Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Б. А. Севастьянов, Асимптотика вероятности продолжения ограниченного снизу марковского критического ветвящегося процесса с непрерывным временем и бесконечной дисперсией,
Дискрет. матем., 2006, том 18, выпуск 1, 3–8

https://www.mathnet.ru/dm28

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
15 января 2026 г., 06:07:51

Дискретная математика

том 18 выпуск 1 * 2006

УДК 519.2

Асимптотика вероятности продолжения ограниченного снизу марковского критического ветвящегося процесса с непрерывным временем и бесконечной дисперсией

© 2006 г. Б. А. Севастьянов

Пусть $\mu(t)$ — число частиц в момент времени t в критическом ветвящемся процессе с непрерывным временем. Известно, что при $t \to \infty$ вероятность продолжения процесса

$$Q(t) = \mathbf{P}\{\mu(t) > 0 \mid \mu(0) = 1\} \to 0.$$

Отсюда следует, что

$$Q_{m0} = \mathbf{P}\{\mu(t) > 0 \mid \mu(0) = m\} \sim mQ(t) \to 0$$

при любом $m = 2, 3, \ldots$ При любых целых $m > r \geqslant 1$ введем обозначения

$$Q_{mr}(t) = \mathbf{P}\{\inf_{0 \leqslant u \leqslant t} \mu(u) > r \mid \mu(0) = m\}.$$

В статье доказывается, что при $t \to \infty$ имеет место асимптотика

$$Q_{mr}(t) \sim (m - r)Q(t)$$

для любого критического марковского ветвящегося процесса с непрерывным временем. Ранее этот результат был доказан для ветвящихся процессов с конечной дисперсией числа частиц.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 05.01.00035, и программы Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ, грант НШ-1758.2003.1.

Распределение числа частиц $\mu(t)$ в марковском ветвящемся процессе с непрерывным временем определяется производящей функцией

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n,$$

где

$$\mathbf{P}\{\mu(t) = n \mid \mu(0) = 1\} = p_n t + o(t), \quad n \neq 1, \quad t \downarrow 0,$$

$$p_1 = -\sum_{n \neq 1} p_n.$$

Производящая функция

$$F(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu(t) = k \mid \mu(0) = 1\} s^k$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial F(t,s)}{\partial t} = f(F(t,s)) \tag{1}$$

при начальном условии

$$F(0,s) = s$$

(см. [1, 2]).

Обозначим

$$Q(t) = 1 - F(t,0) = \mathbf{P}\{\mu(t) > 0 \mid \mu(0) = 1\}$$

вероятность невырождения ветвящегося процесса $\mu(t)$ к времени t, если он начинается в момент $t = 0$ с одной частицы, $\mu(0) = 1$. Мы будем также называть $Q(t)$ вероятностью продолжения процесса в момент t.

Если

$$f'(1) = 0, \qquad f''(1) \neq 0,$$

то процесс $\mu(t)$ называется критическим. Если

$$f''(1) = b < \infty$$

в критическом процессе $\mu(t)$, то дисперсия

$$\mathbf{D}\mu(t) = bt$$

конечна и при $t \to \infty$ вероятность

$$Q(t) \sim \frac{2}{bt}$$

(см. [2]).

Введем обозначение

$$Q_{mr}(t) = \mathbf{P}\{\inf_{0 \leqslant u \leqslant t} \mu(u) > r \mid \mu(0) = m\}. \tag{2}$$

Нетрудно видеть,что

$$Q_{m0}(t) = 1 - (1 - Q(t))^m \sim mQ(t),$$

когда $Q(t) \to 0$. Таким образом, в критическом процессе с конечной дисперсией

$$Q_{m0}(t) \sim \frac{2m}{bt}, \qquad t \to \infty.$$

Вероятность (2) — это вероятность того, что ветвящийся процесс $\mu(t)$, начинающийся с $\mu(0) = m$, всегда имеет число частиц, большее r. Такой процесс мы будем называть ограниченным снизу.

Очевидно, что $Q_{mr}(t)$ убывает по t и неравенство

$$Q_{mr}(t) < Q_{m0}(t)$$

справедливо при любых $t > 0$ и $m > r \geqslant 1$

В [3] показано, что при

$$a = f'(1) = 0, \quad 0 < b = f''(1) < \infty, \quad t \to \infty, \quad 1 \leqslant r < m$$

имеет место асимптотика

$$Q_{mr}(t) \sim \frac{2(m-r)}{bt}. \tag{3}$$

В. М. Золотарев в [4] изучал асимптотическое поведение критического ветвящегося процесса $\mu(t)$ с бесконечной дисперсией $\mathbf{D}\mu(t)$. Он доказал, что при условии, что производящая функция $f(s)$ при $0 < s \leqslant 1$ имеет вид

$$f(1-s) = s^{1+\alpha} L(s), \tag{4}$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, $L(s)$ — медленно меняющаяся при $s \downarrow 0$ функция, вероятность $Q(t)$ продолжения процесса $\mu(t)$ при $t \to \infty$ имеет асимптотику

$$Q(t) \sim \frac{L_1(t)}{t^\beta}, \tag{5}$$

где $\beta = 1/\alpha$, $L_1(t)$ — медленно меняющаяся при $t \to \infty$ функция, имеющая асимптотику

$$L_1(t) \sim \frac{1}{\alpha^\beta L^{1/\alpha}(Q(t))}. \tag{6}$$

Цель этой статьи состоит в обобщении асимптотики (3) на случай бесконечной дисперсии $\mathbf{D}\mu(t)$.

Теорема 1. *Пусть ветвящийся процесс $\mu(t)$ определяется производящей функцией $f(s)$ вида* (4), *где $0 < \alpha \leqslant 1$, $L(s)$ — медленно меняющаяся функция при $s \downarrow 0$. Тогда вероятность $Q_{mr}(t)$, $m > r \geqslant 1$, имеет при $t \to \infty$ асимптотику*

$$Q_{mr}(t) \sim (m-r)Q(t),$$

где $Q(t)$ и $L_1(t)$ определяются формулами (5) *и* (6).

Для доказательства теоремы воспользуемся равенством

$$\tau_{m0} = \tau_{mr} + \tau_{r0}, \tag{7}$$

где τ_{m0} (τ_{r0}) — случайный момент вырождения процесса $\mu(t)$, начавшегося с m (r) частиц, τ_{mr} — случайный момент первого достижения уровня r для процесса, начавшегося с m частиц, τ_{mr} и τ_{r0} независимы. Обозначим $\varphi_{mr}(\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$, преобразование Лапласа τ_{mr}. Так как

$$Q_{mr}(t) = \mathbf{P}\{\tau_{mr} > t\},$$

то

$$\varphi_{mr}(\lambda) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_{mr}(t)\,dt$$
$$= 1 - \lambda\Phi_{mr}(\lambda),$$

где

$$\Phi_{mr}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_{mr}(t)\,dt. \tag{8}$$

Из (8) вытекает, что

$$\varphi_{mr}(\lambda) = \frac{\varphi_{m0}(\lambda)}{\varphi_{r0}(\lambda)},$$

откуда следует, что

$$\Phi_{mr}(\lambda) = \frac{\Phi_{m0}(\lambda) - \Phi_{r0}(\lambda)}{1 - \lambda\Phi_{r0}(\lambda)}. \tag{9}$$

Далее нам понадобится тауберова теорема, которая является некоторым усилением теоремы 4 из книги Феллера (см. [5], гл. XIII, п. 5). Сформулируем ее в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть*

$$\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t)\,dt,$$
$$u(t) = t^l v(t) \geqslant 0,$$

где $v(t)$ — монотонная функция, $0 < l < \infty$, $L(t)$ — медленно меняющаяся функция при $t \to \infty$. В этом случае при $\lambda \downarrow 0$

$$\omega(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^l} L\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

тогда и только тогда, когда при $t \to \infty$

$$u(t) \sim \frac{1}{\Gamma(l)} t^{l-1} L(t).$$

Доказательство теоремы 1. Обозначим ρ и γ целую и дробную части β. Из соотношения (4) в условии теоремы следует асимптотика (5) (см. [4]), которую можно записать в виде

$$Q(t) \sim \frac{L_1(t)}{t^\gamma}. \tag{10}$$

Полагая в равенстве (9) $m = 1, r = 0$, получаем равенство

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t)\,dt, \tag{11}$$

где $\Phi(\lambda) = \Phi_{10}(\lambda)$, $Q(t) = Q_{10}(t)$. Дифференцируя (12) ρ раз по λ, получаем, что

$$\Phi^\rho(\lambda)(-1)^\rho = \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^\rho Q(t)\,dt. \tag{12}$$

Используя в равенстве (13) асимптотику (11), по лемме получаем, что при $\lambda \downarrow 0$

$$\Phi^{(\rho)}(\lambda)(-1)^{\rho} \sim \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\lambda^{1-\gamma}} L_1\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Поскольку при $t \to \infty$

$$\begin{aligned} Q_{m0}(t) &= 1-(1-Q(t))^m \\ &\sim mQ(t) \sim \frac{mL_1(t)}{t^{\beta}}, \end{aligned}$$

аналогично из

$$\Phi_{m0}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q_{m0}(t)\, dt$$

при $\lambda \downarrow 0$ следует, что

$$\Phi_{m0}^{(\rho)}(\lambda)(-1)^{\rho} \sim \frac{m\Gamma(1-\gamma)}{\lambda^{1-\gamma}} L_1\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Аналогичным образом можно показать, что при любом целом k, $0 \leqslant k < \rho$ и $\lambda \downarrow 0$

$$\Phi_{m0}^{(k)}(\lambda)(-1)^{k} \sim o\left(\frac{L_1(\lambda^{-1})}{\lambda^{1-\gamma}}\right).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \Phi_{m0}(\lambda) - \Phi_{r0}(\lambda), \\ B(\lambda) &= \frac{1}{1-\lambda\Phi_{r0}(\lambda)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\Phi_{mr}^{(\rho)}(\lambda)(-1)^{\rho} = (-1)^{\rho}(A^{(\rho)}(\lambda)B(\lambda) + \sum_{k=0}^{\rho-1} \binom{\rho}{k} A^{(k)}(\lambda)B^{(\rho-k)}(\lambda)),$$

где первое слагаемое при $\lambda \downarrow 0$

$$(-1)^{\rho}A^{(\rho)}(\lambda)B(\lambda) \sim (m-r)\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\lambda^{1-\gamma}L_1(\lambda^{-1})},$$

а остальные слагаемые имеют порядок $o(L_1(\lambda^{-1})/\lambda^{1-\gamma})$. Отсюда согласно лемме 1

$$Q_{mr}(t) \sim (m-r)\frac{L_1(t)}{t^{\rho+\gamma}},$$

что и доказывает теорему.

Список литературы

1. Севастьянов Б. А., Теория ветвящихся случайных процессов. *Успехи математических наук* (1951) **6**, №6, 47–99.

2. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.

3. Севастьянов Б. А., Ограниченные снизу ветвящиеся процессы. *ДАН СССР* (1978) **238**, №4, 811–813.

4. Золотарев В. М., Уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов. *Теория вероятностей и ее применения* (1957), **2**, №2, 256–265.

5. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2. Мир, Москва, 1967.

Статья поступила 10.11.2005.