Доклады Академии наук СССР
1975. Том 222, № 3

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

Ш. А. АЛИМОВ

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ ИЗ H_p^α

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 22 I 1975)

Пусть G — произвольное N-мерное паракомпактное многообразие класса C^∞ с некоторой положительной мерой dx, плотность которой принадлежит C^∞ и пусть A — эллиптический формально положительный дифференциальный оператор в G порядка m с коэффициентами из C^∞. Обозначим через $\hat{A}$ какое-либо положительное самосопряженное расширение в $L_2(G, dx)$ оператора A, а через $\{E_\lambda\}$ — соответствующее разложение единицы.

Согласно теореме Л. Гординга ([1]) оператор E_λ имеет ядро $\theta(x, y, \lambda)$ класса C^∞, называемое спектральной функцией оператора $\hat{A}$. Следовательно, спектральное разложение $E_\lambda f$ определено для любой функции $f\in L(G)$ с компактным носителем.

Для любого $s\geqslant 0$ введем средние Рисса $E_\lambda{}^s f$ спектрального разложения $E_\lambda f$:

$$E_\lambda{}^s f=\int_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f.$$

В настоящей работе рассматриваются средние Рисса спектральных разложений функций из классов С. М. Никольского $H_p{}^\alpha(G)$ (определение классов $H_p{}^\alpha(G)$ в случае $G=R^N$ см. в монографии С. М. Никольского ([2]); в случае произвольного многообразия G эти классы определяются путем перехода к локальным координатам).

Символом $\mathring{H}_p{}^\alpha(D)$, $D\subset G$, будем обозначать класс функций, полученный замыканием $C_0{}^\infty(D)$ по норме $H_p{}^\alpha$. Если $D\subset G$, то включение $D\Subset G$ будет обозначать, что замыкание D компактно в G.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $D\Subset G$ и пусть числа $p\geqslant 1$, $\alpha>0$ и $s\geqslant 0$ удовлетворяют условиям*

$$\alpha+s\geqslant\frac{N-1}{2},\quad p\alpha>N. \tag{1}$$

Тогда для любой функции $f\in\mathring{H}_p{}^\alpha(D)$ равномерно на любом компакте $K\subset G$ выполняется равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda{}^s f(x)=f(x).$$

Условие на порядок дифференцируемости $\alpha+s\geqslant(N-1)/2$, устанавливаемое теоремой 1, является окончательным, ибо для произвольного самосопряженного расширения эллиптического оператора второго порядка В. А. Ильиным в ([4]) доказано, что условие $\alpha+s<(N-1)/2$ не обеспечивает не только равномерной сходимости, но даже и локализации средних Рисса порядка s функции $f(x)$ из класса $\mathring{H}_p{}^\alpha$ при любом $p\geqslant 1$. Окончательность условия $p\alpha>N$ вытекает из того, что противоположное неравенство допускает существование неограниченной функции $f\in\mathring{H}_p{}^\alpha$.

Отметим, что для случая оператора Лапласа теорема 1 была доказана в работе Ш. А. Алимова и В. А. Ильина ([3]), а для случая эллиптического оператора второго порядка и $s=0$ — в работе В. А. Ильина и Ш. А. Алимова ([5]).

Доказательство теоремы 1 опирается на некоторые локальные оценки, справедливые для функций из классов H_p^α и последующее применение тауберовой теоремы Л. Хёрмандера.

Приведем некоторые вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(x)\in C_0^\infty(R^N)$ *и пусть* $1\leqslant q<p\leqslant\infty$, $0<\alpha-N/p\leqslant 1$.

Тогда для любого $\tau<N(1/q-1/p)$ *и для любой функции* $f\in H_p^\alpha(R^N)$ *такой, что* $f(0)=0$ *при* $\mu\geqslant 1$, *выполняется неравенство*

$$\|\varphi(\mu x)f(x)\|_{H_q^\alpha}\leqslant C\mu^{-\tau}\|f\|_{H_p^\alpha}.$$

Лемма 2. *Пусть* $D\Subset G$ *и* $\alpha>0$. *Для любой функции* $f\in\overset{\circ}{H}_2^\alpha(D)$ *при* $\lambda>0$ *выполняется неравенство*

$$\|f-E_\lambda f\|_{L_2(G)}\leqslant C\lambda^{-\alpha/m}\|f\|_{H_2^\alpha}.$$

В следующей лемме мы предположим, что $G\subset R^N$.

Лемма 3. *Пусть* $D\Subset G$, $q>2$, $\alpha>0$, $s\geqslant 0$. *Тогда для любого* $r>0$ *и любой функции* $f\in\overset{\circ}{H}_q^\alpha(D)$ *такой, что* $f(x)=0$ *при* $|x-x_0|<r$, *выполняется неравенство*

$$|E_\lambda^s f(x_0)|\leqslant C\|f\|_{H_q^\alpha}\cdot\lambda^{(1/m)(N/2-\alpha)}\cdot(1+r\lambda^{1/m})^{-1/2-s}.$$

Лемма 4. *Пусть* $D\Subset G$ *и числа* $p\geqslant 1$, $\alpha>0$, $s\geqslant 0$ *удовлетворяют условию* (1).

Тогда для любой функции $f\in\overset{\circ}{H}_p^\alpha(D)$ *равномерно на любом компакте* $K\subset G$ *выполняется оценка*

$$|E_\lambda^s f(x)|\leqslant C\|f\|_{H_p^\alpha}.$$

Из леммы 4 непосредственно следует теорема 1.

В заключение отметим, что из леммы 2 вытекает следующая теорема о локализации средних Рисса спектральных разложений функций из H_2^α.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega\subset D\Subset G$, $\alpha>0$, $s\geqslant 0$ *и* $\alpha+s\geqslant(N-1)/2$.

Тогда для любой функции $f\in\overset{\circ}{H}_2^\alpha(D)$, *равной нулю в* Ω, *равномерно на любом компакте* $K\subset\Omega$ *выполняется равенство*

$$\lim_{\lambda\to\infty}E_\lambda^s f(x)=0.$$

Таким образом, принцип локализации справедлив в классах H_2^α при $\alpha>0$, $s\geqslant 0$, $\alpha+s\geqslant(N-1)/2$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц,* Линейные операторы, 2. Спектральная теория. М., «Мир», 1966. [2] *С. М. Никольский,* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., «Наука», 1969. [3] *Ш. А. Алимов, В. А. Ильин,* ДАН, т. 193, № 1 (1970). [4] *В. А. Ильин,* Дифференциальные уравнения, т. 9, № 2 (1973). [5] *В. А. Ильин, Ш. А. Алимов,* Там же, т. 10, № 1 (1974).