Б. П. Харламов, Переходные функции непрерывного полумарковского процесса на прямой, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 130, 190–205

Б.П.Харламов

ПЕРЕХОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА НА ПРЯМОЙ

Введение

Непрерывные полумарковские процессы на прямой представляют собой наиболее естественный класс процессов, которые удобно изучать с помощью моментов первого выхода [4] . Интегральное уравнение, которому подчиняются переходные функции, преобразуется в этом случае в разностное и при некоторых условиях регулярности - в дифференциальное. В работе [5] исследовались достаточные условия, при которых решения дифференциального уравнения второго порядка являются полумарковскими переходными функциями некоторого ПМ процесса, В настоящей статье исследуются необходимые условия представления полумарковских переходных функций в виде решений дифференциального уравнения второго порядка.

Под непрерывным полумарковским процессом понимается семейство вероятностных мер $(P_x)(x\in X)$ на измеримом пространстве C непрерывных функций $\xi: R_+ \longrightarrow X$, где X - некоторое метрическое пространство. Семейство $(P_x)\in \Pi M$, по определению, обладает марковским свойством относительно момента первого выхода τ_Δ из любого открытого множества $\Delta \subset X$. Пусть $\tau_\Delta(\xi)=\inf\{t\geq 0, \xi(t)\notin \Delta\}$. Переходной функцией ПМ процесса называется условное распределение

$$F_{\tau_\Delta}(dt, dx_1|x) = P_x(\tau_\Delta(\xi)\in dt, \xi(\tau_\Delta)\in dx_1) .$$

Мы также называем переходной функцией преобразование Лапласа по t от этой функции $f_{\tau_\Delta}(\lambda, dx_1|x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t} F_{\tau_\Delta}(dt, dx_1|x)$.

Пусть $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}$, где τ_i - момент остановки относительно естественного потока σ- алгебр и θ_t - оператор сдвига. Пусть $\mathfrak{A}_0$ - достаточно богатый класс открытых множеств $\Delta\subset X$. Полумарковское свойство процесса отражено в уравнении: $(\forall x\in X)$

$$(\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{A}_0, \Delta_1\subset\Delta_2)(\forall t>0)(\forall B\in \mathcal{B}(X))$$

$$F_{\tau_{\Delta_2}}([0,t]\times B|x) = \int_{[0,t]\times X} F_{\tau_{\Delta_1}}(dt_1, dx_1|x) F_{\tau_{\Delta_2}}([0,t-t_1]\times B|x_1) , \tag{I}$$

которое следует из свойства $\tau_{\Delta_2} = \tau_{\Delta_1} \dot{+} \tau_{\Delta_2}$. Ниже используются обозначения: $[\Delta]$ - замыкание множества Δ , $S(x,r)$ - открытая сфера радиуса r с центром x . Пусть $X=R^1$, $\Delta=(a,b)$ $(a<b)$ и $x\in[\Delta]$. В непрерывном случае условная субвероятностная мера $f_{\tau_\Delta}(\lambda,dx_1|x)$ распадается на две функции от λ: $f_{\tau_\Delta}(\lambda,\{a\}|x)=g_\Delta(\lambda,x)$, $f_{\tau_\Delta}(\lambda,\{b\}|x)=h_\Delta(\lambda,x)$. Основным результатаом работы является доказательство теоремы: следующие условия эквивалентны:

I) $(\forall\lambda>0$ существуют функции $A(x)$, $B(\lambda,x)$ такие, что A, A', $B(\lambda,\cdot)$ непрерывны по x и такие, что $g_\Delta(\lambda,x)$, $h_\Delta(\lambda,x)$ являются решениями дифференциального уравнения $f''+4A(x)f'+2B(\lambda,x)f=0$ с краевыми условиями $g_\Delta(\lambda,a)=h_\Delta(\lambda,b)=1$, $h_\Delta(\lambda,a)=g_\Delta(\lambda,b)=0$.

2) $(\forall\lambda>0)$ существуют функции $C_i(\lambda,x)$, $A_i(\lambda,x)$, $B_i(\lambda,x)$ $(i=1,2)$, где $C_i(\lambda,\cdot)>0$ и $C_i(\lambda,\cdot)$, $A_i(\lambda,\cdot)$, $\frac{\partial}{\partial x}A_i(\lambda,\cdot)$, $B_i(\lambda,\cdot)$ - непрерывные по x функции такие, что $g_{S(x,r)}(\lambda,x)=C_1(\lambda,x)+A_1(\lambda,x)r+B_1(\lambda,x)\frac{r^2}{2}+o(r^2)$ и $h_{S(x,r)}(\lambda,x)=C_2(\lambda,x)+A_2(\lambda,x)r+B_2(\lambda,x)\frac{r^2}{2}+o(r^2)$ равномерно по r в каждом конечном интервале. При этом необходимо $C_1=C_2=\frac{1}{2}$, $A_2(\lambda,x)=-A_1(\lambda,x)\equiv A(x)$, $B_1(\lambda,x)=B_2(\lambda,x)\equiv B(\lambda,x)$.

§ I. Дифференциальное уравнение для переходных функций.

Переходная функция $f_{\tau_\Delta}(\lambda,dx_1|x)$ непрерывного полумарковского процесса на прямой в том случае, если Δ - конечный интервал и $x\in\Delta$ распадается на две функции $g_\Delta(\lambda,x)$ и $h_\Delta(\lambda,x)$ в соответствии с выходом на левый и правый концы интервала. Если при стремлении концов интервала к некоторой точке x эти функции стремятся к невырожденным пределам, причем, первые три коэффициента разложения по степеням длины интервала непрерывны, а сами функции g_Δ и h_Δ дважды дифференцируемы по x , то эти функции подчиняются дифференциальным уравнениям второго порядка. В следующем параграфе условие о дифференцируемости функций будет снято.

I. Пусть $X=R^1$, $(P_x)\in\Pi M$, $(\forall x\in X)$ $P_x(C)=1$. Если $\Delta=(a,b)$ $(a<b)$ и $x\in[\Delta]$, то в этом случае $f_{\tau_\Delta}(\lambda,X|x)=f_{\tau_\Delta}(\lambda,\{a\}|x)+f_{\tau_\Delta}(\lambda,\{b\}|x)$. Пусть $f_{\tau_\Delta}(\lambda,\{a\}|x)=g_\Delta(\lambda,x)$ и $f_{\tau_\Delta}(\lambda,\{b\}|x)=h_\Delta(\lambda,x)$. При этом $h_\Delta(\lambda,a)=g_\Delta(\lambda,b)=0$ и $g_\Delta(\lambda,a)=h_\Delta(\lambda,b)=1$. Функции $g_\Delta(\lambda,x)$, $h_\Delta(\lambda,x)$ $(\Delta\in\mathfrak{A}_0,\ \lambda\geqslant 0)$ полностью определяют полумарковский процесс.

Если $\Delta_1\subset\Delta_2$, то $\tau_{\Delta_2}=\tau_{\Delta_1}\dot{+}\tau_{\Delta_2}$ и из уравнения (I) следует

$$f_{\tau_{\Delta_2}}(\lambda, S|x) = \int_X f_{\tau_{\Delta_1}}(\lambda, dx_1|x) f_{\tau_{\Delta_2}}(\lambda, S|x_1).$$

Для случая $\Delta=(a,b), \Delta_1=(c,d)\ (a\le c<d\le b)$ и $x\in[\Delta_1]$ это уравнение переходит в систему двух:

$$g_\Delta(\lambda,x) = g_{\Delta_1}(\lambda,x) g_\Delta(\lambda,c) + h_{\Delta_1}(\lambda,x) g_\Delta(\lambda,d),$$

$$h_\Delta(\lambda,x) = g_{\Delta_1}(\lambda,x) h_\Delta(\lambda,c) + h_{\Delta_1}(\lambda,x) h_\Delta(\lambda,d).$$

Полагая $d=b$, получаем, что $g_\Delta(\lambda,x)$ не возрастает на (a,b). Аналогично, $h_\Delta(\lambda,x)$ не убывает.

2. Если $\Delta_1 = S(x,r)$, то будем писать $h_{\Delta_1}(\lambda,x) = h_r(\lambda,x)$, $g_{\Delta_1}(\lambda,x) = g_r(\lambda,x)$ $(r>0)$. При этом предыдущая система уравнений переходит в следующую систему разностных уравнений:

$$g_\Delta(\lambda,x) = g_r(\lambda,x) g_\Delta(\lambda,x-r) + h_r(\lambda,x) g_\Delta(\lambda,x+r),$$

$$h_\Delta(\lambda,x) = g_r(\lambda,x) h_\Delta(\lambda,x-r) + h_r(\lambda,x) h_\Delta(\lambda,x+r),$$

где $S(x,r)\subset\Delta$. Предположим, что при любых $\lambda\ge 0$ и $x\in X$ справедливо следующее разложение:

$$g_r(\lambda,x) = C_1(\lambda,x) + A_1(\lambda,x) r + B_1(\lambda,x)\frac{r^2}{2} + o(r^2),$$

$$h_r(\lambda,x) = C_2(\lambda,x) + A_2(\lambda,x) r + B_2(\lambda,x)\frac{r^2}{2} + o(r^2).$$

равномерно по x в каждом конечном интервале. Пусть, кроме того, все коэффициенты этого разложения – непрерывные функции от x, а C_1 и C_2 положительны. При этих условиях и некоторых их уточнениях мы докажем, что g_Δ, h_Δ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка, которое будет приведено ниже.

3. ТЕОРЕМА.(следствия из условий на C_1, C_2)

Пусть $(\forall\lambda\ge 0)(\forall x\in X)\ g_r(\lambda,x)\to C_1(\lambda,x),\ h_r(\lambda,x)\to C_2(\lambda,x)$ равномерно по x на каждом конечном интервале, C_1 и C_2 непрерывны по x и положительны. Тогда

1) $(\forall\lambda\ge 0)(\forall x\in X)\ C_1(\lambda,x)+C_2(\lambda,x)=1$ и, следовательно, не зависят от λ.

2) $(\forall\Delta\in\mathfrak{A}_0)$ ($\mathfrak{A}_0$ – все конечные интервалы)$(\forall\lambda\ge 0)\ h_\Delta(\lambda,x)$ – непрерывна и строго возрастает на $g_\Delta(\lambda,x)$ непрерывна и строго убывает по $x\in\Delta_1$.

3) $(\forall\Delta\in\mathfrak{A}_0)(\forall\lambda\ge 0)$, если $(\exists x\in\Delta)\ h_\Delta(\lambda,x)+g_\Delta(\lambda,x)=1$, то $(\forall x\in\Delta)$ $h_\Delta(\lambda,x) + g_\Delta(\lambda,x) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Так как $g_\Delta(\lambda,x)=C_1(\lambda,x)g_\Delta(\lambda,x-0)+C_2(\lambda,x)g_\Delta(\lambda,x+0)$ и $g_\Delta(\lambda,x)$ почти всюду на Δ непрерывна, то, по непрерывности и положительности C_1 и C_2, $C_1+C_2=1$. Но так как C_1 и C_2 – главные члены разложения невозрастающих по λ функций g_τ и h_τ – должны быть невозрастающими по λ, то, следовательно, они от λ не зависят. Обозначим $C_2(\lambda,x)=C_0(x), C_1(\lambda,x)=1-C_0(x)$, где C_0 непрерывна и $0<C_0<1$.

2) Пусть $\Delta=(a,b)$ и $2\tau<b-a$. Имеем $h_\Delta(\lambda,b-\tau)=h_\tau(\lambda,b-\tau)+$ $+g_\tau(\lambda,b-\tau)h_\Delta(\lambda,b-2\tau)=C_0(b-\tau)+(1-C_0(b-\tau))h_\Delta(\lambda,b-2\tau)+\varepsilon_\tau$, где $\varepsilon_\tau\to 0(\tau\to 0)$. Отсюда

$$h_\Delta(\lambda,b-2\tau)=1+(h_\Delta(\lambda,b-2\tau)-h_\Delta(\lambda,b-\tau)+\varepsilon_\tau)/C_0(b-\tau),$$

и поэтому $h_\Delta(\lambda,b-0)=1$. Также и $g_\Delta(\lambda,a+0)=1$. Следовательно, $h_\Delta(\lambda,a+0)=g_\Delta(\lambda,b-0)=0$. Отсюда $h_\Delta(\lambda,x-\tau)=h_{(a,x)}(\lambda,x-\tau)h_\Delta(\lambda,x)\to$ $\to h_\Delta(\lambda,x)$ и $h_\Delta(\lambda,x+\tau)=h_{(x,b)}(\lambda,x+\tau)+g_{(x,b)}(\lambda,x+\tau)h_\Delta(\lambda,x)\to h_\Delta(\lambda,x)$. Так же для $g_\Delta(\lambda,x)$, т.е. $h_\Delta(\lambda,x)$ и $g_\Delta(\lambda,x)$ непрерывны по $x\in\Delta$. Далее по положительности C_1 и C_2, $(\exists\tau_0>0)(\exists\varepsilon>0)(\forall x\in\Delta)(\forall\tau<\tau_0)$ $h_\tau(\lambda,x)\geqslant\varepsilon$. Тогда $h_\Delta(\lambda,x)\geqslant h_\tau(\lambda,x)h_\tau(\lambda,x+\tau)\dots h_\tau(\lambda,x+n\tau)>0$, где $n=(b-x)/\tau$ – целое и $\tau\leqslant x-a$, т.е. $h_\Delta(\lambda,x)$ (а также $g_\Delta(\lambda,x)$) положительна на Δ. Отсюда $g_\Delta(\lambda,x), h_\Delta(\lambda,x)<1$ при $x\in\Delta$ и т.к. $h_\Delta(\lambda,x_1)=h_{(a,x_2)}(\lambda,x_1)\,h_\Delta(\lambda,x_2)$, то $h_\Delta(\lambda,x_1)<h_\Delta(\lambda,x_2)(x_1<x_2)$. Аналогично, $g_\Delta(\lambda,x_1)>g_\Delta(\lambda,x_2)$.

3) Пусть $x_0\in\Delta$ и $h_\Delta(\lambda,x_0)+g_\Delta(\lambda,x_0)=1$. Тогда для $x\in\Delta, x<x_0$

$$h_\Delta(\lambda,x_0)=h_{(x,b)}(\lambda,x_0)+g_{(x,b)}(\lambda,x_0)h_\Delta(\lambda,x),$$

$$g_\Delta(\lambda,x_0)=g_{(x,b)}(\lambda,x_0)g_\Delta(\lambda,x).$$

Откуда

$$h_\Delta(\lambda,x)+g_\Delta(\lambda,x)=(1-h_{(x,b)}(\lambda,x_0))/g_{(x,b)}(\lambda,x_0)\geqslant 1.$$

То же при $x>x_0$. Теорема доказана.

4. ТЕОРЕМА. (следствия из условий на C_1, C_2, A_1, A_2)

Пусть $(\forall\lambda\geqslant 0)(\forall x\in X)$

$$h_\tau(\lambda,x)=C_0(x)+A_2(\lambda,x)\tau+o(\tau),$$

$$g_\tau(\lambda,x)=1-C_0(x)+A_1(\lambda,x)\tau+o(\tau)$$

равномерно по x на каждом конечном интервале, коэффициенты разложения непрерывны, $C_0(x)$ и $1-C_0(x)$ положительны. Тогда $(\forall x\in X)$

$C_0(x)=1/2$ и $A_2(\lambda,x)=-A_1(\lambda,x)$ и, следовательно, $A_2(\lambda,x)$, $A_1(\lambda,x)$ не зависят от λ, т.е. $A_2(\lambda,x)=A(x)$, где A - непрерывная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x\in\Delta$ имеем

$$h_\Delta(\lambda,x)=C_0(x)h_\Delta(\lambda,x+\tau)+(1-C_0(x))h_\Delta(\lambda,x-\tau)+$$

$$+A_2(\lambda,x)\tau h_\Delta(\lambda,x+\tau)+A_1(\lambda,x)\tau h_\Delta(\lambda,x-\tau)+o(\tau),$$

$$(h_\Delta(\lambda,x)-h_\Delta(\lambda,x-\tau))(1-C_0(x))-(h_\Delta(\lambda,x-\tau)-h_\Delta(\lambda,x))C_0(x)=$$

$$=A_2(\lambda,x)\tau h_\Delta(\lambda,x+\tau)+A_1(\lambda,x)\tau h_\Delta(\lambda,x-\tau)+o(\tau).$$

Разделим обе части на τ и устремим τ к нулю. Известно, что производная неубывающей (невозрастающей) функции существуют почти во всех точках интервала (см. [2], стр.199). Пусть $\Delta'\subset\Delta$ - множество, на котором существует производная по x : $h'_\Delta(\lambda,x)$ и $g'_\Delta(\lambda,x)$. Для $x\in\Delta'(1-2C_0(x))h'_\Delta(\lambda,x)=(A_2(\lambda,x)+A_1(\lambda,x))h_\Delta(\lambda,x)$ и аналогично, $(1-2C_0(x))g'_\Delta(\lambda,x)=(A_2(\lambda,x)+A_1(\lambda,x))g_\Delta(\lambda,x)$.
Если $1-2C_0(x)\neq 0$, то

$$h'_\Delta(\lambda,x)=h_\Delta(\lambda,x)(A_2(\lambda,x)+A_1(\lambda,x))/(1-2C_0(x)),$$

$$g'_\Delta(\lambda,x)=g_\Delta(\lambda,x)(A_2(\lambda,x)+A_1(\lambda,x))/(1-2C_0(x)).$$

И так как $h'_\Delta(\lambda,x)\geqslant 0$ и $g'_\Delta(\lambda,x)\leqslant 0$, то должно быть $A_2(\lambda,x)+A_1(\lambda,x)=0$. По непрерывности, $A_2(\lambda,x)=-A_1(\lambda,x)$ при всех $x\in X$. Но производная строго возрастающей функции f почти всюду положительна (т.к. f^{-1} - неубывающая, и производная ее на интервале $f(\Delta)$ почти всюду существует). Следовательно, $(\forall x\in X)$ $1-2C_0(x)=0$. В этом случае также $A_2(\lambda,x)=-A_1(\lambda,x)$, И так как $A_2(\lambda,x)$, $A_1(\lambda,x)$ - невозрастающие по λ функции, то они не зависят от λ. Теорема доказана.

5. ТЕОРЕМА. (следствия из условий на коэффициенты разложения)
Пусть $(\exists x\in X)(\forall\lambda\geqslant 0)$

$$g_\tau(\lambda,x)=\frac{1}{2}-A(x)\tau+B_1(\lambda,x)\frac{\tau^2}{2}+o(\tau^2),$$
$$h_\tau(\lambda,x)=\frac{1}{2}+A(x)\tau-B_2(\lambda,x)\frac{\tau^2}{2}+o(\tau^2) \tag{I}$$

и $(\exists\Delta_1\in\mathfrak{A}_0)(\exists x\in\Delta_1)$ $g_{\Delta_1}(\lambda,x)$, $h_{\Delta_1}(\lambda,x)$ дважды дифференцируемы в точке x. Тогда I) $(\forall\Delta\in\mathfrak{A}_0,\ \Delta_1\subset\Delta)$ $g_\Delta(\lambda,x)$, $h_\Delta(\lambda,x)$ дважды дифференцируемы в точке и их производные удовлетворяют уравнениям:

$$g''_\Delta(\lambda,x)+4A(x)g'_\Delta(\lambda,x)+(B_1(\lambda,x)+B_2(\lambda,x))\,g_\Delta(\lambda,x)=0\ ,$$
$$h''_\Delta(\lambda,x)+4A(x)h'_\Delta(\lambda,x)+(B_1(\lambda,x)+B_2(\lambda,x))\,h_\Delta(\lambda,x)=0\ .$$

2) $(\forall\lambda>0)B_i(\lambda,x)<0$, $B_i(\lambda,x)$ – вполне монотонная функция от $\lambda\in(0,\infty)$, т.е. бесконечно-дифференцируема по λ и $(\forall k\in N)$ $(-1)^k\partial^k B_i(\lambda,x)/\partial\lambda^k\geqslant 0$, если $g_{\Delta_1}(0,x)+h_{\Delta_1}(0,x)=1$, то $B_i(0,x)=0$ $(i=1,2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Имеем $g_{\Delta_1}(\lambda,x)=\frac{1}{2}g_{\Delta_1}(\lambda,x-r)+$ $+\frac{1}{2}g_{\Delta_1}(\lambda,x+r)+A(x)r(g_\Delta(\lambda,x+r)-g_\Delta(\lambda,x-r))+$ $+B_1(\lambda,x)\frac{r^2}{2}g_\Delta(\lambda,x-r)+B_2(\lambda,x)\frac{r^2}{2}g_\Delta(\lambda,x+r)+o(r^2)$, откуда следует первое уравнение при $\Delta=\Delta_1$. Аналогично выводится второе. Утверждение относительно Δ, где $\Delta_1\subset\Delta$ следует из основного соотношения для g_Δ и h_Δ (см.I).

2. $B_i(\lambda,x)\leqslant 0$, т.к. $g_\Delta(\lambda,x), h_{\Delta_1}(\lambda,x)$ не возрастают по λ. Далее $(\forall\lambda>0)\ g_{\Delta_1}(\lambda,x)+h_{\Delta_1}(\lambda,x)=1+(B_1(\lambda,x)+B_2(\lambda,x))r^2+o(r^2)<1$. Следовательно, $B_1(\lambda,x)+B_2(\lambda,x)<0$. Далее, по определению, $g_r(\lambda,x)$ – вполне монотонная функция от λ и, следовательно, $B_1(\lambda,x)$, как предел последовательности $\left(\frac{1}{r^2}(g_r(\lambda,x)-\frac{1}{2}+A(x)r)\right)_{r>0}$, при $r\to 0$, также вполне монотонная функция от $\lambda\in(0,\infty)$, т.е. $(\forall\lambda>0)(\forall k\in N)\ (-1)^k\partial^k B_1(\lambda,x)/\partial\lambda^k\geqslant 0$. То же справедливо для $B_2(\lambda,x)$. Если $g_{\Delta_1}(0,x)+h_{\Delta_1}(0,x)=1$, то, очевидно, для $(x-r,x+r)\subset\Delta$ $g_r(0,x)+h_r(0,x)=1$, откуда $B_1(0,x)+B_2(0,x)=0$. Теорема доказана.

§ 2. <u>Исследование решений дифференциального уравнения</u>.

Мы показали что при некоторых условиях на поведение переходной функции ПМ процесса, когда параметром является окрестность начальной точки и диаметр этой окрестности стремится к нулю, эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, зависящему от двух коэффициентов. В настоящем параграфе исследуются рассеяния этого уравнения. Свойства этих решений позволяют уточнить коэффициенты разложения по степеням длины интервала и освободиться от условия дифференцируемости в теореме 5.

6. ТЕОРЕМА (полугрупповое свойство решений)

Пусть $(\forall\Delta\in\mathfrak{A}_0)\zeta_\Delta$ и η_Δ – решения на интервале Δ дифференциального уравнения

$$(d)\qquad f''+4A(x)f'+2B(\lambda,x)f=0\ ,$$

где при $\Delta=(a,b)\ \zeta_\Delta(\lambda,a)=\eta_\Delta(\lambda,b)=1$ и $\eta_\Delta(\lambda,a)=\zeta_\Delta(\lambda,b)=0$, A,B – измеримые функции, при которых существует f'', причем, $(\forall\lambda\geq 0)(\forall x\in\Delta)B(\lambda,x)\leq 0$. Тогда семейство таких решений $(\zeta_\Delta,\eta_\Delta)_{\Delta\in\mathfrak{A}_0}$ удовлетворяет системе уравнений: $(\forall\Delta_1,\Delta_2\in\mathfrak{A}_0$, $\Delta_1\subset\Delta_2)(\forall x\in\Delta_1)$

$$(s)\quad\begin{cases}\zeta_{\Delta_2}(\lambda,x)=\zeta_{\Delta_1}(\lambda,x)\,\zeta_{\Delta_2}(\lambda,c)+\eta_{\Delta_1}(\lambda,x)\,\zeta_{\Delta_2}(\lambda,d),\\ \eta_{\Delta_2}(\lambda,x)=\zeta_{\Delta_1}(\lambda,x)\,\eta_{\Delta_2}(\lambda,c)+\eta_{\Delta_1}(\lambda,x)\,\eta_{\Delta_2}(\lambda,d),\end{cases}$$

где $\Delta_1=(c,d)$,

7. ТЕОРЕМА. (разложение по степеням длины интервала).

Пусть $\zeta_\Delta(\lambda,x),\eta_\Delta(\lambda,x)$ решения уравнения (d) с указанными в теореме 6 краевыми условиями. Пусть$(\exists\Delta\in\mathfrak{A}_0)$ $A,A',B(\lambda,\cdot)$ – непрерывные по $x\in[\Delta]$ функции. Тогда

$$\zeta_\tau(\lambda,x)=\frac{1}{2}-A(x)\tau+B(\lambda,x)\frac{\tau^2}{2}+O(\tau^2),$$

$$\eta_\tau(\lambda,x)=\frac{1}{2}+A(x)\tau+B(\lambda,x)\frac{\tau^2}{2}+O(\tau^2)$$

равномерно по $x\in\Delta$, где $\zeta_\tau(\lambda,x)=\zeta_{S(x,\tau)}(\lambda,x)$, $\eta_\tau(\lambda,x)=\eta_{S(x,\tau)}(\lambda,x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (d) эквивалентно следующим интегродифференциальным уравнениям ([3] , стр.77): $(\forall a\in R^1)$

$$f'(x)=f'(a)+f(a)\int_a^x B_1(x_1)\,dx_1+\int_a^x A_1(x_1)f'(x_1)\,dx_1+$$
$$+\int_a^x B_1(x_1)\int_a^{x_1} f'(x_2)\,dx_2\qquad\text{при } x\geq a,$$

$$f'(x)=f'(a)-f(a)\int_x^a B_1(x_1)\,dx_1-\int_x^a A(x_1)f'(x_1)\,dx_1+$$
$$+\int_x^a B_1(x_1)\int_{x_1}^a f'(x_2)\,dx_2\qquad\text{при } x\leq a,$$

где $-4A(x)=A_1(x)$, $-2B(\lambda,x)=B_1(x)$. Или

$$f'=\begin{cases}f'(a)+f(a)\int_a B_1+(\int_a A_1+\int_a B_1\int_a)f' & \text{на } [a,\infty)\\ f'(a)-f(a)\int_a B_1+(-\int^a A_1+\int^a B_1\int^a)f' & \text{на } (-\infty,a],\end{cases}$$

где $\int_a$ и $\int^a$ – интегральные операторы:

$$(\int_a F)(x)=\int_a^x F(x_1)\,dx_1, \quad (\int^a F)(x)=\int_x^a F(x_1)\,dx_1$$

определенные на банаховом пространстве непрерывных функций с равномерной нормой $\|\cdot\|_c^d$, заданных на некотором интервале $[c,d]: c\leq a\leq d$. Частное решение f_a этого уравнения при $f_a(a)=0,\ f_a'(a)=1$ имеет вид

$$f_a'=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_a A_1+\int_a B_1\int_a\right)^k \mathbb{1}, & x\geq a\\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\int^a A_1+\int^a B_1\int^a\right)^k \mathbb{1}, & x\leq a,\end{cases}$$

где, как нетрудно показать,

$$\left\|\left(\int_a A_1+\int_a B_1\int_a\right)^k\mathbb{1}\right\|_a^x\leq\sum_{\ell=0}^{k}C_k^{\ell}\left(\|A_1\|_a^x\right)^{k-\ell}\left(\|B_1\|_a^x\right)^{\ell}\frac{(x-a)^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\leq$$

$$\leq\frac{1}{k!}\left(\|A_1\|_a^x(x-a)+\|B_1\|_a^x(x-a)^2\right)^k, \quad (x\geq a)$$

$$\left\|\left(-\int^a A_1+\int^a B_1\int^a\right)^k\mathbb{1}\right\|_x^a\leq\frac{1}{k!}\left(\|A_1\|_x^a(a-x)+\|B_1\|_x^a(a-x)^2\right)^k, \quad (x\leq a).$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится равномерно на каждом конечном интервале, если A_1 и B_1 ограничены (существование производной A' для этого не требуется). Отсюда

$$f_a=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty}\int_a\left(\int_a A_1+\int_a B_1\int_a\right)^k\mathbb{1}, & x\geq a,\\ -\sum_{k=0}^{\infty}\int^a\left(-\int^a A_1+\int^a B_1\int^a\right)^k\mathbb{1}, & x\leq a\end{cases}$$

– частное решение уравнения (d) теоремы 6. Так как $f_a(x)=x-a+ +o(x-a)$ при $x-a\to 0$, то при любых непрерывных A_1, B_1 решения f_a, f_b $(a\neq b)$ линейно независимы при достаточно малых $|a-b|$. Следовательно, при достаточно малых $b-a$ общее решение уравнения (d) теоремы 6 имеет вид $f=C_1f_a+C_2f_b$. Отсюда на $\Delta=(a,b)$ имеем $\zeta_\Delta(\lambda,x)=f_b(x)/f_b(a)$, $\eta_\Delta(\lambda,x)=f_a(x)/f_a(b)$. Имеем далее при $x\geq a$

$$f_a(x)=x-a+\int_a^x dx_1\int_a^{x_1}A_1(x_2)\,dx_2+\int_a^x dx_1\int_a^{x_1}B_1(x_2)(x_2-a)\,dx_2+$$

$$+\int_a^x dx_1\int_a^{x_1} A_1(x_2)\,dx_2\int_a^{x_2} A_1(x_3)\,dx_3 + O(x-a)^3$$

и при $x\leq a$ $\quad f_a(x) = x-a+\int_x^a dx_1\int_{x_1}^a A_1(x_2)\,dx_2 -$

$$-\int_x^a dx_1\int_{x_1}^a B_1(x_2)(a-x_2)\,dx_2-\int_x^a dx_1\int_{x_1}^a A(x_2)\,dx_2\int_{x_2}^a A(x_3)\,dx_3+O(x-a)^3 .$$

Используя непрерывность A_1, A_1', B_1 получаем:

$$\eta_\tau(\lambda,x)=\frac{\tau+A_1(x)\tau^2/2+(B_1(x)+A_1^2(x)-2A_1'(x))\tau^3/6+o(\tau^3)}{2\tau+2A_1(x)\tau^2+(B_1(x)+A_1^2(x)-A_1'(x)/2)8\tau^3/6+o(\tau^3)}$$

$$\zeta_\tau(\lambda,x)=\frac{-\tau+A_1(x)\tau^2/2-(B_1(x)+A_1^2(x)-2A_1'(x))\tau^3/6+o(\tau^3)}{-2\tau+2A_1(x)\tau^2-(B_1(x)+A_1^2(x)-A_1'(x)/2)8\tau^3/6+o(\tau^3)} .$$

При этом $\eta_\tau(\lambda,x), \zeta_\tau(\lambda,x)\to 1/2$ $(\tau\to 0)$. Далее

$$\frac{1}{\tau}\Big(\eta_\tau(\lambda,x)-\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1+A_1(x)\tau/2+o(\tau)}{2+2A_1(x)\tau+o(\tau)}-\frac{1}{2}\Big)\longrightarrow -A_1(x)/4=A(x)$$

равномерно по x в каждом конечном интервале

$$\frac{1}{\tau^2}(\eta_\tau(\lambda,x)-1/2+A_1(x)\tau/4)=$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\Big(\frac{1+A_1(x)\tau/2+(B_1(x)+A_1^2(x)-2A_1'(x))\tau^2/6+o(\tau^2)}{2+2A_1(x)\tau+(B_1(x)+A_1^2(x)-A_1'(x)/2)8\tau^2/6+o(\tau^2)}-$$

$$-\frac{1-A_1(x)\tau/2}{2}\Big)=\frac{-B_1(x)\tau^2+o(\tau^2)}{\tau^2\cdot 2(2+o(\tau))}\longrightarrow\frac{-B_1(x)}{4}=B(\lambda,x)/2$$

равномерно по x в каждом конечном интервале. Аналогично,

$$\frac{1}{\tau}\Big(\zeta_\tau(\lambda,x)-\frac{1}{2}\Big)\to -A(x),\quad \frac{1}{\tau^2}\Big(\zeta_\tau(\lambda,x)-\frac{1}{2}+A(x)\tau\Big)\to\frac{B(\lambda,x)}{2}$$

$(\tau\to 0)$ равномерно по x в каждом конечном интервале. Теорема доказана.

8. ЗАМЕЧАНИЕ. Используя формулу из доказательства теоремы 7 для решения уравнения (d) теоремы 6 можно получить следующие разложения по степеням длины интервала в случае отсутствия производной функции A в точке x :

$$g_\tau(\lambda,x)=\frac{1}{2}-A(x)\tau+(B(\lambda,x)-\sigma)\tau^2/2+o(\tau^2),$$

$$h_\tau(\lambda,x)=\frac{1}{2}+A(x)\tau+(B(\lambda,x)+\delta)\tau^2/2+O(\tau^2),$$

если существует предел

$$\delta=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau^3}\int_{x-\tau}^{x+\tau}(A(x_1)-A(x))(\tau-|x-x_1|)\,dx_1 .$$

9. ТЕОРЕМА (решение разностного уравнения)

Для любых последовательностец $\alpha=(a_k,b_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ пар ненулевых чисел и любого целого M функция $f_M(\alpha)=f_M(\alpha|\cdot)$ является частным решением разностного уравнения

$$(z)\qquad z(k)=a_k z(k+1)+b_k z(k-1)$$

$(k\in Z)$, где Z - множество целых чисел, $f_M(\alpha|k)=f(\theta_M\alpha|k-M)$,

$$f(\alpha|0)=0,\ f(\alpha|k)=F_{k-2}(\alpha)\Big/\prod_{i=1}^{k-1}a_i\qquad(k\in N),$$

$$f(\alpha|-k)=(-a_0/b_0)F_{k-2}(\theta_{-k}\alpha)\Big/\prod_{i=1}^{k-1}b_{-i}\qquad(k\in N),$$

$$F_0(\alpha)=F_{-1}(\alpha)=1,\quad F_k(\alpha)=\sum\nolimits_{s\in\hat{C}_k}B_k(s)\prod\nolimits_{i\in s}p_i\quad(k\in N),$$

$$p_i=1/4-a_i b_{i+1},$$

$\hat{C}_k$ - класс таких сочетаний s из множества $\{1,\dots,k\}$, что для любых $x_1,x_2\in s:|x_1-x_2|\geqslant 2$; коэффициенты $B_k(s)$, зависящие от вида сочетания s, определяются следующим способом. Пусть $[s]=\{x\in R^1:|x-s|\leqslant 1\}$, $n(s)$ - число интервалов, составляющих множество $(0,k+1)\setminus[s]$; $I_1,\dots,I_{n(s)}$ - эти интервалы, $k_i(s)$ - число точек во множестве $s\cap I_i\ (1\leqslant i\leqslant n(s))$. При этом

$$B_k(s)=\prod_{i=1}^{n(s)}(k_i(s)+2)/2^{k_i(s)+1}.$$

Если $f_{M_1}(\cdot|M_2)\neq 0$, то f_{M_1} и f_{M_2} линейно независимы. В частности при $p_i>0\ (\forall i)$ f_{M_1} и $f_{M_2}\ (M_1\neq M_2)$ линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(\forall\alpha)\,f(\alpha)=f(\alpha|\cdot)$ является решением уравнения (z), то $(\forall k\in Z)$

$$f(\theta_M\alpha|k)=a_{k+M}f(\theta_M\alpha|k+1)+b_{k+M}f(\theta_M\alpha|k-1),$$

откуда $f_M(\alpha|k)=a_k f_M(\alpha|k+1)+b_k f_M(\alpha|k-1)$.

Далее, равенство $f(\alpha|k)=a_k f(\alpha|k+1)+b_k f(\alpha|k-1)$ очевидно справедливо для $k=-1,0,1$, а для $k\geqslant 2$ или $k\leqslant -2$ оно равносильно равенству

(F) $\quad F_{k+1}(\alpha) = F_k(\alpha) - \left(\frac{1}{4} - p_{k+1}\right) F_{k-1}(\alpha) \qquad (k \geq 0)$.

Действительно. Для $k \geq 2$ $\quad a_k f(\alpha | k+1) + b_k f(\alpha | k-1) =$

$$= a_k F_{k-1}(\alpha) / \prod_{i=1}^{k} a_i + b_k F_{k-3}(\alpha) / \prod_{i=1}^{k-2} a_i = \left(F_{k-1}(\alpha) + \left(\frac{1}{4} - p_{k-1}\right) F_{k-3}(\alpha)\right) / \prod_{i=1}^{k-2} a_i ,$$

что равно $f(\alpha | k)$ тогда и только тогда, когда справедливо (F). Также при $k \geq 2$ $\quad a_{-k} f(\alpha | -k+1) + b_{-k} f(\alpha | -k-1) =$

$$= a_{-k}(-a_0/b_0) F_{k-3}(\theta_{-k-1}\alpha) / \prod_{i=1}^{k-2} b_{-i} + b_{-k}\left(-\frac{a_0}{b_0}\right) F_{k-1}(\theta_{-k-1}\alpha) / \prod_{i=1}^{k} b_{-i} =$$

$$= (-a_0/b_0)\left(\left(\frac{1}{4} - p_{-k}\right) F_{k-3}(\theta_{-k+1}\alpha) - F_{k-1}(\theta_{-k-1}\alpha)\right) / \prod_{i=1}^{k-1} b_{-i} ,$$

что при всех α равно $f(\alpha | -k)$ тогда и только тогда, когда $(\forall \alpha)$

$$\left(\frac{1}{4} - p_k\right) F_{k-3}(\theta_{-k-1}\alpha) + F_{k-1}(\theta_{-k-1}\alpha) = F_{k-2}(\theta_{-k}\alpha) .$$

Заменяя α на $\theta_{k+1}\alpha$, получаем

(F′) $\quad F_{k-1}(\alpha) = F_{k-2}(\theta_1\alpha) - \left(\frac{1}{4} - p_1\right) F_{k-3}(\theta_2\alpha)$.

Замечаем, что $F_k(\alpha)$, зависящее только от $p_1, \ldots, p_k$, не изменится, если изменить порядок: $F_k(p_1, \ldots, p_k) = F_k(p_k, \ldots, p_1)$. Тогда $F_{k-2}(\theta_1\alpha) = F_{k-2}(p_2, \ldots, p_{k-1}) = F_{k-2}(p_{k-1}, \ldots, p_2)$, $F_{k-3}(\theta_2\alpha) = F_{k-3}(p_3, \ldots, p_{k-1}) = F_{k-3}(p_{k-1}, \ldots, p_3)$, откуда следует, что (F′) равносильно (F). Пусть $k \geq 0$. Левая часть (F) равна

$$\sum_{s \in \hat{C}_{k+1}} B_{k+1}(s) \prod_{i \in s} p_i = \sum_{s \in \hat{C}_{k-1}} B_{k+1}(s) \prod_{i \in s} p_i +$$

$$+ \sum_{s \in \hat{C}_{k-2}} B_{k+1}(s,k) \prod_{i \in s} p_i p_k + \sum_{s \in \hat{C}_{k-1}} B_{k+1}(s,k+1) \prod_{i \in s} p_i p_{k+1} ,$$

что соответствует трем взаимно исключающим возможностям: $s \in \hat{C}_{k+1}$ $\Longleftrightarrow$ 1) $s \in \hat{C}_{k-1}$, или 2) $s = (s_1, k)$, где $s_1 \in \hat{C}_{k-2}$, или 3) $s = (s_1, k+1)$, где $s_1 \in \hat{C}_{k-1}$. Правая часть (F) равна

$$\sum_{s \in \hat{C}_k} B_k(s) \prod_{i \in s} p_i - \left(\frac{1}{4} - p_{k+1}\right) \sum_{s \in \hat{C}_{k-1}} B_{k-1}(s) \prod_{i \in s} p_i =$$

$$=\sum_{s\in\hat{C}_{k-1}} B_k(s)\prod_{i\in s} p_i+\sum_{s\in\hat{C}_{k-2}} B_k(s,k)\prod_{i\in s} p_i p_k-\left(\frac{1}{4}-p_{k+1}\right)\sum_{s\in\hat{C}_{k-1}} B_{k-1}(s)\prod_{i\in s} p_i \ .$$

Сравним коэффициенты при одинаковых сочетаниях: I) если $k+1, k\notin s$ ($s\in\hat{C}_{k-1}$), тогда слева $B_{k+1}(s)$, справа $B_k(s)-\frac{1}{4}B_{k-1}(s)$. При этом

$$B_{k+1}(s)=\prod_{i=1}^{n_1(s)}(k_{1i}(s)+2)\,2^{-k_{1i}(s)-1},\ B_k(s)=\prod_{i=1}^{n_2(s)}(k_{2i}(s)+2)\,2^{-k_{2i}(s)-1},$$

$$B_{k-1}(s)=\prod_{i=1}^{n_3(s)}(k_{3i}(s)+2)\,2^{-k_{3i}(s)-1} \ .$$

Если $(k-1)\in s$, то $n_1(s)=n_2(s)=n_3(s)+1$, $k_{1n_1}(s)=1$, $k_{2n_2}(s)=0$ для остальных i: $k_{1i}(s)=k_{2i}(s)=k_{3i}(s)$. Тогда $B_{k+1}(s)=$ то $=B_k(s)-B_{k-1}(s)/4 \Longleftrightarrow 3/4=1-1/4$. $(k-1)\notin s$, $n_1(s)=n_2(s)=n_3(s)$, $k_{1n_1}(s)-2=k_{2n_2}(s)-1=k_{3n_3}(s)$; для остальных i: $k_{1i}=k_{2i}=k_{3i}$. При этом $B_{k+1}(s)=B_k(s)-B_{k-1}(s)/4 \Longleftrightarrow (k_{3n_3}+4)/4=(k_{3n_3}+3)/2-(k_{3n_3}+2)/4$. 2) Если $s=(s_1,k)$, где $s_1\in\hat{C}_{k-2}$, тогда слева $B_{k+1}(s_1,k)$, справа $B_k(s_1,k)$. При этом $n_1(s)=n_2(s)+1$, $k_{1n}(s)=0$; для остальных i: $k_{1i}(s)=k_{2i}(s)$. Тогда $B_{k+1}(s)=B_k(s)\Longleftrightarrow 2/2=1$. 3) Если $s=(s_1,k+1)$, где $s_1\in\hat{C}_{k+1}$, тогда слева $B_{k+1}(s_1,k+1)$, справа $B_{k-1}(s_1)$. Если $(k-1)\in s_1$, то $n_1(s_1,k+1)=n_2(s_1)$ и $(\forall i)\,k_{1i}(s_1,k+1)=k_{2i}$; отсюда $B_{k+1}(s_1,k+1)=B_{k-1}(s_1)$. Если $(k-1)\notin s_1$, то также $n_1(s_1,k+1)=n_2(s_1)$ и $k_{1i}(s_1,k+1)=k_{2i}$, и $B_{k+1}(s_1,k+1)=B_{k-1}(s_1)$. Заключение о линейной независимости f_{M_1} и f_{M_2} ($M_1\neq M_2$) очевидно. Теорема доказана.

IO. ТЕОРЕМА. (уточнение коэффициентов разложения)

Пусть $(g_\Delta,h_\Delta)_{\Delta\in\mathfrak{U}_0}$ – переходные функции непрерывного полумарковского процесса на прямой и $(\exists\Delta\in\mathfrak{U}_0)(\exists\lambda\geq 0)$

$$g_\tau(\lambda,x)=\frac{1}{2}-A(x)\tau+B_1(\lambda,x)\tau^2/2+o(\tau^2),$$

$$h_\tau(\lambda,x)=\frac{1}{2}+A(x)\tau+B_2(\lambda,x)\tau^2/2+o(\tau^2)$$

равномерно по всем $x\in\Delta$, причем, функции $A, A', B_1(\lambda,\cdot), B_2(\lambda,\cdot)$ непрерывны на $[\Delta]$. Тогда $B_1=B_2=B$ и g_Δ и h_Δ – дважды дифференцируемы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что g_Δ, h_Δ совпадают с соответствующими решениями ζ_Δ и η_Δ уравнения (d) теоремы 6 при $2B(\lambda,x)=B_1(\lambda,x)+B_2(\lambda,x)$. В этом случае по теореме 7 мы получили бы, что $B_1=B_2=(B_1+B_2)/2$. Пусть $x\in\Delta\in(a,b)$, причем отношение $(x-a)/(b-x)$ рационально. Рассмотрим последовательность $\tau\downarrow 0$, для которой $(x-a)/\tau,(b-x)/\tau$ – целые числа. Будем сравнивать h_Δ (g_Δ) с решением $\eta_\Delta(\zeta_\Delta)$ уравнения (d) при тех же граничных условиях. По основному свойству ПМ процесса:

$$h_\Delta(\lambda,x)=g_\tau(\lambda,x)\,h_\Delta(\lambda,x-\tau)+h_\tau(\lambda,x)\,h_\Delta(\lambda,x+\tau).$$

При этом $h_\Delta(\lambda,a)=\eta_\Delta(a)=0,\ \ h_\Delta(\lambda,b)=\eta_\Delta(b)=1$.
Пусть $(x-a)/\tau=k,\ (b-a)/\tau=\ell$. Согласно теореме 9 общее решение уравнения (z) имеет вид (если $f_0(\alpha|\ell)\neq 0$) $z=C_1f_0+C_2f_\ell$, и так как $f_\ell(\alpha|\ell)=0$, то при краевых условиях $z(0)=0,z(\ell)=1$ имеем $C_2=0$ и $C_1=(f_0(\alpha|\ell))^{-1}$. Следовательно,

$$h_\Delta(\lambda,x)=\prod_{j=k}^{\ell-1}h_\tau(\lambda,j\tau)\,F_{k-2}(\alpha_\tau)/F_{\ell-2}(\alpha_\tau),$$

где $\alpha_\tau=(h_\tau(\lambda,k\tau),g_\tau(\lambda,k\tau))_{k=-\infty}^{\infty}$ и $P_{j\tau}=1/4-h_\tau(\lambda,j\tau)$.
Далее стандартной заменой $f=F\exp(-\int_a^x 2A)$ уравнение (d) теоремы 6 приводится к виду $F''-(-2A'-4A^2+2B)F=0$ [I]. Согласно теореме 7 решение F_1 этого уравнения (единственное при достаточно малых $b-a$) при краевых условиях: $F_1(a)=0$ и $F_1(b)=$ $=\exp\int_a^b 2A$, имеет вид $F_1(x)=\exp(\int_a^{b}2A)\cdot f_a(x)/f_a(b)$, где $f_a=\sum_{k=0}^{\infty}\int_a(\int_a p\int_a)^k\mathbb{1}$ при $x\geq a$ и где $p(x)=2A'(x)+$ $+4A^2(x)-2B(\lambda,x)$. Из этого представления легко получить:

$$f_a(x)=x-a+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta_k(a,x)}\prod_{i=1}^{k}p(x_i)\prod_{i=1}^{k+1}(x_i-x_{i-1})\,dx_1\ldots dx_k,$$

где $\Delta_k(a,b)=\{(x_1,\ldots,x_k):x_0=a<x_1<\ldots<x_k<b=x_{k+1}\}$. Аналогично, решение F_2 при краевых условиях $F_2(a)=1$ и $F_2(b)=0$ имеет вид $F_2(x)=f_b(x)/f_b(a)$, где $f_b=-\sum_{k=0}^{\infty}\int^b(\int^b p\int^b)^k\mathbb{1}$ при $x\leq b$, т.е. $f_b(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta_k(x,b)}\prod_{i=1}^{k}p(x_i)\prod_{i=1}^{k+1}(x_i-x_{i-1})dx_1\ldots dx_k$, откуда следует, что $f_a(b)=-f_b(a)$. Отсюда

$$\eta_\Delta(\lambda,x)=e^{\int_x^b 2A}f_a(x)/f_a(b)\quad\text{и}\quad \zeta_\Delta(\lambda,x)=e^{-\int_a^x 2A}(-f_b(x))/f_a(b).$$

Из условия теоремы следует, что $2^{\ell-k}\prod_{j=k}^{\ell-1} h_r(\lambda, jr) \to \exp\int_x^b 2A$
Остается доказать, что $\dfrac{2^{k-1}F_{k-2}(\alpha r)}{2^{\ell-1}F_{\ell-2}(\alpha r)} \to \dfrac{f_a(x)}{f_a(b)}$,
и если $f_a(b) \neq 0$, что верно при достаточно малых $b-a$, то теорема будет доказана, если доказать, что $r2^{k-1}F_{k-2}(\alpha_r) \to f_a(x)$, $r2^{\ell-1}F_{\ell-2}(\alpha_r) \to f_a(b)$. Имеем

$$h_r(\lambda,x)g_r(\lambda,x+r) = \left(\tfrac{1}{2}+A(x)r+B_1(\lambda,x)r^2/2+o(r^2)\right)\left(\tfrac{1}{2}-A(x+r)r+\right.$$

$$\left.+B_2(\lambda,x+r)r^2/2+o(r^2)\right) = \frac{1}{4}+(A(x+r)-A(x))\frac{r}{2}-A(x)A(x+r)r^2+$$

$$+(B_1(\lambda,x)+B_2(\lambda,x+r))r^2/4+o(r^2) = \frac{1}{4}-(A'(x)/2+A^2(x)-$$

$$-(B_1(\lambda,x)+B_2(\lambda,x))/4)r^2+o(r^2) = \frac{1}{4}-p(x)r^2/4+o(r^2)$$

равномерно по $x \in \Delta$. Отсюда $p_{jr} = p(jr)r^2/4+o(r^2)$. Далее

$$F_k(\alpha_r) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \sum_{s\in\hat{C}_k^i} B_k(s)\prod_{j\in s} p_{jr} =$$

$$= (k+2)2^{-k-1} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \sum_{s\in\hat{C}_k^i} B_k(s)\prod_{j\in s} p_{jr};$$

Назовем $s \in \hat{C}_k^i$ (сочетание $s \in \hat{C}_k$, состоящее из i элементов) правильным, если $(\forall x\in s)\, x \notin \{1,k\}$ и $(\forall x_1,x_2 \in s)\,|x_1-x_2| \geq 3$. Пусть $\bar{C}_k^i$ множество всех правильных сочетаний из i элементов $\hat{C}_k^i, \bar{C}_k^i$ – числа элементов в $\hat{C}_k^i$ и $\bar{C}_k^i$ соответственно. Пользуясь очевидными тождествами $\hat{C}_k^i = \hat{C}_{k+1}^i + \hat{C}_{k-2}^{i-1}$ и $\bar{C}_k^i = \bar{C}_{k-1}^i + \bar{C}_{k-3}^{i-1}$ нетрудно доказать, что $\hat{C}_k^i = C_{k+1-i}^i$, $\bar{C}_k^i = C_{k-2i}^i$.
Имеем далее

$$\sum_{s\in\hat{C}_k^i\setminus\bar{C}_k^i} B_k(s)\prod_{i\in s} p_{jr} \leq \sup_{s\in\hat{C}_k^i} B_k(s)\, p_r^i(\hat{C}_k^i - \bar{C}_k^i),$$

где $(\exists M>0)\; p_r \equiv \sup_{0\leq j\leq k}|p_{jr}| \leq Mr^2 = M\dfrac{(x-a)^2}{k^2}$. Имеем
$B_k(s) = \prod_{i=1}^{n(s)}(k_i(s)+2)2^{-k_i(s)-1}$. Пусть $n(s) = i+1-d$. Тогда, очевидно, $\sum_{i=1}^{n(s)} k_i(s) = k-3i+d$ (d – число "дефектов" в сочетании s, т.е. число точек $x \in \{1,\dots,k\}\setminus s$ таких, что $x-1, x+1 \in$

$\in \mathfrak{s}_{n(\mathfrak{s})}$, или же $x \in \{1,k\} \cap \mathfrak{s}$. Отсюда $B_k(\mathfrak{s}) = 2^{-(k-2i+1)}_{n(\mathfrak{s})} \times$
$\times \prod_{i=1} (k_i(\mathfrak{s})+2)$. При $n(\mathfrak{s}) > 0$ и фиксированной сумме $\sum_{i=1}^{n(\mathfrak{s})} (k_i(\mathfrak{s})+2) =$
$= k-i+2-d$ максимум произведения $\prod_{i=1}^{n(\mathfrak{s})} (k_i(\mathfrak{s})+2)$ не больше
$((k-i+2-d)/n(\mathfrak{s}))^{n(\mathfrak{s})} \leqslant (k-i+2-d)^{i+1-d} \leqslant (k-i+2)^{i+1}$. Следовательно,
$B_k(\mathfrak{s}) \leqslant 2^{-k+2i-1}(k-i+2)^{i+1}$. Отсюда $\left(\frac{2k}{k}\right) \sum_{\mathfrak{s} \in \hat{C}_k^i \setminus \bar{C}_k^i} B_k(\mathfrak{s}) \times$
$\times \prod_{i \in \mathfrak{s}} p_{i\tau} \leqslant 2^{2i-1}((k-i+2)/k)^{i+1} M^i (x-a)^{2i} (C^i_{k+1-i} - C^i_{k-2i})/k^i \longrightarrow 0$
при $k \to \infty$. Для правильных сочетаний $\mathfrak{s}$ имеем

$$(2^{k+1}/k) \sum_{\mathfrak{s} \in \bar{C}_k^i} B_k(\mathfrak{s}) \prod_{j \in \mathfrak{s}} p_{j\tau} = \sum_{\ell_1=2}^{k-3(i-1)} \sum_{\ell_2=\ell_1+3}^{k-3(i-2)} \dots \sum_{\ell_i=\ell_{i-1}+3}^{k-1} 2^{2i} \times$$

$$\times (\ell_1/k) \prod_{j=2}^{i} (\ell_j - \ell_{j-1} - 1)(k-\ell_i+1) \prod_{j=1}^{i} p_{\ell_j \tau} = (x-a)^{-1} \sum_{(\ell_1,\dots,\ell_i) \in \bar{C}_k^i} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{i} (4p_{\ell_j\tau}/\tau^2) x_{1\tau} \prod_{j=2}^{i} (x_{j\tau} - x_{j-1,\tau} - \tau)(x - x_{i\tau} + \tau)\, \tau^i ,$$

где $x_{i\tau} = \ell_i \tau$. Последняя сумма является суммой Дарбу интеграла

$$\int_{\Delta_k(a,x)} \prod_{i=1}^{k} p(x_i)(x_1-a) \prod_{i=2}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)(x - x_k)\, dx_1 \dots dx_k ,$$

к которому она сходится в виду равномерной сходимости
$4p\ell_j\tau/\tau^2 \to p(x_i)$, где $x_i = \lim x_{i\tau} (\tau \to 0)$. Из предыдущих оценок следует равномерная по $\tau > 0$ абсолютная сходимость рядов $2^{k+1} F_k(\alpha_\tau)/k$, и следовательно,

$$2^{k+1} F_k(\alpha_\tau)/k = (k+2)/k + \sum_{i=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (2^{k+1}/k) \sum_{\mathfrak{s} \in \hat{C}_k^i} B_k(\mathfrak{s}) \times$$

$$\times \prod_{j \in \mathfrak{s}} p_{j\tau} \to 1 + (x-a)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k(a,x)} \prod_{i=1}^{k} p(x_i) \prod_{i=1}^{k+1} (x_{i+1} - x_i)\, dx_1 \dots dx_k$$

(см. теорему 7), т.е. $\tau 2^{k+1} F_k(\alpha_\tau) = (x-a) 2^{k+1} F_k(\alpha_\tau)/k \to f_a(x)$.
Очевидно, $\tau 2^{k-1} F_{k-2}(\alpha_\tau) \to f_a(x)$ и $\tau 2^{\ell-1} F_{\ell-2}(\alpha_\tau) \to f_a(b)$.
При достаточно малых $b-a$ этот предел больше нуля при любом знаке функции $p(x)$. Отсюда следует, что $h_\Delta(\lambda,x) = \eta_\Delta(\lambda,x)$ во всех рациональных точках интервала Δ и по непрерывности они равны при всех $x \in \Delta$. Аналогично устанавливается равенство $g_\Delta(\lambda,x) = z_\Delta(\lambda,x)$, которое также следует из принципа двойствен-

ности. Теорема доказана.

II. ТЕОРЕМА (свойство переходных функций ПМ процесса)

Пусть $(g_\Delta, h_\Delta)_{\Delta\in\mathfrak{A}_0}$ – семейство переходных функций непрерывного полумарковского процесса на прямой. Пусть $(\forall\lambda>0)(\forall x\in R^1)$

$$g_r(\lambda,x)=C_1(\lambda,x)+A_1(\lambda,x)r+B_1(\lambda,x)r^2/2+o(r^2),$$

$$h_r(\lambda,x)=C_2(\lambda,x)+A_2(\lambda,x)r+B_2(\lambda,x)r^2/2+o(r^2)$$

равномерно по x в каждом конечном интервале, причем $(\forall\lambda>0)$ $C_i(\lambda,\cdot), A_i(\lambda,\cdot), \frac{\partial}{\partial x}A_i(\lambda,\cdot), B_i(\lambda,\cdot)$ непрерывны по x, $C_i(\lambda,\cdot)>0$ $(i=1,2)$. Тогда $C_1(\lambda,\cdot)=C_2(\lambda,\cdot)=\frac{1}{2}$, $A_1(\lambda,\cdot)=-A_2(\lambda,\cdot)\equiv A(\cdot)$ – не зависит от λ, $B_1(\lambda,\cdot)=B_2(\lambda,\cdot)\equiv B(\lambda,\cdot)\leq 0$, $(\forall\lambda>0)\,B(\lambda,\cdot)<0$, $(\forall x\in R)\,B(\cdot,x)$ вполне монотонна, $(\forall\Delta\in\mathfrak{A}_0)\,g_\Delta, h_\Delta$ на Δ дважды дифференцируемы и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$f''+4A(x)f'+2B(\lambda,x)f=0.$$

Доказательство следует из теорем 3, 4, 5, 10.

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1971.
2. Натансон И.П. Теория функции вещественной переменной М., 1974.
3. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, I, М., 1953.
4. Харламов Б.П. Случайные процессы с полумарковскими потоками первых вхождений. – Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1974, т. 41, с.139-164.
5. Харламов Б.П. Выходящие последовательности и непрерывные полумарковские процессы на прямой. – Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1982, т.119, с.230-236.