Известия вузов. Математика
2023, №11, с. 3–14

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Д.К. ДУРДИЕВ, Ж.З. НУРИДДИНОВ

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА В ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Исследуется обратная задача определения зависящего от времени и положения в пространстве ядра интегрального члена в n-мерном интегро-дифференциальном уравнении теплопроводности по известному решению задачи Коши для этого уравнения. Во-первых, исходная задача заменяется эквивалентной задачей, в которой дополнительное условие содержит неизвестное ядро без интеграла. Изучается вопрос о единственности нахождения этого ядра. Далее, предполагая наличие двух решений $k_1(x,t)$ и $k_2(x,t)$ поставленной задачи, составляется уравнение на разность этих решений. Дальнейшие исследования ведутся для разности $k_1(x,t) - k_2(x,t)$ решений задачи с использованием методов оценки интегральных уравнений. Показано, что если неизвестное ядро $k(x,t)$ можно представить как $k(x,t) = \sum\limits_{i=0}^{N} a_i(x)b_i(t)$, то $k_1(x,t) \equiv k_2(x,t)$. Таким образом, доказана теорема о единственности решения задачи.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение, задача Коши, интегральное уравнение.

УДК: 517.55

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-11-3-14

Введение. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для многомерного интегро-дифференциального уравнения теплопроводности

$$u_t - a(t)\Delta_x u = \int\limits_0^t k(x, t-\tau)u(x,y,\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T], \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где Δ_x — оператор Лапласа от переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$, T — фиксированная положительная константа, $y \in \mathbb{R}^n$ — параметр задачи, $a(t) > 0$, $\varphi(x,y)$ — заданные функции.

Рассмотрим следующую задачу: *найти ядро $k(x,t)$ интегрального члена в уравнении* (1), *если решение задачи* (1), (2) *известно для $x = y$*:

$$u|_{x=y} = f(y,t). \tag{3}$$

Здесь $f(y,t)$ — функция, заданная для всех $y \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [0,T]$.

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 29.03.2023. Принята к печати 29.05.2023.

В настоящее время широко изучаются задачи нахождения ядра типа свертки в гиперболических и параболических интегро-дифференциальных уравнениях второго порядка, опубликовано внушительное количество работ по этой теме. В работах [1]–[5] авторы изучают схожие задачи для интегро-дифференциальных параболических уравнений с распределенными источниками возмущений. Работы [6]–[14] посвящены восстановлению ядер типа свертки в интегро-дифференциальных гиперболических уравнениях с концентрированными источниками распространения волны. В этих статьях доказаны теоремы о локальной и глобальной разрешимости и получены оценки условной устойчивости решения обратных задач. Отметим здесь также работы [15]–[18] (и библиографию в них), в которых изучаются обратные задачи нахождения коэффициентов и правых частей параболических уравнений второго порядка в случае, когда прямые задачи представлены для этих уравнений как начально-краевые задачи.

Настоящая работа продолжает исследования первого автора статей [19]–[23]. Характерным свойством постановки обратных задач в работах [21]–[23] является наличие дополнительного условия, заданного в плоскости, ортогональной той переменной, от которой не зависят ядро интегрального члена в (1) и неизвестные коэффициенты уравнений в работах [21]–[23]. Это особая дополнительная информация позволяет получить для искомых функций удобную для дальнейшего исследования замкнутую систему интегральных уравнений второго рода.

Главной целью этой работы является проблема однозначного нахождения функции $k(x,t)$ по информации (3). Надо заметить, что, в отличие от упомянутых выше работ, здесь искомое ядро зависит от всех переменных. В настоящей работе предполагается, что неизвестное ядро является вырожденным, и для доказательства теоремы о единственности решения применяется метод из работы [24], использующий априорную оценку модуля производной неизвестной функции через модуль самой функции.

Будем предполагать, что функция $k(x,t)$ принадлежит классу $B^{1,1}(D_T)$, где $D_T := \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n; 0 \le t \le T\}$, для любого $T > 0$, а функция $\varphi(x;y)$ — классу $B^4(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Здесь через $B^{p,q}(D_T)$ обозначено пространство функций, непрерывных и ограниченных в D_T вместе со своими частными производными вплоть до порядка p включительно по переменной x и имеющих ограниченную производную по t порядка q; $B^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ — пространство функций, производные которых $\dfrac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \partial_{y_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{y_n}^{\beta_n}}$, где $0 \le |\alpha| + |\beta| \le m$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$, являются непрерывными и ограниченными в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Также мы будем использовать стандартные пространства $C^\nu[0,T]$, элементами которых являются непрерывные в $[0,T]$ функции, частные производные которых вплоть до порядка ν включительно также непрерывны по t.

1. Преобразование обратной задачи

Для доказательства единственности решения обратной задачи мы сперва осуществим несколько преобразований. Для этого продифференцируем исходное уравнение (1) и условие (2) по параметру y_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, и получим задачу Коши для вспомогательной функции $\vartheta := \mathrm{div}_y u$:

$$\vartheta_t - a(t)\Delta_x \vartheta = \int_0^t k(x, t-\tau)\vartheta(x,y,\tau)d\tau, \tag{4}$$

$$\vartheta|_{t=0} = \mathrm{div}_y \varphi(x,y). \tag{5}$$

Из (4)–(5), дифференцируя по t, получаем новую задачу для функции $\vartheta^{(1)} := \vartheta_t$:

$$\vartheta_t^{(1)} - a(t)\Delta_x\vartheta^{(1)} = a'(t)\Delta_x\vartheta + \int\limits_0^t k(x,\tau)\vartheta^{(1)}(x,y,t-\tau)d\tau + k(x,t)\mathrm{div}_y\varphi(x,y), \tag{6}$$

$$\vartheta^{(1)}|_{t=0} = a(0)\Delta_x\mathrm{div}_y\varphi(x,y), \tag{7}$$

где, как следует из (4),

$$\Delta_x\vartheta = \frac{1}{a(t)}\vartheta^{(1)}(x,y,t) - \frac{1}{a(t)}\int\limits_0^t k(x,t-\tau)\vartheta(x,y,\tau)d\tau.$$

Помимо этого, вводя новую функцию $\omega := 2\mathrm{div}_x\vartheta^{(1)} + \mathrm{div}_y\vartheta^{(1)}$, из (6), (7) получаем следующую задачу:

$$\omega_t - a(t)\Delta_x\omega = (\ln a(t))'\omega + k(x,t)\left(2\sum_{i,j=1}^n \varphi_{y_jx_i}(x,y) + \sum_{i,j=1}^n \varphi_{y_iy_j}(x,y)\right) +$$

$$+2\mathrm{div}_x k(x,t)\mathrm{div}_y\varphi(x,y) + \int\limits_0^t k(x,\tau)\omega(x,y,t-\tau)d\tau - (\ln a(t))'\int\limits_0^t k(x,t-\tau)\omega(x,y,\tau)d\tau -$$

$$-2(\ln a(t))'\int\limits_0^t \mathrm{div}_x k(x,t-\tau)\vartheta(x,y,\tau)d\tau + 2\int\limits_0^t \mathrm{div}_x k(x,t-\tau)\vartheta^{(1)}(x,y,\tau)d\tau, \tag{8}$$

$$\omega|_{t=0} = a(0)\Delta_x\left(2\sum_{i,j=1}^n \varphi_{y_jx_i}(x,y) + \sum_{i,j=1}^n \varphi_{y_iy_j}(x,y)\right). \tag{9}$$

Дифференцируя (3) сначала по t, а затем по y_i, после некоторых упрощений получим следующие соотношения для функции ω:

$$\omega|_{x=y} = \Delta_y f_t(y,t) - \frac{1}{a(t)}f_{tt}(y,t) + \frac{a'(t)}{a^2(t)}f_t(y,t) - \frac{a'(t)}{a^2(t)}\int\limits_0^t k(y,t-\tau)f(y,\tau)d\tau +$$

$$+\frac{1}{a(t)}k(y,t)\varphi(y,y) + \frac{1}{a(t)}\int\limits_0^t k(y,t-\tau)f_t(y,\tau)d\tau. \tag{10}$$

Предположим теперь, что существуют два решения обратной задачи: k_1, k_2. Соответствующие решения задачи (1), (2) обозначим через u_1, u_2. Введем также функции $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_1^{(1)}, \vartheta_2^{(1)}$, ω_1, ω_2, аналогичные функциям $\vartheta, \omega, \vartheta^{(1)}$. Обозначим дополнительно

$$\bar{k} = k_1 - k_2,\ \bar{\vartheta} = \vartheta_1 - \vartheta_2,\ \bar{\vartheta}^{(1)} = \vartheta_1^{(1)} - \vartheta_2^{(1)},\ \bar{\omega} = \omega_1 - \omega_2.$$

Тогда для $\bar{\vartheta}$ из равенств (4), (5) получим

$$\bar{\vartheta}_t - a(t)\Delta_x\bar{\vartheta} = \int\limits_0^t k_1(x,\tau)\bar{\vartheta}(x,y,t-\tau)d\tau + \int\limits_0^t \bar{k}(x,\tau)\vartheta_2(x,y,t-\tau)d\tau, \tag{11}$$

$$\bar{\vartheta}|_{t=0} = 0. \tag{12}$$

Решение задачи Коши (11), (12) эквивалентно решению следующего интегрального уравнения типа Вольтерра:

$$\bar{\vartheta}(x,y,t)=\int\limits_0^{\theta(t)}\frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)}k_1(\xi,\alpha)\bar{\vartheta}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)}\bar{k}(\xi,\alpha)\vartheta_2(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha\right]G(x-\xi;\theta(t)-\tau)d\xi, \tag{13}$$

где $\theta(t)=\int\limits_0^t a(\tau)d\tau$, а $\theta^{-1}(t)$ — обратная к $\theta(t)$ функция,

$$G(x-\xi;\theta(t)-\tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi(\theta(t)-\tau)})^n}e^{\frac{-|x-\xi|^2}{4(\theta(t)-\tau)}}$$

— фундаментальное решение оператора теплопроводности с зависящим от времени коэффициентом теплопроводности $\dfrac{\partial}{\partial t}-a(t)\triangle$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $d\xi=d\xi_1\ldots d\xi_n$, $|x|^2=x_1^2+\ldots+x_n^2$.

Далее, для $\bar{\vartheta}^{(1)}$ из равенств (6), (7) получим задачу

$$\bar{\vartheta}_t^{(1)}-a(t)\Delta_x\bar{\vartheta}^{(1)}=(\ln a(t))'\bar{\vartheta}^{(1)}(x,y,t)-(\ln a(t))'\int\limits_0^t k_1(x,\tau)\bar{\vartheta}(x,y,t-\tau)d\tau-$$

$$-(\ln a(t))'\int\limits_0^t\bar{k}(x,\tau)\vartheta_2(x,y,t-\tau)d\tau+\int\limits_0^t k_1(x,\tau)\bar{\vartheta}^{(1)}(x,y,t-\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\bar{k}(x,\tau)\vartheta_2^{(1)}(x,y,t-\tau)d\tau+\bar{k}(x,t)\mathrm{div}_y\varphi(x,y), \tag{14}$$

$$\bar{\vartheta}^{(1)}|_{t=0}=0. \tag{15}$$

Следующий раздел будет посвящен получению интегральных уравнений для неизвестных.

2. Построение эквивалентных интегральных уравнений

Как и в случае задачи (11), (12), получаем, что решение задачи Коши (14), (15) эквивалентно решению следующего интегрального уравнения типа Вольтерра:

$$\bar{\vartheta}^{(1)}(x,y,t)=\int\limits_0^{\theta(t)}\frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\bar{\vartheta}^{(1)}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau))-\right.$$

$$-(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)}k_1(\xi,\alpha)\bar{\vartheta}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha-$$

$$-(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))' \int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} \bar{k}(\xi,\alpha)\vartheta_2(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha + \int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} k_1(\xi,\alpha)\bar{\vartheta}^{(1)}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha +$$

$$+ \int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} \bar{k}(\xi,\alpha)\vartheta_2^{(1)}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha + \bar{k}(\xi,\theta^{-1}(\tau))\mathrm{div}_y\varphi(\xi,y)\Bigg] G(x-\xi;\theta(t)-\tau)d\xi. \quad (16)$$

Учитывая равенства (8)–(9), получаем следующую задачу Коши для $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega}_t - a(t)\Delta_x\bar{\omega} = (\ln a(t))'\bar{\omega}(x,y,t) + \bar{k}(x,t)\left(2\sum_{j,i=1}^{n}\varphi_{y_jx_i}(x,y) + \sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{y_iy_j}(x,y)\right) +$$

$$+2\mathrm{div}_x\bar{k}(x,t)\mathrm{div}_y\varphi(x,y) + \int\limits_0^t k_1(x,\tau)\bar{\omega}(x,y,t-\tau)d\tau + \int\limits_0^t \bar{k}(x,\tau)\omega_2(x,y,t-\tau)d\tau -$$

$$-(\ln a(t))'\int\limits_0^t k_1(x,\tau)\bar{\omega}(x,y,t-\tau)d\tau - (\ln a(t))'\int\limits_0^t \bar{k}(x,\tau)\omega_2(x,y,t-\tau)d\tau -$$

$$-2(\ln a(t))'\int\limits_0^t \mathrm{div}_x k_1(x,\tau)\bar{\vartheta}(x,y,t-\tau)d\tau - 2(\ln a(t))'\int\limits_0^t \mathrm{div}_x\bar{k}(x,\tau)\vartheta_2(x,y,t-\tau)d\tau +$$

$$+2\int\limits_0^t \mathrm{div}_x k_1(x,\tau)\bar{\vartheta}^{(1)}(x,y,t-\tau)d\tau + 2\int\limits_0^t \mathrm{div}_x\bar{k}(x,\tau)\vartheta_2^{(1)}(x,y,t-\tau)d\tau, \quad (17)$$

$$\bar{\omega}|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

Как и ранее, решение задачи (17), (18) эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\bar{\omega}(x,y,t) = \int\limits_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Bigg[\ln(a(\theta^{-1}(\tau)))'\bar{\omega}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)) +$$

$$+\bar{k}(\xi,\theta^{-1}(\tau))\left(2\sum_{j,i=1}^{n}\varphi_{y_j\xi_i}(\xi,y) + \sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{y_iy_j}(\xi,y)\right) + 2\mathrm{div}_\xi k(\xi,\theta^{-1}(\tau))\mathrm{div}_y\varphi(\xi,y) +$$

$$+(1-(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))') \int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} k_1(\xi,\alpha)\bar{\omega}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha +$$

$$+(1-(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))') \int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} \bar{k}(\xi,\alpha)\omega_2(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha -$$

$$-2(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))' \int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} k_{1\xi_i}(\xi,\alpha)\bar{\vartheta}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha -$$

$$-2(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))' \int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} \mathrm{div}_\xi \bar{k}(\xi,\alpha)\vartheta_2(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha+$$

$$+2\int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} \mathrm{div}_\xi k_1(\xi,\alpha)\bar{\vartheta}^{(1)}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha+$$

$$+2\int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} \mathrm{div}_\xi \bar{k}(\xi,\alpha)\vartheta_2^{(1)}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha\Bigg] G(x-\xi;\theta(t)-\tau)d\xi. \tag{19}$$

Также из (8) и (9) получаем следующее интегральное уравнение относительно $\omega(x,y,t)$:

$$\omega(x,y,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(0)\Delta_\xi\left[2\sum_{j,i=1}^n \varphi_{y_j\xi_i}(\xi,y)+\sum_{i,j=1}^n \varphi_{y_iy_j}(\xi,y)\right] G(x-\xi;\theta(t))d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{\theta(t)}\frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigg[(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\omega(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)+k(\xi,\theta^{-1}(\tau)))\Bigg(2\sum_{j,i=1}^n \varphi_{y_j\xi_i}(\xi,y)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n \varphi_{y_iy_j}(\xi,y)\Bigg)+2\mathrm{div}_\xi k(\xi,\theta^{-1}(\tau))\mathrm{div}_y\varphi_{y_i}(\xi,y)+$$

$$+\int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} k(\xi,\alpha)\omega(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha-(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} k(\xi,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)\omega(\xi,y,\alpha)d\alpha-$$

$$-2(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} \mathrm{div}_\xi k(\xi,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)\vartheta(\xi,y,\alpha)d\alpha+$$

$$+2\int\limits_0^{\theta^{-1}(\tau)} \mathrm{div}_\xi k(\xi,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)\vartheta^{(1)}(\xi,y,\alpha)d\alpha\Bigg] G(x-\xi;\theta(t)-\tau)d\xi. \tag{20}$$

Учитывая уравнение (20) и условие (10), получаем следующее интегральное уравнение для неизвестной функции $k(x,t)$:

$$k(y,t)=\frac{a(t)}{\varphi(y,y)}\Bigg[-\int\limits_{\mathbb{R}^n} a(0)\Delta_\xi\left[\sum_{i,j=1}^n \varphi_{y_iy_j}(\xi,y)+2\sum_{j,i=1}^n \varphi_{y_j\xi_i}(x,y)\right] G(y-\xi;\theta(t))d\xi+$$

$$+\Delta_y f_t(y,t)-\frac{1}{a(t)}f_{tt}(y,t)+\frac{a'(t)}{a^2(t)}f_t(y,t)\Bigg]-$$

$$-\frac{a(t)}{\varphi(y,y)}\Bigg(\int\limits_0^{\theta(t)}\frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigg[(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\omega(\xi,y,\theta^{-1}(\tau))+$$

$$+k(\xi,\theta^{-1}(\tau))\left(2\sum_{j,i=1}^{n}\varphi_{y_j\xi_i}(\xi,y)+\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{y_iy_j}(x,y)\right)+2\mathrm{div}_\xi k(\xi,\theta^{-1}(\tau))\mathrm{div}_y\varphi(\xi,y)+$$

$$+\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}k(\xi,\alpha)\omega(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha-(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}k(\xi,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)\omega(\xi,y,\alpha)d\alpha-$$

$$-(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\mathrm{div}_\xi k(\xi,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)\vartheta(\xi,y,\alpha)d\alpha+$$

$$+\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\mathrm{div}_\xi k(\xi,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)\vartheta^{(1)}(\xi,y,\alpha)d\alpha\Bigg]G(y-\xi;\theta(t)-\tau)d\xi\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{\varphi(y,y)}(\ln a(t))'\int_0^t k(y,t-\tau)f(y,\tau)d\tau-\frac{1}{\varphi(y,y)}\int_0^t k(y,t-\tau)f_t(y,\tau)d\tau. \qquad (21)$$

Составляя разность $\bar{k}=k_1-k_2$ с помощью равенства (21), получим интегральное уравнение относительно $\bar{k}(y,t)$:

$$\bar{k}(y,t)=-\frac{a(t)}{\varphi(yy)}\left(\int_0^{\theta(t)}\frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))}\int_{\mathbb{R}^n}\Bigg[(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\bar{\omega}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau))+\right.$$

$$+\bar{k}(\xi,\theta^{-1}(\tau))\left(2\sum_{j,i=1}^{n}\varphi_{y_j\xi_i}(\xi,y)+\sum_{i,j=1}^{n}\varphi_{y_iy_j}(\xi,y)\right)+2\mathrm{div}_\xi\bar{k}(\xi,\theta^{-1}(\tau))\mathrm{div}_y\varphi(\xi,y)+$$

$$+(1+(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))')\left[\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}k_1(\xi,\alpha)\bar{\omega}(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha+\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\bar{k}(\xi,\alpha)\omega_2(\xi,y,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)d\alpha\right]-$$

$$-(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\mathrm{div}_\xi k_1(\xi,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)\bar{\vartheta}(\xi,y,\alpha)d\alpha-$$

$$-(\ln a(\theta^{-1}(\tau)))'\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\mathrm{div}_\xi\bar{k}(\xi,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)\vartheta_2(\xi,y,\alpha)d\alpha+$$

$$+\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\mathrm{div}_\xi k_1(\xi,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)\bar{\vartheta}^{(1)}(\xi,y,\alpha)d\alpha+$$

$$+\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\mathrm{div}_\xi\bar{k}(\xi,\theta^{-1}(\tau)-\alpha)\vartheta_2^{(1)}(\xi,y,\alpha)d\alpha\Bigg]G(y-\xi;\theta(t)-\tau)d\xi\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{\varphi(y,y)}\ln(a(t))'\int_0^t\bar{k}(y,t-\tau)f(y,\tau)d\tau-\frac{1}{\varphi(y,y)}\int_0^t\bar{k}(y,t-\tau)f_t(y,\tau)d\tau. \qquad (22)$$

Система равенств (11)–(22) является системой однородных интегральных уравнений для функций $\bar{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}^{(1)}$, $\bar{\omega}$, $\bar{k}$. Необходимо показать, что эта система допускает в области D_T только нулевое решение.

3. Основной результат и его доказательство

Основным результатом данной статьи является следующая теорема о единственности.

Теорема. *Пусть* $a(t) \in C^1[0,T]$, $a(t) > 0$, $\varphi(x,y) \in B^4(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $f(y,t) \in B^{2,2}(D_T)$ *для любого конечного* $T > 0$, $\varphi(y,y) = f(y,0)$, $a(0)\Delta_x \mathrm{div}_y \varphi(y,y) = \mathrm{div}_y f_t(y,0)$ *и*

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x,y)| \geq \beta_0 > 0,$$

где β_0 *— известное число. Тогда функция*

$$k(x,t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(x) b_i(t), \quad a_i(x) \in B^1(\mathbb{R}^n), \quad b_i(t) \in C^1[0,T],$$

определяется однозначно в области D_T.

Доказательство. Введем обозначения

$$\bar{K}_0(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\bar{k}(x,t)|, \ \bar{\vartheta}_0(t) := \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |\bar{\vartheta}(x,y,t)|, \ \bar{\vartheta}_0^{(1)}(t) := \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |\bar{\vartheta}^{(1)}(x,y,t)|,$$

$$\bar{\omega}_0(t) := \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |\bar{\omega}(x,y,t)|$$

и нормы

$$\|h_1\| := \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |h_1(x,y)|, \quad \|h_2\|_T := \sup_{(x,t)\in D(T)} |h_2(x,t)|,$$

$$\|h_3\|^T := \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, t\in[0,T]} |h_2(x,y,t)|.$$

В дальнейшем будем использовать соотношение

$$k_{x_j}(x,t) = \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} a_i(x) b_i(t). \tag{23}$$

Для доказательства теоремы нам нужны оценки для функций $\bar{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}^{(1)}$, $\bar{\omega}$ через функцию $\bar{k}$. Чтобы получить эти оценки, воспользуемся следующим утверждением.

Лемма. *Пусть* $k(x,t) \in B^{1,1}(D_T)$ *и*

$$K_0(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |k(x,t)|.$$

Тогда

$$|k_x(x,t)| \leq K_{00} K_0(t).$$

Доказательство. Предположим, что $b_i(t) \in C[0,T]$, $i = 1,\ldots,n$, и пусть $a_i \in B^1(\mathbb{R}^n)$ — линейно независимая система. Тогда если $\sum_{i=0}^{N} |C_i| = 1$, то существует $\omega > 0$ такое, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i=0}^{N} C_i a_i(x) \right| \geq \omega.$$

При этом условии получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|k(x,t)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\sum_{i=0}^{N} a_i(x)b_i(t)\right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\sum_{i=0}^{N} a_i(x)\frac{b_i(t)}{\sum\limits_{s=1}^{N}|b_s(t)|}\right|\sum_{s=1}^{N}|b_s(t)| \geq \omega\sum_{s=1}^{N}|b_s(t)|. \tag{24}$$

В соответствии с (23) имеем

$$|k_{x_j}(x,t)| = \left|\sum_{i=0}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}a_i(x)b_i(t)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\sum_{i=0}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}a_i(x)b_i(t)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial a_s}{\partial x_j}\right|\sum_{i=0}^{N}|b_i(t)| =$$

$$= \frac{1}{\omega}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial a_s}{\partial x_j}\right|\sum_{i=0}^{N}|b_i(t)|\omega,$$

а из (24) получаем

$$|k_{x_j}(x,t)| \leq K_{00}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|k(x,t)| \leq K_{00}K_0(t),$$

где $K_{00} = \dfrac{1}{\omega}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\dfrac{\partial a_s}{\partial x_i}\right|$.

По лемме для любой $k(x,t) = \sum\limits_{i=0}^{N} a_i(x)b_i(t)$ существует константа $K_{00} > 0$ такая, что

$$|\bar{k}_x(x,t)| \leq K_{00}\bar{K}_0(t), \quad K_0(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|k(x,t)|.$$

□

Ниже будем использовать соответствующие нормы функций $\varphi, \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_{y_i}, \sum\limits_{j,i=1}^{n}\varphi_{y_iy_j}, \sum\limits_{j,i=1}^{n}\varphi_{x_jy_i}$, $\omega_2,\ \vartheta_2,\ \vartheta_2^{(1)}$, введенные выше, в зависимости от различных переменных.

Используя интегральное неравенство Гронуолла–Беллмана для $\bar{\vartheta}_0(t)$, получаем оценку

$$\bar{\vartheta}_0(t) \leq a_0\|k_1\|_T\int_0^{\theta(t)}\left(\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\bar{\vartheta}_0(t)d\xi + \|\vartheta_2\|^T\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\bar{K}_0(\xi)d\xi\right)d\tau \leq$$

$$\leq a_0\|k_1\|_T\int_0^{\theta(t)}(\theta^{-1}(t)-\xi)\bar{\vartheta}_0(t)d\xi + a_0\|k_1\|_T\|\vartheta_2\|^T\int_0^{\theta(t)}(\theta^{-1}(t)-\xi)\bar{K}_0(\xi)d\xi \leq$$

$$\leq a_1\|k_1\|_T T\int_0^{\theta(t)}\bar{\vartheta}_0(t)d\xi + a_1\|k_1\|_T\|\vartheta_2\|^T T\int_0^{\theta(t)}\bar{K}_0(\xi)d\xi \leq$$

$$\leq a_1\|k_1\|_T T\int_0^{a_1t}\bar{\vartheta}_0(t)d\xi + a_1\|k_1\|_T\|\vartheta_2\|^T T\int_0^{a_1t}\bar{K}_0(\xi)d\xi \leq$$

$$\leq \|k_1\|_T T \int\limits_0^t \bar{\vartheta}_0(t)d\xi + \|k_1\|_T \|\vartheta_2\|^T T \int\limits_0^t \bar{K}_0(\xi)d\xi,$$

$$|\bar{\vartheta}_0(t)| \leq \|k_1\|_T T \int\limits_0^t \bar{\vartheta}_0(t)d\xi + \|k_1\|_T \|\vartheta_2\|^T T \int\limits_0^t \bar{K}_0(\xi)d\xi$$

или

$$\bar{\vartheta}_0(t) \leq N_1 \int\limits_0^t \bar{K}_0(\xi)d\xi,$$

где $N_1 = \|k_1\|_T \|\vartheta_2\|^T T e^{\|k_1\|_T T^2}$.

Аналогично можно получить оценки для функций $\bar{\vartheta}_0^{(1)}(t)$, $\bar{\omega}_0(t)$, $\bar{K}_0(t)$:

$$\bar{\vartheta}_0^{(1)}(t) \leq N_2 \int\limits_0^t \bar{K}_0(\xi)d\xi,$$

$$N_2 = e^{\left(\frac{a_0}{a_1}\ln a_1 + \|k_1\|_T T\right)T}\Big(\ln a_1 \|k_1\|_T T^2 N_1 + \ln a_1 \|\vartheta_2\|^T T + \left\|\vartheta_2^{(1)}\right\|^T T + \frac{a_0}{a_1}\|\mathrm{div}_y \varphi\|\Big),$$

$$\bar{\omega}_0(t) \leq N_3 \int\limits_0^t \bar{K}_0(\xi)d\xi,$$

$$N_3 = e^{\left(\frac{a_0 T}{a_1}\ln a_1 + \|k_1\|_T T^2 + \ln a_1 \|k_1\|_T T^2\right)} \Bigg(\|\mathrm{div}_\xi k_1\|_T T^2 N_2 + a_1 \|\mathrm{div}_\xi k_1\|_T T^2 N_1 +$$

$$+ \left(2\frac{a_0}{a_1}\|\mathrm{div}_y \varphi\| + \ln a_1 \|\vartheta_2\|^T T + \|\vartheta^{(1)}\| T\right) K_{00} + \left(2\frac{a_0}{a_1}\left\|\sum_{j,i=1}^n \varphi_{y_j \xi_i}\right\| + \right.$$

$$\left. + \frac{a_0}{a_1}\left\|\sum_{j,i=1}^n \varphi_{y_j y_i}\right\| + \|\omega_2\|^T T + \ln a_1 \|\omega_2\|^T T\right)\Bigg),$$

$$\bar{K}_0(t) \leq N_4 \int\limits_0^t \bar{K}_0(\xi)d\xi,$$

$$N_4 = a_0^2 \frac{1}{\beta_0}\Bigg(T \ln a_1 N_3 + 2\left\|\sum_{j,i=1}^n \varphi_{y_i \xi_j}\right\| + \left\|\sum_{j,i=1}^n \varphi_{y_i y_j}\right\| + 2\|\mathrm{div}_y \varphi\| K_{00} + (1 + \ln a_1)\|k_1\|_T T^2 N_3 +$$

$$+ \|\omega_2\|^T T + \ln a_1 \|k_1\|_T T^2 N_1 + \ln a_1 \|\vartheta_2\|^T T K_{00} + \|\mathrm{div}_\xi \mathrm{k_1}\|_\mathrm{T} \mathrm{T}^2 \mathrm{N_1} + \|\vartheta_2^{(1)}\|^\mathrm{T} \mathrm{TK_{00}}\Bigg) +$$

$$+ \frac{1}{\beta_0}\|f(y,t)\| \ln a_1 + \frac{1}{\beta_0}\|f_t(y,t)\| \ln a_1.$$

Из последнего неравенства следует, что $\bar{K}_0(t) \equiv 0$, т. е. $k_1(x,t) = k_2(x,t)$ для $(x,t) \in D_T$. $\square$

Заключение

В данной работе была рассмотрена обратная задача нахождения ядра в уравнении (1) с начальным условием (2) и условием переопределения (3). В статье доказано, что в том случае, когда неизвестная функция представима в виде $k(x,t) = \sum_{i=0}^{N} a_i(x)b_i(t)$, при определенных условиях на данные задачи (условия теоремы) эта функция определяется однозначно.

Литература

[1] Lorenzi A., Sinestrari E. *An inverse problem in theory of materials with memory*, Nonlinear Anal. TMA **12** (12), 1317–1335 (1988).

[2] Grasselli M. *An identification problem for a linear integro-differential equation occurring in heat flow*, Math. Meth. Appl. Sci. **15** (3), 167–186 (1992).

[3] Janno J., Wolfersdorf L.V. *Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow*, J. Inverse Ill-Posed Problems **4** (1), 39–66 (1996).

[4] Colombo F. *An inverse problem for a parabolic integro-differential model in the theory of combustion*, Phys. D Nonlinear Phenom. **236** (2), 81–89 (2007).

[5] Janno J., Lorenzi A. *Recovering memory kernels in parabolic transmission problems*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **16** (3), 239–265 (2008).

[6] Totieva Zh.D., Durdiev D.K. *The problem of finding the one-dimensional kernel of the thermoviscoelasticity equation*, Math. Notes **103** (1), 118–132 (2018).

[7] Durdiev D.K., Rahmonov A.A. *A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity*, Math. Meth. Appl. Sci. **43** (15), 8776–8796 (2020).

[8] Romanov V.G. *Stability estimates for the solution to the problem of determining the kernel of a viscoelastic equation*, Appl. Ind. Math. **6** (3), 360–370 (2012).

[9] Romanov V.G. *Inverse problems for differential equations with memory*, Eurasian J. Math. Comput. Appl. **2** (4), 51–80 (2014).

[10] Durdiev U.D., Totieva Zh.D. *A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **42** (18), 7440–7451 (2019).

[11] Durdiev U.D., Totieva Zh.D. *The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **41** (17), 8019–8032 (2018).

[12] Durdiev D.K., Totieva Zh.D. *The problem of determining the one dimensional kernel of viscoelasticity equation with a source of explosive type*, J. Inverse Ill Posed Probl. **28** (1), 1–10 (2019).

[13] Totieva Zh.D. *The problem of determining the piezoelectric module of electro viscoelasticity equation*, Math. Meth. Appl. Sci. **41** (16), 6409–6421 (2018).

[14] Durdiev D.K. *Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics*, Diff. Equat. **44** (7), 893–899 (2008).

[15] Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M.I., Kerimov N.B. *Inverse time-dependent source problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions*, Appl. Math. Comput. **346**, 800–815 (2019).

[16] Huntul M.J., Lesnic D., Hussein M.S. *Reconstruction of time-dependent coefficients from heat moments*, Appl. Math. Comput. **301**, 233–253 (2017).

[17] Hussein M.S., Lesnic D. *Simultaneous determination of time and space dependent coefficients in a parabolic equation*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Sim. **33**, 194–217 (2016).

[18] Ivanchov M.I., Saldina N.V. *Inverse problem for a parabolic equation with strong power degeneration*, Ukr. Math. J. **58** (11), 1685–1703 (2006).

[19] Durdiev D.K., Nuriddinov J.Z. *On investigation of the inverse problem for a parabolic integro-differential equation with a variable coefficient of thermal conductivity*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Механ. Компьют. науки **30** (4), 572–584 (2020).

[20] Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *Problem of determining the thermal memory of a conducting medium*, Diff. Equat. **56** (6), 785–796 (2020).

[21] Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. *Problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation*, Meth. Funct. Anal. Topology **25** (3), 219—226 (2019).

[22] Durdiev D.K., Nuriddinov J.Z. *Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation*, Журн. СФУ. Сер. Матем. физ. **14** (1), 117–127 (2021).

[23] Durdiev D.K., Rashidov A.Sh. *Inverse problem of determining the kernel in an integro-differential equation of parabolic type*, Diff. Equat. **1** (1), 110–116 (2014).
[24] Romanov V.G. *An inverse problem for an equation of parabolic type*, Math. Notes **19** (4), 360–363 (1976).

Дурдимурод Каландарович Дурдиев

Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 46, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200117, Республика Узбекистан,

e-mail: durdiev65@mail.ru

Жавлон Зафарович Нуриддинов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбола, д. 11, г. Бухара, 200117, Республика Узбекистан,

e-mail: j.zafarovich@mail.ru

D.K. Durdiev and J.Z. Nuriddinov

Uniqueness of the kernel determination problem in an integro-differential parabolic equation with variable coefficient

Abstract. We investigate the inverse problem of determining the time and space dependent kernel of the integral term in the n-dimensional integro-differential equation of heat conduction from the known solution of the Cauchy problem for this equation. First, the original problem is replaced by the equivalent problem where an additional condition contains the unknown kernel without integral. We study the question of the uniqueness of the determining of this kernel. Next, assuming that there are two solutions $k_1(x,t)$ and $k_2(x,t)$ of the stated problem, it is formed an equation for the difference of this solution. Further research is being conducted for the difference $k_1(x,t)-k_2(x,t)$ of solutions of the problem and using the techniques of integral equations estimates. It is shown that if the unknown kernel $k(x,t)$ can be represented as $k(x,t)=\sum_{i=0}^{N} a_i(x)b_i(t)$, then $k_1(x,t)\equiv k_2(x,t)$. Thus, the theorem on the uniqueness of the solution of the problem is proved.

Keywords: inverse problem, parabolic equation, Cauchy problem, integral equation, uniqueness.

Durdimurod Kalandarovich Durdiev

V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46 University str., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200117 Republic of Uzbekistan,

e-mail: durdiev65@mail.ru

Javlon Zafarovich Nuriddinov

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200117 Republic of Uzbekistan,

e-mail: j.zafarovich@mail.ru