I. I. Sharapudinov, Some properties of Meixner orthogonal polynomials,
Mat. Zametki, 1990, Volume 47, Issue 3, 135–137

фициент теплопроводности, b — градиент равновесной температуры, g — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения жидкости, $\bar{k}_3$ — единичный вектор оси Ox_3.

Развитие методики, предложенной в работах [2, 4, 6], позволяет свести описанную задачу к исследованию операторного пучка вида (1).

Воронежский лесотехнический институт

Поступило 06.06.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М. В. // ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 1. 2. Крейн С. Г.// ДАН СССР. 1964. Т. 159, № 2. 3. Радзиевский Г. В. // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 3. 4. Крейн С. Г., Лаптев Г. И. // Функцион. анализ и его прил. 1968. Т. 2, № 2. 5. Копачевский Н. Д. // ДАН СССР. 1981. Т. 15, № 2. 6. Ngo Huy Can // Tap chi co hoc. 1987. V. 9, N 2.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ МЕЙКСНЕРА

И. И. Шарапудинов

Пусть $0 < c < 1$, $\beta > 0$. Классические многочлены Мейкснера $m_n(x) = m_n(x;\ \beta, c)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ образуют ортогональную систему на множестве $Z^+ = \{0, 1, \ldots\}$ с весом $\mu(x) = \mu(x;\ \beta, c) = c^x \Gamma(x+\beta)/\Gamma(x+1)(\beta)$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера (см. [1—3]). Следуя [1], будем считать, что $m_n(0) = (\beta)_n = \beta \ldots (\beta + n - 1)$. Эти многочлены находят приложения в различных задачах спектральной теории оценивания [4—6], идентификации параметров систем [7], приближенного вычисления интегралов [8, 9]. Характер большинства из этих приложений таков, что они непосредственно или опосредованно приводят к вопросу об асимптотических свойствах многочленов Мейкснера.

Пусть $z^{[0]} = 1$, $z^{[n]} = z(z-1)\ldots(z-n+1)$ $(n \geqslant 1)$,

$$x^k = \sum\nolimits_{n=0}^{k} \sigma(k, n)\, x^{[n]}, \quad (x+\gamma)^{[m]} = \sum\nolimits_{j=0}^{m} s(m, j, \gamma)\, x^j,$$

$L_r^{(\alpha)}(x)$ — многочлен Лагерра степени r, $a(k) = \min\{k-1, n+\beta-1\}$, $T_{\beta, n} = \{(j, k) \mid n \leqslant k \leqslant j \leqslant n + \beta - 1\}$, $K_{\beta, n} = \{(j, k) \mid 0 \leqslant j \leqslant a(k),\ k \geqslant n\}$,

$$f_{j,k}(x) = \sigma(k, n)\, s(n+\beta-1, j, \beta-1)\, x^{j-k} L_k^{(j-k)}\left(x \ln \frac{1}{c}\right), \tag{1}$$

$$\Phi_{j,k}(x) = \frac{j!}{k!}\, \sigma(k, n)\, s(n+\beta-1, j, \beta-1)(\ln c)^{k-j}\, L_j^{(k-j)}\left(x \ln \frac{1}{c}\right). \tag{2}$$

Следующее утверждение обобщает результат, полученный в [10], для $\beta = 1$ на случай произвольного натурального β.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $0 < c < 1$, β — натуральное число. Тогда*

$$\frac{c^n \Gamma(x+\beta)}{n!\,\Gamma(x+1)}\, m_n(x;\ \beta, c) = \sum\nolimits_{(j,k) \in T_{\beta, n}} f_{j,k}(x) + \sum\nolimits_{(j,k) \in K_{\beta, n}} \Phi_{j,k}(x).$$

Пусть N — произвольное положительное число, $h = N^{-1}$, $0 < c < 1$. Введем в рассмотрение полиномы $(n = 0, 1, \ldots)$

$$\mathscr{M}_n(x) = \mathscr{M}_n(x;\ N, \beta, c) = c^{nh/2}\left(\frac{\Gamma(\beta)}{n!\,\Gamma(n+\beta)}\right)^{1/2} m_n(Nx;\ \beta, c^h),$$

образующие ортонормированную систему на множестве $\{0, h, 2h, \ldots\}$ с весом $(1 - c^h)^\beta \mu(Nx, \beta, c^h)$, т. е.

$$(1 - c^h)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k, \beta, c^h) \mathcal{M}_n(kh) \mathcal{M}_l(kh) = \delta_{nl}.$$

Пусть $a(k) = a(k; n, \beta)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 1. Положим для натурального β

$$F_{\beta, n}(x) = F_{\beta, n}(x; N) = \sum_{(j, k) \in T_{\beta, n}} \frac{f_{j, k}(x) (\ln c)^{\beta - 1}}{N^{\beta + k - j - 1}}, \tag{3}$$

$$R_{\beta, n}(x) = R_{\beta, n}(x, N) = \sum_{(j, k) \in K_{\beta, n}} \frac{\Phi_{j, k}(x) (\ln c)^{\beta - 1}}{N^{k - j + \beta - 1}}. \tag{4}$$

Следствие. *Пусть* $0 < c < 1$. *Тогда для произвольного натурального* β *имеет место равенство*

$$c^{nh/2} \left(\frac{\Gamma(n + \beta)}{n! \Gamma(\beta)} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(Nx + \beta) (\ln c)^{\beta - 1}}{N^{\beta - 1} \Gamma(Nx + 1)} \mathcal{M}_n(x) = F_{\beta, n}(x) + R_{\beta, n}(x). \tag{5}$$

Поскольку функции $\Phi_{j,k}(x)$ и $f_{j,k}(x)$, определяемые с помощью равенств (2) и (1), не зависят от N, то в силу (3) и (4) правая часть равенства (5) представляет собой асимптотическую формулу по параметру N для его левой части при $N \to \infty$.

Положим $a_l(k) = \min\{k - l, n + \beta - 1\}$, $K_{\beta, n, l} = \{(j, k) \mid 0 \leqslant j \leqslant a_l(k), k \geqslant n\}$. В частности, заметим, что $a_1(k) = a(k)$, $K_{\beta, n, 1} = K_{\beta, n}$. Пусть

$$R_{\beta, n}(x) = \bar{R}_{\beta, n, l}(x) + R_{\beta, n, l}(x) \qquad (\bar{R}_{\beta, n, 1}(x) \equiv 0),$$

где

$$\bar{R}_{\beta, n, l}(x) = \sum_{(j, k) \in K_{\beta, n} \setminus K_{\beta, n, l}} \frac{\Phi_{j, k} (\ln c)^{\beta - 1}}{N^{k - j + \beta - 1}},$$

$$R_{\beta, n, l}(x) = \sum_{(j, k) \in K_{\beta, n, l}} \frac{\Phi_{j, k}(x) (\ln c)^{\beta - 1}}{N^{k - j + \beta - 1}}.$$

Тогда равенство (5) может быть переписано следующим образом:

$$c^{nh/2} \left(\frac{\Gamma(n + \beta)}{n! \Gamma(\beta)} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(Nx + \beta) (\ln c)^{\beta - 1}}{N^{\beta - 1} \Gamma(Nx + 1)} \mathcal{M}_n(x) = F_{\beta, n}(x) + \bar{R}_{\beta, n, l}(x) + R_{\beta, n, l}(x).$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть целые* $\beta, l \geqslant 1$, $n \geqslant l$, $0 < c < 1$, $0 \leqslant x \ln(1/c) \leqslant 1$, $2 |\ln c| e^2/(N \ln 2) < 1$. *Тогда имеет место оценка*

$$|R_{\beta, n, l}(x)| \leqslant (e^{1/2} + 2^{-1/2}) \cdot \left\{ \frac{\exp(|\ln c| (n + 2\beta - 2)^2/N)}{1 - 2e^2 |\ln c| /(N \ln 2)} \left(\frac{2 |\ln c| e^2}{N \ln 2} \right)^{n + \beta + l} + \frac{1}{(\beta + l - 1)!} \cdot \left[\frac{(2n + \beta + l)^2 |\ln c|}{N \ln 4} + \frac{(n + 2\beta - 2)^2 |\ln c|}{N} \right]^{\beta + l - 1} \cdot \exp\left(\frac{(2n + \beta + l)^2 |\ln c|}{N \ln 4} + \frac{(n + 2\beta - 2)^2 |\ln c|}{N} \right) \right\}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $0 < c < 1$, l *и* β — *натуральные числа*, $\gamma \geqslant 1$, $n \geqslant \gamma$, $x \ln (1/c) \geqslant \gamma/n$,

$$\frac{e^4}{\gamma \ln 2} |\ln c| \frac{1}{N} (n + 2\beta - 2)^2 \leqslant \delta < 1, \quad \frac{n + 2\beta - 2}{n + \gamma - 1} \frac{e^3 |\ln c|}{N \ln 2} < \delta.$$

Тогда при $n \geqslant l$ *найдется положительная постоянная* $A = A(\beta, l, \gamma, \delta)$, *такая, что*

$$|R_{\beta, n, l}(x)| \leqslant A \left(|\ln c| \frac{n^2}{N}\right)^{l+\beta-1} J_{n, \beta}(x),$$

где

$$J_{n, \beta}(x) = \max_{n \leqslant j \leqslant n+\beta-1} \left\{\frac{1}{n + \beta - 1} \left| L_{j-1}^{(1)}\left(x \ln \frac{1}{c}\right)\right| + \left| L_j^{(0)}\left(x \ln \frac{1}{c}\right)\right|\right\}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $0 < c < 1$, $x > 0$,

$$\frac{e^2 |\ln c|}{N \ln 2} \left[1 + \left(\frac{2}{x \ln (1/c)}\right)^{1/2}\right] \leqslant \delta < 1.$$

Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\mathcal{M}_n(x; N, 1, c) = L_n^{(0)} \left[\left(x + \frac{1}{2N}\right) \ln \frac{1}{c}\right] + V_n(x),$$

в которой для остаточного члена $V_n(x)$ *справедлива оценка*

$$|(V_n(x)| \leqslant \frac{A}{N^2 n^{1/12}} (n^3 x^{-5/4} + n x^{-3/4}) c^{-x/2} e^{-n \ln c/(2N)} \cdot$$
$$\cdot \exp \left\{\frac{(n+1)^{3/2}}{N} \left[\left(\frac{|\ln c|}{x}\right)^{1/2} \left(2 + \frac{2e}{\ln 2}\right) + \frac{2^{1/2} e}{\ln 2} |\ln c|\right]\right\},$$

где $A = A(c, \delta)$ — *положительная постоянная, зависящая от* c *и* δ.

Автор признателен Б. С. Кашину за обсуждение результатов и помощь в работе.

Дагестанский государственный педагогический институт

Поступило 02.10.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эйрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 2. Meixner J. // J. London Math. Soc. 1934. N 9. P. 6—13. 3. Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. М.: Наука, 1985. 4. Перов В. П. Прикладная спектральная теория оценивания. М.: Наука, 1982. 5. Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях (Материалы I Всесоюзного семинара «Спектральные методы обработки информации в научных исследованиях на основе ортогональных базисов») / Пущино: Отд. науч.-техн. инф. науч. центра биологии и селекции АН СССР, 1980. 6. Gimlin D. R., Keys R. G., Keener M. S. // IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics. 1979. V. 9, N 5. P. 301—304. 7. Dooge J. C. I., Garvey B. J. // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. 1978. V. 78, N 18. P. 157—179. 8. Gabutti B., Minetti B. // J. of Computational Phys. 1981. V. 42, N 2. P. 277—287. 9. Шарапудинов И. И. // Изв. вузов. Математика. 1986. № 2. С. 80—82. 10. Шарапудинов И. И. Асимптотические свойства многочленов Мейкснера и их приложения. М., 1983. Деп. в ВИНИТИ № 1433—83.