точка C, для которой

$$x(C) \neq 0.$$

Пусть для определенности

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x\left(\sum^{n}\alpha\right) > d > 0. \tag{3.34}$$

Проведем прямую $x=d$, параллельную прямой AB. В силу (3.34) и того, что точка A с координатой $x(A)=0$ является предельной для последовательности (3.18), ломаная K пересекает прямую $x=d$ бесконечное число раз. Обозначим эти точки пересечения через $C_1, C_2, \ldots, C_r$.

Если точки C_r имеют предельную точку, то эту точку можно принять за C, а тождественную перестановку за P_1^{*}.

Пусть $C_1, \ldots, C_r$ не имеют предельной точки и вообще у последовательности (3.18) нет предельных точек, лежащих вне AB. Утверждаем, что в этом случае по крайней мере один луч прямой AB с началом в A состоит целиком из предельных точек последовательности (3.18). Если бы это было не так, то с обеих сторон от точки A на прямой AB нашлись бы точки E_1 и E_2 с координатами $(0, e_1)$ и $(0, e_2)$, которые не были бы предельными для (3.18).

Проведем прямые $y=e_1$, $y=e_2$, $x=-d$ и $x=d$. Эти четыре прямые отсекают контур прямоугольника, внутри которого лежит точка A. В силу (3.34) и того, что точка A является предельной для последовательности (3.18), ломаная K пересекает контур указанного прямоугольника бесконечное число раз и, следовательно, на этом контуре найдется точка C, предельная для (3.18). Но по предположению ни E_1 ни E_2 не являются предельными для (3.18), поэтому

$$x(C) \neq 0,$$

что противоречит предположению о том, что вне AB нет точек, предельных для (3.18).

Итак, в этом случае действительно по крайней мере один луч прямой AB сплошь состоит из предельных точек последовательности (3.18).

Перейдем к построению перестановки P_1^{*}.

Пусть Q_r — номер вершины ломаной K, ближайшей к точке C_r; и пусть последовательность действительных ε_i такова, что

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Обозначим через Q_1' столь большое Q_r, чтобы

$$|a_j| < \varepsilon_1 \text{ при } j \geqslant Q_1'$$

и через $V_1 > U_1 > Q_1'$ — такие номера, для которых

$$\left| y\left(\sum_{U_1}^{V_1} \alpha\right) + y\left(\sum^{Q_1'} \alpha\right)\right| < \varepsilon_1$$

и

$$\left| x\left(\sum_{U_1}^{V_1} \alpha\right)\right| < \varepsilon_1.$$

Такие U_1 и V_1 всегда можно выбрать, так как целый луч прямой $x=0$ состоит из предельных для (3.18) точек.

Пусть уже задано V_{k-1}. За $Q_k' > V_{k-1}$ принимаем Q_r столь большое, что

$$|a_j| < \varepsilon_k \quad \text{при} \quad j \geqslant Q_k', \tag{3.35}$$

и через $V_k > U_k > Q_k'$ обозначим такие номера, для которых

$$\left| y\left(\sum_{U_k}^{V_k} \alpha\right) + y\left(\sum^{Q_k'} \alpha\right)\right| < \varepsilon_k \tag{3.36}$$

и

$$\left| x\left(\sum_{U_k}^{V_k} \alpha\right)\right| < \varepsilon_k. \tag{3.37}$$

На отрезках (Q_k', V_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ задаем перестановку P_1^* следующим образом.

Отрезок (U_k, V_k) переводится с сохранением порядка следования членов на отрезок $(Q_k', Q_k' + V_k - U_k)$. Отрезок же (Q_k', U_k) переводится с сохранением порядка следования членов на отрезок $(Q_k' + V_k - U_k, V_k)$. На отрезках $(0, Q_1')$ и (V_k, Q_{k+1}') $(k = 1, 2, \ldots)$ перестановка P_1^+ оставляет все члены на месте.

Перестановка P_1^* нейтральна, так как

$$\Lambda_{P_1^*}(r) = \Pi_{P_1^*}(r) = 0 \quad \text{при} \quad V_k < r \leqslant Q_{k+1}'$$

и

$$\Lambda_{P_1^*}(r) \leqslant 2 \text{ и } \Pi_{P_1^*}(r) \leqslant 2 \quad \text{при} \quad Q_k' < r \leqslant V_k.$$

Из равенства $x(C_r) = d$, определения Q_r и неравенств (3.35), (3.36) и (3.37) следует

$$\left| y\left(\sum^{Q_k' + V_k - U_k} P_1^* \alpha\right)\right| < \varepsilon_k$$

и

$$\left| x\left(\sum^{Q'_k+V_k-U_k} P^*_1\alpha\right)-d\right|<2\varepsilon_k.$$

Последние неравенства и означают, что точка C с координатами $(d, 0)$ является предельной для последовательности

$$\sum^{n} P^*_1\alpha \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

В силу леммы 5 мы можем теперь построить нейтральную перестановку P^* такую, чтобы для последовательности

$$\sum^{n} P^*\alpha \quad (n=1, 2,\ldots)$$

точки A, B и C были предельными.

Таким образом, нами доказано следующее предложение:

Если A и B — предельные для (3.18) точки и выполняется условие (3.17), то существует нейтральная перестановка P^* такая, что для $P^*\alpha$ точки A и B предельные и, кроме того, существует точка C, предельная для $P^*\alpha$ и лежащая вне AB.

Но тогда для любой точки S плоскости можно построить нейтральную перестановку P^{**} такую, что для ряда $P^{**}P^*\alpha$ точка S окажется предельной.

Действительно, либо прямая AS пересекает прямую BC, либо прямая BS пересекает прямую AC, либо прямая CS пересекает прямую AB. Пусть для определенности AS пересекает BC в точке D.

Тогда согласно 1° существует нейтральная перестановка P^{**}_1 такая, что для ряда $P^{**}_1P^*\alpha$ точка D является предельной. Поэтому в силу леммы 5 существует такая нейтральная перестановка P^{**}_2, что для ряда $P^{**}_1P^*\alpha$ и точка D, и точка A будут предельными. Точки A, D и S лежат на одной прямой, а отсюда в силу замечания в конце доказательства 1° следует существование такой нейтральной перестановки P^{**}_3, что для ряда $P^{**}_3P^*\alpha$ точка S предельная. Перестановка

$$P^{**}\equiv P^{**}_3P^*$$

нейтральна, как произведение двух нейтральных. Поэтому, согласно замечанию в начале доказательства теоремы 11, мы полностью доказали утверждение 2°.

Доказательство 3°. Пусть теперь

$$\lim_{n\to\infty}\left|x\left(\sum^{n}\alpha\right)\right|=0$$

и перестановка P удовлетворяет условию (1.12). Пусть, вопреки нашему предположению, ряд $P\alpha$ сходится к S и $x(S)=d\neq 0$. В силу 1.12) найдутся $T>1$ и последовательность натуральных $N_1<N_2<\ldots$, таких, что при любом k

$$\Lambda_P(N_k)<T, \tag{3.38}$$

Так как

$$\lim \left| x\left(\sum^{n} \alpha\right)\right| = 0,$$

то можно выбрать N столь большим, чтобы

$$\left| x\left(\sum^{n} \alpha\right)\right| < \frac{|d|}{4T} \quad \text{при } n > N. \tag{3.39}$$

Выберем N_k столь большим, чтобы

$$P(s) < N_k \quad \text{при } s < N \tag{3.40}$$

и оценим $x(\sum^{N_r} P\alpha)$ при $r > k$.

Согласно (3.38) $\sum^{N_r} P\alpha$ отличается от $\sum^{N_r}\alpha$ на сумму членов, образующих до перестановки P не более T отрезков. Так как

$$N_r > N_k > N,$$

то из (3.39) следует

$$\left| x\left(\sum^{N_r} \alpha\right)\right| < \frac{|d|}{4T}. \tag{3.41}$$

Согласно (3.39) и (3.40) координата x суммы членов по каждому из отрезков, перебрасываемых через N_r, не превышает по абсолютной величине

$$2 \cdot \frac{|d|}{4T} = \frac{|d|}{2T}.$$

Так как число отрезков не превышает T, то координата x суммы их членов не превышает по абсолютной величине $\frac{|d|}{2}$, откуда, учитывая (3.41), получаем

$$\left| x\left(\sum^{N_r} P\alpha\right)\right| < \frac{|d|}{4T} + \frac{|d|}{2} < \frac{3|d|}{4} \quad \text{при любом } r > K.$$

Отсюда следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \left| x\left(\sum^{n} P\alpha\right)\right| \leqslant \frac{3|d|}{4},$$

а это и означает, что ряд $P\alpha$ не сходится к точке S. Теорема 11 полностью доказана. Из нее следует

Теорема 12. *Пусть $\alpha \equiv \sum^{\infty} a_i$ — условно сходящийся ряд с комплексными членами. Тогда:*

1°. *Для любой точки S некоторой прямой AB существует перестановка $P = P_1P_2$ такая, что ряд $P\alpha$ сходится к S, причем P_1 — односторонняя правая, а P_2 — односторонняя левая перестановки.*

2°. *Через точку, соответствующую сумме ряда α, проходит по крайней мере одна прямая AB, удовлетворяющая условию 1°.*

3°. *Если существует перестановка R произвольной природы, переводящая ряд α в ряд $R\alpha$, имеющий точку S, лежащую вне прямой AB, предельной точкой для последовательности*

$$\sum^{n} R\alpha \quad (n=1, 2, \ldots),$$

то ряд α переводим перестановкой P, удовлетворяющей требованиям 1°, *в ряд, сходящийся к любой наперед заданной точке плоскости.*

Заметим прежде всего, что 2° непосредственно следует из 1° и 3°.

Доказательство 1°. Поскольку ряд α сходится условно, то либо

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x(a_i)| = \infty,$$

либо

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y(a_i)| = \infty.$$

Пусть для определенности имеет место первое равенство. Построим перестановку P^*.

Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ — члены ряда α с положительной координатой $x(\bar{a}_i)$ в их естественном порядке. Полагаем $N_0=0$ и выбираем N_1 столь большим, чтобы

$$\sum x(\bar{a}_i) > 1,$$

где сумма распространена на все $\bar{a}_i$, лежащие в ряде α левее члена с номером N_1. Пусть уже выбрано N_{k-1}. Тогда выберем $N_k > N_{k-1}$ столь большим, чтобы

$$\sum x(\bar{a}_i) > 1,$$

где суммирование распространено на $\bar{a}_i$, лежащие в ряде α между N_{k-1} и N_k местами. Перестановку P^* на каждом из отрезков (N_{k-1}, N_k) зададим следующим образом.

Пусть n_k — число $\bar{a}_i$, лежащих между N_{k-1} и N_k в ряде α. Тогда перестановка P^* переводит все эти $\bar{a}_i$ с сохранением их порядка следования на отрезок $(N_{k-1}, N_{k-1}+n_k)$. Остальные члены отрезка (N_{k-1}, N_k) переводятся перестановкой P^* на отрезок $(N_{k-1}+n_k, N_k)$ также с сохранением порядка их следования.

Перестановка P^* неправая, так как

$$\Pi_{P^*}(r) \leqslant 2$$

для любого r.

Очевидно,

$$\sum^{N_k} P^*\alpha = \sum^{N_k} \alpha$$

при любом k и так как ряд α — сходящийся, то для ряда $P^*\alpha$ выполнено требование (3.16). Наконец,

$$x\left(\sum^{N_{k-1}+n_k} P^*\alpha\right) - x\left(\sum^{N_{k-1}} P^*\alpha\right) > 1$$

при любом k и, следовательно, ряд $P^*\alpha$ — расходящийся и притом расходящийся условно (так как ряд α сходится) и удовлетворяющий требованию (3.16). Следовательно, к нему приложима теорема 11, т. е. для любой точки S некоторой прямой AB найдется такая перестановка $P^{**}=P_1P_2^*$, что ряд $P^{**}P^*\alpha$ сходится к S, причем P_2^* — неправая, а P_1 — нелевая перестановки.

Перестановка $P_2=P_2^*P^*$ также неправая, как произведение двух неправых.

В случае, если S не есть сумма ряда α, положим

$$P=P^{**}P^*P_1P_2.$$

Ввиду того, что S не есть сумма ряда α, ни одна из перестановок P_1 и P_2 не может быть нейтральной, так как тогда перестановка P была бы односторонней, а это невозможно в силу теоремы 3.

Для случая же, когда S есть сумма ряда α, за P можно принять тождественную перестановку, за P_2 — произвольную одностороннюю левую и за P_1 — ей обратную. Утверждение 1° доказано.

Доказательство 3°. Согласно 1° найдется такая перестановка P, что ряд $P\alpha$ сходится к некоторой точке

$$S_1=\sum^{\infty} P\alpha,$$

отличной от точки

$$S_0=\sum^{\infty} \alpha,$$

и $P=P_1P_2$, где P_2 — неправая перестановка, а P_1 — нелевая. В силу того, что P_1 — несущественная перестановка и $S_1\neq S_0$ найдется такое $d>0$, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\sum^{n} P_2\alpha - S_0\right| > d, \tag{3.42}$$

так как в противном случае ряд $P_2\alpha$ сходился бы к S_0 и перестановка P_1 не могла бы перевести его в сходящийся к другой сумме ряд $P_1P_2\alpha$.

Построим такую неправую перестановку P', чтобы для последовательности

$$\sum^{n} P'\alpha \quad (n=1, 2, \ldots)$$

и точка S_0, и некоторая точка S_2 были предельными, причем выполнялось бы требование

$$|S_2-S_0|\geqslant d.$$

Зададим последовательность действительных чисел

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > , \ldots , \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

и выберем натуральное число M_1 так, чтобы

$$\left| \sum^{M_1} \alpha - S_0 \right| < \varepsilon_1$$

На отрезке $(0, M_1)$ полагаем перестановку P' оставляющей все члены на месте.

Если уже задано M_i, выберем $N_i > M_i$ так, чтобы

$$\left| \sum^{N_i} P_2\alpha - S_0 \right| > d, \tag{3.43}$$

(что можно сделать согласно (3.42)), и чтобы

$$P_2(r) < N_i \quad \text{при} \quad r \leqslant M_i,$$
$$P_2(r) > M_i \quad \text{при} \quad r \geqslant N_i.$$

Пусть перестановка P' уже определена на отрезке $(0, M_i)$ и пусть число членов, перебрасываемых перестановкой P_2 через N_i направо, равно t_i. Перестановка P' переводит члены отрезка $(M_i, N\ )$, не перебрасываемые перестановкой P_2 через N_i, на отрезок $(M_i, N_i - t\ )$ с сохранением их порядка. Члены отрезка (M_i, N_i), перебрасываемые перестановкой P_2 через N_i направо, переводятся перестановкой P' на отрезок $(N_i, N_i + t_i)$ также с сохранением их порядка. Аналогично, члены, перебрасываемые перестановкой P_2 через N_i налево (их число, очевидно, тоже равно t_i), переводятся перестановкой P' на отрезок $(N_i - t_i, N_i)$ с сохранением их порядка. Наконец, члены отрезка (N_i, L_i), не перебрасываемые перестановкой P_2 через N_i налево (где через L_i мы обозначили номер самого правого из членов, перебрасываемых перестановкой P_2 через N_i налево), переводятся перестановкой P' на отрезок $(N_i + t_i, L_i)$ также с сохранением порядка следования. $M_{i+1} > L_i$ выбираем так, чтобы

$$\left| \sum^{M_{i+1}} P_2\alpha - S_0 \right| < \varepsilon_{i+1}. \tag{3.44}$$

На отрезке (L_i, M_{i+1}) полагаем перестановку P' оставляющей все члены на месте.

Перестановка P' — неправая, так как при любом r

$$\Pi_{P'}(r) \leqslant 3$$

по построению P'.

Далее,

$$\sum^{M_i} P'\alpha = \sum^{M_i} \alpha$$

и, следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \sum^{M_i} P'\alpha = S_0.$$

Из определения перестановки P' следует, что

$$\sum^{N_i} P'\alpha = \sum^{N_i} P_2\alpha.$$

В таком случае из (3.43) и (3.44) видно, что на окружности с центром в S_0 и радиуса $\frac{d}{2}$ найдется точка S_2, предельная для последовательности $\sum P'\alpha$.

Примем прямую S_0S_2 за ось x прямоугольной системы координат. Если

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|y(a_i)|\neq\infty,$$

то, очевидно, никакая перестановка R не может перевести ряд α в ряд $R\alpha$, имеющий точку ξ предельной при $y(\xi)\neq 0$. Если прямая AB совпадает с прямой S_0S_2, то такая перестановка R существует согласно предположению пункта 3°. Если же прямая AB с прямой S_0S_2 не совпадает, то по крайней мере одна из точек A и B не лежит на S_0S_2 и, следовательно, либо $y(A)\neq 0$, либо $y(B)\neq 0$. Пусть для определенности $y(A)\neq 0$. Согласно 1° существует перестановка P_A, переводящая ряд α в ряд $P_A\alpha$, сходящийся к точке A. Тогда перестановка $P_AP'^{-1}$ может быть принята за перестановку R для ряда $P'\alpha$. Таким образом, в обоих случаях

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|y(a_i)|=\infty. \tag{3.45}$$

Возьмем снова последовательность действительных чисел

$$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\ldots,\quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$$

и выберем натуральные U_1 и $V_1>U_1$ так, чтобы

$$\left|\sum^{U_1}P'\alpha-S_0\right|<\varepsilon_1,\qquad \left|\sum^{V_1}P'\alpha-S_2\right|<\varepsilon_1$$

и чтобы сумма положительных координат y у членов ряда $P'\alpha$ с номерами, лежащими между U_1 и V_1, превысила 1. Пусть уже выбрано V_{k-1}. Тогда выбираем $V_k>U_k>V_{k-1}$ так, чтобы

$$\left|\sum^{U_k}P'\alpha-S_0\right|<\varepsilon_k, \tag{3.46}$$

$$\left|\sum^{V_k}P'\alpha-S_2\right|<\varepsilon_k \tag{3.47}$$

и сумма положительных координат y у членов ряда $P'\alpha$ с номерами, лежащими между U_k и V_k, превышала 1. Это всегда возможно в силу (3.45).

Построим теперь перестановку P''.

Пусть число членов отрезка (U_k, V_k), имеющих положительную координату y, равно s_k. На каждом из отрезков (U_l, V_k) задаем перестановку P'', применяемую к ряду $P'\alpha$ следующим образом.

На отрезок (U_k, U_k+s_k) перестановка P'' переводит в их естественном порядке члены ряда $P'\alpha$, лежащие на отрезке (U_k, V_k) и имеющие положительную координату y. Остальные члены отрезка (U_k, V_k) переводятся перестановкой P'' на отрезок (U_k+s_k, V_k) с сохранением их порядка следования. Члены отрезков $(0, U_1)$ и (V_k, U_{k+1}) $(k=1, 2, \ldots)$ оставляются перестановкой P'' на месте.

Перестановка P'' очевидно неправая, так как при любом n

$$\Pi_{P''}(n) \leqslant 2.$$

Из (3.45), (3.47) и (3.20) следует, что точки S_0 и S_2 являются предельными для последовательности частных сумм ряда $P''P'\alpha$, если учесть, что

$$\sum^{U_k} P''P'\alpha = \sum^{U_k} P'\alpha \text{ и } \sum^{V_k} P''P'\alpha = \sum^{V_k} P'\alpha.$$

Далее, в силу (3.46), условия $y(S_0)=0$ и по построению перестановки P'' имеем

$$y\Big(\sum^{U_k+s_k} P''P'\alpha\Big) > 1-\varepsilon_k,$$

откуда следует, что ряд $P''P'\alpha$ удовлетворяет требованиям 2° теоремы 11 *, в силу которых для любой точки S плоскости существует такая неправая перестановка P''' и нелевая P^{IV}, что ряд $P^{\mathrm{IV}}P'''P''P'\alpha$ сходится к S. Вводя обозначения

$$\overline{P}_1 = P^{\mathrm{IV}} \text{ и } \overline{P}_2 = P'''P''P',$$

получаем при $S \neq S_0$ искомую перестановку

$$\overline{P} = \overline{P}_1\,\overline{P}_2 = P^{\mathrm{IV}}P'''P''P'.$$

В самом деле, $\overline{P}_1 = P^{\mathrm{IV}}$ — перестановка, нелевая по построению, а $\overline{P}_2 = P'''P''P'$ — неправая, как произведение трех неправых. Так как $S \neq S_0$, то перестановка $\overline{P} = \overline{P}_1\,\overline{P}_2$ существенна и потому ни $\overline{P}_1$ ни $\overline{P}_2$ не могут быть нейтральными. В случае же $S = S_0$ перестановку $\overline{P}$ задаем как произведение произвольной односторонней левой перестановки на ей обратную. Таким образом, утверждение 3°, а вместе с тем и вся теорема 12 полностью доказаны.

Эта теорема является в некотором смысле усилением двумерного случая теоремы Леви—Штейница**, утверждающей, что перестановки условно сходящейся последовательности векторов в n-мерном пространстве переводят эту последовательность в последовательности, сходящиеся к любым точкам какого-нибудь линейного подпространства данного пространства.

(Поступило в редакцию 9/XII 1944 г.)

---

* Здесь оси координат x и y поменялись ролями по сравнению с теоремой 11. В качестве прямой AB можно принять прямую S_0S_2, т. е. ось y, в силу замечания в конце доказательства пункта 1° теоремы 11.

** E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journ. f. d. reine und angew. Mathem., **143** (1903), 128—175.

On permutation of terms of numerical series

A. Kronrod (Moscow)

(Résumé)

The present paper arose from solving the following problem suggested by M. Kreines:

Given a permutation P which makes a convergent numerical series α to converge to another sum; is there necessarily a convergent series β which is rendered divergent by P?

A permutation P of terms of an infinite series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ induced by the

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & \dots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \dots & a_{n_k} & \dots \end{pmatrix}$$

is called n e u t r a l p e r m u t a t i o n if for every convergent series $\alpha \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ with the sum A the series $P\alpha \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}$ is convergent and $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = A$ and, whenever a series $\beta \equiv \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ is divergent, the series $P\beta \equiv \sum_{i=1}^{\infty} b_{n_i}$ is also divergent.

A permutation P is called l e f t permutation if there exists a series α such that the series $P\alpha$ is divergent.

A permutation inverse to a left permutation is called r i g h t permutation.

If a left (right) permutation is no right (resp. left) permutation, then it is called o n e-s i d e d l e f t (resp. o n e-s i d e d r i g h t) permutation.

A permutation P is called e s s e n t i a l permutation if there is a convergent series α with the finite sum A such that the series $P\alpha$ converges to a finite sum $A_1 \neq A$.

For every permutation P and for every positive integer N an integral-valued function $\underline{\Lambda}_P(N)$ is determined as follows: suppose that $l_1 < l_2 < \cdots < l_r \leqslant N$ are all the positive integers such that $P(l_i) > N$. We put $\underline{\Lambda}_P(N)$ equal to the number of non-overlapping and non-adjacent intervals of the series of positive integers (the natural series), into which the set of l_i is decomposed. $\overline{\Lambda}_P(N)$ is taken to be the number of non-overlapping and non-adjacent intervals of the natural series, into which the set of m_i is decomposed, where $m_i (i = 1, 2, \dots)$ are the integers with the properties: $N < m_1 < m_2 < \cdots < m_s$, $P(m_i) \leqslant N$. We put

$$\Lambda_P(N) = \overline{\Lambda}_P(N) + \underline{\Lambda}_P(N).$$

T h e o r e m 1. *P is a left permutation if and only if*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \Lambda_P(N) = \infty.$$

We put

$$\Pi_P(N) = \Lambda_{P^{-1}}(N).$$

T h e o r e m 2. *P is a right permutation if and only if*

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \Pi_P(N) = \infty.$$

T h e o r e m 3. *Every essential permutation is necessarily two-sided.*

An example of one-sided permutation and an example of two-sided permutation that is not essential are given in the paper.

T h e o r e m 4. *The product of two non-left (non-right) permutations is a non-left (resp. non-right) permutation.*

T h e o r e m 5. *Every permutation P is representable as the product:*

$$P = P_1 P_2,$$

where P_2 is a non-right permutation, P_1 is a non-essential permutation.

C o r o l l a r y. *Every conditionally convergent series can be rendered divergent by an one-sided left permutation.*

T h e o r e m 6. *If permutation P is essential, then*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \min \left[\Lambda_P(n), \Pi_P(n) \right] = \infty.$$

D e f i n i t i o n. A series α with real terms is said to c o n v e r g e t o $+\infty$ if for every K there exists a positive integer N_k such that

$$\sum^{T>N_k} \alpha > K$$

and $W > 0$ such that for any L and $M > L$

$$\sum_L^M \alpha > -W,$$

where $\sum^S \alpha$ denotes the Sth partial sum of the series, while

$$\sum_T^U \alpha = \sum^U \alpha - \sum^T \text{ for } U > T.$$

A series α with real terms is said to c o n v e r g e to $-\infty$ if the series $-\alpha$ whose terms are those of α with their signs changed converges to $+\infty$.

T h e o r e m 7. *A right one-sided permutation carries every series convergent to $+\infty$ ($-\infty$) into a series convergent to $+\infty$ (resp. $-\infty$)*

D e f i n i t i o n. A numerical series $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ is called c o n d i t i o n a l l y d i v e r g e n t series if α does not converge (neither to $\pm\infty$) and $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$.

Theorem 8. *Every conditionally divergent series with real terms can be carried into a series converging to any finite sum by a non-essential permutation P. Thereby P can be chosen so as to satisfy the conditions: $P = P_1 P_2$, where P_1 is a non-left permutation, P_2 is a non-right permutation, and*

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_P(n) \neq \infty.$$

Theorem 9. *Every conditionally convergent series with real terms can be made to converge to any finite sum by a permutation P representable in the form:*

$$P = P_1 P_2,$$

where P_1 is an one-sided left permutation and P_2 is an one-sided right commutation.

For the series with complex terms Theorems 11 and 12 — analogous to Theorems 8 and 9 — are valid.

Definition. A divergent series $\alpha \equiv \sum a_i$ with complex terms is called conditionally divergent series if $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$.

Theorem 11. *Let α be a conditionally divergent series with complex terms satisfying the condition*

$$\varliminf_{n\to\infty} |\sum^n \alpha| \neq \infty.$$

Then:

1° *There exists a straight line AB such that for every point S lying on AB there is a permutation P which has the properties stated in Theorem 8 and makes α to converge to S.*

2° *If in a Cartesian coordinate system with the y-axis coinciding with AB*

$$\varlimsup_{n\to\infty} |x(\sum^n \alpha)| \neq 0$$

(where $x(a)$ denotes the abscissa x of the vector a), then for every point of the complex plane there is a permutation P which has the properties stated in Theorem 8 and makes α to converge to this point.

3° *If*

$$\lim_{n\to\infty} |x(\sum^n \alpha)| = 0,$$

then no permutation satisfying the condition

$$\varliminf_{n\to\infty} \min\left[\Lambda_P(n), \Pi_P(n)\right] \neq \infty,$$

can make α to converge to any number lying outside the straight line AB.

Theorem 12. *Let $\alpha \equiv \sum \alpha_i$ be a conditionally convergent series with complex terms. Then:*

1° *For every point of a straight line AB there is a permutation $P = P_1 P_2$ such that $P\alpha$ converges to α, P_1 is an one-sided right permutation, P_2 is an one-sided left permutation.*

2° *Through the point of the complex plane corresponding to the sum of the series* α *passes at least one straight line AB satisfying the condition* 1°.

3° *If there exists a permutation R which carries* α *into a series* $R\alpha$ *such that the partial sums* $\sum^{n} R\alpha$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *have a limit point C lying outside AB, then* α *can be made to converge to any point of the plane by a permutation P satisfying the condition* 1°.

This theorem strengthens, in a certain sense, the two-dimensional case of Levi—Steinitz's theorem* which asserts that permutations of terms of a conditionally convergent sequence of vectors in the n-dimensional space can make the sequence to converge to any point of a linear subspace of this space.

---

* E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journ. f. d. reine u. angew. Math., **143** (1903), 128—175.