

УДК 517.925.7

С. И. Трифонов

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ КАК ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
МОНОДРОМИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

В этой заметке рассматривается вопрос о включении аналитических диффеоморфизмов компактного многообразия M в поток аналитического векторного поля на $M \times S^1$ в качестве преобразований монодромии. Необходимым условием такой включаемости является гладкая гомотопность тождественному диффеоморфизму (определение см. далее). В заметке доказана достаточность этого условия. В частности, доказано, что любой аналитический диффеоморфизм окружности на себя, сохраняющий ориентацию, включается в поток аналитического векторного поля на двумерном торе в качестве преобразования монодромии на меридиане. В доказательстве основного результата существенно использована теорема Граурта об аппроксимации гладких отображений аналитических многообразий аналитическими.

Пусть M — компактное аналитическое многообразие. Рассмотрим прямое произведение $M \times S^1 = \{(x, t) | x \in M, t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ и векторное поле v на нем, трансверсальное всем сечениям $t = \text{const}$. Вдоль любой фазовой кривой поля v координата t меняется монотонно, поэтому имеет смысл следующее

Определение. Преобразование монодромии поля v на сечении $t=0$ — это отображение $\Delta : M \rightarrow M$, при котором точка $x \in M$ переходит в первую по времени после $(x, 0)$ точку пересечения многообразия $M \times \{0\}$ и положительной полутраектории поля v с началом $(x, 0)$.

Определение. Диффеоморфизм $\Delta : M \rightarrow M$ гладко гомотопен тождественному, если существует такое однопараметрическое семейство C^1 -гладких диффеоморфизмов, C^1 -гладко зависящих от параметра $t \in [0, 2\pi]$, что

$$\Delta_t : M \rightarrow M, \quad \Delta_0 = \text{id}_M, \quad \Delta_{2\pi} = \Delta.$$

Теорема. Пусть $\Delta : M \rightarrow M$ — аналитический диффеоморфизм, гладко гомотопный тождественному. Тогда на $M \times S^1$ существует аналитическое векторное поле, для которого отображение Δ является преобразованием монодромии на сечении $t=0$.

Доказательство. 1. Рассмотрим открытый цилиндр $\tilde{T} = \{(x, s) | x \in M, s \in]-\pi, 2\pi[\}$ и векторное поле $\frac{\partial}{\partial s}$ на нем. Склеив на \tilde{T} точки $(\Delta(x), s)$ и $(x, s+2\pi)$ при $s \in]-\pi, 0[$, получим компактное аналитическое многообразие T . Накрытие $\pi_0 : \tilde{T} \rightarrow T$ позволяет определить карту (x, s) в окрестности любой точки многообразия T .

Нетрудно видеть, что при склейке поле $\frac{\partial}{\partial s}$ превращается в аналитическое векторное поле u на T , причем, выйдя из любой точки $(x, 0)$, фазовая кривая поля u в первый раз пересечется с сечением $s=0$ в точке $(\Delta(x), 0)$.

Теперь для завершения доказательства нам достаточно построить диффеоморфизм $\varphi : T \rightarrow M \times S^1$, обладающий следующими свойствами: а) φ аналитичен; б) поле $\varphi_* u$ трансверсально сечениям $t = \text{const}$; в) ограничение φ на сечение $s=0$ — диффеоморфизм $M \times \{0_s\} \rightarrow M \times \{0_t\}$, тожд-

дественный по первому сомножителю: $(x, 0_s) \mapsto (x, 0_t)$; здесь $0_s(0_t)$ точка 0 оси s (соответственно оси t). Тогда векторное поле φ_*u будет искомым. 2. Построим C^1 -дiffeоморфизм $\psi: T \rightarrow M \times S^1$ со свойствами б) и в). Для этого рассмотрим многообразия $T' \subset \bar{T}$, $T' = \{(x, t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ и difфеоморфизм $\tilde{\psi}: T' \rightarrow M \times S^1$, $(x, s) \mapsto (\Delta_{\tau(s)}^{-1}x, s)$, где Δ_t — однопараметрическое семейство C^1 -дiffeоморфизмов, C^1 -гладко зависящих от параметра $t \in [0, 2\pi]$, причем $\Delta_0 = \text{id}_M$, $\Delta_{2\pi} = \Delta$ (это семейство существует, так как отображение Δ гладко гомотопно тождественному), а функция $\tau: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ гладкая, монотонная, с крайними условиями $\tau(0) = 0$, $\tau(2\pi) = 2\pi$, $\tau'(0) = \tau'(2\pi) = 0$, например $\tau(s) = \pi \left(1 - \cos \frac{s}{2}\right)$.

Далее построим ψ так, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & M \times S^1 \\ \pi_0 \downarrow & \searrow & \\ T & \xrightarrow{\psi} & \end{array}$$

была коммутативной. Докажем, что формула $\psi(p) = \tilde{\psi}(q)$, $q \in \pi_0^{-1}p$, задает однозначное отображение. Пусть $p = (x, s)$; прообраз $\pi_0^{-1}(p)$ состоит более чем из одной точки, а именно из двух, только тогда, когда $s = 0$: $\pi_0^{-1}p = \{(x, 0), (\Delta(x), 2\pi)\}$. Имеем: $\tilde{\psi}(x, 0) = (x, 0)$, $\tilde{\psi}(\Delta(x), 2\pi) = (\Delta^{-1}\Delta(x), 0)$. Тем самым отображение ψ определено корректно. Оно C^1 -гладко во всех точках, где $s \neq 0$. Из равенства $\tau'(0) = \tau'(2\pi) = 0$ следует: ψ C^{-1} -гладко и на сечении $s = 0$.

Отображение ψ обладает свойствами б) и в), поскольку оно переводит сечения $s = \text{const}$ в сечения $t = \text{const}$ и $\Delta_0 = \text{id}$.

3. Воспользуемся теоремой Грауэрта* в следующей формулировке: любое C^1 -гладкое отображение компактных аналитических многообразий аппроксимируется вместе с первыми производными (взятыми в картах некоторого конечного атласа) аналитическим отображением.

По теореме Грауэрта существует аналитическое отображение $\chi: T \rightarrow M \times S^1$, сколь угодно близкое к difфеоморфизму ψ в C^1 -топологии. Поскольку ψ — difфеоморфизм, обладающий свойствами б) и в), отображение χ можно выбрать так, чтобы выполнялись свойства: 1) χ — difфеоморфизм; 2) ограничение $\chi|_{M \times \{0_s\}}$ имеет вид $(x, 0) \mapsto (\alpha(x), \beta(x))$, причем отображение $\alpha: M \rightarrow M$ C^1 -близко к тождественному (следовательно, обратимо), а функция $\beta: M \rightarrow S^1$ близка к нулевой, то есть к отображению $x \rightarrow 0_t \in S^1$;

3) χ_*u трансверсально всем сечениям $t = \text{const}$.

Определим близкий тождественному аналитический difфеоморфизм η , «выпрямляющий» образ $\chi(M \times \{0_s\})$:

$$\eta: M \times S^1 \rightarrow M \times S^1, \quad \eta(x, t) \mapsto (\alpha^{-1}(x), [t - \beta \circ \alpha^{-1}(x)] \pmod{2\pi}).$$

Положим $\varphi = \eta \circ \chi$ и докажем, что difфеоморфизм φ искомым. Требования а) (аналитичность) и в) (тождественность по первому сомножителю отображения $\varphi|_{M \times \{0_s\}}$) выполняются по построению, требование б) (трансверсальность поля φ_*u и сечений $t = \text{const}$) следует из C^1 -близости difфеоморфизмов φ и ψ . Теорема доказана.

* Grauert H. On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds // Ann. Math. 1958. 68. 460—472. (Перевод: Математика. Период. сб. пер. ин. статей. 1960. 4(3). 29—40).

Следствие. Любой аналитический, сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $f: S^1 \rightarrow S^1$ включается в поток аналитического векторного поля на торе в качестве преобразования монодромии на меридиане.

Доказательство. Фактически осталось доказать, что любой автоморфизм окружности f , сохраняющий ориентацию, гладко гомотопен тождественному.

Будем вместо отображения $f: S^1 \rightarrow S^1$ (так как $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$) рассматривать поднятие $\tilde{f}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $\tilde{f}(x) = x + g(x)$, где $g(x)$ — функция с периодом 2π . Так как \tilde{f} — автоморфизм прямой, сохраняющий ориентацию, то $g'(x) \geq -1$. Поэтому отображения $\tilde{f}_\tau = x + \tau g(x)/2\pi$, $\tau \in [0, 2\pi]$, также являются автоморфизмами прямой. По определению, существуют отображения $f_\tau: S^1 \rightarrow S^1$, поднятия которых суть автоморфизмы \tilde{f}_τ . Семейство f_τ гладко зависит от $\tau \in [0, 2\pi]$, $f_0 = \text{id}_{S^1}$, $f_{2\pi} = f$. Следствие доказано.

В заключение пользуюсь случаем выразить признательность научному руководителю Ю. С. Ильяшенко за всестороннюю помощь и многочисленные обсуждения.

Поступила в редакцию
18.02.85

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1986. № 5

УДК 515.122+512.623.6

Д. Б. Шахматов

S- и L-ПОЛЯ

Напомним, что S -пространством* называется пространство, которое наследственно сепарабельно, но не наследственно линделефово, а L -пространством — наследственно линделефово пространство, не являющееся наследственно сепарабельным. Пространство X называется строгим S -пространством (строгим L -пространством), если X^n есть S -пространство (L -пространство) для всех $n \in \mathbf{N}$ (см. [1, 2]). Ю. Ройтман [3] поставила следующий вопрос: существуют ли топологические поля, пространства которых являются S - и L -пространствами? Приводимые ниже теорема и два ее следствия утвердительно отвечают на этот вопрос.

Теорема. Из существования строгих S - и L -пространств вытекает существование строгих S - и L -пространств, являющихся топологическими полями.

Поскольку строгие S - и L -пространства существуют в предположении континуум-гипотезы CH [2], то из предыдущей теоремы получаем

Следствие 1. В предположении континуум-гипотезы CH существует топологическое поле, пространство которого является строгим S -пространством.

Следствие 2. В предположении континуум-гипотезы CH существует топологическое поле, пространство которого есть строгое L -пространство.

Присутствие континуум-гипотезы CH в следствиях 1 и 2 случайно, ибо в предположении конъюнкции $MA + \neg CH$ аксиомы Мартина MA и отрицания континуум-гипотезы CH вообще не существует стро-

* Все топологические пространства предполагаются тихоновскими.