ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2007, том 47, № 12, с. 2014–2022

УДК 519.658

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ОПТИМИЗАЦИИ С КОНЕЧНОШАГОВЫМИ ВНУТРЕННИМИ АЛГОРИТМАМИ В ВЫПУКЛЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ[1)]

© 2007 г. **И. П. Антипин, А. З. Ишмухаметов, Ю. Г. Карюкина**

(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: aleks@ccas.ru

Поступила в редакцию 06.05.2006 г.
Переработанный вариант 26.04.2007 г.

Предлагаются численные методы для решения конечномерных выпуклых задач с ограничениями типа неравенств при выполнении условия Слейтера. Для задач, в которых сумма целевой функции и функций ограничений является строго равномерно выпуклой, предложен и обоснован численный метод, основанный на решении двойственной к исходной регуляризованной задачи. Для этого метода получены условия сходимости, оценки скорости сходимости по функционалу, по аргументу ко множеству оптимальных элементов и к g-нормальному решению. Для более общих выпуклых конечномерных задач минимизации с ограничениями типа неравенств предлагаются два метода с конечношаговыми внутренними вычислительными процедурами, основанных на методах проекции и условного градиента. Решаются конечномерные задачи, которые получаются при аппроксимации бесконечномерных задач, в частности задач оптимального управления системами с сосредоточенными и распределенными параметрами. Библ. 11.

Ключевые слова: выпуклые конечномерные задачи оптимизации, ограничения типа неравенств, численные методы оптимизации, методы регуляризации.

В теории оптимизации, в частности в задачах математического программирования, при разработке численных методов актуальными являются вопросы их практической реализуемости, эффективности и доведения их до алгоритмов. К таким вопросам относятся разработка методов, алгоритмов без бесконечных внутренних вычислительных процедур, поиск и формулировка критериев, правил останова. Предлагаемые в данной статье методы направлены на решение этих вопросов. Они построены на основе метода регуляризации (см. [1]), методов проекции, условного градиента и двойственного метода (см. [2]–[8]). Для них получены критерии останова, доказаны оценки скорости сходимости по функционалу, сходимость по аргументу ко множеству оптимальных элементов и к нормальному оптимальному элементу. Они в абстрактном, для бесконечномерных гильбертовых пространств предложены в [9], [10]. В конечномерных задачах они имеют свои особенности; в частности, это связано с эквивалентностью слабой и сильной топологий. Кроме того, отметим, что обоснование методов проводится при условии непрерывности градиентов целевой и функций ограничений, и рассматриваются случаи, когда параметр регуляризации можно положить равным нулю, т.е. при отсутствии регуляризации.

Предлагаемые методы являются аналогами предложенных ранее методов, включая бесконечномерные пространства, в частности в задачах оптимального управления с сосредоточенными и распределенными параметрами. Эти методы можно использовать при конечномерных аппроксимациях бесконечномерных задач, что и является целью работы. Поэтому естественно изучить их в конечномерном пространстве и далее совершать предельный переход к исходной задаче. В частности, особенностью методов в конечномерных пространствах является то, что в некоторых случаях параметр регуляризации можно положить нулю, т.е. регуляризации не требуется. Кроме того, методы обоснованы для квадратичных целевых функций и с квадратичными функциями, задающими ограничения на допустимые элементы. В этом случае они сводятся к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00619, 07-01-00416).

1. ОБЩИЕ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ со скалярным произведением и нормой, соответственно, $\langle a, b\rangle = \Sigma_{i=1}^n a_i b_i$ и $\|a\|^2 = \Sigma_{i=1}^n a_i^2$ рассмотрим выпуклую задачу минимизации

$$J(u) \longrightarrow \inf, \quad u \in U \subset \mathbb{E}^n, \tag{1.1}$$

где U – выпуклое, ограниченное, замкнутое множество, $J(u)$, $u \in \mathbb{E}^n$, – выпуклая, непрерывно дифференцируемая функция.

Обозначим решения задачи (1.1): нижнюю грань функционала – через $J^* = \inf\limits_{u \in U} J(u)$, множество оптимальных элементов – через $U^* = \{u \in U: J(u) = J^*\}$. Будем рассматривать случай ограничений типа неравенств

$$U = \{u \in \mathbb{E}^n: g_i(u) \leqslant 0, i \in I\}, \quad I = \{1, 2, \ldots, m\}, \tag{1.2}$$

где $g_i(u)$, $u \in \mathbb{E}^n$, $i \in I$, – выпуклые, непрерывно дифференцируемые функции и для множества U выполняется условие Слейтера, т.е. существует элемент $u_c \in U$ такой, что для $g_i(u_c) < 0$, $i \in I$. Будем использовать также класс строго равномерно выпуклых функций. А именно: функция $\varphi(u)$, $u \in V$, строго равномерно выпукла, если $\forall \beta \in [0, 1]$ и $\forall u, v \in V$ справедливо неравенство

$$\varphi(\beta u + (1-\beta)v) \leqslant \beta\varphi(u) + (1-\beta)\varphi(v) - \beta(1-\beta)\mu(\|u - v\|),$$

где модуль строгой выпуклости $\mu(\cdot)$ удовлетворяет условиям

$$\mu(0) = 0, \quad \mu(t) > 0, \quad 0 < t \leqslant \operatorname{diam} V = \sup_{u, v \in V} \|u - v\|.$$

Свойства строго равномерно выпуклых функций изложены, например, в [2], [8].

Пусть $\varepsilon_N \geqslant 0$, $\varepsilon_N \longrightarrow 0$, $N \longrightarrow \infty$, а $u_N \in U$, $N = 1, 2, \ldots$, – некоторая последовательность, удовлетворяющая условию

$$\|u_N - w_N^0\| \leqslant \varepsilon_N, \quad w_N^0 = P_U(u_N - J'(u_N)), \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{1.3}$$

где P_U – оператор проектирования на множество U, или условию

$$0 \leqslant \langle J'(u_N), u_N - w_N^1\rangle \leqslant \varepsilon_N^2, \tag{1.3'}$$

где

$$\langle J'(u_N), w_N^1 - u_N\rangle = \min_{v \in U}\langle J'(u_N), v - u_N\rangle, \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Эти условия являются приближениями для, соответственно, следующих двух критериев оптимальности: для $u^* \in U^*$ необходимо и достаточно выполнения условий

$$u^* = P_U(u^* - J'(u^*)), \quad \min_{v \in U}\langle J'(u^*), v - u^*\rangle = 0.$$

Отметим, что из свойств оператора проектирования следуют неравенства

$$\langle J'(u), u - w^1\rangle \geqslant \langle J'(u), u - w^0\rangle \geqslant \|w^0 - u\|^2 \quad \forall u \in U, \tag{1.4}$$

где $w^0 = P_U(u - J'(u))$, и $\langle J'(u), w^1 - u\rangle = \min\limits_{v \in U}\langle J'(u), v - u\rangle$. Поэтому из (1.3)' следует (1.3).

Теорема 1. *Для последовательности $u_N \in U$, $N = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющей в задаче* (1.1) *условию* (1.3) *или* (1.3)', *справедливы следующие утверждения:*

$$0 \leqslant J(u_N) - J^* \leqslant (D + \|J'(u_N)\|)\varepsilon_N, \quad N = 1, 2, \ldots, \quad \rho(u_N; U^*) \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty.$$

Здесь D – диаметр множества U:

$$D = \operatorname{diam} U = \sup_{u, v \in U}\|u - v\|,$$

$\rho(u; U^*)$ – расстояние от точки u до множества U^*:

$$\rho(u; U^*) = \inf_{v \in U^*}\|u - v\|.$$

Доказательство. Используя свойства выпуклых функций $\forall u^* \in U^*$ запишем следующие соотношения:

$$0 \leqslant J(u_N) - J^* \leqslant \langle J'(u_N), u_N - u^* \rangle = \langle u_N - P_U(u_N - J'(u_N)), u_N - u^* \rangle +$$
$$+ \langle P_U(u_N - J'(u_N)) - u_N + J'(u_N), u_N - u^* \rangle =$$
$$= \langle u_N - P_U(u_N - J'(u_N)), u_N - u^* \rangle +$$
$$+ \langle P_U(u_N - J'(u_N)) - (u_N - J'(u_N)), u_N - P_U(u_N - J'(u_N)) \rangle +$$
$$+ \langle P_U(u_N - J'(u_N)) - (u_N - J'(u_N)), P_U(u_N - J'(u_N)) - P_U u^* \rangle.$$

Так как, в силу свойства проекций, последнее слагаемое здесь неположительно, то с учетом оценки (1.4) получаем

$$0 \leqslant J(u_N) - J^* \leqslant \langle u_N - P_N(u_N - J'(u_N)), u_N - u^* \rangle - \|P_N(u_N - J'(u_N)) - u_N\|^2 +$$
$$+ \langle J'(u_N), u_N - P_U(u_N - J'(u_N)) \rangle \leqslant (D + \|J'(u_N)\|)\varepsilon_N.$$

Пусть v – предельная точка к u_N. Тогда в силу непрерывности $J(u)$ и замкнутости U получаем $v \in U^*$.

Для построения сходящейся к определенному элементу $u^* \in U^*$ последовательности $u_N \in U$, $N = 1, 2, \ldots$, можно воспользоваться методом регуляризации Тихонова (см. [1]). Пусть $\Omega(u)$, $u \in \mathbb{E}^n$, – сильно выпуклая, дифференцируемая функция, причем $\Omega'(u)$, $u \in U$, удовлетворяет условию Липшица. Обозначим через $\Omega_* = \inf\limits_{\mathbb{E}^n} \Omega(u)$, $u^{**} \in U^*$, Ω-нормальное решение: $\Omega(u^{**}) = \Omega_{**} = \inf\limits_{U^*} \Omega(u)$, и введем для (1.1) регуляризующие задачи

$$T_N(u) = J(u) + \alpha_N \Omega(u) \longrightarrow \inf, \quad u \in U, \quad N = 1, 2, \ldots, \tag{1.5}$$

где $\alpha_N > 0$, $N = 1, 2, \ldots$, $\alpha_N \longrightarrow 0$, $N \longrightarrow \infty$. Для этих задач определим последовательность $u_N \in U$, $N = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую аналогичным соответственно (1.3) и (1.3)' условиям

$$\|u_N - \overset{0}{w}_N\| \leqslant \varepsilon_N, \quad \overset{0}{w}_N = P_U(\bar{u}_N - T'_N(\bar{u}_N)), \tag{1.6}$$

$$0 \leqslant \langle T'_N(u_N), u_N - \overset{1}{w}_N \rangle \leqslant \varepsilon_N^2,$$
$$\langle T'_N(u_N), \overset{1}{w}_N - u_N \rangle = \min_{v \in U} \langle T'_N(u_N), v - u_N \rangle, \quad N = 1, 2, \ldots. \tag{1.6'}$$

Для этой последовательности имеют место следующие утверждения о сходимости к решениям задачи (1.1) (см. [10]).

Теорема 2. *Для последовательности $u_N \in U$, $N = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющей в задачах* (1.5) *условиям* (1.6) *или* (1.6)', *при $\varepsilon_N/\alpha_N \longrightarrow 0$, $N \longrightarrow \infty$, имеет место сходимость*

$$\|u_N - u^{**}\| \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty,$$

и справедливы следующие оценки по функционалу:

$$\alpha_N \Omega_* \leqslant T_N^* - J^* \leqslant \alpha_N \Omega(u^*), \quad T_N^* = \inf_U T_N(u),$$

$$\alpha_N \Omega_* \leqslant T_N(u_N) - J^* \leqslant \alpha_N \Omega(u^*) + C_1(\varepsilon_N/\alpha_N)^{1/2},$$

$$0 \leqslant J(u_N) - J^* \leqslant \alpha_N[\Omega(u^*) - \Omega_*] + C_1(\varepsilon_N/\alpha_N)^{1/2},$$

где u^* – произвольный элемент из U^*, а константа $C_1 = C_1(u^*)$ не зависит от N.

2. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД

Для задачи (1.1), (1.2) рассмотрим метод, связанный с решением задач, двойственных к исходным регуляризованным, где в качестве регуляризующей функции берется сумма функций, задающих ограничения $\bar{g}(u) = \Sigma_{i=1}^m g_i(u)$, $u \in \mathbb{E}^n$. На каждой итерации метода регуляризации в двойственной задаче определим критерий останова и докажем сходимость метода. Для этого определим регулярную функцию Лагранжа

$$L(u, \lambda) = J(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(u), \quad u \in \mathbb{E}^n, \quad \lambda \in \Lambda = \{\lambda_i \geqslant 0, i \in I\}, \tag{2.1}$$

и двойственную задачу

$$\chi(\lambda) = \inf_{\mathbb{E}^n} L(u, \lambda) \longrightarrow \sup, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{2.2}$$

Пусть $\chi^* = \sup_{\lambda \in \Lambda} \chi(\lambda)$, $\Lambda^* = \{\lambda \in \Lambda: \chi(\lambda) = \chi^*\}$ – ее решения, $\Lambda_0 = \{\lambda: \lambda_i > 0, i \in I\}$, $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda: \chi(\lambda) > > -\infty\}$, $\{\lambda\} = \min(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

Введем функцию $S(u) = J(u) + \bar{g}(u)$, $u \in \mathbb{E}^n$. При строгой равномерной выпуклости этой функции $S(u)$, $u \in \mathbb{E}^n$, с модулем строгой выпуклости $\mu(\cdot)$ функция $L(u, \lambda)$ при фиксированном $\lambda \in \Lambda_0$ строго равномерно выпукла на $\mathbb{E}^n$ с модулем выпуклости $\{\lambda\}\mu(\cdot)$ и достигает нижней грани $\forall \lambda \in \Lambda_0$, т.е. $\Lambda_0 \subset \Lambda_1$. Поэтому можно определить отображение $u(\lambda)$: $\Lambda_0 \longrightarrow \mathbb{E}^n$, где $u(\lambda)$ – единственный элемент такой, что $\chi(\lambda) = L(u(\lambda), \lambda)$, $\lambda \in \Lambda_0$. Нахождение $u(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_0$, во многих случаях является более простой задачей. В частности, при квадратичности функций $J(u)$, $g_i(u)$, $i \in I$, элементы $u(\lambda)$ – решения линейных задач: $L'_u(u, \lambda) = 0$, $u \in \mathbb{E}^n$. Пусть $J(\lambda) = J(u(\lambda))$, $g(\lambda) = g(u(\lambda)) = (g_1(u(\lambda)), \ldots, g_m(u(\lambda)))$, $\lambda \in \Lambda_0$. Отметим (см., например, [9]) следующее:

1) множество Λ_1 выпукло, а $\chi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_1$, вогнута, полунепрерывна сверху, причем непрерывна во внутренних (в относительной топологии множества Λ) точках Λ_1;

2) если множество Лебега $M_C = \{\lambda \in \Lambda_1: \chi(\lambda) \geqslant C\}$, $C \in \mathbb{R}$, непусто, то оно выпукло, замкнуто и ограничено;

3) отображение $u(\lambda)$: $\Lambda_0 \longrightarrow V$ и функции $g(\lambda)$, $J(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_0$, непрерывны, а $\chi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_0$, непрерывно дифференцируема, причем $\chi'(\lambda) = g(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_0$.

Введем регуляризованные задачи:

$$T_N(u) = J(u) + \alpha_N \bar{g}(u) \longrightarrow \inf, \quad u \in U, \quad \alpha_N > 0, \quad \alpha_N \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty. \tag{2.3}$$

Используя замену $\lambda_i + \alpha_N$ на λ_i, $i \in I$, получаем двойственные к ней задачи

$$\chi(\lambda) = \inf_V L(u, \lambda) = L(u(\lambda), \lambda) \longrightarrow \sup, \quad \lambda \in \Lambda_N = \{\lambda_i \geqslant \alpha_N, i \in I\}. \tag{2.4}$$

Обозначим решения этих задач через $u_N^* \in U$:

$$T_N(u_N^*) = T_N^* = \inf_U T_N(u),$$

$$\chi_N^* = \sup_{\Lambda_N} \chi(\lambda) = \chi(\lambda_N^*), \quad \lambda_N^* \in \Lambda_N^* = \{\lambda \in \Lambda_N: \chi(\lambda) = \chi_N^*\}, \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Отметим, что здесь

$$u_N^* = u(\lambda_N^*), \quad \lambda_{Ni}^* g_i(u_N^*) = \alpha_N g_i(u_N^*), \quad i \in I.$$

Пусть $\lambda_N \in \Lambda_N$, $N = 1, 2, \ldots,$ – приближенные решения задач (2.4) в следующем смысле:

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |(\lambda_N - P_N(\lambda_N + g(u_N)))_i| = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |\max\{\alpha_N - \lambda_{Ni}; g_i(u_N)\}| \leqslant \varepsilon_N, \tag{2.5}$$

где P_N – оператор проектирования на Λ_N: $(P_N\lambda)_i = \max\{\alpha_N; \lambda_i\}$, $i \in I$, а $u_N = u_N(\lambda_N)$. Это условие приближенной оптимальности эквивалентно следующим:

$$g_i(u_N) \leqslant \varepsilon_N, \quad i \in I_N^0 = \{i: \alpha_N \leqslant \lambda_{Ni} \leqslant \alpha_N + \varepsilon_N\},$$

$$|g_i(u_N)| \leqslant \varepsilon_N, \quad i \in I_N^1 = \{i: \alpha_N + \varepsilon_N < \lambda_{Ni}\}.$$

Для поиска λ_N воспользуемся следующим вариантом метода проекции градиента. Пусть произвольно $\lambda_1^0 \in \Lambda_1$. Элементы λ_N^k, $k = 0, 1, \ldots, K(N)$, $N = 1, 2, \ldots,$ определяются итерационной формулой

$$\lambda_N^{k+1} = \lambda_N^k + \beta_N^k p_N^k, \quad p_N^k = P_N(\lambda_N^k + g(\lambda_N^k)) - \lambda_N^k = \{\max[\alpha_N - \lambda_{Ni}^k; g_i(u_N(\lambda_N^k))], i \in I\},$$

где шаг $\beta_N^k \in (0, 1]$ и вычисляется конечношаговым алгоритмом Армийо (см., например, [8], [11]). При переходе к следующей, $(N+1)$-й итерации можно положить $\lambda_{N+1}^0 = \lambda_N = \lambda_N^{K(N)}$. Согласно пп. 1)–3), функция $\chi_N(\lambda)$ при фиксированном N вогнута, непрерывно дифференцируема и у нее множества Лебега выпуклы, замкнуты, ограничены, поэтому процесс будет сходящимся (см., например, [9]) и через конечное число шагов приведет к выполнению условия (2.5).

Доказательство близости λ_N к Λ^* и $u_N = u_N(\lambda_N)$ к U^* при $N \longrightarrow \infty$ следует работам [8], [9], с учетом того, что из ограниченности U следует равномерная ограниченность множеств $U_N = \{u \in \mathbb{E}^n: g_i(u) \le \varepsilon_N, i \in I\}$, $N = 1, 2, \ldots$ (см., например, [2]).

Теорема 3. *Пусть в задачах* (1.1), (1.2) *функция* $S(u)$, $u \in \mathbb{E}^n$, *строго равномерно выпукла с модулем выпуклости* $\mu(\cdot)$ *и* $\bar{g}^* = \inf\limits_{u \in \mathbb{E}^n} \bar{g}(u) > -\infty$. *Тогда верны следующие утверждения:*

1) *значения* $\lambda_N \longrightarrow \Lambda^*$, $N \longrightarrow \infty$, *элементы* $u_N \longrightarrow U^*$, $N \longrightarrow \infty$, *и справедливы оценки*

$$\alpha_N\bar{g}^* - C_2\varepsilon_N \le \chi_N(\lambda_N) - J^* \le 0, \quad \alpha_N\bar{g}^* - C_2\varepsilon_N \le T_N(u_N) - J^* \le C_2\varepsilon_N,$$

$$\alpha_N\bar{g}^* - C_2\varepsilon_N \le J_N(u_N) - J^* \le -\alpha_N\bar{g}^* + C_2\varepsilon_N;$$

2) *в случае* $\varepsilon_N/\alpha_N \longrightarrow 0$, $N \longrightarrow \infty$, *элементы* $u_N \longrightarrow u_g^{**}$, $N \longrightarrow \infty$.

Здесь $u_g^{**} \in U^*$ есть g-оптимальный элемент:

$$\bar{g}(u_g^{**}) = \bar{g}^{**} = \inf_{U^*}\bar{g}(u) = \inf_{U^*}S(u) - J^* = S(u_g^{**}) - J^*.$$

Замечания. 1. При строгой равномерной непрерывности целевой функции $J(u)$, $u \in V$, множество $\Lambda_1 = \Lambda$ и отображение $u(\lambda)$ определяется $\forall\lambda \in \Lambda$. Поэтому в (2.3)–(2.5) можно положить $\alpha_N = 0$, $N = 1, 2, \ldots$, т.е. двойственные задачи сводить к нерегуляризованной задаче. Если λ_N, $N = 1, 2, \ldots$, – последовательность, построенная описанным выше методом проекции градиента для задачи (2.1), (2.2), то (см. [8]) имеем

$$\|\lambda_N - P_U(\lambda_N + g(\lambda_N))\| \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty,$$

$$0 \le \chi(\lambda_N) - \chi^* \le \|g(\lambda_N)\|\|\lambda_N - P_U(\lambda_N + g(\lambda_N))\|,$$

$$\lambda_N \longrightarrow \Lambda^*, \quad N \longrightarrow \infty,$$

а элементы $u_N = u(\lambda_N) \longrightarrow u^*$, $N \longrightarrow \infty$, где u^* – единственный оптимальный элемент.

2. При условии строгой равномерной выпуклости $\bar{g}(u)$, $u \in \mathbb{E}^n$, функция $S(u)$, $u \in \mathbb{E}^n$, строго равномерно выпукла, $\bar{g}^* = \inf\limits_{\mathbb{E}^n}\bar{g}(u) > -\infty$. Поэтому справедливы утверждения теоремы 3.

3. АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЙ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Для ограничений типа неравенств (1.2) рассмотрим внутренние регуляризирующие аппроксимации и для задач на этих множествах докажем вспомогательные утверждения, аналогичные приведенным в теоремах 1 и 2.

Для этого введем следующие аппроксимации для множества (1.2):

$$U_N = \{u \in \mathbb{E}^n: g_{Ni}(u) = g_i(u) + \alpha_N^i\Omega_i(u) \le 0, i \in I\}, \tag{3.1}$$

где $\alpha_N^i \ge \alpha_{N+1}^i > 0$, $N = 1, 2, \ldots$, $\alpha_N^i \longrightarrow 0$, $N \longrightarrow \infty$, а $\Omega_i(u)$, $u \in \mathbb{E}^n$, $i \in I$, – неотрицательные, сильно выпуклые и дифференцируемые функции. Отметим, что имеют место включения $U_N \subset U_{N+1} \subset U$, $N = 1, 2, \ldots$, а из непустоты U при малых α_N^i вытекает непустота множеств U_N и выполнение для них условия Слейтера.

Пусть $g(u) = (g_1(u), \ldots, g_m(u))$, $g_N(u) = (g_{N1}(u), \ldots, g_{Nm}(u))$, P_N – оператор проектирования на U_N, и определим аппроксимирующие задачи

$$J(u) \longrightarrow \inf, \quad u \in U_N, \quad N = 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Пусть $u_N \in U_N$, $N = 1, 2, \ldots$, – некоторая последовательность, удовлетворяющая условию

$$\|u_N - w_N^0\| \le \varepsilon_N, \quad w_N^0 = P_N(u_N - J'_N(u_N)) \tag{3.3}$$

или условию

$$0 \leqslant \langle J'_N(u_N), u_N - w_N^1 \rangle \leqslant \varepsilon_N^2,$$
$$\langle J'_N(u_N), w_N^1 - u_N \rangle = \min_{v \in U_N} \langle J'_N(u_N), v - u_N \rangle. \qquad (3.3)'$$

Покажем, что для этих приближенных решений справедливы утверждения, аналогичные теореме 1.

Теорема 4. *Для последовательности* $u_N \in U_N$, $N = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяющей в задачах* (3.1), (3.2) *условиям* (3.3) *или* (3.3)', *имеет место сходимость*

$$\rho(u_N; U^*) \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty,$$

и справедлива оценка по функционалу

$$0 \leqslant J(u_N) - J^* \leqslant (D + \|J'(u_N)\|)(\varepsilon_N + C_3 \max_{i \in I} \alpha_N^i).$$

Доказательство. Используя свойства выпуклых функций записываем следующие соотношения:

$$0 \leqslant J(u_N) - J(u^*) \leqslant \langle J'(u_N), u_N - u^* \rangle = \langle u_N - P_N(u_N - J'(u_N)), u_N - u^* \rangle +$$
$$+ \langle P_N(u_N - J'(u_N)) - u_N + J'(u_N), u_N - u^* \rangle =$$
$$= \langle u_N - P_N(u_N - J'(u_N)), u_N - u^* \rangle +$$
$$+ \langle P_N(u_N - J'(u_N)) - (u_N - J'(u_N)), u_N - P_N(u_N - J'(u_N)) \rangle +$$
$$+ \langle P_N(u_N - J'(u_N)) - (u_N - J'(u_N)), P_N(u_N - J'(u_N)) - P_N u^* \rangle +$$
$$+ \langle P_N(u_N - J'(u_N)) - (u_N - J'(u_N)), P_N u^* - u^* \rangle.$$

Так как, в силу свойства проекций, третье слагаемое здесь неположительно, то при достаточно малых α_N^i, $i = 1, 2, \ldots, N = 1, 2, \ldots$ (см. [10]), имеем

$$\|P_N u - u\| \leqslant C_3 \max_{i \in I} \alpha_N^i \quad \forall u \in U,$$

где константа $C_3 = C_3(u) \geqslant 0$ не зависит от N, и получаем

$$0 \leqslant J(u_N) - J(u^*) \leqslant \langle u_N - P_N(u_N - J'(u_N)), u_N - u^* \rangle -$$
$$- \|P_N(u_N - J'(u_N)) - u_N\|^2 + \langle J'(u_N), u_N - P_N(u_N - J'(u_N)) \rangle +$$
$$+ \|P_N(u_N - J'(u_N)) - u_N\| \|P_N u^* - u^*\| + \|J'(u_N)\| \|P_N u^* - u^*\| \leqslant$$
$$\leqslant \langle u_N - P_N(u_N - J'(u_N)), u_N - u^* \rangle + \langle J'(u_N), u_N - P_N(u_N - J'(u_N)) \rangle +$$
$$+ C_2(\varepsilon_N + \|J'(u_N)\|) \max_{i \in I} \alpha_N^i \leqslant (D + \|J'(u_N)\|)\varepsilon_N + C_3(\varepsilon_N + \|J'(u_N)\|) \max_{i \in I} \alpha_N^i.$$

Отсюда следует оценка утверждения теоремы. Пусть v – предельная точка для u_N. Тогда в силу непрерывности $J(u)$ и замкнутости U получаем, что $v \in U^*$.

Рассмотрим регуляризованные задачи на множествах U_N:

$$T_N(u) = J(u) + \alpha_N \Omega(u) \longrightarrow \inf, \quad u \in U_N, \quad \alpha_N > 0, \quad N = 1, 2, \ldots, \qquad (3.4)$$

где $\alpha_N \longrightarrow 0$, $N \longrightarrow \infty$. Пусть $u_N \in U_N$, $N = 1, 2, \ldots$, – последовательность, удовлетворяющая условию

$$\|u_N - w_N^0\| \leqslant \varepsilon_N, \quad w_N^0 = P_N(u_N - T'_N(u_N)), \qquad (3.5)$$

или условию

$$0 \leqslant \langle T'_N(u_N), u_N - w_N^1 \rangle \leqslant \varepsilon_N^2, \quad \langle T'_N(u_N), w_N^1 - u_N \rangle = \min_{v \in U_N} \langle T'_N(u_N), v - u_N \rangle. \qquad (3.5)'$$

Эти приближенные решения также сходятся к решению задачи (1.1), (1.2) (см. [10, теорема 2]).

Теорема 5. *Для последовательности* $u_N \in U_N$, $N = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяющей в задачах* (3.4) *условиям* (3.5) *или* (3.5)' *при* $\max_{i \in I}(\alpha_N^i/\alpha_N) \longrightarrow 0$, $\varepsilon_N/\alpha_N \longrightarrow 0$, $N \longrightarrow \infty$, *имеет место сходимость*

$$\|u_N - u^{**}\| \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty,$$

и справедливы следующие оценки:

$$\alpha_N \Omega_* \leq T_N^* - J^* \leq \alpha_N \Omega(u^*) + C_4 \max_{i \in I} \alpha_N^i, \quad T_N^* = \inf_{U_N} T_N(u),$$

$$\alpha_N \Omega_* \leq T_N(u_N) - J^* \leq \alpha_N \Omega(u^*) + C_4 [\max_{i \in I} \alpha_N^i + (\varepsilon_N/\alpha_N)^{1/2}],$$

$$0 \leq J(u_N) - J^* \leq \alpha_N [\Omega(u^*) - \Omega_*] + C_4 [\max_{i \in I} \alpha_N^i + (\varepsilon_N/\alpha_N)^{1/2}],$$

где u^* – произвольный элемент из U^*, а $C_4 = C_4(u^*)$ – константа, не зависящая от N.

4. КОНЕЧНОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ ПРОЕКЦИИ И УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА

В данном разделе конкретизируем построение последовательностей $u_N \in U_N$, $N = 1, 2, \ldots$, из предыдущего раздела, а именно: в задачах (3.1), (3.2), удовлетворяющих условиям (3.3) или (3.3)' (случай отсутствия регуляризации, т.е. при $\alpha_N = 0$, $N = 1, 2, \ldots$) и в задачах (3.1), (3.4), удовлетворяющих условиям (3.5) или (3.5)' (случай наличия регуляризации: $\alpha_N > 0$, $N = 1, 2, \ldots$). Для этого определим следующий итерационный релаксационный процесс:

$$u_{N,k+1} = u_{N,k} + \beta_{N,k} p_{N,k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \forall u_{N,0} \in U_N, \tag{4.1}$$

где $p_{N,k} \in \mathbb{E}^n$, $\|p_{N,k}\| = 1$ – направление спуска, т.е. $\langle T_N'(u_{N,k}), p_{N,k}\rangle < 0$, а шаг $\beta_{N,k} > 0$ выбирается по условию минимума

$$T_N(u_{N,k} + \beta_{N,k} p_{N,k}) = \min_{u_{N,k} + \beta p_{N,k} \in U_N} T_N(u_{N,k} + \beta p_{N,k})$$

или по конечношаговому алгоритму Армийо (см., например, [8], [11]). Выбор направления спуска связан с приближениями по методу проекции градиента или по методу условного градиента, а именно

$$p_{N,k} = (w_{N,k} - u_{N,k}) \|w_{N,k} - u_{N,k}\|^{-1}, \tag{4.2}$$

где $w_{N,k} \in \mathbb{E}^n$ выбирается по условию

$$\|w_{N,k} - \overset{0}{w}_{N,k}\| \leq \varepsilon_N/2, \quad \overset{0}{w}_{N,k} = P_N(u_{N,k} - T_N'(u_{N,k})) \tag{4.3}$$

или по условию

$$\begin{gathered} 0 \leq \langle T_N'(u_{N,k}), w_{N,k} - \overset{1}{w}_{N,k}\rangle \leq \varepsilon_N^2/2, \\ \langle T_N'(u_{N,k}), \overset{1}{w}_{N,k} - u_{N,k}\rangle = \min_{v \in U_N} \langle T_N'(u_{N,k}), v - u_{N,k}\rangle. \end{gathered} \tag{4.3'}$$

Введем для последовательности $w_{N,k}$, еще условия

$$u_{N,k} + \bar{\beta}(w_{N,k} - u_{N,k}) \in U_N, \quad \bar{\beta} \in (0, 1). \tag{4.4}$$

Так как справедливо неравенство

$$\langle T_{N,k}'(u_{N,k}), P_N(u_{N,k} - T_N'(u_{N,k})) - u_{N,k}\rangle \leq -\|u_{N,k} - P_N(u_{N,k} - T_N'(u_{N,k}))\|^2,$$

причем здесь равенство выполняется тогда и только тогда, когда $u_N = P_N(u_{N,k} - T_N'(u_{N,k}))$ или $(u_{N,k} - T_N'(u_{N,k})) \in U_N$, то в случае (4.3) выполняется условие

$$\langle T_{N,k}'(u_{N,k}), w_{N,k} - u_{N,k}\rangle \leq -\|u_{N,k} - w_{N,k}\|^2, \tag{4.5}$$

а в случае (4.3)' условие

$$\langle T_{N,k}'(u_{N,k}), w_{N,k} - u_{N,k}\rangle < 0. \tag{4.5'}$$

Допустим, что при фиксированном N для бесконечного процесса (4.1) с выбором направления спуска по (4.2), (4.3) или по (4.2), (4.4), шага по условию минимума или по алгоритму Армийо выполняются, соответственно, условия (4.4), (4.5) или (4.4), (4.5)'. Тогда из [8], [10, лемма 3] получаем существование номера k_N такого, что выполняется, соответственно, условие

$$\|u_{N,k_N} - w_{N,k_N}\| \leq \varepsilon_N/2 \tag{4.6}$$

или условие

$$0 < \langle T'_N(u_{N,k}), u_{N,k_N} - w_{N,k_N} \rangle \leqslant \varepsilon_N^2/2. \tag{4.6)'$$

Определим элемент последовательности u_N равенством

$$u_N = u_{N,k_N} \in U_N. \tag{4.7}$$

Из неравенств

$$\left\| u_N - \overset{0}{w}_{N,k_N} \right\| \leqslant \left\| u_N - w_{N,k_N} \right\| + \left\| w_{N,k_N} - \overset{0}{w}_{N,k_N} \right\| \leqslant \varepsilon_N$$

или

$$\langle T'_N(u_N), u_N - \overset{1}{w}_{N,k_N} \rangle \leqslant \langle T'_N(u_N), u_N - w_{N,k_N} \rangle +$$

$$+ \langle T'_N(u_N), w_{N,k_N} - \overset{1}{w}_{N,k_N} \rangle \leqslant \varepsilon_N^2$$

получаем выполнение, соответственно, условий (3.3) или (3.4). Поэтому из теорем 4 и 5 вытекают, соответственно, следующие утверждения.

Теорема 6 (*случай* $\alpha_N = 0$, $N = 1, 2, \ldots$). *В задаче* (1.1), (1.2) *с аппроксимацией* (3.1), (3.2) *для последовательности* (4.7), *где* $u_{N,k}$ *определяется по* (4.1), (4.2), $w_{N,k}$ *удовлетворяет условиям* (4.3), (4.4), (4.5) *или* (4.3), (4.4), (4.5)', *с выбором шага по минимуму или по алгоритму Армийо справедливы утверждения теоремы* 4.

Теорема 7 (*случай* $\alpha_N > 0$, $N = 1, 2, \ldots$). *Пусть в задаче* (1.1), (1.2) *с аппроксимацией* (3.1), (3.4) *выполняются условия* $\max\limits_{i \in I}(\alpha_N^i/\alpha_N) \longrightarrow 0$, $\varepsilon_N/\alpha_N \longrightarrow 0$, $N \longrightarrow \infty$. *Тогда для последовательности* (4.6), (4.7) *или* (4.6)', (4.7), *где* $u_{N,k}$ *определяется по* (4.1), (4.2), $w_{N,k}$ *удовлетворяет условиям* (4.3), (4.4), (4.5) *или* (4.3), (4.4), (4.5)', *с выбором шага по минимуму или по алгоритму Армийо справедливы утверждения теоремы* 5.

В следующем разделе рассмотрим вопрос вычисления элементов $w_{N,k}$ при $\alpha_N > 0$, $N = 1, 2, \ldots$

5. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Для вычисления приближенных элементов $w_{N,k}$, связанных с приближениями к $\overset{0}{w}_{N,k}$, $\overset{1}{w}_{N,k}$ в методах проекции и условного градиента, воспользуемся описанным в разд. 2 двойственным регуляризованным методом. Для этого определим соответствующие задачи

$$\left\| w - [u_{N,k} - T'_N(u_{N,k})] \right\|^2 \longrightarrow \inf, \quad w \in U_N, \tag{5.1}$$

$$\langle T'_N(u_{N,k}), w - u_{N,k} \rangle \longrightarrow \inf, \quad w \in U_N, \tag{5.1)'$$

и введем функции Лагранжа

$$L_{N,k}(w, \lambda) = \left\| w - [u_{N,k} - T'_N(u_{N,k})] \right\|^2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda^i g_{Ni}(w),$$

$$L_{N,k}(w, \lambda) = \langle T'_N(u_{N,k}), w - u_{N,k} \rangle + \sum_{i=1}^{m} \lambda^i g_{Ni}(w),$$

$$w \in \mathbb{E}^n, \quad \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{E}^m : \lambda^i \geqslant 0, i \in I\},$$

а также двойственные задачи

$$\chi_{N,k}(\lambda) = \inf_{u \in \mathbb{E}^n} L_{N,k}(w, \lambda) = L_{N,k}(w_{N,k}(\lambda), \lambda) \longrightarrow \sup, \quad \lambda \in \Lambda. \tag{5.2}$$

Обозначим решения двойственных задач (5.2) через $\chi_{N,k}^* = \max\limits_{\Lambda} \chi_{N,k}(\lambda)$, $\Lambda_{N,k}^* = \{\lambda \in \Lambda : \chi_{N,k}(\lambda) = \chi_{N,k}^*\}$. Для решения этих задач воспользуемся методом проекции градиента, аналогичным описанному в разд. 2, причем, учитывая замечание 2, без регуляризации целевых функций, т.е. для задачи (5.2):

$$\begin{aligned} \lambda_{N,k,s+1} &= \lambda_{N,k,s} + \sigma_{N,k,s} q_{N,k,s} \quad \forall \lambda_{N,k,0} \in \Lambda, \\ q_{N,k,s} &= P_\Lambda(\lambda_{N,k,s} + g_{N,k}(\lambda_{N,k,s})) - \lambda_{N,k,s}, \quad s = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где P_Λ – оператор проектирования на множество Λ, который в данном случае имеет простой вид: $P_\Lambda b = (\max\{0; b^1\}, \ldots, \max\{0; b^m\})\ \forall b \in \mathbb{E}^m$, а шаг $\sigma_{N,k,s}$ определяется конечношаговым алгоритмом Армийо. Пусть элементы $w_{N,k,s} = w_{N,k}(\lambda_{N,k,s})$. Из сходимости процесса (5.3) (см. замечание 2) вытекает существование номера s_k такого, что выполняется условие

$$\max_{1 \le i \le m} \left| P_\Lambda(\lambda_{N,k,s_k} + g_{N,k}(\lambda_{N,k,s_k}))^i - \lambda^i_{N,k,s_k} \right| \le \varepsilon_N, \tag{5.4}$$

$$\left\| w_{N,k,s_k} - \overset{0}{w}_{N,k} \right\| \le \varepsilon_N, \tag{5.5}$$

$$\left\| w_{N,k,s_k} - \overset{1}{w}_{N,k} \right\| \le \varepsilon_N \tag{5.5'}$$

и условие

$$u_{N,k} + \bar{\beta}(w_{N,k,s_k} - u_{N,k}) \in U_N, \quad \bar{\beta} \in (0, 1). \tag{5.6}$$

Положим

$$w_{N,k} = w_{N,k,s_k}. \tag{5.7}$$

Для задач (5.1) при $u_{N,k} \ne P_N(\tilde{u}_{N,k} - T'_N(\tilde{u}_{N,k}))$ (т.е. $\tilde{u}_{N,k} \ne \tilde{u}^*_N$) и $\tilde{u}_{N,k} - T'_N(\tilde{u}_{N,k}) \notin U_N$ выполняется условие (см. [10])

$$\langle T'_N(u_{N,k}), w_{N,k,s_k} - u_{N,k} \rangle + \left\| w_{N,k,s_k} - u_{N,k} \right\|^2 < 0, \tag{5.8}$$

а в случае задачи (5.2) при $\min\limits_{v \in U_N} \langle T'_N(u_{N,k}), v - u_{N,k} \rangle < 0$ (т.е. $u_{N,k} \ne \tilde{u}^*_N$) – условие

$$\langle T'_N(u_{N,k}), w_{N,k,s_k} - u_{N,k} \rangle < 0. \tag{5.8'}$$

Тогда, согласно замечанию 2, для $w_{N,k}$ выполняются, соответственно, условия (4.3), (4.4), (4.5) или (4.3), (4.4), (4.5)'.

Теорема 8. *Пусть в задаче* (1.1), (1.2) *с аппроксимацией* (3.1), (3.4) *выполняются условия*

$$\sup_{N,k,s} \lambda_{N,k,s} < \infty, \quad \max_{i \in I}(\alpha^i_N/\alpha_N) \longrightarrow 0, \quad \varepsilon_N/\alpha_N \longrightarrow 0, \quad N \longrightarrow \infty.$$

Тогда для последовательности (4.7), (4.6) *или* (4.7), (4.6)', *где* $u_{N,k}$ *определяется по* (4.1), (4.2) *с выбором шага по минимуму или по алгоритму Армийо, а* $w_{N,k}$ *– из условий* (5.4)–(5.8) *или* (5.4), (5.5)', (5.6), (5.7), (5.8)', *в которых* $w_{N,k,s} = w_{N,k}(\lambda_{N,k,s})$ ($\lambda_{N,k,s}$ *строится по* (5.3)), *справедливы утверждения теоремы* 7.

В заключение отметим, что результаты вычислительных экспериментов показали хорошую сходимость описанных в данной работе методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
3. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
4. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Физматлит, 2000.
5. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.
6. *Зангвилл У.И.* Нелинейное программирование. М.: Сов. радио, 1973.
7. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.
8. *Ишмухаметов А.З.* Методы решения задач оптимизации. М.: МЭИ, 1998.
9. *Ишмухаметов А.З.* Двойственный регуляризованный метод решения одного класса выпуклых задач минимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 7. С. 1045–1060.
10. *Ишмухаметов А.З.* Регуляризованные приближенные методы проекции и условного градиента с конечношаговыми внутренними алгоритмами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1896–1909.
11. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975.