



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. З. Аров, Теорема Каратеодори для матриц-функций, максимальный скачок спектральных функций в проблемах продолжения, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 3–11

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

18 марта 2025 г., 00:31:59



ТЕОРЕМА КАРАТЕОДОРИ ДЛЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ, МАКСИМАЛЬНЫЙ СКАЧОК СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОБЛЕМАХ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Д. З. Аров

§ 1. Постановка задач, формулировка результатов.

1. Пусть C_n и R_n — классы матриц-функций (сокращенно — м.-ф.) $f(z)$ порядка n , голоморфных соответственно в $D = \{z: |z| < 1\}$ и $\Pi = \{z: \text{Im } z > 0\}$, имеющих там $\text{Re } f(z) \geq 0$ (для $f \in C_n$) и $\text{Im } f(z) \geq 0$ (для $f \in R_n$).

Матрицы-функции f из C_n представимы по формуле Рисса — Херглотца

$$f(z) = i\gamma_f + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\mu} + z}{e^{i\mu} - z} d\sigma_f(\mu)$$
$$\left(z \in D, \gamma_f^* = \gamma_f, d\sigma_f(\mu) \geq 0, \int_{-\pi}^{\pi} \|d\sigma_f(\mu)\| < \infty \right),$$

а м.-ф. f из R_n представимы по формуле Неванлинны

$$f(z) = \alpha_f + \beta_f z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\mu - z} - \frac{\mu}{1 + \mu^2} \right) d\sigma_f(\mu)$$
$$\left(z \in \Pi, \alpha_f^* = \alpha_f, \beta_f \geq 0, d\sigma_1(\mu) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \mu^2)^{-1} \|d\sigma_f(\mu)\| < \infty \right).$$

Неубывающие м.-ф. n -го порядка $\sigma_f(\mu)$ называются спектральными для f ($\in C_n, R_n$). Будем считать их нормированными условием $\sigma_f(\mu - 0) = \sigma_f(\mu)$; при этом $\sigma_f(\mu)$ определяются по f с точностью до постоянного слагаемого по формуле Стильтеса.

Пусть $E = D$ или Π ; $\zeta_0 = e^{i\mu}$, если $E = D$, и $\zeta_0 = \mu$, если $E = \Pi$;

$$m_f(\zeta_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_f(\mu + 0) - \sigma_f(\mu), \quad \zeta_0 \in \partial E \quad (f \in C_n, R_n).$$

Через $\lim_{z \rightarrow \zeta_0} \psi(z)$ будем обозначать предел $\psi(z)$, когда z ($\in E$) стремится к ζ_0 ($\in \partial E$) по нормали к ∂E (границе E) в точке ζ_0 .

Известно [1], что

$$m_f(\xi_0) = c \lim_{z \rightarrow \xi_0} |z - \xi_0| f(z), \text{ где } c = 1, -i \text{ при } f \in \mathbf{C}_n, \mathbf{R}_n$$

$$(m_f(\infty) = \beta_f = -i \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} f(ix), f \in \mathbf{R}_n).$$

2. Через $\mathbf{B}_{k \times l}$ обозначается класс голоморфных в E м.-ф. $\mathcal{E}(z)$ порядка $k \times l$ с $\mathcal{E}^*(z) \mathcal{E}(z) \leq I$ в E ; $\mathbf{B}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}_{k \times k}$.

В широком круге задач гармонического анализа (тригонометрическая и степенная проблемы моментов, интерполяционная задача Неванлинны — Пика, задачи М. Г. Крейна продолжения с отрезка положительно-определенных и винтовых функций, задачи описания спектральных функций дифференциальных операторов и канонических дифференциальных систем и другие «проблемы продолжения») не только для скалярных функций, но и для матричнозначных, описание решений в так называемом вполне неопределенном случае сводится к рассмотрению семейства $\mathfrak{M} = \{f_\xi\} \subset \mathbf{C}_n(\mathbf{R}_n)$ м.-ф., получаемых по формуле

$$f_\xi(z) = [a_{11}(z) \mathcal{E}(z) + a_{12}(z)] [a_{21}(z) \mathcal{E}(z) + a_{22}(z)]^{-1}, \quad \mathcal{E} \in \mathbf{B}_n, \quad (1)$$

где $A(z) = [a_{jk}(z)]_1^2$ — мероморфная в E м.-ф. порядка $2n$ с $\det A(z) \neq 0$. Известно [2], что по \mathfrak{M} рассматриваемая в формуле (1) м.-ф. $A(z)$ восстанавливается с точностью до скалярного мероморфного в E множителя $\rho(z)$ и постоянного правого J -унитарного множителя U ($U^* j U = J$), где

$$J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix},$$

причем $\rho(z)$ можно выбрать так, чтобы полученная в итоге м.-ф. $A(z)$ была (J, \mathcal{Y}) -сжимающей в E ($A(z) \in \mathbf{B}_{j, \mathcal{Y}}$), т. е. чтобы во всех точках голоморфности $A(z)$ в E имели $A^*(z) \mathcal{Y} A(z) \leq J$ (или, что то же, $A(z) J A^*(z) \leq \mathcal{Y}$), где $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_r$ при $\mathfrak{M} \subset \mathbf{C}_n$ и $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_i$ при $\mathfrak{M} \subset \mathbf{R}_n$,

$$\mathcal{Y}_r = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y}_i = \begin{pmatrix} 0 & -iI_n \\ iI_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $A(z) = [a_{jk}(z)]_1^2$ — произвольная м.-ф. класса $\mathbf{B}_{j, \mathcal{Y}}$, то получаемое по формуле (1) семейство $\mathfrak{M} = \{f_\xi\}$ содержится в \mathbf{C}_n (при $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_r$) или в \mathbf{R}_n (при $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_i$). Чаще вместо формулы (1) рассматривается формула, дающая то же семейство $\mathfrak{M} = \{f_{p, q}\}$,

$$f_{p, q}(z) = [b_{11}(z) p(z) + b_{12}(z) q(z)] [b_{21}(z) p(z) + b_{22}(z) q(z)]^{-1}, \\ [p, q] \in O_{\mathcal{Y}}, \quad (2)$$

где $O_{\mathcal{Y}}$ — класс мероморфных в E пар $\xi(z) = [p(z), q(z)]$ м.-ф. порядка n , невырожденных ($\text{rang } \xi(z_0) = n$ при некотором $z_0 \in E$) с $\xi(z) \mathcal{Y} \xi^*(z) \leq 0$; $B(z) = [b_{jk}(z)]_1^2$ — мероморфная в E \mathcal{Y} -сжимающая м.-ф. ($B(z) \in \mathbf{B}_{\mathcal{Y}}$), т. е. $B^*(z) \mathcal{Y} B(z) \leq \mathcal{Y}$; в формуле (2)

можно ограничиться парами $\xi = [I - \mathcal{E}, I + \mathcal{E}]$ при $\mathfrak{M} \subset \subset \mathbf{C}_n$ и $\xi = [i(I - \mathcal{E}), I + \mathcal{E}]$ при $\mathfrak{M} \subset \mathbf{R}_n$, где $\mathcal{E} \in \mathbf{V}_n$; при $\det q(z) \neq 0$ вместо пар $[p, q]$ можно рассматривать пары $[\tau, I]$ с $\tau (= pq^{-1}) \in \mathbf{C}_n(\mathbf{R}_n)$, что и делают при $n = 1$. Матрицы-функции $A(z) (\in \mathbf{V}_{J, \mathcal{Y}})$ и $B(z) (\in \mathbf{V}_{\mathcal{Y}})$ выражаются одна через другую:

$$A(z) = B(z)U, \quad UJU^* = \mathcal{Y},$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \text{ при } \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_r$$

$$\text{и } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -iI_n & iI_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \text{ при } \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_i.$$

Теория м.-ф. класса $\mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$ (с произвольной матрицей \mathcal{Y} , $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^* = = \mathcal{Y}^{-1}$) развита В. П. Потаповым [3]; им, его учениками и последователями рассмотрены применения этой теории к синтезу электрических цепей и к упомянутому выше кругу задач гармонического анализа [1, 4—6]. Матрицы-функции $B(z)$ из $\mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$ выражаются через соответствующие м.-ф. $\tilde{S}(z)$ из \mathbf{V}_{2n} преобразованием Потапова — Гинзбурга

$$B(z) = [P_- + P_+ \tilde{S}(z)] [P_+ + P_- \tilde{S}(z)]^{-1}, \quad P_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} (1/2) [I \pm \mathcal{Y}].$$

Поэтому из известной теоремы Фату следует, что для $A(z)$ из $\mathbf{V}_{J, \mathcal{Y}}$ и $B(z)$ из $\mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$ существуют граничные значения $A(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} A(z)$ и $B(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} B(z)$ п. в. на ∂E . В упомянутых выше «проблемах продолжения» соответствующие м.-ф. $A(z)$ имеют (J, \mathcal{Y}) -унитарные граничные значения п. в. на ∂E , а $B(z)$ — \mathcal{Y} -унитарные, т. е.

$$A^*(\zeta) \mathcal{Y} A(\zeta) = J, \quad B^*(\zeta) \mathcal{Y} B(\zeta) = \mathcal{Y}, \quad \zeta \in \partial E \text{ п. в.}$$

3. Целью настоящей работы является нахождение для семейства \mathfrak{M} м.-ф., получаемых по формуле (1) или (2), м.-ф. $f^p(z)$ с максимальным скачком спектральной функции, т. е. такой, что

$$f^p \in \mathfrak{M}, \quad m_f(\zeta_0) \leq m_{f^p}(\zeta_0) \quad \forall f \in \mathfrak{M}.$$

Полученные здесь теоремы 4а, 4б и 5 являются обобщением результатов о решениях с максимальным скачком спектральной функции для проблемы моментов (П. Л. Чебышев и А. А. Марков [7]), для струны (М. Г. Крейн [8]), для обобщенной проблемы моментов (А. Л. Сахнович [4]). Предварительно доказывается следующий аналог для м.-ф. класса $\mathbf{V}_{k \times l}$ известной теоремы Каратеодори [9] о функциях класса \mathbf{V}_1 , отличный от имеющегося в статье [10].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $S \in \mathbf{V}_{k \times l}$, $S^*(z) S(z) < I$ ($z \in E$), $\zeta_0 \in \in \partial E$. Тогда существует (конечный) предел

$$M(\zeta_0) = \lim_{z \rightarrow \zeta_0} 2 |z - \zeta_0| [I - S^*(z) S(z)]^{-1}. \quad (3)$$

Если при этом $S_0 = \lim_{z_n \rightarrow \zeta_0} S(z_n)$, то

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0} 2^{-1} |z - \zeta_0| [I - S^*(z) S_0]^{-1} [I - S^*(z)] [I - S_0^* S(z)]^{-1} = M(\zeta_0). \quad (4)$$

Доказательство этой теоремы ведется параллельно с доказательством следующего нужного нам утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S \in \mathbf{B}_{k \times l}$, $S^*(z) S(z) < I$ ($z \in E$), $\zeta_0 \in \partial E$. Тогда при любой м.-ф. \mathcal{E} из $\mathbf{B}_{l \times k}$ существует предел

$$M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) = \lim_{z \rightarrow \zeta_0} |z - \zeta_0| [I - \mathcal{E}(z) S(z)]^{-1}, \quad (5)$$

причем

$$M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) = M^{1/2}(\zeta_0) V_{\mathcal{E}}(\zeta_0) M^{1/2}(\zeta_0), \quad 0 \leq V_{\mathcal{E}}(\zeta_0) \leq I. \quad (6)$$

Здесь $M(\zeta_0)$ — матрица, определенная в (3), так что

$$M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) \leq M(\zeta_0) = M_{S_0^*}(\zeta_0),$$

и $\mathcal{E} \in \mathbf{B}_{l \times k}$, $S_0 = \lim_{z_n \rightarrow \zeta_0} S(z_n)$ — произвольный частичный предел м.-ф. $S(z)$ при $z \rightarrow \zeta_0$ по нормали к ∂E в точке ζ_0 .

Из теоремы 1 вытекает аналогичная теорема для м.-ф. $B(z)$ из $\mathbf{B}_{\mathcal{Y}}$ (и $A(z)$ из $\mathbf{B}_J, \mathcal{Y}$).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $B(z) \in \mathbf{B}_{\mathcal{Y}}$, $B^*(z) \mathcal{Y} B(z) < \mathcal{Y}$ ($z \in E$), и существует граничное значение $B_0 = B(\zeta_0)$. Тогда существуют

$$N(\zeta_0) = \lim_{z \rightarrow \zeta_0} 2^{-1} |z - \zeta_0| [\mathcal{Y} - B^*(z) \mathcal{Y} B(z)]^{-1},$$

$$N_{B_0^*}(\zeta_0) = \lim_{z \rightarrow \zeta_0} |z - \zeta_0| [\mathcal{Y} - B_0^* \mathcal{Y} B(z)]^{-1},$$

причем $N_{B_0^*}(\zeta_0) = N(\zeta_0)$ и

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0} 2^{-1} |z - \zeta_0| [\mathcal{Y} - B^*(z) \mathcal{Y} B_0]^{-1} [\mathcal{Y} - B^*(z) \mathcal{Y} B(z)] [\mathcal{Y} - B_0^* \mathcal{Y} B(z)]^{-1} = N(\zeta_0).$$

Из этой теоремы вытекает аналог теоремы Каратеодори для м.-ф. $B(z)$ класса $\mathbf{B}_{\mathcal{Y}}$, полученный в работе [11], где по существу рассматривается случай, когда $N_{B_0^*}(\zeta_0) > 0$.

Если $A(z) = [a_{jk}(z)]_1^2 \in \mathbf{B}_J, \mathcal{Y}$, то

$$\chi(z) \stackrel{\text{def}}{=} -a_{22}^{-1}(z) a_{21}(z) \in \mathbf{B}_n \quad (7)$$

и формула (4) определена при любой м.-ф. \mathcal{E} из \mathbf{B}_n тогда (и только тогда), когда

$$I - \chi^*(z) \chi(z) > 0 \quad (z \in E). \quad (8)$$

Последнее условие можно записать в виде

$$[a_{21}(z), a_{22}(z)] J [a_{21}(z), a_{22}(z)]^* < 0.$$

Точно так же, если $B(z) = [b_{jk}(z)]_1^2 \in \mathbf{B}_y$, то формула (2) определена при всех парах $\xi = [p, q]$ из O_y тогда (и только тогда), когда

$$[b_{21}(z), b_{22}(z)] \not\in [b_{21}(z), b_{22}(z)]^* < 0. \quad (9)$$

Если $A(\xi_0)$ является (J, \mathcal{Y}) -унитарной матрицей, то $\chi(\xi_0)$ — унитарной.

Основной результат работы формулируется ниже в виде двух эквивалентных теорем.

ТЕОРЕМА 4а. Пусть $A(z) = [a_{jk}(z)]_1^2 \in \mathbf{B}_{J, y}$, существует (J, \mathcal{Y}) -унитарное граничное значение $A(\xi_0)$ и для м.-ф. $\chi(z)$, определенной в (7), выполняется условие (8). Пусть $\mathfrak{M} = \{f_\xi\}$ — семейство м.-ф., определяемых формулой (1). Тогда:

1) существует предел

$$m(\xi_0) = \lim_{z \rightarrow \xi_0} 2 |z - \xi_0| [a_{22}(z) a_{22}^*(z) - a_{21}(z) a_{21}^*(z)]^{-1}; \quad (10)$$

$$2) m_{f_\xi}(\xi_0) \leq m(\xi_0) \quad \forall f_\xi \in \mathfrak{M};$$

$$3) m_{f_\xi}(\xi_0) = m(\xi_0) \text{ при } \mathcal{E}(z) \equiv \chi^*(\xi_0).$$

ТЕОРЕМА 4б. Пусть $B(z) = [b_{jk}(z)]_1^2 \in \mathbf{B}_y$, существует \mathcal{Y} -унитарное граничное значение $B(\xi_0)$ и выполняется условие (9). Пусть $\mathfrak{M} = \{f_{p,q}\}$ — семейство м.-ф., определяемых формулой (2). Тогда:

1) существует предел

$$m(\xi_0) = \lim_{z \rightarrow \xi_0} 2 |z - \xi_0| \{ [b_{21}(z), b_{22}(z)] (-\mathcal{Y}) [b_{21}(z), b_{22}(z)]^* \}^{-1};$$

$$2) m_{f_{p,q}}(\xi_0) \leq m(\xi_0) \quad \forall f_{p,q} \in \mathfrak{M};$$

$$3) m_{f_{p,q}}(\xi_0) = m(\xi_0) \text{ при } p(z) \equiv b_{22}^*(\xi_0), q(z) \equiv -b_{21}^*(\xi_0).$$

При исследовании сингулярных задач (проблемы моментов и задача Неванлинны — Пика с бесконечным числом данных, задача описания спектральных функций сингулярного дифференциального оператора или канонической системы и другие) обычно предварительно рассматривают однопараметрическое семейство соответствующих «усеченных» задач, которым отвечают семейства $\mathfrak{M}_x (x \in X)$, монотонно зависящие от параметра x , получаемые по формулам (1) или (2) при некоторых $A_x(z) (\in \mathbf{B}_{J, y})$ или $B_x(z) (\in \mathbf{B}_y)$. При этом отвечающее сингулярной задаче семейство $\mathfrak{M} (\subset \mathbf{C}_n, \mathbf{R}_n)$, вообще говоря, уже не получается по формуле (1) или (2), но является пересечением семейств $\mathfrak{M}_x (x \in X)$. В связи с различного рода дискретно-континуальными проблемами продолжения представляет интерес в качестве X рассматривать не только числовые множества ($X = \mathbf{N}$, $X = [a; b] \subset \mathbf{R}$ и другие), но и произвольные упорядоченные множества, которые будем предполагать фильтрующими вправо и удовлетворяющими условию: существует возрастающая последовательность $x_j (\in X)$ такая, что $\forall x (\in X) \exists j (\in \mathbf{N}): x < x_j$. При этом, очевидно, $\mathfrak{M} = \bigcap_{x \in X} \mathfrak{M}_x = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathfrak{M}_{x_j}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathfrak{M}_x (x \in X)$ — семейства м.-ф. из \mathbf{C}_n или \mathbf{R}_n , получаемых по формулам вида (1) ((2)) такие, что $\mathfrak{M}_{x'} \subset \subset \mathfrak{M}_{x''}$, если $x' < x''$ и пусть $\mathfrak{M} = \bigcap_{x \in X} \mathfrak{M}_x$. Пусть при фиксированном $\zeta_0 (\in \partial E)$ определен максимальный скачок $m(\zeta_0, x)$ спектральных функций $\sigma_f(\mu)$, когда f пробегает \mathfrak{M}_x . Тогда существует предел $m(\zeta_0) = \lim_{x \in X} m(\zeta_0, x)$ и $m(\zeta_0)$ — максимальный скачок $\sigma_f(\mu)$, когда f пробегает \mathfrak{M} . Иначе говоря, существует м.-ф. f^0 из \mathfrak{M} такая, что

$$m_f(\zeta_0) \leq m_{f^0}(\zeta_0) = m(\zeta_0) \quad \forall f \in \mathfrak{M}.$$

§ 2. Доказательство теорем 1—3.

1. Пусть $E = D$, $S \in \mathbf{B}_{k \times l}$, $S^*(z) S(z) < I (z \in E)$. Рассматриваемые в (5) пределы существуют, так как $(I - \mathcal{E}S)^{-1} \in \mathbf{C}_l$. В частности, существует такой предел $M_{S_0^*}(\zeta_0)$ при $\mathcal{E}(z) \equiv S_0^*$,

S_0 — матрица порядка $k \times l$, $S_0^* S_0 \leq I$.

2. При любых $z_n, z (\in D)$ выполняется неравенство (Пика)

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{I - S^*(z_n) S(z_n)}{1 - \bar{z}_n z_n} & \frac{I - S^*(z_n) S(z)}{1 - \bar{z}_n z} \\ \frac{I - S^*(z) S(z_n)}{1 - \bar{z} z_n} & \frac{I - S^*(z) S(z)}{1 - \bar{z} z} \end{array} \right] \geq 0.$$

Будем рассматривать $z = |z| \zeta_0$, $z_n = |z_n| \zeta_0$, $\zeta_0 \in \partial E$. Положим

$$\varphi(z) = 2 |z - \zeta_0| [I - S^*(z) S(z)]^{-1},$$

$$\psi(z; \mathcal{E}) = |z - \zeta_0| [I - \mathcal{E}(z) S(z)]^{-1},$$

$$\chi(z; \mathcal{E}) = \psi^*(z, \mathcal{E}) \varphi^{-1}(z) \psi(z, \mathcal{E}).$$

Из неравенства Пика вытекает, что для рассматриваемых z_n и z

$$\frac{1 + |z_n|}{2} \varphi(z_n) \leq \frac{2(1 - |z_n| |z|)^2}{(1 + |z|)(1 - |z|)^2} \chi(z, S^*(z_n)). \quad (11)$$

Пользуясь тем, что $S^*(z) S(z_n) S^*(z_n) S(z) \leq S^*(z) S(z)$, получаем

$$\chi(z, S^*(z_n)) \leq -2^{-1} (1 - |z|) I + \operatorname{Re} \psi(z, S^*(z_n)). \quad (12)$$

Из неравенства Пика вытекает также, что семейство матриц $\varphi(z) (z \in D)$ ограничено ($\|\varphi(z)\| \leq 2(1 - \|S(0)\|)^{-2}$). Поэтому при некоторой последовательности $z'_n (\in D)$ существует предел $M_1(\zeta_0) = \lim_{z'_n \rightarrow \zeta_0} \varphi(z'_n)$. Существование предела (3) будет доказа-

но, если будет показано, что для любой другой последовательности z''_n из существования $M_2(\zeta_0) = \lim_{z''_n \rightarrow \zeta_0} \varphi(z''_n)$ следует равенство

$$M_2(\zeta_0) = M_1(\zeta_0).$$

3. Пусть z_n — подпоследовательность последовательности z'_n , для которой существует предел $S_1 = \lim_{z_n \rightarrow \zeta_0} S(z_n)$. Переходя в неравенствах (11) и (12) к пределу при $z_n \rightarrow \zeta_0$, получим

$$M_1(\zeta_0) \leq \frac{2}{1+|z|} \chi(z, S_1^*) \leq -\frac{1-|z|}{1+|z|} I + \operatorname{Re} \psi(z, S_1^*). \quad (13)$$

Так как при $z \rightarrow \zeta_0$ предел правой части этого двойного неравенства равен $M_{S_1^*}(\zeta_0)$, то получаем, что $M_1(\zeta_0) \leq M_{S_1^*}(\zeta_0)$.

4. Покажем теперь, что имеет место соотношение (6), где пока вместо $M(\zeta_0)$ будем иметь $M_1(\zeta_0)$. Для этого рассмотрим

$$C_{\mathcal{E}}(z) = [I - \mathcal{E}(z) S(z)]^{-1} (\in \mathbf{C}_l), \quad \mathcal{E} \in \mathbf{B}_{l \times k}.$$

Имеем (аргумент z временно писать не будем):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} S C_{\mathcal{E}} &= C_{\mathcal{E}} - I, \quad (C_{\mathcal{E}}^* - I)(C_{\mathcal{E}} - I) \leq C_{\mathcal{E}}^* S^* S C_{\mathcal{E}}, \\ C_{\mathcal{E}}^* (I - S^* S) C_{\mathcal{E}} - C_{\mathcal{E}}^* - C_{\mathcal{E}} &\leq 0. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} V^* V &\leq I, \quad \text{где } V \stackrel{\text{def}}{=} (I - S^* S)^{1/2} C_{\mathcal{E}} (I - S^* S)^{1/2} - I; \\ C_{\mathcal{E}}(z) &= [I - S^*(z) S(z)]^{-1/2} [I + V(z)] [I - S^*(z) S(z)]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Умножим обе части последнего равенства на $|z - \zeta_0|$ и перейдем к пределу по подпоследовательности z_n последовательности z'_n , для которой существует предел $V(\zeta_0) = \lim_{z_n \rightarrow \zeta_0} V(z_n)$. Получим

$$M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) = M_1^{1/2}(\zeta_0) 2^{-1} [I + V(\zeta_0)] M_1^{1/2}(\zeta_0).$$

Полагая $V_{\mathcal{E}}(\zeta_0) = 2^{-1} [I + \operatorname{Re} V(\zeta_0)]$ и учитывая, что $M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) \geq 0$, получаем

$$M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) = M_1^{1/2}(\zeta_0) V_{\mathcal{E}}(\zeta_0) M_1^{1/2}(\zeta_0), \quad 0 \leq V_{\mathcal{E}}(\zeta_0) \leq I.$$

Это означает, что $M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) \leq M_1(\zeta_0)$ ($\mathcal{E} \in \mathbf{B}_{l \times k}$). Полагая здесь $\mathcal{E}(z) \equiv S_1^*$, получаем, что $M_{S_1^*}(\zeta_0) \leq M_1(\zeta_0)$, а ранее имели $M_1(\zeta_0) \leq M_{S_1^*}(\zeta_0)$. Следовательно, $M_{S_1^*}(\zeta_0) = M_1(\zeta_0)$. Аналогично получим, что

$$M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) \leq M_2(\zeta_0) = M_{S_2^*}(\zeta_0), \quad S_2 = \lim_{z''_k \rightarrow \zeta_0} S(z''_k).$$

Поэтому $M_1(\zeta_0) (= M_{S_1^*}(\zeta_0)) \leq M_2(\zeta_0)$. Точно так же $M_2(\zeta_0) \leq M_1(\zeta_0)$, так что $M_2(\zeta_0) = M_1(\zeta_0)$. Следовательно, существует предел (3), $M(\zeta_0) = M_1(\zeta_0)$ и имеет место соотношение (6). Совершая теперь предельный переход в неравенстве (13) при $z \rightarrow \zeta_0$, получим соотношение (4).

Теоремы 1 и 2 доказаны для $E = D$. Аналогично они доказываются и для $E = \Pi$. Теорема 3 вытекает из теоремы 1, так как если $\tilde{S} (\in \mathbf{B}_{2n})$ отвечает $B(z) (\in \mathbf{B}_{\mathcal{J}})$ согласно преобразованию Потапова — Гинзбурга, то

$$\begin{aligned} [\mathcal{Y} - B^*(z) \mathcal{Y} B(z)]^{-1} &= [P_+ + P_- \tilde{S}(z)] [I - \tilde{S}^*(z) \tilde{S}(z)]^{-1} \cdot [P_+ + P_- \tilde{S}(z)]^*, \\ [\mathcal{Y} - B^*(\zeta_0) \mathcal{Y} B(\zeta)]^{-1} &= \\ &= [P_+ + P_- \tilde{S}(\zeta)] [I - \tilde{S}^*(\zeta_0) \tilde{S}(\zeta)]^{-1} [P_+ + P_- \tilde{S}(\zeta_0)]^*. \end{aligned}$$

§ 3. Доказательство теорем 4а, 4б и 5.

1. Пусть $A(z) = [a_{jk}(z)]_1^2 (\in \mathbf{B}_{J, \mathcal{J}})$ удовлетворяет условиям теоремы 4а. Тогда определенная в (7) м.-ф. $\chi(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Применяя теоремы 1 и 2 к $S(z) = \chi^*(z)$, получаем, что существуют пределы

$$\begin{aligned} M(\zeta_0) &= \lim_{z \rightarrow \zeta_0} 2 |z - \zeta_0| [I - \chi(z) \chi^*(z)]^{-1}, \\ M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) &= \lim_{z \rightarrow \zeta_0} |z - \zeta_0| [I - \chi(z) \mathcal{E}(z)]^{-1}, \quad \mathcal{E} \in \mathbf{B}_n; \\ M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) &\leq M(\zeta_0) = M_{\mathcal{E}_0}(\zeta_0), \quad \mathcal{E}_0(z) \equiv \chi^*(\zeta_0). \end{aligned}$$

Из существования пределов $M(\zeta_0)$ и $A(\zeta_0)$ следует, что существует предел $m(\zeta_0)$ в (10), и получаем, что

$$m(\zeta_0) = [a_{22}^{-1}(\zeta_0)]^* M(\zeta_0) a_{22}^{-1}(\zeta_0).$$

Для м.-ф. $f_{\mathcal{E}}(z)$, определенной по формуле (1), имеем

$$f_{\mathcal{E}}(z) = a_{11}(z) a_{21}^{-1}(z) + \Delta(z) [I - \chi(z) \mathcal{E}(z)]^{-1} a_{22}^{-1}(z),$$

где $\Delta(z) \stackrel{\text{def}}{=} a_{12}(z) - a_{11}(z) a_{21}^{-1}(z) a_{22}(z)$. Из равенства $A(\zeta_0) J A^* \cdot (\zeta_0) = \mathcal{Y}$ следует, что $\lim_{z \rightarrow \zeta_0} \Delta(z) = \bar{c} [a_{22}^{-1}(\zeta_0)]^*$. Получаем, что

$$\begin{aligned} m_{f_{\mathcal{E}}}(\zeta_0) &= [a_{22}^{-1}(\zeta_0)]^* M_{\mathcal{E}}(\zeta_0) a_{22}^{-1}(\zeta_0), \\ m_{f_{\mathcal{E}}}(\zeta_0) &\leq m(\zeta_0) \quad \forall \mathcal{E}; \\ m_{f_{\mathcal{E}}}(\zeta_0) &= m(\zeta_0) \quad \text{при } \mathcal{E}(z) \equiv \chi^*(\zeta_0). \end{aligned}$$

2. Теорема 4б получается из теоремы 4а, если учесть, что $f_{\mathcal{E}} = f_{p, q}$ при ранее указанном соответствии между парами $[p, q] (\in O_{\mathcal{J}})$ и $\mathcal{E} (\in \mathbf{B}_n)$, $f_{\mathcal{E}_0} = f_{p_0, q_0}$ при $\mathcal{E}_0 \equiv \chi^*(\zeta_0)$, $p_0 \equiv b_{22}^*(\zeta_0)$, $q_0 \equiv -b_{21}^*(\zeta_0)$ и что м.-ф. $A(z) (\in \mathbf{B}_{J, \mathcal{J}})$ и $B(z) (\in \mathbf{B}_{\mathcal{J}})$ выражаются одна через другую указанным ранее образом.

3. Докажем теперь теорему 5. В силу сделанного допущения об упорядоченном множестве X можно считать, что $X = \mathbf{N}$. Предел $m(\zeta_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(\zeta_0; k)$ существует, так как $m(\zeta_0; k) \leq m(\zeta_0; l)$ при $k > l$. Так как $\mathfrak{M} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k$, то $m_f(\zeta_0) \leq m(\zeta_0; k)$ ($f \in \mathfrak{M}$)

и потому $m_f(\zeta_0) \leq m(\zeta_0)$ ($f \in \mathfrak{M}$). Пусть $m(\zeta_0; k) = m_{f_k}(\zeta_0)$, $f_k \in \mathfrak{M}_k$. Семейство \mathfrak{M}_1 является компактным, и потому существует сходящаяся подпоследовательность f_{k_i} последовательности f_k . Пусть $f_\infty(z) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(z)$. Из имеющегося в работе (12) описания пересечения \mathfrak{M} семейств \mathfrak{M}_k вытекает, что $f_\infty \in \mathfrak{M}$. В силу теорем Хелли можно считать, что $\sigma_{f_\infty}(\mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{f_k}(\mu)$, и потому из неравенств $\sigma_{f_k}(\mu + \varepsilon) - \sigma_{f_k}(\mu) \geq m(\zeta_0)$ следует, что $\sigma_{f_\infty}(\mu + \varepsilon) - \sigma_{f_\infty}(\mu) \geq m(\zeta_0)$, а значит, и $m_{f_\infty}(\zeta_0) \geq m(\zeta_0)$. С другой стороны, так как $f_\infty \in \mathfrak{M}$, то $m_{f_\infty}(\zeta_0) \leq m(\zeta_0)$. Следовательно, $m_{f_\infty}(\zeta_0) = m(\zeta_0)$. Получили

$$m_f(\zeta_0) \leq m_{f_\infty}(\zeta_0) = m(\zeta_0) \quad \forall f \in \mathfrak{M}.$$

Теорема доказана.

Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского

Поступило
22.09.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Са х н о в и ч Л. А. Задачи факторизации и операторные тождества // УМН. 1986. Т. 41, № 1. С. 3—55.
- [2] С и м а к о в а Л. А. О мероморфных плюс-матрицах-функциях // Мат. исследования. Кишинев. 1975. Т. 10, № 1. С. 287—292.
- [3] П о т а п о в В. П. Мультипликативная структура \mathcal{F} -нерастягивающих матриц-функций // Тр. ММО. Т. 4. М.: Изд-во МГУ, 1955. С. 125—236.
- [4] К о в а л и ш и н а И. В., П о т а п о в В. П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны — Пика // Докл. АН АрмССР. 1974. Т. 59, № 1. С. 17—22.
- [5] Е ф и м о в А. В., П о т а п о в В. П. \mathcal{F} -растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории цепей // УМН. 1973. Т. 28, № 1. С. 65—130.
- [6] К а ц н е л ь с о н В. Э. Интегральное представление эрмитово положительных ядер смешанного типа и обобщенная задача Нехари. I // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 43. Харьков, 1985. С. 54—70.
- [7] К р е й н М. Г., Н у д е л ь м а н А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
- [8] К р е й н М. Г. Неравенства Чебышева — Маркова в теории спектральных функций струны // Мат. исследования. Кишинев, 1970. Т. 5, № 1. С. 77—101.
- [9] К а р а т е о д о р и К. Конформное отображение. М.; Л.: ГТТИ, 1934.
- [10] К о в а л и ш и н а И. В. Теорема Каратеодори — Жюлиа для матриц-функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 43. Харьков, 1985. С. 70—82.
- [11] М е л а м у д Е. Я. Теорема Каратеодори и граничная интерполяционная задача Неванлинны для аналитической \mathcal{F} -нерастягивающей матрицы-функции // Докл. АН АрмССР. 1985. Т. 80, № 1. С. 12—16.
- [12] О р л о в С. А. Параметризация предельных матричных кругов, аналитически зависящих от параметра // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Т. 41. Харьков, 1984. С. 96—107.