К.К.Карчяускас

ГОМОТОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

В этой заметке анонсируются несколько гомотопических (в частности, гомологических) теорем об алгебраических подмножествах комплексных проективных пространств. Теоремы 2.I–2.II дополняют и уточняют результаты моей заметки [3] *); среди них основная – теорема 2.2, дополняющая и усиливающая теорему D из [3]. Теорема 2.I2 обобщает известную теорему Андреотти-Франкеля-Милнора (см. [I]) о гомотопическом типе аффинного алгебраического многообразия. Эти двенадцать теорем формулируются в § 2. В § 3 анонсируется, в двух вариантах, обобщение одной теоремы Барта-Ларсена [6]. § I содержит необходимую подготовку.

Пользуясь случаем, хочу выразить благодарность В.А.Рохлину за полезные замечания и внимание к работе.

§ I. Необходимые определения

I.I. Терминология. Объекты, изучаемые в этой работе, являются стандартными для алгебраической геометрии. Терминологические уточнения, излагаемые в этом пункте, вызваны отсутствием общепринятой терминологии.

Под *проективным множеством* мы понимаем пересечение нескольких гиперповерхностей в CP^q с фиксированным q, под *алгебраическим множеством* – разность двух проективных множеств. Множество вида $V \setminus L$, где V – проективное множество, а L – гиперплоскость, называется *аффинным алгебраическим множеством*. Выражение *пара проективных множеств* (V, W) употребляется только в случае, когда $W \subset V$. Точка алгебраического множества называется *обыкновенной*, если она принадлежит его неприводимой компоненте наибольшей размерности и если в ней ранг некоторой системы алгебраических уравнений, задающей его в окрестности этой точки, равен его коразмер-

*) Как мне стало известно, теорема E из [3], притом в более общей форме, еще в 1973 г. была опубликована М.Ока [7]; доказательство М.Ока приводится также в [5]. Впрочем, эта более общая формулировка является таким же простым следствием теоремы D из [3], как и теорема E из [3], и тоже может быть выведена из теоремы Лефшеца в формулировке Андреотти-Франкеля-Милнора.

ности. Точки, не являющиеся обыкновенными, называются о с о б ы м и. Множество особых точек алгебраического множества X обозначается через SX ; ясно, что SX есть алгебраическое множество, проективное, если проективно X . Алгебраическое множество без особых точек называется алгебраическим многообразием.

А л г е б р а и ч е с к о й с т р а т и ф и к а ц и е й алгебраического множества мы называем его стратификацию Уитни (см.[4]), все страты которой являются алгебраическими многообразиями. С т р а т и ф и к а ц и е й п а р ы проективных множеств (V,W) называется алгебраическая стратификация множества V , в которой W является объединением страт. Алгебраическая стратификация ξ алгебраического множества называется м и н и м а л ь н о й, если для всякой другой его алгебраической стратификации ξ' при любом k имеет место включение $Y_k \subset Y_k'$ где Y_k, Y_k' – объединения страт размерностей $\leq k$ стратификаций ξ, ξ' . Минимальная стратификация всегда существует и единственна (см.[4]). Подобным же образом определяется минимальная стратификация пары проективных множеств, и она тоже всегда существует и единственна. Алгебраическое многообразие называется т р а н с в е р с а л ь н ы м алгебраической стратификации (алгебраического множества, в частности, пары проективных множеств), если оно трансверсально каждой ее страте. Заметим, что множество точек, в которых алгебраическое многообразие нетрансверсально алгебраической стратификации, алгебраично.

I.2. Числа $n(X), p(X), t(X)$. Хорошо известно, что алгебраические множества триангулируемы. Так как они локально компактны, то у каждой точки x алгебраического множества имеется такая окрестность Q , что пара (Q,x) гомеоморфна паре (C,c) где C – конус над некоторым компактным пространством, а c – – его вершина; основание конуса называется л и н к о м точки x . Нетрудно показать, что любые два линка точки гомотопически эквивалентны (см.[2], стр.II5).

Пусть X – алгебраическое множество и ξ – его минимальная стратификация. Мы полагаем $n(X)=\infty$, если X пусто, в случае же непустого X определяем $n(X)$ как наибольшее из чисел n , удовлетворяющих условию: если алгебраическое многообразие N коразмерности r трансверсально ξ в точке x из $X \cap N$, то линк точки x в $X \cap N$ ($n-r-2$)-связен. Очевидно, что если X непусто, то $n(X)$ не превышает наименьшей из размерностей неприводимых компонент множества X . Ясно также, что если X – алгебраическое многообразие, то $n(X) = dim(X)$.

Мы полагаем $\rho(X)=\infty$, если X пусто, в случае же непустого X определяем $\rho(X)$ как наименьшую из размерностей страт стратификации ξ. Как нетрудно показать, $\rho(X)\leqslant n(X)$.

Мы полагаем $t(X)=-\infty$, если X пусто, в случае же непустого X определяем $t(X)$ как $max_x t_x [x\in X]$, где t_x – – минимальное число гомоморфных уравнений, определяющих росток множества X в точке x. Как нетрудно показать, $q-t(X)\leqslant n(X)$.

I.3. Гомотопически правильные окрестности. Пусть X, M – алгебраические множества, причем M проективно. Окрестность U множества $X\cup M$ в X называется гомотопически правильной относительно M, если в любой окрестности множества M в CP^q имеется строгий деформационный ретракт пространства U, содержащий множество вида $T\cap X$, где T – окрестность множества M в CP^q.

Гомотопически правильные окрестности всегда существуют, и нетрудно показать, что любые две такие окрестности гомотопически эквивалентны связанно на $X\cap M$ (см.[2]), стр.II5).

I.4. k -правильные пересечения. Пусть X, M – алгебраические множества, причем M проективно. Будем говорить, что M k -правильно пересекает множество X, если пара $(U, X\cap M)$, где U – гомотопически правильная относительно M окрестность множества $X\cap M$ в X, k -связна. Корректность этого определения (независимость от выбора гомотопически правильной окрестности) следует из сказанного в п.I.3.

Как показывают простые примеры, при любом $k\geqslant -1$ проективное множество может пересекать алгебраическое множество k -правильно, но не ($k+1$)-правильно. Нетрудно показать также, что если проективное множество гомотопически правильно пересекает пару(V,W) проективных множеств (определение гомотопически правильного пересечения см. в [3]), то оно ∞ -правильно пересекает множество $V\setminus W$.

§ 2. Главные результаты

2.I. ТЕОРЕМА. Пусть X – алгебраическое множество, M – пересечение r гиперповерхностей и U – окрестность множества $X\cap M$ в X, гомотопически правильная относительно M. Тогда пара (X, U) $[n(X\setminus M)-r]$ -связна.

Это – техническая теорема, нужная для доказательства теоремы 2.2.

2.2. ТЕОРЕМА. Пусть M – пересечение r гиперповерхностей. Если M k-правильно пересекает алгебраическое множество X, то пара $(X, X\cap M)$ $[\min(k, n(X\setminus M)-r)]$-связна.

Это – непосредственное следствие теоремы 2.I и определения k-правильного пересечения.

2.3. ТЕОРЕМА. Пусть M – пересечение r гиперповерхностей. Если M ∞-правильно пересекает алгебраическое множество X, то пара $(X, X\cap M)$ $[p(X\setminus M)-r]$-связна.

Это – непосредственное следствие теоремы 2.2 и неравенства $p(X\setminus M)\leqslant n(X\setminus M)$.

Заметим, что теорема D из [3] легко выводится из теоремы 2.3 и последнего замечания п.I.4.

2.4. ТЕОРЕМА. Пусть M – пересечение r гиперповерхностей. Если M ∞-правильно пересекает алгебраическое множество X, то пара $(X, X\cap M)$ $[q-t(X\setminus M)-r]$-связна.

Это – непосредственное следствие теоремы 2.2 и неравенства $q-t(X\setminus M)\leqslant n(X\setminus M)$.

2.5. ТЕОРЕМА. Пусть V, W и M – проективные множества, лежащие в алгебраическом многообразии N, причем $W\subset V$. Если пересечение $W\cap SM$ пусто и многообразие $M\setminus SM$ трансверсально в N каждой содержащейся в W страте минимальной стратификации пары (V, W), то: (i) M ∞-правильно пересекает множество $V\setminus W$; (ii) W ∞-правильно пересекает множество $V\setminus W$.

Теорема 2.5 обобщает предложения A, B и C из [3]. Она дает эффективные условия, достаточные для применимости теорем 2.2, 2.3 и 2.4. В частности, из нее следует, что любые два проективные множества ∞-правильно пересекают друг друга.

2.6. ТЕОРЕМА. Если V – проективное множество и M – пересечение r гиперповерхностей, то пара $(V, V\cap M)$ $[p(V\setminus M)-r]$-связна.

Это – непосредственное следствие теоремы 2.3 и предыдущего следствия теоремы 2.5.

б 2.7. ТЕОРЕМА. Если V – проективное множество и M – пересечение r гиперповерхностей, то пара $(V, V\cap M)$ $[q-t(V\setminus M)-r]$-связна.

Это – непосредственное следствие теоремы 2.4 и упомянутого следствия теоремы 2.5.

2.8. ТЕОРЕМА. Пусть (V, W) – пара проективных множеств, ξ – ее минимальная стратификация, M – пересечение r гиперповерхностей и P – множество точек, в которых многообразие $M\setminus SM$ нетрансверсально стратификации множества W, составленной из содержащихся в W страт стратификации ξ. Пусть, далее, $l = \dim(PU(W \cap SM))$. Тогда пара $(V \setminus W, V \cap M \setminus W)$ $[q - t(V \setminus W) - r - l - 1]$-связна.

Доказательство опирается на теорему 2.4 и часть (i) теоремы 2.5.

2.9. ТЕОРЕМА. Пусть V и T – проективные множества и P – множество точек, в которых многообразие $T \setminus ST$ нетрансверсально минимальной стратификации множества V. Пусть, далее, $s = \dim(PU(V \cap ST))$. Если V – пересечение r гиперповерхностей, то пара $(CP^q \setminus T, V \setminus T)$ $(q - r - s - 1)$-связна.

Доказательство опирается на теорему 2.4 и часть (ii) теоремы 2.5. Заметим, что теорема 2.9 обобщает теорему I из [3].

2.10. ТЕОРЕМА. Если V – пересечение r гиперповерхностей и $k = \dim SV$, то пара $(CP^q, V \setminus SV)$ $(q - r - k - 1)$-связна.

Доказательство опирается на теорему 2.3 (или если угодно на теорему 2.4) и часть (i) теоремы 2.5. Заметим, что теорема 2.10 обобщает теорему H из [3].

2.11. ТЕОРЕМА. Если V – пересечение r гиперповерхностей и $n = \dim V$, $k = \dim SV$, то $H_i(V; Z) \cong H_i(CP^n; Z)$ при $i \geqslant 2n - q + r + k + 2$.

Это – непосредственное следствие теоремы 2.10 и гомологических теорем двойственности. Заметим, что теорема 2.11 обобщает G теорему из [3].

2.12. ТЕОРЕМА. Всякое n-мерное аффинное алгебраическое множество имеет гомотопический тип конечного n-мерного клеточного пространства.

В односвязном случае эта теорема была фактически доказана М.Като (см.[5], стр.49).

§ 3. Обобщение теоремы Барта-Ларсена

3.1. Первый вариант обобщения. Если V – проективное множество размерности n и $k = \dim SV$, то пара $(CP^q, V \setminus SV)$ $(2n - q - k)$-связна.

Эта теорема превращается в теорему Барта-Ларсена [6], когда множество SV пусто (так что $k = -1$).

3.2. Гомологическое следствие. Если V – проективное множество размерности n и $k = \dim SV$, то $H_i(V, Z) \cong H_i(CP^n; Z)$ при $i \geqslant q + k + 1$.

3.3. Второй вариант обобщения. Если V – проективное множество размерности n и $k = \dim SV$, то пара (CP^q, V) $[\min(2n - q - k, n(V) - k)]$-связна.

Эта теорема (как и теорема 3.I) превращается в теорему Барта-Ларсена, когда множество SV пусто.

Литература

1. М и л н о р Дж., Теория Морса, "Мир", 1965.
2. Р о х л и н В.А., Ф у к с Д.Б., Начальный курс топологии, "Наука", 1977.
3. К а р ч я у с к а с К.К., Обобщенная теорема Лефшеца, Функ. анализ, 1977, II, вып.4, с.80-81.
4. М а з е р Дж., Стратификации и отображения, УМН, 1972, XXУП, вып.5, с.85-118.
5. K a t o M., Partial Poincare duality for k -regular spaces, Topology, 1977, 16, N 1, p.p.33-50.
6. L a r s e n M.E., On the topology of complex projective manifolds, Inventh.math., 1973, 19, N 3, p.p.251-260.
7. O k a M., Manifolds - Tokyo 1973, Univ.of Tokyo Press, 1975.

Karchiauskas K.K. Homotopy properties of algebraic sets.

The author announces some homotopy theorems on algebraic subsets of complex projective spaces. Especially, one theorem asserts, that every n -dimensional complex affine algebraic set has homotopy type of finite n -dimensional cell space.