

В.Г. РОМАНОВ, С.И. КАБАНИХИН, К. БОБОЕВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ \mathcal{P}_n -ПРИБЛИЖЕНИЯ
КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА*(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 14 VI 1983)*

Для случая плоскопараллельной геометрии рассматривается вопрос об определении индикатриссы рассеяния $g(x, \mu)$ и сечений $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$ по результатам измерений плотности потока частиц в некоторой фиксированной точке.

Пусть процесс излучения описывается обобщенным решением следующей задачи Коши:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma(x)u = Su + \delta(x, t, \mu^2 - \mu_*^2), \quad x \in R, \quad t \in R_+, \\ u|_{t < 0} \equiv 0.$$

Здесь $\mu \in (-1, 1)$, $\mu_* \in (-1, 1)$, $R_+ = \{y: y \in R, y \geq 0\}$,

$$Su = \frac{1}{4} \sigma_s(x) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(x, \mu_0) u(x, t, \mu') d\mu' d\varphi,$$

$$\mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - (\mu')^2} \cos\varphi.$$

Предположим, что в точке $x = 0$ известен след обобщенного решения задачи Коши (1)

$$(2) \quad u|_{x=0} = f(t, \mu), \quad t \in R_+, \quad \mu \in (-1, 1).$$

Требуется по функции $f(t, \mu)$ найти $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$, $g(x, \mu)$.

Обратную задачу (1), (2) рассмотрим в \mathcal{P}_n -приближении [1], т.е. предположим, что процесс распространения излучения достаточно точно описывается отрезком ряда

$$u(x, t, \mu) \approx \sum_{j=0}^n \left(j + \frac{1}{2} \right) u_{j+1}(x, t) P_j(\mu)$$

по системе полиномов Лежандра $P_j(\mu)$.

В соответствии с методом сферических гармоник вектор

$$U(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_{n+1}(x, t))^*$$

является обобщенным решением задачи Коши

$$(3) \quad \left(B \frac{\partial}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial x} + D \right) U = B \frac{1}{|2\mu_*|} \delta(x, t) [\bar{P}(\mu_*) + \bar{P}(-\mu_*)]; \quad x \in R, \quad t \in R_+, \\ U|_{t < 0} \equiv 0.$$

Здесь $D = B\Sigma$, $\bar{P}(\mu_*) = (P_0(\mu_*), P_1(\mu_*), \dots, P_n(\mu_*))^*$,

$$g_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad g_j(x) = \int_{-1}^1 g(x, \mu) P_j(\mu) d\mu, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$B = \text{diag}(1, 3, \dots, 2n+1),$$

$$\sigma_j = \sigma - 2\pi \sigma_s g_j, \quad j = 1, 2, \dots, n+1; \quad \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1});$$

в матрице A имеем $a_{i\ i+1} = a_{i+1\ i} = i; i = 1, 2, \dots, n$, а все остальные элементы A равны нулю.

В \mathcal{P}_n -приближении обратная задача ставится следующим образом. Пусть о решении задачи Коши (3) известна дополнительная информация

$$(4) \quad u_j|_{x=0} = f_j(t), \quad t \in R_+, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где $k \leq n+1$, $f_j(t) = \int_{-1}^1 f(t, \mu) P_{j-1}(\mu) d\mu, j = 1, 2, \dots, k$. Требуется найти функции $\sigma(x), \sigma_s(x), G(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$ из соотношений (3), (4) по функции $F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t))$.

Определим $\Lambda(n, m), n > m > 0$, как множество функций $\{\sigma(x), \sigma_s(x), G(x)\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) $g_j(x) \equiv 0, \quad j > m;$
- (ii) $g_j(x) \in C(R), \quad j = 1, 2, \dots, m;$
- (iii) $\sigma_s(x) > 0, \quad \sigma_s(x) \in C(R), \quad \sigma(x) \in C(R).$

Определим матрицу $M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1})$, где μ_i — корни полинома Лежандра $P_{n+1}(\mu)$, расположенные следующим образом:

$$\mu_2 < \mu_4 < \dots < \mu_{n+1} < \dots < \mu_3 < \mu_1; \quad \mu_1 = -\mu_2, \mu_3 = -\mu_4 \text{ и т.д.}$$

Теорема 1. Пусть $m \leq \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \mu_* = \pm \mu_1$. Тогда решение обратной задачи (3), (4) единственно во множестве $\Lambda(n, m)$.

С л е д с т в и е. Если $g(x, \mu)$ представима в виде

$$(5) \quad g(x, \mu) = \sum_{j=0}^m (j + \frac{1}{2}) g_j(x) P_j(\mu),$$

то для однозначного определения σ, σ_s, G в \mathcal{P}_n -приближении при $m+2 \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ достаточно задать $f_j(t)$ для $j = 1, 2, \dots, 2m+4$.

Схему доказательства теоремы 1 изложим, например, для случая, когда n нечетно. Следуя работе [1], определим матрицу T с элементами

$$T_{ij} = M_j P_{i-1}(\mu_j), \quad M_j = \left[\sum_{i=0}^n P_i^2(\mu_j) (2i+1) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Вводя новую функцию при помощи равенства $U = TV$, получим для $V = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})^*$

$$(6) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x} \right) V = E(x, t), \quad x \in R, \quad t \in R_+,$$

$$(7) \quad \begin{aligned} V|_{t < 0} &\equiv 0, \\ (TV)_j|_{x=0} &= f_j(t), \quad t \in R_+, \quad j = 1, 2, \dots, k, \end{aligned}$$

Здесь $E = \Phi \delta(x, t) - QV, \Phi = \frac{1}{2|\mu_*|} T^* B [\bar{P}(\mu_*) + \bar{P}(-\mu_*)], Q = T^* B \Sigma T, (TV)_j$ — компонента вектора TV с номером j .

Используя теорию характеристик, нетрудно доказать следующие утверждения.

Л е м м а 1. Пусть $Q(x) \in C(R)$; тогда решение задачи Коши (6) представимо в виде

$$(8) \quad v_i(x, t) = s_i(x) \delta(x - \mu_i t) + \tilde{v}_i(x, t), \quad i = 1, 2, \dots, n+1;$$

где

$$(9) \quad s_i(x) = \Phi_i - \mu_i^{-1} \int_0^x s_i(\lambda) Q_{ii}(\lambda) d\lambda, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

а функции $\tilde{v}_i(x, t)$ непрерывны всюду, кроме, быть может, прямых $x = \mu_j t$, на которых эти функции могут иметь разрывы первого рода.

С л е д с т в и е. Из (8) следует, что вектор $F(t)$ представим в виде

$$F(t) = F_0 \cdot \delta(t) + \tilde{F}(t),$$

где $F_0 = (f_{01}, f_{02}, \dots, f_{0k})$, $\tilde{F}(t) = (\tilde{f}_1(t), \tilde{f}_2(t), \dots, \tilde{f}_k(t))$, $\tilde{f}_j(t) \in C(R_+)$, $f_{0j} = P_{j-1}(\mu_*)$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Л е м м а 2. Функции \tilde{v}_i в представлении (8) обладают следующими свойствами:

- (i) $\tilde{v}_i(x, t) \equiv 0$, $t < \mu_i^{-1}|x|$, $i = 1, 2, \dots, n+1$;
- (ii) $\tilde{v}_i(x, t)|_{x=\mu_j t} = |\mu_j - \mu_i|^{-1} s_j(\mu_j t) Q_{ij}(\mu_j t)$, $t \in R_+$, $j = 1, 2$;

если $j = 1$, то $i = 2, 3, \dots, n+1$; если $j = 2$, то $i = 1$; $i = 2, 3, \dots, n+1$.

Определим области

$$\begin{aligned} \Delta_i^+(T) &= \{(x, t): |x\mu_i^{-1}| < t < T(|\mu_1\mu_j^{-1}| + |\mu_i^{-1}\mu_j|) - |x\mu_j^{-1}|\}, \\ \Omega_j^+(T) &= \{(x, t): x \in R_+, t < |x\mu_j^{-1}|\} \cap \Delta_1^{2m+3}(T), \\ \Omega_j^-(T) &= \{(x, t): x \leq 0, t < |x\mu_j^{-1}|\} \cap \Delta_1^{2m+3}(T). \end{aligned}$$

Л е м м а 3. Обратная задача (6), (7) сводится к следующей системе интегральных уравнений:

$$(10) \quad \tilde{v}_i(x, t) = \tilde{v}_i(0, t - x\mu_i^{-1}) + \mu_i^{-1} \int_0^x E_i(\lambda, t - \mu_i^{-1}(x - \lambda)) d\lambda,$$

если $i = 1, 3, \dots, 2m+3$, то $(x, t) \in \Delta_i^{2m+3}(T) \cup \Omega_i^-(T)$,
 если $i = 2, 4, \dots, 2m+4$, то $(x, t) \in \Delta_i^{2m+3}(T) \cup \Omega_i^+(T)$;

$$(11) \quad \tilde{v}_i(x, t) = \tilde{v}_i(\alpha_i(x, t), \beta_i(x, t)) + \int_{\beta_i(x, t)}^t E_i(x - \mu_i(t - \tau), \tau) d\tau,$$

если $i = 3, 5, \dots, 2m+3$, то $(x, t) \in \Omega_i^+(T)$,
 если $i = 4, 6, \dots, 2m+4$, то $(x, t) \in \Omega_i^-(T)$,
 если $i = 2m+5, 2m+6, \dots, n+1$, то $(x, t) \in \Delta_1^{2m+3}(T)$;

$$(12) \quad \tilde{v}_i(\gamma_i, t) = \tilde{v}_i(0, t - \gamma_i\mu_i^{-1}) + \mu_i^{-1} \int_0^{\gamma_i} E_i(\gamma_i - \mu_i(t - \tau), \tau) d\tau,$$

$i = 1, 2, \dots, 2m+4$, $t \in [0, T\mu_i^{-1}]$.

Здесь $\gamma_i = (-1)^i \mu_1 t$; $\alpha_i(x, t)$, $\beta_i(x, t)$ — координаты точки пересечения характеристики $dx/dt = \mu_i$, выпущенной из точки (x, t) , с линией $|x| = \mu_i t$.

Л е м м а 4. Система интегральных уравнений (9)–(12) есть вольтерровская система нелинейных интегральных уравнений второго рода, замкнутая в $\Delta_1^{2m+3}(T)$ относительно функций $s_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$; $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$; $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$, $\tilde{v}_j(x, t)$, $j = 1, 2, \dots, n+1$, в том смысле, что значения указанных функций при $(x, t) \in \Delta_1^{2m+3}(T)$ выражаются через интегралы от некоторых комбинаций этих же функций по отрезкам, лежащим в $\Delta_1^{2m+3}(T)$.

Обозначим

$$\psi = (\sigma(x), \sigma_s(x), g_1(\dot{x}), \dots, g_m(x)),$$

$$\|\psi\| = \max\{\|\sigma\|_{C[0,T]}, \|\sigma_s\|_{C[0,T]}, \|g_j\|_{C[0,T]}, j = 1, 2, \dots, m\},$$

$$\|\tilde{f}\| = \max\{\|f_j\|_{C[0,T(\mu_1\mu_2^{-1}m+3+\mu_1^{-1}\mu_2m+3)]}, j = 1, 2, \dots, k\}.$$

Пусть $\Lambda_M(n, m)$ – множество функций $\psi \in \Lambda(n, m)$ таких, что $\max\{\|\psi\|, \|\sigma_s^{-1}\|_{C[0,T]}\} \leq M$.

Теорема 2. Пусть $\psi_{(1)}(x), \psi_{(2)}(x)$ – любые две функции класса $\Lambda_M(n, m)$ и $f_{(1)}(t), f_{(2)}(t)$ – отвечающие им функции при соответствии, определяемом формулами (3), (4). Тогда

$$\|\psi_{(1)} - \psi_{(2)}\| \leq K \|\tilde{f}_{(1)} - \tilde{f}_{(2)}\|$$

с константой K , зависящей только от T, n, m, M .

Отметим, что методика работы [2] позволяет не только доказать теорему 2, но также и локальную (при достаточно малом $T > 0$) теорему существования решения обратной задачи (6), (7). Методом обращения разностной схемы [3] можно построить конечно-разностный алгоритм решения задачи (4), (5).

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
30 VI 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Султангазин У.М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата: Наука, 1979.
2. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973.
3. Кабанихин С.И. В сб.: Единственность, устойчивость и методы решения обратных и некорректных задач. Новосибирск, 1980, с. 36–43.

УДК 519.8

МАТЕМАТИКА

Е.А. СЕМИНА

МЕТОД АЛЬТЕРНИРОВАННОГО ИНТЕГРАЛА ПОНТЯГИНА В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

(Представлено академиком Л.С. Понтрягиным 27 VI 1983)

1. Пусть движения векторов $x \in R^k, y \in R^l$ при $t \geq 0$ описываются уравнениями

$$(1) \quad \dot{x} = A_1 x - u_1 + v_1, \quad x(0) = x_0,$$

$$(2) \quad \dot{y} = A_2 y - u_2 + v_2,$$

где A_1, A_2 – постоянные матрицы порядков k, l соответственно, $u_1 \in P_1 \subset R^k, v_1 \in Q_1 \subset R^k, u_2 \in P_2 \subset R^l, v_2 \in Q_2 \subset R^l, P_i, Q_i$ – непустые компакты.

В пространстве R^l определено непустое замкнутое терминальное множество M .