А. М. Зубков, П. В. Халипов, Вероятность принадлежности нескольких вершин одной связной компоненте случайного равновероятного отображения, *Дискрет. матем.*, 2022, том 34, выпуск 4, 28–35

DOI: 10.4213/dm1742

Дискретная математика

том 34 выпуск 4 * 2022

УДК 519.212.2 DOI https://doi.org/10.4213/dm1742

Вероятность принадлежности нескольких вершин одной связной компоненте случайного равновероятного отображения

© 2022 г. А. М. Зубков*, П. В. Халипов†

Найдены предельные значения вероятности того, что k элементов принадлежат одной и той же связной компоненте случайного равновероятного отображения конечного множества (при стремлении числа элементов этого множества к бесконечности).

Ключевые слова: равновероятные отображения конечных множеств, случайные ориентированные графы, связные компоненты, предельные теоремы

Пусть $S = \{1, \ldots, N\}$ — конечное множество и $\varphi\colon S \to S$ — отображение, случайно и равновероятно выбираемое из всех N^N отображений S в себя. Тогда значения $\varphi(x)$, $x \in S$, независимы и имеют равномерное распределение на S. Отображению φ соответствует ориентированный случайный граф $\Phi = (S, E)$ с множеством вершин S и множеством ребер $(x, \varphi(x))$, $x \in S$. Очевидно, что распределение графа Φ симметрично, т. е. не изменяется при перенумерации элементов множества S.

Вершины $x, y \in S$ принадлежат одной связной компоненте графа Φ отображения φ тогда и только тогда, когда существуют такие $s, t \geqslant 0$, что $\varphi^s(x) = \varphi^t(y)$, где $\varphi^t(x)$ обозначает t-кратную итерацию функции φ, $t = 0, 1, \ldots$; $\varphi^0(x) = x$ при любом $x \in S$. Так как в графе Φ отображения φ конечного множества S в себя из каждой вершины выходит ровно одно ориентированное ребро, то каждая связная компонента Φ состоит из одного цикла с подходами.

Свойства случайных отображений конечных множеств изучались рядом авторов. Одной из первых обзорных работ по таким задачам была [1]. В монографии [2] приведен ряд результатов, в частности, относящихся к структуре и числу компонент графа случайного равновероятного отображения. Например, при $N \to \infty$ число связных компонент асимптотически нормально с параметрами $(\ln N, \ln N)$, а максимальная связная компонента содержит $\beta_N N$ вершин и β_N имеет невырожденное распределение на отрезке [0, 1], которое описывается довольно сложной формулой. Последнее свойство отражается следующей теоремой, доказанной в [4].

*Место работы: Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, e-mail: zubkov@mi-ras.ru

†Место работы: АО «Объединенная консалтинговая группа», e-mail: Petr.Khalipov@unitedconsulting.ru

Теорема 1. *Если*

$$H_N^2 = \{\text{вершины } 1 \text{ и } 2 \text{ лежат в одной связной компоненте графа } \Phi\},$$

то

$$\mathbf{P}\{H_N^2\} \to \frac{2}{3}\,, \quad N \to \infty.$$

Здесь доказано обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Если*

$$H_N^k = \{\text{вершины } 1, \ldots, k \text{ лежат в одной связной компоненте графа } \Phi\},$$

то

$$\mathbf{P}\{H_N^k\} \to \frac{2^{2k-1}(k!)^2}{k(2k)!} = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\,, \quad N \to \infty,$$

где $m!! = \prod_{j=0}^{[m/2]-1}(m-2j)$.

Легко проверить, что $\frac{2^{2k-1}(k!)^2}{k(2k)!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{k}}$ при $k \to \infty$.

Теорема 2 была доказана авторами в 2008 году и анонсирована в [3]. При оформлении статьи доказательство было существенно переработано.

Отметим, что в работах В. О. Миронкина [5, 6] получены явные формулы в виде сумм для вероятности того же события, что в теореме 1, для k-кратных итераций φ^k равновероятного случайного отображения φ.

Доказательство теоремы 2. В силу инвариантности распределения случайного отображения φ относительно перестановок элементов множества вероятность того, что k различных заданных вершин S принадлежат одной связной компоненте графа Φ, не зависит от номеров выбранных вершин. Поэтому фиксация выбранных вершин номерами $1, \ldots, k$ не ограничивает общности; для этих вершин мы будем последовательно рассматривать вероятности их попадания в связную компоненту, образованную вершинами с меньшими номерами. Заметная часть доказательства связана с оценками вероятностей особых случаев, когда естественный порядок присоединения вершин $1, \ldots, k$ к их общей компоненте нарушается.

Для $x \in S$ обозначим через

$$\tau_N(x) = \min\{t \geqslant 1\colon \varphi^t(x) \in \{x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{t-1}(x)\}\}$$

длину отрезка апериодичности траектории отображения φ, начинающейся в вершине x $\big($этот отрезок вместе с первой повторившейся вершиной имеет вид $T_N(x) = (x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{\tau_N(x)}(x))\big)$, и через

$$\tau_N^*(j) = \min\{t \geqslant 0\colon \exists\, i < j, \exists\, u \geqslant 0, \varphi^t(j) = \varphi^u(i)\}$$

длину отрезка траектории отображения φ, начинающейся в вершине j, до попадания в объединение траекторий, начинающихся в вершинах $1, \ldots, j-1$ (этот отрезок вместе с первой вершиной, попавшей в объединение предыдущих отрезков траекторий, имеет вид $T_N^*(x) = (x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{\tau_N^*(x)}(x))$). Как обычно, считается, что $\min\{\varnothing\} = \infty$, т. е. $\tau_N^*(j) = \infty$ тогда и только тогда, когда j не принадлежит компонентам связности графа отображения φ, содержащим вершины $1,\dots,j-1$. Событие $\{\tau_N^*(j)=0\}$ происходит тогда и только тогда, когда $j\in\bigcup_{i=1}^{j-1}T_N(i)$.

Событие H_N^k является объединением попарно не пересекающихся событий:

$$H_N^k=\bigcup_{\substack{l_1\geqslant 1\\ l_2,\dots,l_k\geqslant 0}}\{\tau_N(1)=l_1,\tau_N^*(2)=l_2,\dots,\tau_N^*(k)=l_k\}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{H_N^k\}=\sum_{\substack{l_1\geqslant 1,l_2,\dots,l_k\geqslant 0\\ l_1+\dots+l_k\leqslant N}}\mathbf{P}\{\tau_N(1)=l_1,\tau_N^*(2)=l_2,\dots,\tau_N^*(k)=l_k\}. \tag{1}$$

В свою очередь, каждое слагаемое в (1) разбивается на сумму попарно не пересекающихся событий:

$$\mathbf{P}\{\tau_N(1)=l_1,\tau_N^*(2)=l_2,\dots,\tau_N^*(k)=l_k\}$$
$$=\sum_{\substack{a_{i,1},\dots,a_{i,l_i}\in\{1,\dots,N\}\\ i\in\{1,\dots,k\}:\,l_i>0}}\mathbf{P}\left\{\begin{matrix}T_N(1)=(a_{1,0},a_{1,1},\dots,a_{1,l_1}),\\ T_N^*(i)=(a_{i,0},a_{i,1},\dots,a_{i,l_i}),\\ (i\in\{2,\dots,k\}:\,l_i>0)\end{matrix}\right\}, \tag{2}$$

где $a_{i,0}=i$, $i\in\{1,\dots,k\}$, суммирование проводится по всем таким наборам $\{a_{i,j}\}$, в которых числа $\{a_{i,j}\,|\,i\in\{1,\dots,k\},l_i>1,j\in\{1,\dots,l_i-1\}\}$ попарно различны и $\{a_{i,1},\dots,a_{i,l_i-1}\}\cap\{1,\dots,i-1\}=\varnothing$ при всех таких $i\in\{2,\dots,k\}$, что $l_i>1$,

$$\begin{gathered}a_{1,l_1}\in\{1,a_{1,1},\dots,a_{1,l_1-1}\},\\ \text{если } l_i>0,\ \text{то } a_{i,l_i}\in\bigcup_{\substack{1\leqslant v<i:\\ l_v>0}}\{v,a_{v,1},\dots,a_{v,l_v-1}\},\\ \text{если } l_i=0,\ \text{то } i\in\bigcup_{\substack{1\leqslant v<i:\\ l_v>1}}\{a_{v,1},\dots,a_{v,l_v-1}\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Например, при $l_i>0$ событие $\{T_N^*(i)=(a_{i,0},a_{i,1},\dots,a_{i,l_i})\}$ означает, что $\varphi(a_{i,j})=a_{i,j+1}$, $j=0,1,\dots,l_i-1$. Ввиду независимости и равновероятности значений $\varphi(x)$,$x\in\{1,\dots,N\}$, каждое слагаемое в правой части (2) равно $\left(\frac{1}{N}\right)^{l_1+\dots+l_k}$. Число слагаемых в (2) зависит от набора значений $l_1,\dots,l_k$. В частности, число элементов набора $\{a_{i,j}\}$, отличных от $a_{1,l_1},\dots,a_{k,l_k}$ и от $1,2,\dots,k$, равно

$$L(l_1,\dots,l_k)\stackrel{\text{def}}{=}(l_1-1)+(l_2-1)+\dots+(l_k-1)=l_1+\dots+l_k-k$$

(если $l_i>0$, то числа $a_{i,j},1\leqslant j<l_i$, попарно различны, а если какое-то $l_v=0$, то в силу последнего условия в (3) одно из чисел $a_{i,j}$, $1\leqslant i<v$, $1\leqslant j<l_i$, должно быть равно v, что учитывается слагаемым $l_v-1=-1$), поэтому число таких наборов равно $(N-k)^{[L(l_1,\dots,l_k)]}$. Далее, если положительно число z таких значений $v\in\{2,\dots,k\}$, что $l_v=0$, то каждое такое значение v должно находиться среди $a_{i,j}$, $i\in\{1,\dots,v-1\}$, $1\leqslant j<l_i$, число возможных вариантов расположений этих

z значений не превосходит $(L(l_1,\dots,l_k))^{[z]}$ (здесь и далее $m^{[z]}=m(m-1)\cdots(m-z+1)$ обозначает факториальную степень). Если значения $a_{i,j}$, $i\in\{1,\dots,k\}$, $1\leqslant j<l_i$, выбраны, то множество возможных значений $a_{1,l_1}\in\{1,a_{1,1},\dots,a_{1,l_1-1}\}$ согласно (3) состоит из l_1 элементов, каждое из чисел a_{i,l_i}, $i=2,\dots,k$, должно согласно второму условию в (3) принадлежать множеству, состоящему из $l_1+\dots+l_{i-1}$ элементов.

Таким образом, если $l_2,\dots,l_k\geqslant 1$, то число слагаемых в (2) равно

$$(N-k)^{[L(l_1,\dots,l_k)]}l_1\prod_{v=2}^{k}(l_1+\dots+l_{v-1}),$$

а если среди $l_2,\dots,l_k$ имеется z нулевых значений, то число слагаемых в (2) не больше

$$(N-k)^{[L(l_1,\dots,l_k)]}(l_1+\dots+l_{k-1})^{[z]}l_1\prod_{\substack{2\leqslant v\leqslant k\\ l_v>0}}(l_1+\dots+l_{v-1}).$$

Поэтому при $l_1,\dots,l_k\geqslant 1$

$$\mathbf{P}\{\tau_N(1)=l_1,\tau_N^*(2)=l_2,\dots,\tau_N^*(k)=l_k\}=\frac{(N-k)^{[l_1+\dots+l_k-k]}}{N^{l_1+\dots+l_k}}\,l_1\prod_{v=2}^{k}(l_1+\dots+l_{v-1}),$$

а если $z>0$, то

$$\mathbf{P}\{\tau_N(1)=l_1,\tau_N^*(2)=l_2,\dots,\tau_N^*(k)=l_k\}$$
$$\leqslant\frac{(N-k)^{[l_1+\dots+l_k-k]}}{N^{l_1+\dots+l_k}}(l_1+\dots+l_{k-1})^{[z]}l_1\prod_{\substack{2\leqslant v\leqslant k\\ l_v>0}}(l_1+\dots+l_{v-1}).$$

Разобьем сумму в правой части (1) на k сумм, собирая в сумме Σ_z все слагаемые, соответствующие наборам $l_2,\dots,l_k$ с z нулевыми элементами, $z\in\{0,1,\dots,k-1\}$. Тогда

$$\mathbf{P}\{H_N^k\}=\Sigma_0+\Sigma_1+\dots+\Sigma_{k-1}$$

и при $z>0$

$$\Sigma_z=\sum_{\substack{l_1\geqslant 1,l_2,\dots,l_k\geqslant 0\\ l_1+\dots+l_k\leqslant N\\ |\{i:\,l_i=0\}|=z}}\mathbf{P}\{\tau_N(1)=l_1,\tau_N^*(2)=l_2,\dots,\tau_N^*(k)=l_k\}$$
$$\leqslant\sum_{\substack{l_1\geqslant 1,l_2,\dots,l_k\geqslant 0\\ l_1+\dots+l_k\leqslant N\\ |\{i:\,l_i=0\}|=z}}\frac{(N-k)^{[L(l_1,\dots,l_k)]}}{N^{l_1+\dots+l_k}}(l_1+\dots+l_{k-1})^{[z]}l_1\prod_{\substack{2\leqslant v\leqslant k\\ l_v>0}}(l_1+\dots+l_{v-1})$$
$$\leqslant C_{k-1}^{z}\sum_{\substack{l_1,l_2,\dots,l_{k-z}\geqslant 1\\ l_1+\dots+l_{k-z}\leqslant N}}\prod_{j=0}^{l_1+\dots+l_{k-z}-k-1}\Big(1-\frac{k+j}{N}\Big)\times\frac{(l_1+\dots+l_{k-z-1})^{[z]}l_1}{N^{z+1}}\prod_{v=2}^{k-z}\frac{l_1+\dots+l_{v-1}}{N}$$

(коэффициент C_{k-1}^z соответствует числу расположений нулевых l_i в последовательности $l_2, \ldots, l_k$).

Используя неравенства $1 - x < e^{-x}$ при всех x и $0 < n \leqslant N$

$$\prod_{i=k}^{n}\Big(1 - \frac{i}{N}\Big) < \exp\Big\{-\sum_{i=k}^{n}\frac{i}{N}\Big\} = \exp\Big\{-\frac{(n+k)(n-k+1)}{2N}\Big\} \leqslant \exp\Big\{-\frac{n^2-k^2}{2N}\Big\}, \quad (4)$$

для оценки первого произведения, обозначение $L = l_1 + \cdots + l_{k-z}$ и замечая, что число разбиений натурального числа L на $k-z$ положительных слагаемых равно $C_{L-1}^{k-z-1} < (L-1)^{k-z-1}$, получаем, что

$$\begin{aligned}\Sigma_z &\leqslant C_{k-1}^z \sum_{L=k-z}^{N-1} C_{L-1}^{k-z-1} \exp\Big\{-\frac{(L-k-1)^2 - k^2}{2N}\Big\}\Big(\frac{L-1}{N}\Big)^k \\ &\leqslant C_{k-1}^z e^{k^2/(2N)+k} \sum_{L=k-z}^{N-1} \exp\Big\{-\frac{(L-1)^2}{2N}\Big\}\Big(\frac{1}{N}\Big)^{(z+1)/2}\Big(\frac{(L-1)^2}{N}\Big)^{k-(z+1)/2}.\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x^2/(2N)}(x^2/N)^m$. При $x > 0$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\exp\Big\{-\frac{x^2}{2N}\Big\}\Big(\frac{x^2}{N}\Big)^m &= \Big(2m\frac{x^{2m-1}}{N^m} - \frac{x^{2m+1}}{N^{m+1}}\Big)\exp\Big\{-\frac{x^2}{2N}\Big\} \\ &= \frac{x^{2m-1}}{N^{m+1}}(2mN - x^2)\exp\Big\{-\frac{x^2}{2N}\Big\} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2mN}, \quad (5)\end{aligned}$$

т. е. $f(x)$ максимальна при $x = \sqrt{2mN}$ и $f(\sqrt{2mN}) = e^{-m}(2m)^m$, при $x > \sqrt{2mN}$ функция $f(x)$ убывает и $f(N^{7/12}) = e^{-N^{1/6}/2}N^{m/6} \to 0$ при $N \to \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned}\Sigma_z &\leqslant \frac{C_{k-1}^z e^{k^2/(2N)}}{N^{(z+1)/2}}\Bigg(\sum_{L=k-z-1}^{[N^{7/12}]} + \sum_{L=[N^{7/12}]+1}^{N-1}\Bigg) f\Big(\frac{L}{N}\Big) \\ &\leqslant \frac{C_{k-1}^z e^{k^2/(2N)}}{N^{(z+1)/2}}\Big(N^{\frac{7}{12}} e^{-\frac{2k-(z+1)}{2}}(2k-(z+1))^{\frac{2k-(z+1)}{2}} + N e^{-\frac{N^{1/6}}{2}} N^{\frac{2k-(z+1)}{12}}\Big) \to 0\end{aligned}$$

при $N \to \infty$ для любого $z \geqslant 1$. Значит, при $N \to \infty, k = \mathrm{const}$

$$\mathbf{P}\{H_N^k\} = \Sigma_0 + o(1) = \sum_{\substack{l_1, l_2, \ldots, l_k \geqslant 1 \\ l_1 + \cdots + l_k \leqslant N}} \frac{(N-k)^{[l_1+\cdots+l_k-k]}}{N^{l_1+\cdots+l_k}}\, l_1 \prod_{v=2}^{k}(l_1 + \cdots + l_{v-1}) + o(1).$$

Аналогично оценкам сумм Σ_z при $z > 0$ можно показать, что часть суммы Σ_0 с $L = l_1 + \dots + l_k \geqslant N^{7/12}$ стремится к 0:

$$\sum_{\substack{l_1, l_2, \dots, l_k \geqslant 1 \\ l_1 + \dots + l_k \geqslant N^{7/12}}} \prod_{i=0}^{l_1 + \dots + l_k - k - 1} \Big(1 - \frac{i+k}{N}\Big) \times l_1 \prod_{v=2}^{k} (l_1 + \dots + l_{v-1})$$

$$\leqslant \sum_{L=[N^{7/12}]}^{N} C_{L-1}^{k-1} \exp\Big\{-\frac{(L-1)^2 - k^2}{2N}\Big\} \Big(\frac{L-1}{N}\Big)^k$$

$$\leqslant \frac{e^{k^2/(2N)}}{(k-1)!} \sum_{L=[N^{7/12}]}^{N} \exp\Big\{-\frac{(L-1)^2}{2N}\Big\} \bigg(\frac{(L-1)^2}{N}\bigg)^{k-\frac{1}{2}} \frac{1}{N^{1/2}}$$

$$\leqslant \frac{e^{k^2/(2N)}}{(k-1)!} N^{1/2} \exp\Big\{-\frac{N^{1/6}}{2}\Big\} N^{(2k-1)/12} \to 0,\ N \to \infty,$$

так как из (5) следует, что при $N^{7/12} \leqslant L \leqslant N$

$$\exp\Big\{-\frac{(L-1)^2}{2N}\Big\} \bigg(\frac{(L-1)^2}{N}\bigg)^{k-\frac{1}{2}} < \exp\Big\{-\frac{N^{1/6}}{2}\Big\} N^{(2k-1)/12}.$$

Так как $\ln(1-x) > -x - x^2$ при $x \in (0, \frac{1}{2})$, то

$$\prod_{i=0}^{L-k-1} \Big(1 - \frac{i+k}{N}\Big) > \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{L-1} \Big(\frac{i}{N} + \frac{i^2}{N^2}\Big)\Big\} \geqslant \exp\Big\{-\frac{L^2}{2N} - \frac{L^3}{N^2}\Big\}$$
$$= (1 + o(1)) \exp\Big\{-\frac{L^2}{2N}\Big\} \ \text{при } L \leqslant N^{7/12},\ N \to \infty.$$

Из этой оценки и (4) следует, что при $k = \mathrm{const}, N \to \infty$

$$\mathbf{P}\{H_N^k\} = (1 + o(1)) \sum_{\substack{l_1, l_2, \dots, l_k \geqslant 1 \\ l_1 + \dots + l_k \leqslant N^{7/12}}} \bigg[\frac{l_1}{N} \prod_{j=2}^{k} \frac{l_1 + \dots + l_{j-1}}{N}\bigg] \exp\bigg\{-\frac{(l_1 + \dots + l_k)^2}{2N}\bigg\} + o(1)$$
$$= (1 + o(1)) \sum_{L=k}^{[N^{7/12}]} \exp\Big\{-\frac{L^2}{2N}\Big\} \sum_{\substack{l_1, l_2, \dots, l_k \geqslant 1 \\ l_1 + \dots + l_k = L}} \bigg[\frac{l_1}{N} \prod_{j=2}^{k} \frac{l_1 + \dots + l_{j-1}}{N}\bigg] + o(1). \qquad (6)$$

Внутренняя сумма в правой части не больше интеграла

$$\int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots, x_{k-1} \geqslant 0 \\ x_1 + \dots + x_{k-1} \leqslant L + k}} \frac{x_1^2 (x_1 + x_2) \cdots (x_1 + \dots + x_{k-1})}{N^k} \, dx_1 \dots dx_{k-1}$$

и не меньше такого же интеграла по области $\{x_1, \dots, x_{k-1} \geqslant 0\colon x_1 + \dots + x_{k-1} \leqslant L - k\}$.

Выполним в интеграле последовательные замены переменных $u_j = \frac{x_j}{\sqrt{N}}$, $j = 1,\dots,k-1$, и $s_j = u_1 + \dots + u_j$, $j = 1,\dots,k-1$:

$$\underset{\substack{x_1,\dots,x_{k-1}\geqslant 0\\ x_1+\dots+x_{k-1}\leqslant M}}{\int\cdots\int} \frac{x_1^2(x_1+x_2)\cdots(x_1+\dots+x_{k-1})}{N^k}\,dx_1\dots dx_{k-1}$$

$$= \underset{\substack{u_1,\dots,u_{k-1}\geqslant 0\\ u_1+\dots+u_{k-1}\leqslant M/\sqrt{N}}}{\int\cdots\int} u_1^2(u_1+u_2)\cdots(u_1+\dots+u_{k-1})\,du_1\dots du_{k-1}$$

$$= \int_{s_{k-1}=0}^{M/\sqrt{N}} s_{k-1}\int_{s_{k-2}=0}^{s_{k-1}} s_{k-2}\cdots\int_{s_2=0}^{s_3} s_2\int_{s_1=0}^{s_2} s_1^2\,ds_1 ds_2\dots ds_{k-2}ds_{k-1}.$$

Так как

$$\int_{s_1=0}^{s_2} s_1^2\,ds_1 = \frac{s_2^3}{3},\qquad \int_{s_2=0}^{s_3} s_2^4\,ds_2 = \frac{s_3^5}{3\cdot 5},\dots,$$

то

$$\underset{\substack{x_1,\dots,x_{k-1}\geqslant 0\\ x_1+\dots+x_{k-1}\leqslant M}}{\int\cdots\int} \frac{x_1^2(x_1+x_2)\cdots(x_1+\dots+x_{k-1})}{N^k}\,dx_1\dots dx_{k-1} = \frac{(M/\sqrt{N})^{2k-1}}{(2k-1)!!}\,.$$

Теперь продолжим равенство (6):

$$\mathbf{P}\{H_N^k\} = (1+o(1))\sum_{L=k}^{[N^{7/12}]} \exp\left\{-\frac{L^2}{2N}\right\}\frac{(L/\sqrt{N})^{2k-1}}{(2k-1)!!} + o(1). \tag{7}$$

Остается заметить, что при $k = \mathrm{const}$, $N\to\infty$ сумма в (7) аппроксимируется интегралом:

$$\sum_{L=k}^{[N^{7/12}]} \exp\left\{-\frac{L^2}{2N}\right\}\frac{(L/\sqrt{N})^{2k-1}}{(2k-1)!!} = \frac{1+o(1)}{(2k-1)!!}\int\limits_k^{N^{7/12}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2N}\right\}\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)^{2k-1}dx$$

$$= \frac{1+o(1)}{(2k-1)!!}\int\limits_k^{N^{1/6}} e^{-y}(2y)^{k-1}dy \to \frac{2^{k-1}(k-1)!}{(2k-1)!!} = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\,.$$

Теорема 2 доказана. □

Список литературы

1. Harris B., “Probability distributions related to random mappings”, *Ann. Math. Statist.*, **31**:4 (1960), 1045–1062.
2. Колчин В. Ф., *Случайные отображения*, М.: Наука, 1984, 208 с.
3. Зубков А. М., Халипов П. В., “Вероятность попадания нескольких точек в одну компоненту случайного отображения”, *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, **16**:3 (2009).

4. Pittel B., "On distibutions related to transitive closures of random finite mappings", *Ann. Probab.*, **11**:2 (1983), 428–441.
5. Миронкин В. О., "Вероятность коллизии двух случайных точек для степени случайного отображения", *Обозр. прикл. и промышл. матем.*, **22**:4 (2015), 403–409.
6. Миронкин В. О., "Коллизии и инцидентность вершин компонентам в графе k-кратной итерации равновероятного случайного отображения", *Дискретная математика*, **31**:4 (2019), 38–52.

Статья поступила 22.09.2022.