A. B. Venkov, The Zagier formula with the Eisenstein–Maass series at odd integer points, and the generalized Selberg zeta function,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 3, 84–93

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 3

Посвящается Людвигу
Дмитриевичу Фаддееву

ФОРМУЛА ЗАГЬЕ С РЯДОМ ЭЙЗЕНШТЕЙНА-МААССА В ЦЕЛЫХ НЕЧЕТНЫХ ТОЧКАХ И ОБОБЩЕННАЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ СЕЛЬБЕРГА

А. Б. Венков

В работе определяется обобщенная дзета-функция Сельберга, связанная с формулой Загье для ряда Эйзенштейна–Маасса в целых нечетных точках. Доказана мероморфная продолжимость дзета-функции в полуплоскость $\mathrm{Re}\, s > 0$ в ситуации циклоидальных подгрупп модулярной группы без эллиптических элементов.

Введение

В работе [1] Дон Загье дал альтернативный вывод формулы следа Сельберга для модулярной группы $\Gamma_{\mathbb{Z}} = PSL(2, \mathbb{Z})$, исследуя регуляризованный интеграл

$$\int_F \sum_{\gamma \in \Gamma} k(z, \gamma z) E(z, s) d\mu(z) \tag{1}$$

в окрестности полюса $s = 1$. Здесь $k(z, z')$ — $PSL(2, \mathbb{R})$-инвариантное ядро на гиперболической плоскости H, $E(z, s)$ — ряд Эйзенштейна–Маасса. Интегрирование ведется по фундаментальной области модулярной группы в H, μ — риманова мера на H, определяемая метрикой Пуанкаре.

Левая часть формулы Загье, так же как в случае классической формулы следа Сельберга, получается как сумма по классам сопряженных элементов в группе Γ

$$\sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \int_{F_\gamma} k(z, \gamma z) E(z, s) d\mu(z).$$

С другой стороны, нужно воспользоваться разложением по собственным функциям автоморфного Лапласиана $A(\Gamma)$ на H для ядра $k_\Gamma(z, z') = \sum_{\gamma \in \Gamma} k(z, \gamma z')$,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} k(z, \gamma z') = \sum_j h(\lambda_j) v_j(z) \overline{v_j(z')} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1/4 + \tau^2) E(z, 1/2 + i\tau) \overline{E(z', 1/2 + i\tau)} d\tau, \tag{2}$$

Ключевые слова: формула следа Сельберга, обобщенная дзета-функция Сельберга, ряд Эйзенштейна–Маасса, автоморфный Лапласиан.

где $\{v_j(z)\}$ — полная ортонормированная система собственных функций дискретного спектра, $k(z,z') = k(u(z,z'))$, $u(z,z')$ — фундаментальный инвариант пары точек z, $z' \in H$, $h(\lambda)$ — преобразование Сельберга от $k(t)$. В результате интеграл (1) вычисляется в терминах дзета-функций Ранкина–Сельберга. При этом, разумеется, нужно помнить, что интеграл (1) расходится и нужно воспользоваться соответствующей его регуляризацией.

Полученная таким образом формула для произвольного значения s выглядит достаточно громоздко, но, несомненно, является интересной и важной. Формула следа Сельберга получается взятием вычета в $s = 1$ левой и правой частей формулы Загье, которые мероморфно зависят от s.

Можно заметить, что общая формула Загье существенно упрощается при $s = 2k+1$, где $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 1$. Для таких „k“ можно определить аналог дзета-функций Сельберга и воспользоваться полученной формулой для доказательства некоторых важных свойств дзета-функций, в частности мероморфную продолжимость их логарифмических производных. Именно этим мы будем заниматься в данной работе. Избегая дополнительные аналитические трудности, мы рассматриваем дискретные группы без эллиптических элементов.

В принципе обобщенные дзета-функции Сельберга могут быть определены из более общего интеграла Загье

$$\int_F f(z) \sum_{\gamma\in\Gamma} k(z,\gamma z)d\mu(z)$$

в следующих трех ситуациях. 1) $f(z) = E(z, zk+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 1$, как мы уже и сказали. 2) $f(z) = v_j(z)$ — собственная функция автоморфного Лапласиана. 3) $f(z) = \left(y^2 q(z)\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^n$ (оператор на верхней полуплоскости $y = \operatorname{Im} z > 0$, $q(z)$ — аналитическая форма веса 2, черта означает комплексное сопряжение, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$.

Мы ограничимся здесь случаем 1) и более подробно рассмотрим ситуацию $k = 1$. Ввиду значительной технической трудности, связанной с длинными вычислениями, мы не приводим здесь подробных доказательств.

Мне приятно поблагодарить М. Гордина за интересные стимулирующие беседы.

Основная часть. Реализуем гиперболическую плоскость как верхнюю полуплоскость комплексного переменного $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = y > 0\}$. Будем сейчас предполагать, что кокомпактная дискретная группа Γ удовлетворяет условиям: 1) Γ не имеет эллиптических элементов, 2) Γ имеет только одну параболическую образующую $S : z \to z+1$, $z \in H$.

Выпишем теперь формулу Загье (см. [1]) и проведем потом необходимые преобразования. Поскольку мы рассматриваем специальное значение $s = 2k+1$, мы сможем значительно упростить ее. Этим объясняется также, что при выводе формулы мы не применяем преобразование Лежандра, как это делает Загье. Будем систематически пользоваться обозначениями и результатами работы [2].

Начнем с регуляризации интеграла Загье. Определим следующий неполный тета-ряд

$$\theta(z,\psi_k) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \psi_k(y(\gamma z)), \quad y = \operatorname{Im} z,$$

где

$$\psi_k(y) = \begin{cases} y^{2k+1}, & 1/Y \leqslant y \leqslant Y, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$Y > 0$, фиксировано, $\Gamma_\infty \subset \Gamma$ — подгруппа, порожденная S.

Пусть $k(t) \in C_0^\infty(0,\infty)$. Следующие утверждения верны. 1) Ряд $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} k(u(z,\gamma z'))$ абсолютно сходится для всех $z, z' \in H$. 2) Справедливо спектральное разложение (2) (с заменой модулярной группы $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ на Γ). 3) Интеграл

$$\int\limits_F \sum_{\gamma\in\Gamma} k(u(z,\gamma z))\theta(z,\psi_k)d\mu(z) \tag{3}$$

абсолютно сходится. Кроме этого, (3) равен

$$\begin{aligned}\sum_{\{\gamma\}_\Gamma} \int\limits_{F_\gamma} k(u(z,\gamma z))\theta(z,\psi_k)d\mu(z) \\ = \sum_j h(\lambda_j) \int\limits_F |v_j(z)|^2\theta(z,\psi_k)d\mu(z) \\ + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(s/4+\tau^2)\int\limits_F |E(z,1/2+i\tau)|^2\theta(z,\psi_k)d\mu(z)d\tau,\end{aligned} \tag{4}$$

где $\{\gamma\}_\Gamma$ пробегает все классы сопряженных элементов в Γ, γ — представитель класса, F_γ — фундаментальная область централизатора Γ_γ элемента γ в Γ, $u(z,z') = \frac{|z-z'|^2}{yy'}$.

Функции $h(\lambda)$ и $k(t)$ связаны преобразованием Сельберга

$$\begin{gathered}\int\limits_w^\infty \frac{k(t)}{\sqrt{t-w}}dt = Q(w), \quad k(t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_t^\infty \frac{dQ(w)}{\sqrt{w-t}}, \\ Q(e^u + e^{-u} - 2) = g(u), \\ h(1/4+\tau^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\tau u}du, \quad g(u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(1/4+\tau^2)e^{-i\tau u}d\tau.\end{gathered} \tag{5}$$

Для вывода из (4) искомой формулы необходимо вычислить асимптотику каждого слагаемого при $Y \to \infty$ и сократить расходящиеся члены. В этом и состоит регуляризация интеграла Загье.

Распишем более подробно формулу (4). Начнем с левой части. Классы сопряженных элементов в Γ распадаются на единичный, гиперболические и параболические.

а) *Вклад в* (4) *от единичного элемента равен*

$$k(0)\int\limits_F \theta(z,\psi_k)d\mu(z) = k(0)\int\limits_0^\infty \frac{dy}{y^2}\int\limits_0^1 dx\psi_k(y) = k(0)\frac{Y^{2k}}{2k} + \underset{Y\to\infty}{o(1)}.$$

б) *Вклад от параболических элементов.*

Постоянный член ряда Эйзенштейна равен

$$\int_0^1 E(x+iy,2k+1)dx = y^{2k+1} + \varphi(2k+1)y^{-2k},$$

где $\varphi(s)$ — некоторая функция (автоморфная матрица рассеяния).

Весь вклад от параболических классов в формуле (4) равен

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^Y k\Big(\frac{n^2}{y^2}\Big)y^{2k-1}dy + 2\varphi(2k+1)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} k\Big(\frac{n^2}{y^2}\Big)y^{-2k-2}dy + \underset{Y\to\infty}{o(1)}. \tag{6}$$

Вторая сумма в (6) равна

$$2\varphi(2k+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k+1}}\int_0^{\infty} k(t^2)t^{2k}dt = 2\varphi(2k+1)\zeta(2k+1)\int_0^{\infty} k(t^2)t^{2k}dt,$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Первая сумма в (6) равна

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^Y k\Big(\frac{n^2}{y^2}\Big)y^{2k-1}dy - k(0)\frac{Y^{2k}}{2k}$$

$$= -k(0)\frac{Y^{2k}}{2k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^Y y^{2k-1}dy\,k\Big(\frac{x^2}{y^2}\Big)e^{2\pi inx}$$

$$= \frac{Y^{2k+1}}{2k+1}\cdot 2\int_0^{\infty} k(t^2)dt - \frac{Y^{2k}}{2k}k(0) + \sum_{n\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_0^Y y^{2k}dy\,k(t^2)e^{2\pi inyt}. \tag{7}$$

Интегрируя по частям по t $2k$ раз, продолжаем равенство (7)

$$= \text{главные члены } + \sum_{n\neq 0}\frac{1}{(2\pi in)^{2k}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\Big(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}k(t^2)\Big)\frac{e^{2\pi intY}-1}{2\pi int} + \underset{Y\to\infty}{o(1)}$$

$$= \text{главные члены } + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi in)^{2k+1}}\int_0^Y M_{2k}\Big(\frac{x^2}{Y^2}\Big)\frac{e^{2\pi inx}-e^{-2\pi inx}}{x}dx + \underset{Y\to\infty}{o(1)}$$

$$= \frac{Y^{2k+1}}{2k+1}\cdot 2\int_0^{\infty} k(t^2)dt - k(0)\frac{Y^{2k}}{2k} + \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}}M_{2k}(0)\zeta(2k+1) + \underset{Y\to\infty}{o(1)},$$

где $M_{2k}(t^2) = \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}k(t^2)$ и $M_{2k}(0) = \frac{(2k)!}{k!}k^{(k)}(0)$.

Окончательно весь вклад в (4) от параболических классов равен

$$2\frac{Y^{2k+1}}{2k+1}\int_0^{\infty} k(t^2)dt - k(0)\frac{Y^{2k}}{2k} + \frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}}\frac{(2k)!}{k!}k^{(k)}(0)\zeta(2k+1)$$

$$+ 2\varphi(2k+1)\zeta(2k+1)\int_0^{\infty} k(t^2)t^{2k}dt + \underset{Y\to\infty}{o(1)}.$$

в) *Вклад от гиперболических классов.*

Пусть P — примитивный гиперболический элемент. Обозначим через $N(P)$ его норму. Пусть $g(P) \in PSL(2,\mathbb{R})$ обладает свойством

$$N(P)z = g(P)^{-1}Pg(P)z, \quad z \in H.$$

Полный вклад от гиперболических классов в формулу (4) равен

$$\sum_{\{P\}_\Gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \int_1^{N(P)} \frac{d\rho}{\rho} k\Big(\frac{N(P)^m + N(P)^{-m} - 2}{\sin^2\varphi}\Big) E(g(P)z, 2k+1) + \underset{Y\to\infty}{o(1)}, \quad (8)$$

где $\{P\}_\Gamma$ пробегает множество всех примитивных гиперболических классов в Γ.

Введем обозначение $\omega(P,m) = N(P)^m + N(P)^{-m} - 2$. Знаком $\sum\limits_{\{P\}_\Gamma}$ будем обозначать суммирование в (8) по всем парам $\{P\}_\Gamma$, $\{P^{-1}\}_\Gamma$. Выражение (8) переписывается так:

$$\sum_{\{P\}_\Gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} k\Big(\frac{\omega(P,m)}{\sin^2\varphi}\Big) \int_1^{N(P)} \frac{d\rho}{\rho}(E(g(P)z, 2k+1) + E(g(P)^{-1}z, 2k+1)) + \underset{Y\to\infty}{o(1)}. \quad (9)$$

Из определения ряда Эйзенштейна нетрудно видеть следующее равенство:

$$\int_1^{N(P)} \frac{d\rho}{\rho}(E(g(P)z, 2k+1) + E(g(P^{-1})z, 2k+1))$$
$$= (\sin^{2k+1}\varphi) \int_0^{\infty} dt\, t^{2k} \Big(\frac{1}{(1+2t\cos\varphi + t^2)^{2k+1}} + \frac{1}{(1-2t\cos\varphi + t^2)^{2k+1}}\Big)$$
$$\times \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma/\Gamma_P} \frac{1}{|cd|^{2k+1}}. \quad (10)$$

Мы обозначим через c, d матричные элементы

$$\gamma g(P) = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix},$$

γ пробегает множество двойных классов смежности. Обозначим через $\zeta_P(s)$ соответствующую дзета-функцию Загье

$$\zeta_P(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma/\Gamma_P} \frac{1}{|cd|^s}.$$

Интеграл

$$(\sin^{2k+1}\varphi) \int_0^{\infty} dt\, t^{2k} \Big(\frac{1}{(1+2t\cos\varphi + t^2)^{2k+1}} + \frac{1}{(1-2t\cos\varphi + t^2})^{2k+1}\Big) \quad (11)$$

считается по вычетам и равен

$$\sum_{l=0}^{k} a_{kl} \operatorname{ctg}^{2l}\varphi$$

с некоторыми абсолютными константами a_{kl}. Мы приведем их далее для $k = 1$. Наконец, после нетрудных вычислений, связанных с заменой переменных в интеграле, формула (9) преобразуется к виду

$$\sum_{\{P\}_\Gamma} \zeta_P(2k+1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{a_{kl}}{\omega(P,m)^{l+1/2}} \int_0^\infty t^{l-1/2} k(t+\omega(P,m))dt + \underset{Y\to\infty}{o(1)}.$$

Введем еще одно полезное обозначение

$$\int_0^\infty t^{l-1/2} k(t+\omega)dt = Q_l(\omega).$$

Заметим, что $Q_0(\omega) = Q(\omega)$ из формулы (5).

Тем самым мы вычислим асимптотику левой части формулы (4) при $Y \to \infty$. Перейдем теперь к правой части. Для простоты вычислений, наложим дополнительное ограничение на дискретную группу. Будем предполагать, что собственные функции дискретного спектра автоморфного Лапласиана исчерпываются константой и параболическими формами, обладающими свойствами четности или нечетности

$$v_j(-\bar z) = \pm v_j(z).$$

Это серьезное ограничение на дискретную группу, но, в частности, арифметически интересные примеры его выдерживают.

Итак, правая часть формулы (4) имеет вид

$$\frac{h(0)}{\mu(F)} \int_F \theta(z,\psi_k)d\mu(z) + \sum_{j>0} h(\lambda_j) \int_F |v_j(z)|^2 \theta(z,\psi_k)d\mu(z)$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1/4+r^2) \int_F |E(z,1/2+ir)|^2 \theta(z,\psi_k)d\mu(z), \quad (12)$$

где $\lambda_0 = 0$, $v_0(z) = \mu(F)^{-1/2}$, $j > 0$, пробегает остальные собственные функции дискретного спектра, параболические формы. Имеем

$$v_j(z) = \sum_{n\neq 0} \rho_j(n)\sqrt{y} K_{iz_j}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}$$

$\rho_j(n)$ — числовые коэффициенты Фурье, $K_s(z)$ модифицированная функция Бесселя $1/4 + r_j^2 = \lambda_j > 0$.

Для ряда Эйзенштейна верно аналогичное разложение Фурье

$$E(z,s) = y^s + \varphi(s)y^{1-s} + \sum_{n\neq 0} \alpha_n(s)\sqrt{y} K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}.$$

Воспользуемся этими формулами для вычисления (12).

а) *Вклад от* v_0.

Из определения $\theta(z,\psi_k)$ имеем

$$\frac{h(0)}{\mu(F)} \int_F \theta(z,\psi_k)d\mu(z) = \frac{h(0)}{\mu(F)} \int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \int_0^1 dx \psi_k(y) = \frac{h(0)}{\mu(F)} \frac{Y^{2k}}{2k} + \underset{Y\to\infty}{o(1)}.$$

б) *Вклад от параболических форм*

$$\sum_{j>0} h(\lambda_j) \int_F \theta(z,\psi_k)|v_j(z)|^2 d\mu(z)$$
$$= \sum_{j>0} h(\lambda_j) \int_F E(z,2k+1)|v_j(z)|^2 d\mu(z) + \underset{Y\to\infty}{o(1)}. \tag{13}$$

Последний интеграл является интегралом Ранкина–Сельберга и вычисляется в терминах соответствующей дзета-функции, что приводит к формуле

$$\frac{1}{4\pi^{2k+1}} \frac{\Gamma^2(k+1/2)}{\Gamma(2k+1)} \sum_{j>0} h(\lambda_j)|\Gamma(k+1/2+ir_j)|^2 \zeta(2k+1; v_j) + \underset{Y\to\infty}{o(1)},$$

где

$$\zeta(s; v_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\rho_j(n)|^2}{n^s},$$

$\Gamma(s)$ — функция Эйлера.

в) *Вклад от ряда Эйзенштейна*

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\infty}^{\infty} h(1/4+r^2) \int_F \theta(z,\psi_k)|E(z,1/2+ir)|^2 d\mu(z) dr$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1/4+r^2) \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2} \int_0^1 dx \psi_k(y)|E(z,1/2+ir)|^2 dr$$
$$= \frac{Y^{2k+1}}{2\pi(2k+1)} \int_{-\infty}^{\infty} h(1/4+r^2) dr + \frac{1}{4\pi} \int_{\infty}^{\infty} h(1/4+r^2) \frac{\varphi(1/2+ir)}{2k+1-2ir} Y^{2k+1-2ir} dr$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1/4+r^2) \frac{\varphi(1/2-ir)}{2k+1+2ir} Y^{2k+1+2ir} dr$$
$$+ \frac{1}{16\pi^{2k+2}} \frac{\Gamma^2(k+1/2)}{\Gamma(2k+1)} \int_{-\infty}^{\infty} h(1/4+r^2)|\Gamma(k+1/2+ir)|^2 \zeta(2k+1, E(\cdot,1/2+ir)) dr$$
$$+ \underset{Y\to\infty}{o(1)}, \tag{14}$$

где, как и ранее, дзета-функция Ранкина–Сельберга определена формулой

$$\zeta(s; E(\cdot,1/2+ir)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n(1/2+ir)|^2}{n^s}.$$

Интегралы с функцией φ вычисляются по вычетам, мы пользуемся аналитичностью функций h и φ, уравнением $\varphi(s)\varphi(1-s) = 1$ и тем, что единственный полюс $\varphi(s)$ в области $\operatorname{Re} s \geqslant 1/2$ есть простой полюс в $s = 1$ с вычетом $\mu(F)^{-1}$.

Окончательно (14) равно

$$\frac{Y^{2k+1}}{2k+1}g(0) - \frac{1}{2k}Y^{2k}h(0)\frac{1}{\mu(F)} + \frac{1}{2}h(-k^2-k)\varphi(k+1)$$
$$+\frac{1}{16\pi^{2k+2}}\frac{\Gamma^2(k+1/2)}{\Gamma(2k+1)}\int_{-\infty}^{\infty} h(1/n+r^2)|\Gamma(k+1/2+ir)|^2\zeta(2k+1,E(\cdot,1/2+ir))dr$$
$$+\underset{Y\to\infty}{o(1)}.$$

Тем самым мы вычислили асимптотику при $Y \to \infty$ от всех слагаемых в формуле (4) и доказали следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть $k(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, тогда верна следующая формула:*

$$\sum_{\{P\}_\Gamma} \zeta_P(2k+1)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\frac{a_{kl}}{\omega(P,m)^{l+1/2}}Q_l(\omega(P,m))$$
$$+\frac{(-1)^k}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k+1)\frac{(2k)!}{k!}k^{(k)}(0) + 2\varphi(2k+1)\zeta(2k+1)\int_0^\infty k(t^2)t^{2k}dt$$
$$=\frac{\varphi(k+1)h(-k^2-k)}{2} + \frac{1}{4\pi^{2k+1}}\frac{\Gamma^2(k+1/2)}{\Gamma(2k+1)}\sum_{j>0}h(\lambda_j)|\Gamma(k+1/2+i_j)|^2\zeta(2k+1;v_j)$$
$$+\frac{1}{16\pi^{2k+2}}\frac{\Gamma^2(k+1/2)}{\Gamma(2k+1)}\int_{-\infty}^{\infty}h(1/4+r^2)|\Gamma(k+1/2+ir)|^2)|^2\zeta(2k+1,E(\cdot,1/2+ir)dr.$$

Формула Загье существенно упрощается для $k=1$. При этом ее легко переписать только в терминах функции $h(\lambda)$, как это сделано в формуле следа Сельберга. Мы не будем приводить вычислительные детали и приведем лишь результат.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *выполняется формула*

$$\sum_{\{P\}_\Gamma}{}' \zeta_P(3)\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{\frac{\pi}{8}\frac{g(m\ln N(P))}{N(P)^{m/2}-N(P)^{-m/2}}$$
$$-\frac{9}{32}\frac{1}{(N(P)^{m/2}-N(P)^{-m/2})^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(1/4+r^2)}{N(P)^{irm}}\Big(\frac{N(P)^m}{1-ir}+\frac{N(P)^{-m}}{1+ir}\Big)dr\Big\}$$
$$-\frac{\varphi(3)\zeta(3)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(1/4+r^2)}{1+r^2}dr + \frac{\zeta(3)}{64\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}(1/4+r^2)r\,\mathrm{th}\,\pi r h(1/4+r^2)dr$$
$$=\frac{\varphi(2)h(-2)}{2} + \frac{1}{32\pi}\sum_{j>0}h(\lambda_j)\frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}\,\pi r_j}\zeta(3,v_j)$$
$$+\frac{1}{128\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(1/4+r^2)(1/4+r^2)}{\mathrm{ch}\,\pi r}\zeta(3,E(\cdot,1/2+ir))\,dr. \qquad (15)$$

Формула (15) позволяет определить обобщенную дзета-функцию Сельберга. Для этого необходимо выбрать подходящую функцию $h(\lambda)$. Положим

$$\begin{aligned} &h(1/4+r^2;s;a)\\ &\quad=\frac{1}{(s-1/2)^2+r^2}+\frac{s(1-s)}{2(2s-1)}\frac{1}{(s+1/2)^2+r^2}-\frac{s(1-s)}{2(2s-1)}\frac{1}{(s-3/2)^2+r^2}\\ &\quad-\frac{1}{(a-1/2)^2+r^2}-\frac{a(1-a)}{2(2a-1)((a+1/2)^2+r^2)}+\frac{a(1-a)}{2(2a-1)}\frac{1}{(a-3/2)^2+r^2},\\ &\qquad\qquad\operatorname{Re}s>1,\qquad a>\operatorname{Re}s. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для выбранной функции h формула (15) выполняется, хотя соответствующая функция k не удовлетворяет условию теоремы 1. Введем теперь две дзета-функции

$$Z_1(s)=\prod_{\{P\}_\Gamma}{}'\prod_{m=0}^{\infty}(1-N(P)^{-s-m})^{\pi/8\frac{\zeta_P(3)}{\ln N(P)}},$$

$$Z_2(s)=\prod_{\{P\}_\Gamma}{}'\prod_{m=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\prod_{l=0}^{\infty}(1-N(P)^{-s-m-l-k})^{\pi/8\frac{\zeta_P(3)}{\ln N(P)}}.$$

Можно показать, что для достаточно большого $\operatorname{Re}s$ эти произведения абсолютно сходятся. С другой стороны, можно заметить, что полный вклад от гиперболических элементов в формуле (15) для функции $h(1/4+r^2;s;a)$ равен в терминах функций Z_1, Z_2 выражению

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2s-1}\\ &\times\Big\{\frac{Z_1'}{Z_1}(s)+\frac{s(1-s)}{2}\Big(\frac{Z_1'}{Z_1}(s+1)\frac{1}{2s+1}-\frac{Z_1'}{Z_1}(s-1)\frac{1}{2s-3}\Big)+\frac{9}{2s-3}\frac{Z_2'}{Z_2}(s)\\ &+\frac{9s(1-s)}{2(2s+1)(2s-1)}\frac{Z_2'}{Z_2}(s+1)-\frac{9s(1-s)}{2(2s-3)(2s-5)}\frac{Z_2'}{Z_2}(s-1)+\frac{9}{2s+1}\frac{Z_2'}{Z_2}(s+2)\\ &+\frac{9}{2(2s+1)(2s+3)}\frac{Z_2'}{Z_2}(s+3)-\frac{9s(1-s)}{2(2s-1)(2s-3)}\frac{Z_2'}{Z_2}(s+1)\Big\} \end{aligned}\tag{16}$$

минус аналогичное выражение с заменой s на a. Очевидно, что производящей функцией для $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ является

$$Z_0(s)=\prod_{\{P\}_\Gamma}{}'(1-N(P)^{-s})^{a(P)},$$

где $a(P)=\frac{\pi}{8}\frac{\zeta_P(3)}{\ln N(P)}$. Имеем

$$Z_1(s)=\prod_{m=0}^{\infty}Z_0(s+m),$$

$$Z_2(s)=\prod_{k=0}^{\infty}\prod_{l=0}^{\infty}Z_1(s+k+l)=\prod_{m=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{\infty}\prod_{l=0}^{\infty}Z_0(s+m+l+k).$$

Формулы (15), (16) дают возможность доказывать мероморфную продолжимость логарифмических производных

$$\frac{Z_0'}{Z_0}(s), \qquad \frac{Z_1'}{Z_1}(s), \qquad \frac{Z_2'}{Z_2}(s) \tag{17}$$

по крайней мере в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$, если мы умеем доказывать мероморфность по s интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(1/4+r^2; s; a)(1/4+r^2)}{\operatorname{ch}\pi r} \zeta(3, E(\cdot, 1/2+ir)dr.$$

Последнее удается сделать для циклоидальных арифметических групп Г, удовлетворяющих условиям теорем 1, 2, так как в существенном этот интеграл сводится к

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1/4+r^2)h(1/4+r^2; s; a)\frac{\zeta(3-2ir)\zeta(3+2ir)}{\zeta(1-2ir)\zeta(1+2ir)}dr$$

с обычной дзета-функцией Римана. В свою очередь, это следует из того факта, что ряды Эйзенштейна для таких групп существенно не отличаются от ряда для модулярной группы (см. [3]). Мы не будем приводить технические детали и ограничимся формулировкой теоремы.

Теорема 3. *Пусть* Г *— циклоидальная по Петерсону подгруппа модулярной группы без эллиптических элементов. Тогда функции* (17) *допускают мероморфное продолжение по крайней мере в полуплоскость* $\operatorname{Re} s > 0$.

Список литературы

[1] Zagier D., *Eisenstein series and the Selberg trace formula.* I, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, Automorphic forms, Representation Theory and Arithmetic, vol. 10, Springer-Verlag, 1981, pp. 303–355.

[2] Венков А. Б., *Спектральная теория автоморфных функций*, Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, т. 153, 1981, с. 5–18; англ. пер.: Proc. Steklov Math. Inst. **4** (1982).

[3] Venkov A. B., *On essentially cuspidal noncongruence subgroups of* $PSL(2,\mathbb{Z})$, J. Func. Anal. **52** (1990), 1–7.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27

Поступило 11 ноября 1993 г.