В. А. Файзиев, О пространстве псевдойенсеновых функций на группах,
Алгебра и анализ, 2002, том 14, выпуск 6, 205–234

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 6

О ПРОСТРАНСТВЕ ПСЕВДОЙЕНСЕНОВЫХ ФУНКЦИЙ НА ГРУППАХ

© В. А. Файзиев

В статье устанавливается устойчивость по Хайерсу–Уламу–Рассиасу уравнения Йенсена на некоторых классах групп. Доказывается, что всякая группа вложима в группу, над которой уравнение Йенсена устойчиво.

§1. Введение

В 1940 г. на заседании Математического клуба университета Висконсин С. М. Улам представил список важных нерешенных задач [1]. Одна из тех задач явилась стартовой точкой для нового направления исследований: проблемы устойчивости. Вопрос ставился так: если заменить функциональное уравнение функциональным неравенством, то при каких условиях решения последнего будут близки к решениям исходного уравнения? Например, пусть даны группа G_1, метрическая группа (G_2, d) и произвольное число $\varepsilon > 0$; вопрос состоит в том, существует ли положительное число $\delta > 0$ такое, что если отображение $f : G_1 \to G_2$ удовлетворяет условию $d(f(xy), f(x)f(y)) < \delta$ для любых x, $y \in G_1$, то существует гомоморфизм $T : G_1 \to G_2$ такой, что $d(f(x), T(x)) < \varepsilon$ для любых x, $y \in G_1$ [1]?

В случае положительного ответа на этот вопрос говорят, что гомоморфизмы *устойчивы* или что функциональное уравнение Коши

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

устойчиво. Первый ответ на этот вопрос был дан Хайерсом [2] в 1941 г. Рассмотрим аддитивное уравнение Коши

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y). \tag{1}$$

Теорема 1 (D. H. Hyers). *Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства и $f : E_1$ — E_2 удовлетворяет условию: для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| < \varepsilon \quad \textit{для всех } x, y \in E_1, \tag{2}$$

тогда существует $T : T_1 \to E_2$ такое, что

$$T(x+y) - T(x) - T(y) = 0 \quad \textit{для всех } x, y \in E_1 \tag{3}$$

и

$$\|f(x) - T(x)\| < \varepsilon \quad \textit{для любых } x \in E_1. \tag{4}$$

Определение. Пусть G — полугруппа и B — банахово пространство. Будем говорить, что уравнение (1) устойчиво для пары (G, B), если для любой функции $f : G \to B$ такой, что

$$\|f(xy) - f(x) - f(y)\| \leqslant \delta, \quad x, y \in G,$$

существует решение φ уравнения (1) такое, что

$$\|f(x) - \varphi(x)\| \leqslant \varepsilon, \quad x \in G,$$

для некоторого ε, зависящего только от δ.

В [3] было доказано, что если B_1, B_2 — банаховы пространства, то уравнение (1) устойчиво для (G, B_1) тогда и только тогда, когда оно устойчиво для пары (G, B_2).

Поэтому будем просто говорить об устойчивости уравнения (1) для группы или полугруппы. Если внимательно прочитать доказательство теоремы Хайерса, то легко заметить, что на самом деле банахово пространство E_1 можно заменить любой коммутативной группой. Таким образом, теорема Хайерса утверждает, что уравнение (1) устойчиво для любой коммутативной группы G. В 1978 г. Рассиас опубликовал следующий результат [4].

Теорема 2. *Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства и отображение $f : E_1$ — E_2 удовлетворяет условию: для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| < \varepsilon \cdot (\|x\|^p + \|y\|^p) \quad \textit{для всех } x,\ y \in E_1, \tag{5}$$

тогда существует $T : E_1 \to E_2$ такое, что

$$T(x+y) - T(x) - T(y) = 0 \quad \textit{для всех } x,\ y \in E_1$$

и

$$\|f(x)-T(x)\| < k\cdot\varepsilon\cdot\|x\|^p \quad \textit{для любого } x\in E_1, \tag{6}$$

где ε, p *и* k *— постоянные такие, что* $\varepsilon>0$, $0\leqslant p<1$ *и* k *зависит от* ε *и* p.

Обобщению результатов Хайерса и Рассиаса в различных направлениях посвящено множество работ [5–20].

В литературе закрепилась следующая терминология. Если теорема об устойчивости доказывается, когда правая часть неравенства (как в случае (2)) постоянная, то говорят об устойчивости уравнения по Хайерсу–Уламу. Если же теорема об устойчивости доказывается, когда правая часть неравенства (например, как в случае (5)) — неограниченная функция, то говорят об устойчивости уравнения по Хайерсу–Уламу–Рассиасу.

В настоящей статье рассматривается вопрос об устойчивости уравнения Йенсена

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)+f(y) \tag{7}$$

по Хайерсу–Уламу–Рассиасу. Положим $\frac{x+y}{2}=u$, $\frac{x-y}{2}=v$, тогда уравнение (7) можно переписать в виде $2f(y)=f(u+v)+f(u-v)$.

Последнему уравнению можно придать вид

$$f(xy)+f(xy^{-1})=2f(x), \tag{8}$$

его можно рассматривать над любой группой. Это уравнение рассматривалось в статье [13–16].

Вопрос об устойчивости уравнения (8) рассматривался в статьях [17–20]. Во всех этих статьях областью определения функции f была либо абелева группа, либо некоторое ее подмножество.

В настоящей статье вопрос об устойчивости уравнения (8) будет рассматриваться над произвольной группой.

§2. Пространство (p,γ)-псевдойенсеновых функций

Всюду ниже под p будем понимать число, принадлежащее интервалу $[0,1)$.

Пусть S — произвольная группа. Под γ будем понимать функцию, отображающую S в $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющую условиям

1) $\gamma(xy)\leqslant\gamma(x)+\gamma(y)$,

2) $\gamma(x^{-1})=\gamma(x)$.

Очевидно, что для любых $x\in S$ и $m\in\mathbb{Z}$ справедливо неравенство

$$\gamma(x^m)\leqslant|m|\gamma(x). \tag{9}$$

Определение. Пусть G — произвольная группа, а p и γ удовлетворяют условиям выше. Вещественнозначную функцию f на G будем называть (p,γ)-*квазийенсеновой*, если существуют неотрицательные a, θ такие, что

$$|f(xy)+f(xy^{-1})-2f(x)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(y)], \quad x,y\in G. \tag{10}$$

Определение. Пусть G — произвольная группа. Будем говорить, что функция $f: G\to\mathbb{R}$ является *является функцией Йенсена*, если она удовлетворяет следующему уравнению Йенсена:

$$f(xy)+f(xy^{-1})-2f(x)=0 \tag{11}$$

для любых x, $y\in G$.

Ясно, что множество всех (p,γ)-квазийенсеновых функций на группе G является вещественным линейным пространством относительно обычных операций. Обозначим его через $KJ_{p,\gamma}(G)$. Подпространство $KJ_{p,\gamma}(G)$, состоящее из функций Йенсена, обозначим через $J(G)$, а подпространство $J(G)$, состоящее из функций j, удовлетворяющих условию $j(1)=0$, обозначим через $J_0(G)$, здесь 1 — единица группы G.

Очевидно, что постоянные функции являются решениями уравнения (11). Легко видеть, что $J(G)=J_0(G)\dotplus\mathbb{R}$.

Из (10) получаем

$$|f(y)+f(y^{-1})-2f(1)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(1)+\gamma^p(y)] \quad \text{для всех } x,y\in G,$$

следовательно,

$$|f(y)+f(y^{-1})| \leqslant c_1+\theta\gamma^p(y) \quad \text{для всех } y\in G. \tag{12}$$

Здесь $c_1=2|f(1)|+a+\theta\gamma^p(1)$.

Теперь из (10) получаем, что для любого $x\in G$ справедливы неравенства

$$|f(x^2)+f(xx^{-1})-2f(x)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(x)],$$
$$|f(x^2)+f(1)-2f(x)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(x)].$$

Следовательно,

$$|f(x^2)-2f(x)| \leqslant |f(1)|+a+2\theta\gamma^p(x) \quad \text{для всех } x\in G. \tag{13}$$

Учитывая (10), получаем

$$|f(x^3)+f(xx^{-2})-2f(x)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(x^2)],$$
$$|f(x^3)+f(x^{-1})-2f(x)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(x^2)].$$

Из последнего неравенства и (12) следует

$$|f(x^3)-3f(x)| \leqslant c_1+a+\theta[2\gamma^p(x)+\gamma^p(x^2)], \quad x\in G. \tag{14}$$

Учитывая (10), получаем

$$|f(x^4)+f(xx^{-3})-2f(x)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(x^3)],$$
$$|f(x^4)+f(x^{-2})-2f(x)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(x^3)].$$

Из последнего неравенства, (12) и (13) следует

$$\begin{aligned}&|f(x^4)-4f(x)|\\ &\quad\leqslant |f(1)|+c_1+a+\theta[2\gamma^p(x)+\gamma^p(x^2)+\gamma^p(x)+\gamma^p(x^3)]\\ &\quad= |f(1)|+c_1+a+\theta[3\gamma^p(x)+\gamma^p(x^2)+\gamma^p(x)+\gamma^p(x^3)].\end{aligned} \tag{15}$$

Лемма 1. *Для любого $m\geqslant 1$ и любого $x\in G$ справедливо соотношение*

$$|f(x^{2m+1})-(2m+1)f(x)| \leqslant m(c_1+a)+\theta\sum_{i=1}^{2m}\gamma^p(x^i)+\theta(m+1)\gamma^p(x). \tag{16}$$

Доказательство. Индукция по m. Для $m=1$ лемма установлена. Предположим, что для m лемма установлена, проверим ее справедливость для $m+1$. Из (10) имеем

$$|f(x^{2m+1})+f(xx^{-2m})-2f(x)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(x^{2m})],$$
$$|f(x^{2m+1})+f(x^{-2m+1})-2f(x)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(x^{2m})].$$

Из (12) получаем

$$|f(x^{2m+1})-f(x^{2m-1})-2f(x)| \leqslant a+\theta[\gamma^p(x^{2m})]+c_1+\theta\gamma^p(x^{2m-1}).$$

Теперь из соотношения

$$|f(x^{2m-1})-(2m-1)f(x)| \leqslant (m-1)(c_1+a)+\theta\sum_{i=1}^{2(m-1)}\gamma^p(x^i)+\theta m\gamma^p(x)$$

получаем

$$|f(x^{2m+1})-(2m+1)f(x)| \leqslant m(c_1+a)+ \leqslant m(c_1+a)+\theta\sum_{i=1}^{2m}\gamma^p(x^i)+\theta(m+1)\gamma^p(x).$$

Лемма доказана. •

Лемма 2. *Для любого $m \geqslant 1$ справедливо соотношение*

$$|f(x^{2m}) - 2mf(x)| \leqslant |f(1)| + (m-1)c_1 + ma + \theta \sum_{i=1}^{2m-1} \gamma^p(x^i) + \theta m \gamma^p(x) \quad (17)$$

для всех $x \in G$.

Доказательство. Индукция по m. Для $m = 1$ лемма установлена. Предположим, что для m лемма установлена, проверим ее справедливость для $m+1$. Из (10) имеем

$$|f(x^{2m+2}) + f(xx^{-2m-1}) - 2f(x)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(x^{2m+1})],$$
$$|f(x^{2m+2}) + f(x^{-2m}) - 2f(x)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(x^{2m+1})].$$

Из (12) получаем

$$|f(x^{2m+2}) - f(x^{2m}) - 2f(x)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(x^{2m+1})] + c_1 + \theta\gamma^p(x^{2m}).$$

Далее по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} &|f(x^{2m+2}) - (2m+2)f(x)| \\ &\quad \leqslant \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(x^{2m+1})] + c_1 + \theta\gamma^p(x^{2m}) + a + |f(1)| + (m-1)c_1 \\ &\quad + \theta \sum_{i=1}^{2m-1} \gamma^p(x^i) + \theta m \gamma^p(x) \\ &\quad = |f(1)| + mc_1 + (m+1)a + \theta \sum_{i=1}^{2m+1} \gamma^p(x^i) + \theta(m+1)\gamma^p(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана. •

Лемма 3. *Для любого $k \in N$ существует b_k такое, что для любого $x \in G$ справедливо соотношение*

$$\left|\frac{1}{k} f(x^k) - f(x)\right| \leqslant a_1 + b_k \gamma^p(x). \quad (18)$$

Здесь $a_1 = \frac{1}{2}(c_1 + a + |f(1)|)$.

Доказательство. Введем обозначение $S_k = \sum_{i=1}^{k} i^p$. Из леммы 1 следует соотношение

$$|f(x^{2m+1}) - (2m+1)f(x)| \leqslant m(c_1 + a) + \theta\gamma^p(x)[S_{2m} + m + 1]. \quad (19)$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{2m+1}f(x^{2m+1})-f(x)\right|\leqslant\frac{m}{2m+1}(c_1+a)+\gamma^p(x)\frac{S_{2m}+m+1}{2m+1}. \tag{20}$$

Из леммы 2 следует

$$|f(x^{2m})-2mf(x)|\leqslant|f(1)|+(m-1)c_1+ma+\theta\gamma^p(x)[S_{2m-1}+m]. \tag{21}$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{2m}f(x^{2m})-f(x)\right|\leqslant\frac{|f(1)|}{2m}+\frac{(m-1)}{2m}c_1+\frac{1}{2}a+\theta\gamma^p(x)\frac{S_{2m-1}+m}{2m}. \tag{22}$$

Теперь полагая $b_k=\theta(\frac{S_k}{k}+\frac{2}{3})$ из (22) и (20) получим (18).

Лемма доказана. •

Введем обозначение $Q_m=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{m^p}{m}\right)^i=\frac{m^p}{m-m^p}$.

Лемма 4. *Для любых k, $m\in N$ и любого $x\in G$ справедливо соотношение*

$$\left|\frac{1}{m^k}f(x^{m^k})-f(x)\right|\leqslant 2a_1+b_mQ_m\gamma^p(x). \tag{23}$$

Доказательство. Индукция по k. Если $m=1$, то все очевидно. Пусть $m>1$. Из леммы 3 имеем

$$\left|\frac{1}{m}f(x^m)-f(x)\right|\leqslant a_1+b_m\gamma^p(x). \tag{24}$$

Заменяя x на x^m, получим

$$\left|\frac{1}{m}f(x^{m^2})-f(x^m)\right|\leqslant a_1+b_m\gamma^p(x^m)\leqslant a_1+b_m^p\gamma^p(x). \tag{25}$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{m^2}f(x^{m^2})-\frac{1}{m}f(x^m)\right|\leqslant a_1\frac{1}{m}+b_m\frac{m^p}{m}\gamma^p(x) \tag{26}$$

и

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{m^2}f(x^{m^2})-f(x)\right|\\&\quad\leqslant a_1\frac{1}{m}+b_m\frac{m^p}{m}\gamma^p(x)+a_1+b_m\gamma^p(x)\\&\quad=a_1\left(1+\frac{1}{m}\right)+b_m\left(1+\frac{m^p}{m}\right)\gamma^p(x).\end{aligned}$$

Теперь в последнем неравенстве, заменяя x на x^m, получим

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m^2}f(x^{m^3})-f(x^m)\right| &\leqslant a_1\left(1+\frac{1}{m}\right)+b_m\left(1+\frac{m^p}{m}\right)\gamma^p(x^m)\\ &\leqslant a_1\left(1+\frac{1}{m}\right)+b_m\left(1+\frac{m^p}{m}\right)m^p\gamma^p(x).\end{aligned}$$

Значит,

$$\left|\frac{1}{m^3}f(x^{m^3})-f(x)\right|\leqslant a_1\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}\right)+b_m\left(1+\frac{m^p}{m}+\frac{(m^p)^2}{m^2}\right)\gamma^p(x).$$

Далее, продолжим по индукции. Лемма доказана. •

Из (23) следует, что для любого $x\in G$ и любого $m\in\mathbb{N}$ множество

$$\left\{\frac{1}{m^k}f(x^{m^k});\ k\in N\right\}$$

ограничено. Значит, функции

$$\begin{aligned}\psi_m(x)&=\liminf\left\{\frac{1}{m^k}f(x^{m^k});\ k\in N\right\},\\ \varphi_m(x)&=\limsup\left\{\frac{1}{m^k}f(x^{m^k});\ k\in N\right\}\end{aligned}$$

определены корректно. Ясно, что для любого $x\in G$ справедливы соотношения

$$|\varphi_m(x)-f(x)|\leqslant a_1+b_mQ_m\gamma^p(x), \tag{27}$$

$$|\psi_m(x)-f(x)|\leqslant a_1+b_mQ_m\gamma^p(x). \tag{28}$$

Лемма 5. *Для любого натурального числа m функции φ_m, ψ_m лежат в пространстве $KJ_{p,\gamma}(G)$.*

Доказательство. Действительно, из (27) следует

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_m(xy)+\varphi_m(xy^{-1})-2\varphi_m(x)| \\
&\quad=|\varphi_m(xy)-f(xy)+\varphi_m(xy^{-1})-f(xy^{-1}) \\
&\qquad-2\varphi_m(x)-2f(x)+f(xy)+f(xy^{-1})-2f(x)| \\
&\quad\leqslant|\varphi_m(xy)-f(xy)|+|\varphi_m(xy^{-1})-f(xy^{-1})| \\
&\qquad+2|\varphi_m(x)-f(x)|+|f(xy)+f(xy^{-1})-2f(x)| \\
&\quad\leqslant 4a_1+b_mQ_m\gamma^p(xy)+b_mQ_m\gamma^p(xy^{-1}) \\
&\qquad+2b_mQ_m\gamma^p(x)+a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(y)] \\
&\quad\leqslant 4a_1+a+b_mQ_m[\gamma^p(xy)+\gamma^p(xy^{-1})+2\gamma^p(x)]+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(y)] \\
&\quad\leqslant 4a_1+a+b_mQ_m[4\gamma^p(x)+2\gamma^p(y)]+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(y)] \\
&\qquad=4a_1+a+(4b_mQ_m+\theta)\gamma^p(x)+(2b_mQ_m+\theta)\gamma^p(y) \\
&\quad\leqslant 4a_1+a+(4b_mQ_m+\theta)[\gamma^p(x)+\gamma^p(y)].
\end{aligned}
$$

Значит, $\varphi_m\in KJ_{p,\gamma}(G)$. Аналогично проверяем, что $\psi_m\in KJ_{p,\gamma}(G)$. •

Для любого $x\in G$ справедливы соотношения

$$
\varphi_m(x^{m^n})=m^n\varphi_m(x),\quad \psi_m(x^{m^n})=m^n\psi_m(x). \tag{29}
$$

Проверим первое равенство:

$$
\begin{aligned}
\varphi_m(x^{m^n})&=\limsup\left\{\frac{1}{m^k}f((x^{m^n})^{m^k});\ k\in N\right\} \\
&=\limsup\left\{\frac{m^n}{m^{n+k}}f(x^{m^{n+k}});\ k\in N\right\} \\
&=m^n\limsup\left\{\frac{1}{m^k}f(x^{m^k});\ k\in N\right\} \\
&=m^n\varphi_m(x).
\end{aligned}
$$

Проверим, что $\varphi_m(x)=\psi_m(x)$. Действительно, если $m=1$, то все ясно. Пусть теперь $m>1$, из (27), (28) получаем

$$
|\varphi_m(x)-\psi_m(x)|\leqslant 2a_1+2b_mQ_m\gamma^p(x)
$$

для любого $x\in G$. Значит, для любого $k\in N$ справедливо соотношение

$$
|\varphi_m(x^{m^k})-\psi_m(x^{m^k})|\leqslant 2a_1+2b_mQ_m\gamma^p(x^{m^k}).
$$

Теперь из (29) получаем

$$\begin{aligned}\left|\varphi_m(x)-\psi_m(x)\right| &= \frac{1}{m^k}\left|\varphi_m(x^{m^k})-\psi_m(x^{m^k})\right| \\ &\leqslant \frac{1}{m^k}(2a_1+2b_mQ_m\gamma^p(x^{m^k})) \\ &\leqslant \frac{2a_1}{m^k}+2b_mQ_m\frac{m^{kp}}{m^k}\gamma^p(x).\end{aligned}$$

Так как последнее неравенство справедливо для любого k, получаем $\varphi_m(x) = \psi_m(x)$ и

$$\varphi_m(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m^k}f(x^{m^k}).$$

Лемма 6. *Для любого $m \geqslant 2$ справедливо равенство $\varphi_2 = \varphi_m$.*

Доказательство. В силу леммы 5 функции φ_2, φ_m принадлежат пространству $KJ_{p,\gamma}(G)$. Значит, функция

$$g(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m^k}\varphi_2(x^{m^k})$$

определена корректно и принадлежит $KJ_{p,\gamma}(G)$. Ясно, что

$$g(x^{m^k})=m^kg(x) \quad \text{и} \quad g(x^{2^k})=2^kg(x) \tag{30}$$

для любого $x\in G$ и любого $k\in N$. Из (27) следует, что существуют положительные числа d_1, d_2, q_1, q_2 такие, что для всех $x \in G$

$$|\varphi_2(x)-g(x)|\leqslant d_1+q_1\gamma^p(x), \quad |\varphi_m(x)-g(x)|\leqslant d_2+q_2\gamma^p(x). \tag{31}$$

Из (29), (30) и (31) получаем

$$\begin{aligned}|\varphi_2(x^{2^k})-g(x^{2^k})| &\leqslant d_1+q_1\gamma^p(x^{2^k}) \\ &\leqslant d_1+q_12^{kp}\gamma^p(x).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}|\varphi_2(x)-g(x)| &\leqslant d_1+q_1\gamma^p(x^{2^k}) \\ &\leqslant \frac{d_1}{2^k}+q_1\frac{2^{kp}}{2^k}\gamma^p(x)\to 0 \quad \text{при } k\to\infty.\end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi_2(x) = g(x)$. Аналогично получаем $\varphi_m(x) = g(x)$, значит, $\varphi_2 \equiv \varphi_m$. •

Определение. Под (p, γ)-псевдойенсеновой функцией, определенной на группе G, будем понимать (p, γ)-квазийенсенову функцию f такую, что $f(x^n) = nf(x)$ для любого $x \in G$ и любого $n \in N$.

Лемма 7. *Пусть* $f \in KJ_{p,\gamma}(G)$, *причем*

$$|f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)].$$

Тогда функция

$$\hat{f}(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} f(x^{2^k})$$

корректно определена и является (p, γ)-*псевдойенсеновой, причем для любого* $x \in G$ *справедливо неравенство*

$$|\hat{f}(x) - f(x)| \leqslant a_1 + b_2 Q_2 \gamma^p(x),$$

где a_1, b_2, Q_2 — *те же, что и выше.*

Доказательство. По лемме 4 $\hat{f}$ является квазийенсеновой функцией.

Теперь по лемме 6 $\hat{f}(x^m) = \varphi_m(x^m) = m\varphi_m(x) = m\hat{f}(x)$. В силу того, что $\hat{f} = \varphi_2$, из (27) следует $|\hat{f}(x) - f(x)| = |\varphi_2(x) - f(x)| \leqslant a_1 + b_2 Q_2 \gamma^p(x)$. •

Обозначим через $B_{p,\gamma}(G)$ пространство вещественнозначных функций на группе G таких, что если $f \in B_{p,\gamma}(G)$, то существуют неотрицательные a и θ такие, что

$$|f(x)| \leqslant a + \theta\gamma^p(x), \quad x \in G. \tag{32}$$

Замечание 1. Пусть $f \in PJ_{p,\gamma}(G)$. Тогда

1) $f(x) = 0$ для любого элемента x конечного порядка;
2) если $f \in B_{p,\gamma}(G)$, то $f \equiv 0$;
3) $f(x^{-1}) = -f(x)$ для любого $x \in G$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Проверим справедливость 2). Пусть $f \in B_{p,\gamma}(G)$ и неотрицательные a и θ таковы, что справедливо неравенство (32). Тогда для любого $x \in G$ и любого натурального числа n справедлива оценка

$$|f(x^n)| \leqslant a + \theta\gamma^p(x^n).$$

Поэтому

$$|f(x)| \leqslant \frac{a}{n} + \theta\frac{n^p}{n}\gamma^p(x).$$

В силу того, что последнее неравенство справедливо для любого $n \in N$, получаем $f(x) = 0$.

Докажем 3). Пусть a и θ — такие неотрицательные числа, что справедливо соотношение

$$|f(xy)+f(xy^{-1})-2f(x)|\leqslant a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(y)],\quad x,y\in G.$$

Из (12) следует

$$|f(y^k)+f(y^{-k})|\leqslant c_1+\theta\gamma^p(y^k),\quad y\in G,\ k\in N.$$

Последнее соотношение эквивалентно неравенству $k|f(y)+f(y^{-1})|\leqslant c_1+\theta\gamma^p(y^k)$, поэтому

$$\begin{aligned}|f(y)+f(y^{-1})|&\leqslant\frac{c_1}{k}+\theta\frac{\gamma^p(y^k)}{k},\\ &\leqslant\frac{c_1}{k}+\theta\frac{k^p}{k}\gamma^p(y),\quad y\in G,\ k\in N,\end{aligned}$$

из которого получаем $f(y^{-1})=-f(y)$. Теперь для любого $n\in N$ имеем $f(y^{-n})=f((y^n)^{-1})=-f(y^n)=-nf(y)$. •

Теорема 3. *Для произвольной группы G справедливо разложение $KJ_{p,\gamma}(G)=PJ_{p,\gamma}(G)\oplus B_{p,\gamma}(G)$.*

Доказательство. Проверим, что $B_{p,\gamma}(G)$ является подпространством $KJ_{p,\gamma}(G)$. Действительно,

$$\begin{aligned}(f(xy)+f(xy^{-1})-2f(x)|&\leqslant 4a+\theta[\gamma^p(xy)+\gamma^p(xy^{-1})+2\gamma^p(x)]\\ &\leqslant 4a+\theta[4\gamma^p(x)+2\gamma^p(y)]\\ &\leqslant 4a+4\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(y)].\end{aligned}$$

Из замечания 1 следует, что $PJ_{p,\gamma}(G)\cap B_{p,\gamma}(G)=\{0\}$. Значит, подпространство, порожденное $PJ_{p,\gamma}(G)$ и $B_{p,\gamma}(G)$, является их прямой суммой. Проверим, что $KJ_{p,\gamma}(G)\subseteq PJ_{p,\gamma}(G)\oplus B_{p,\gamma}(G)$. Действительно, если $f\in KJ_{p,\gamma}(G)$, то по лемме 7 $\hat f\in PJ_{p,\gamma}(G)$ и $f-\hat f\in B_{p,\gamma}(G)$. •

Определение. (p,γ)-*Квазихарактером* полугруппы S называется вещественнозначная функция f на S такая, что для некоторых неотрицательных a и θ справедливо соотношение

$$|f(xy)-f(x)-f(y)|\leqslant a+\theta[\gamma^p(x)+\gamma^p(y)],\quad x,y\in S.$$

В частности, если функция f такова, что множество

$$\{f(xy)-f(x)-f(y),\ x,y\in S\}$$

ограничено, то f называется *квазихарактером* полугруппы S.

Определение. (p,γ)-*Псевдохарактером* полугруппы S называется ее (p,γ)-квазихарактер f такой, что $f(x^n) = nf(x)$ для всех $x \in S$ и $n \in \mathbb{N}$. *Псевдохарактером* полугруппы S называется ее квазихарактер f такой, что $f(x^n) = nf(x)$ для всех $x \in S$ и $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что множество (p,γ)-квазихарактеров полугруппы S является вещественным векторным пространством (относительно обычных операций сложения функций и их умножения на число), которое будем обозначать через $KX_{p,\gamma}(S)$. Подпространство $KX_{p,\gamma}(S)$, состоящее из (p,γ)-псевдохарактеров, будем обозначать через $PX_{p,\gamma}(S)$, а подпространство, состоящее из вещественных аддитивных характеров полугруппы S, обозначим через $X(S)$. Будем говорить, что (p,γ)-псевдохарактер φ полугруппы S *нетривиален*, если $\varphi \notin X(S)$. Очевидно, что для любой группы G справедливо включение $X(G) \subseteq J_0(G)$.

Теорема 4. *Пусть S — полугруппа и $f \in PX_{p,\gamma}(S)$, тогда $f(xy) = f(yx)$ для любых x, $y \in G$.*

Доказательство. Пусть a и θ такие, что для любых x, y из S справедливо соотношение

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)]. \tag{33}$$

Поэтому

$$|f(xyz) - f(xy) - f(z)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(xy) + \gamma^p(z)]. \tag{34}$$

Из (33) и (34) следует неравенство

$$\begin{aligned}|f(xyz) - f(x) - f(y) - f(z)| &\leqslant 2a + \theta[\gamma^p(xy) + \gamma^p(x) + \gamma^p(y) + \gamma^p(z)]\\ &\leqslant 2a + 2\theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y) + \gamma^p(z)].\end{aligned}$$

Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}&|f((xy)^{n+1}) - f(x) - f((yx)^n) - f(y)|\\ &\quad\leqslant 2a + 2\theta[\gamma^p(x) + \gamma^p((yx)^n) + \gamma^p(y)]\\ &\quad\leqslant 2a + 2\theta[\gamma^p(x) + n^p\gamma^p(yx) + \gamma^p(y)]\\ &\quad\leqslant 2a + 2\theta[\gamma^p(x) + n^p\gamma^p(x) + n^p\gamma^p(y) + \gamma^p(y)]\\ &\quad\leqslant 2a + 2\theta(n^p + 1)[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&|f((xy)^{n+1}) - f((yx)^{n+1})| \\
&\quad = |f((xy)^{n+1}) - f(x) - f(y) - f((yx)^n) \\
&\qquad + f(x) + f(y) + f((yx)^n) - f((yx)^{n+1})| \\
&\quad \leqslant |f((xy)^{n+1}) - f(x) - f(y) - f((yx)^n)| \\
&\qquad + |f(x) + f(y) + f((yx)^n) - f((yx)^{n+1})| \\
&\quad \leqslant |f((xy)^{n+1}) - f(x) - f(y) - f((yx)^n)| \\
&\qquad + |f(x) + f(y) - f(yx)| \\
&\quad \leqslant 2a + 2\theta(n^p + 1)[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)] + a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)] \\
&\quad \leqslant 3a + \theta(2(n^p + 1) + 1)[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)]
\end{aligned}$$

и

$$(n+1)|f(xy) - f(yx)| \leqslant 3a + \theta(2n^p + 3)[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)].$$

Поэтому

$$|f(xy) - f(yx)| \leqslant \frac{3a}{n+1} + \theta\frac{2n^p + 3}{n+1}[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)].$$

В силу того, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю, при $n \to \infty$ получаем $f(xy) = f(yx)$. •

Теорема 5. *Для любой группы G справедливы соотношения*:

1. $KX_{p,\gamma}(G) \subseteq KJ_{p,\gamma}(G)$, $PX_{p,\gamma}(G) \subseteq PJ_{p,\gamma}(G)$.

2. *Если $f \in PJ_{p,\gamma}(G)$ и для любых x, $y \in G$ справедливо равенство $f(xy) = f(yx)$, то $f \in PX_{p,\gamma}(G)$.*

Доказательство. 1. Пусть $f \in KX_{p,\gamma}(G)$ и a, θ — такие неотрицательные числа, что

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)]$$

для любых $x, y \in G$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x)| \\
&\quad = |f(xy) - f(x) - f(y) + f(xy^{-1}) - f(x) - f(y^{-1}) \\
&\qquad + 2f(x) + f(y) + f(y^{-1}) - 2f(x)| \\
&\quad = |f(xy) - f(x) - f(y) + f(xy^{-1}) - f(x)f(y^{-1})| \\
&\quad \leqslant |f(xy) - f(x) - f(y)| + |f(xy^{-1}) - f(x) - f(y^{-1})| \\
&\quad \leqslant 2a + 2\theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)].
\end{aligned}$$

То есть $f \in KJ_{p,\gamma}(G)$ и $KX_{p,\gamma}(G) \subseteq KJ_{p,\gamma}(G)$. Отсюда следует, что $PX_{p,\gamma}(G) \subseteq PJ_{p,\gamma}(G)$.

2. Пусть $f \in PJ_{p,\gamma}(G)$; $a, \theta \geqslant 0$ такие, что для любых $x, y \in G$ справедливы соотношения

$$|f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)], \quad f(xy) = f(yx).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&2|f(xy) - f(x) - f(y)| \\
&\quad = |f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) + f(xy) + f(yx^{-1}) - 2f(y)| \\
&\quad \leqslant |f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x)| + |f(xy) + f(yx^{-1}) - 2f(y)| \\
&\quad = |f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x)| + |f(yx) + f(yx^{-1}) - 2f(y)| \\
&\quad \leqslant 2a + 2\theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)].
\end{aligned}$$

Значит, $|f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)]$ и $f \in KX_{p,\gamma}(G)$. Далее, в силу того, что $f(x^n) = nf(x)$ для любых $x \in G$ и $n \in N$, получаем $f \in PX_{p,\gamma}(G)$. •

Теорема 6. *Пусть $f \in PX_{p,\gamma}(S)$ и $c, b \in S$. Тогда если $cb = bc$, то $f(cb) = f(c) + f(b)$.*

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned}
n|f(cb) - f(c) - f(b)| &= |f((cb)^n) - f(c^n) - f(b^n)| \\
&= |f(c^n b^n) - f(c^n) - f(b^n)| \\
&\leqslant a + \theta[\gamma^p(c^n) + \gamma^p(b^n)] \\
&\leqslant a + \theta[\gamma^p(c^n) + \gamma^p(b^n)] \\
&\leqslant a + \theta[n^p\gamma^p(c) + n^p\gamma^p(b)] \\
&\leqslant a + \theta n^p[\gamma^p(c) + \gamma^p(b)].
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|f(cb) - f(c) - f(b)| \leqslant \frac{\delta}{n} + \theta\frac{n^p}{n}[\gamma^p(c) + \gamma^p(b)].$$

Значит, $f(cb) - f(c) - f(b) = 0$. •

Следствие 1. *Если G абелева группа, то $PJ_{p,\gamma}(G) = X(G)$.*

Доказательство. По теореме 5 имеем $PJ_{p,\gamma}(G) = PX_{p,\gamma}(G)$. По теореме 6, если группа G абелева, то $PX_{p,\gamma}(G) = X(G)$. Поэтому получаем $PJ_{p,\gamma}(G) = X(G)$. •

Следствие 2. *Пусть G — произвольная группа, $f \in PJ_{p,\gamma}(G)$ и элементы $a, b \in G$ перестановочны. Тогда $f(ab) = f(a) + f(b)$.*

Доказательство. Действительно, подгруппа W, порожденная элементами a, b, абелева. Из следствия 1 получаем требуемое. •

Следствие 3. *Пусть группа G является прямым произведением своих подгрупп A_i, $i = 1, \dots, n$. Тогда $PJ_{p,\gamma}(G) = \bigoplus_{i=1}^{n} PJ_{p,\gamma}(A_i)$.*

Доказательство. Пусть $a_i \in A_i$ и $g = a_1 a_2 \cdots a_n$. Каждому элементу $\varphi_i \in PJ_{p,\gamma}(A_i)$ сопоставим функцию $\overline{\varphi}_i$ на G определенной формулой $\overline{\varphi}_i(g) = \varphi_i(a_i)$. Очевидно, что отображение $\varphi_i \to \overline{\varphi}_i$ является вложением $PJ_{p,\gamma}(A_i)$ в $PJ_{p,\gamma}(G)$.

Ясно, что подпространство в $PJ_{p,\gamma}(G)$, порожденное подпространствами $PJ_{p,\gamma}(A_i)$, $i = 1, \dots, n$, является их прямой суммой. Проверим, что

$$PJ_{p,\gamma}(G) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} PJ_{p,\gamma}(A_i).$$

Пусть $f \in PJ_{p,\gamma}(G)$, $\varphi_i = f|_{A_i}$. Тогда из следствия 2 получаем, что $f = \overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2 + \dots + \overline{\varphi}_n$. Поэтому

$$PJ_{p,\gamma}(G) = \bigoplus_{i=1}^{n} PJ_{p,\gamma}(A_i). \quad \bullet$$

Следствие 4. *Пусть группа G является прямым произведением своих подгрупп A_i, $i = 1, \dots, n$. Тогда $PX_{p,\gamma}(G) = \bigoplus_{i=1}^{n} PX_{p,\gamma}(A_i)$.*

§3. Отношение между пространствами $PJ_{p,\gamma}(G)$ и $PJ(G)$

Возникает вопрос: совпадают ли понятия (p,γ)-псевдойенсеновой функции и псевдойенсеновой функции?

Как будет показано ниже, ответ отрицательный. Ясно, что если $p_1 < p_2$, то $PJ_{p_1,\gamma}(G) \subseteq PJ_{p_2,\gamma}(G)$. Ниже будет установлено, что, вообще говоря, $PJ_{p_1,\gamma}(G) \neq PJ_{p_2,\gamma}(G)$.

Пусть $S = \prod_{i \in J} S_i$ — прямое произведение групп S_i, $i \in J$. Предположим, что $f_i = PJ(S_i)$, $i \in J$. Рассмотрим следующую функцию φ на группе S. Если $u = u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_k}$ ($i_n \neq i_m$, если $n \neq m$) — элемент из S, тогда определим функцию $\varphi = \sum_{i \in J} f_i$, полагая, $\varphi(u) = \sum_{j=1}^{k} f_{i_j}(u_{i_j})$. Пусть

$$\delta_j = \sup\{|f_j(u_j v_j) + f_j(u_j v_j^{-1}) - 2f_j(u_j)|;\ u_j, v_j \in_j\}.$$

Теорема 7. *Функция* $\varphi = \sum_{i \in J} f_i$ *является элементом из* $PJ(S)$ *в том и только в том случае, когда множество* $J_0 = \{j; \delta_j \neq 0, j \in J\}$ *не более чем счетно и выполнено условие*

$$\delta = \sum_{j \in J_0} \delta_j < \infty. \tag{35}$$

Доказательство. Предположим, что φ — псевдойенсеновая функция на S и множество J_0 более чем счетно. Тогда существует $a > 0$ такое, что для некоторого счетного подмножества J_1 множества J_0 выполнено условие $\delta_j > a$ для любого $j \in J_1$.

Предположим, что $J_1 = N$. Из определения δ_j следует, что для любого $j \in J_1$ можно выбрать u_j, $v_j \in S_j$ такие, что

$$|f_j(u_j v_j) + f_j(u_j v_j^{-1}) - 2f_j(u_j)| \geqslant \frac{1}{2}a. \tag{36}$$

Из (36) следует, что существуют N^+ и N^- подмножества N такие, что для любого $j \in N^+$

$$f_j(u_j v_j) + f_j(u_j v_j^{-1}) - 2f_j(u_j) \geqslant \frac{1}{2}a,$$

а для любого $j \in N^-$

$$-[f_j(u_j v_j) + f_j(u_j v_j^{-1}) - 2f_j(u_j)] \geqslant \frac{1}{2}a. \tag{37}$$

Ясно, что одно из множеств N^+ и N^- может быть конечным или даже пустым.

Пусть $a_k = u_1 \cdots u_k$, $b_k = v_1 \cdots v_k$, где $u_i, v_i \in S_i$; $k \in N$, такие, что (36) выполнено. Рассмотрим случай, когда множество N^+ счетное. Из следствия 3 получаем

$$\begin{aligned} &\varphi(a_k b_k) + \varphi(a_k b_k^{-1}) - 2\varphi(a_k) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{k}[f(a_k b_k) + f(a_k b_k^{-1}) - 2f(a_k)] \geqslant \frac{k}{2}a \to \infty \quad \text{при } k \to \infty. \end{aligned} \tag{38}$$

Но это противоречит предположению, что φ — псевдойенсеновая функция на S.

Таким образом, множество N^+ не более чем счетно, причем

$$\delta' = \sum_{j \in N^+} \delta_j < \infty. \tag{39}$$

Аналогично мы придем к противоречию, если предположим, что N^- является счетным. Действительно, в этом случае существуют элементы $a_k = u_1 \cdots u_k$, $b_k = v_1 \cdots v_k$; где $u_i, v_k \in S_i$; $i \in N^-$, $k \in N$, такие, что справедливо (37). Из следствия 3 получаем

$$\begin{aligned}[\varphi(a_k b_k) + \varphi(a_k b_k^{-1}) - 2\varphi(a_k)] \\ = -\sum_{i=1}^{k}[f(a_k b_k) + f(a_k b_k^{-1}) - 2f(a_k)] \geqslant \frac{k}{2}a \to \infty \quad \text{при } k \to \infty. \end{aligned} \tag{40}$$

Но это противоречит предположению, что φ — псевдойенсеновая функция на S. Таким образом, множество N^- не более чем счетно, причем

$$\delta'' = \sum_{j \in N^-} \delta_j < \infty. \tag{41}$$

Значит, множество J_0 не более чем счетно и соотношение (35) выполнено.

Теперь предположим, что множество J_0 не более чем счетно и (35) выполнено. Ясно, что из (35) и следствия 3 следует, что для любых u, v из S справедлива оценка

$$|\varphi(uv) + \varphi(uv^{-1}) - 2\varphi(u)| \leqslant \delta.$$

Теорема доказана. •

Теперь покажем, что пространства $PJ_{p_2,\gamma}(G)$ и $PJ_{p_1,\gamma}(G)$, вообще говоря, не совпадают. Чтобы привести соответствующий пример, достаточно построить на какой-нибудь группе G функцию φ, принадлежащую $PX_{p_2,\gamma}(G)$ и не принадлежащую $PX_{p_1,\gamma}(G)$. Отсюда будет также следовать, что $\varphi \in PJ_{p_2,\gamma}(G) \setminus PJ_{p_1,\gamma}(G)$.

Действительно, если предположить, что $\varphi \in PJ_{p_1,\gamma}(G)$, то в силу того, что $\varphi \in PX_{p_2,\gamma}(G)$, получаем, что функция φ инвариантна относительно внутренних автоморфизмов группы G. Из теоремы 5 следует, что $\varphi \in PX_{p_1,\gamma}(G)$.

Пусть $F_i = F_i(a_i, b_i)$ — свободная группа, порожденная двумя элементами a_i, b_i. Обозначим через e_i единичный элемент группы F_i.

Пусть каждое слово $x \in F_i$ записано в редуцированной форме, т.е. x не содержит пар вида $a_i a_i^{-1}$, $a_i^{-1} a_i$, $b_i b_i^{-1}$, $b_i^{-1} b_i$ и не имеет степеней, отличных от 1 и -1.

Определим функцию $\eta_i : F_i \to \mathbb{R}$ следующим образом. Если $r(x)$ — число пар вида $a_i b_i$ в x и $s(x)$ — число пар вида $b_i^{-1} a_i^{-1}$ в x, то положим $\eta_i(x) = r(x) - s(x)$.

Легко видеть, что для слабых $x, y \in F_i$ справедливо соотношение $\eta_i(xy) - \eta_i(x) - \eta_i(y) \in \{-1, 0, 1\}$.

Рассмотрим группу $S = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$. Используя следствие 4, получаем разложение

$$PX_{p,\gamma}\left(\prod_{i=1}^{k} F_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{k} PX_{p,\gamma}(F_i).$$

Определим функцию γ на $S = \prod_{i=1}^{\infty}$ следующим образом:

(1) $\gamma(e_i) = 0$ для любых $i \in N$;

(2) $\gamma(u_i) = 1$ для любых $u_i \in A_i$ и $u_i \neq e_i$ для любых $i \in N$;

(3) $\gamma(u_{i_i}u_{i_2}\cdots u_{i_k}) = \sum_{j=1}^{k}\gamma(u_{i_j})$.

Ясно, что для любых $u, v \in S$ имеем $\gamma(uv) \leqslant \gamma(u) + \gamma(v)$. Очевидно, что если $p = 0$, то $PX_{p,\gamma}(S) = PX(S)$.

Пусть $p \in (0, 1)$. Пусть $u_i, v_i \in A_i$, $u = u_1\cdots u_k$, $v = v_1\cdots v_k$. Для любой функции $t : N \to R$ определим функцию $f_t = \sum_{i=1}^{\infty} t(i)\eta_i$ на группе $S = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$ следующим образом. Для $u = u_1\cdots u_k$ положим

$$f_t(u) = \sum_{i=1}^{k} t(i)\eta_i(u_i).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} f_t(uv) - f_t(u) - f_t(v) &= \sum_{i=1}^{k} t(i)\eta_i(u_iv_i) - \sum_{i=1}^{k} t(i)\eta - i(u_i)\sum_{i=1}^{k} t(i)\eta_i(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} t(i)[\eta_i(u_iv_i) - \eta_i(u_i) - \eta_i(v_i)]. \end{aligned}$$

Откуда следует, что если t — положительная функция и $u_i = a_i$, $v_i = b_i$, то

$$|f_t(uv) - f_t(u) - f_t(v)| = \sum_{i=1}^{k} t(i). \tag{42}$$

Если $f_t \in KX_{p,\gamma}(\prod_{i=1}^{\infty} F_i)$, тогда для некоторых неотрицательных δ и c имеем

$$|f_t(uv) - f_t(u) - f_t(v)| \leqslant \delta + c[(\gamma(u))^p + (\gamma(v))^p] \quad \text{для всех } u, v \in S.$$

Значит,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} t(i) \\ &\quad \leqslant \delta + c[(\gamma(u))^p + (\gamma(v))^p] \\ &\quad = \delta + c[(\gamma(a_1\cdots a_k))^p + (\gamma(b_1\cdots b_k))^p] \\ &\quad = \delta + c[(k\gamma(a))^p + (k\gamma(b))^p] \\ &\quad = \delta + 2ck^p. \end{aligned}$$

Пусть $\Delta_k = \sum_{i=1}^{k} t(i)$. Выберем функцию t так, чтобы для некоторого $\lambda > 0$ выполнялось соотношение

$$\Delta_k = \lambda k^p. \tag{43}$$

Теперь проверим, что $f \in KX_{p,\gamma}(\prod_{i=1}^{\infty} A_i)$. Если $u = u_1 u_2 \cdots u_k$, $v = v_1 v_2 \cdots v_k$, тогда

$$|f_t(uv) - f_t(u) - f_t(v)| \leqslant \lambda[(\gamma(u))^p + (\gamma(v))^p]. \tag{44}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&|f_t(uv) - f_t(u) - f_t(v)| \\
&\quad = |f_t(u_1 u_2 \cdots u_k v_1 v_2 \cdots v_k) - f_t(u_1 u_2 \cdots u_k) - f_t(v_1 v_2 \cdots v_k)| \\
&\quad = \sum_{i=1}^{k} [f_t(u_i v_i) - f_t(u_i) - f_t(v_i)] \\
&\quad \leqslant \sum_{i=1}^{k} |t(i)\eta_i(u_i v_i) - t(i)\eta_i(u_i) - t(i)\eta_i(v_i)| = \sum_{i=1}^{k} t(i)|\eta_i(u_i v_i) - \eta_i(u_i) - \eta_i(v_i)| \\
&\quad \leqslant \sum_{i=1}^{k} t(i) = \Delta_k = \lambda k^p \\
&\quad \leqslant \lambda[(\gamma(u))^p + (\gamma(v))^p].
\end{aligned}$$

Пусть

$$\hat{f}_t(u) = \frac{1}{2^n} f_t(u^{2^n}),$$

по лемме 7 $\hat{f}_t$ есть элемент пространства $PJ_{p,\gamma}(\prod_{i=1}^{\infty} F_i)$. Покажем, что $\hat{f}_t \in PX_{p,\gamma}(\prod_{i=1}^{\infty} F_i)$. Действительно, по лемме 7

$$|\hat{f}(x) - f(x)| \leqslant a_1 + b_2 Q_2 \gamma^p(x).$$

Учитывая (43), получаем

$$\begin{aligned}
&|\hat{f}_t(xy) - \hat{f}_t(x) - \hat{f}_t(y)| \\
&\quad = |\hat{f}_t(xy) - f_t(xy) - \hat{f}_t(x) + f_t(x) - \hat{f}_t(y) + f_t(y) \\
&\qquad\qquad + f_t(xy) - f_t(x) - f_t(y)| \\
&\quad \leqslant |\hat{f}_t(xy) - f_t(xy)| + |\hat{f}_t(x) + f_t(x)| \\
&\qquad + |\hat{f}_t(y) + f_t(y)| + |f_t(xy) - f_t(x) - f_t(y)| \\
&\quad \leqslant 3a_1 + b_2 Q_2[\gamma^p(xy) + \gamma^p(x) + \gamma^p(y)] + \lambda[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)] \\
&\quad \leqslant 3a_1 + (2b_2 Q_2 + \lambda)[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)].
\end{aligned}$$

Таким образом, $\hat{f}_t \in KX_{p,\gamma}(\prod_{i=1}^{\infty} F_i)$. А в силу того, что $\hat{f}_t$ является (p,γ)-псевдойенсеновой функцией, получаем, что $\hat{f}_t$ является (p,γ)-псевдохарактером.

Обозначим через D подполугруппу $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$, порожденную элементами $w_i = a_i b_i$, $i \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\hat{f}_t|_D = f_t|_D$ и $\hat{f}_t(a_i) = \hat{f}_t(b_i) = 0$ для любых $i \in N$. Значит, если $u_k = a_1 a_2 \cdots a_k$, $v_k = b_1 b_2 \cdots b_k$, то $u_k v_k \in D$ и

$$\begin{aligned}\hat{f}_t(u_k v_k) - \hat{f}_t(u_k) - \hat{f}_t(v_k) &= \hat{f}_t(w_1 w_2 \cdots w_k) - \hat{f}_t(a_1 a_2 \cdots a_k) - \hat{f}_t(b_1 b_2 \cdots b_k)\\ &= \sum_{i=1}^{k} [\hat{f}_t(w_i) - \hat{f}_t(a_i) - \hat{f}_t(b_i)] = \sum_{i=1}^{k} \hat{f}_t(w_i)\\ &= \sum_{i=1}^{k} f_t(w_i) = \sum_{i=1}^{k} t(i) = \lambda k^p.\end{aligned}$$

Из (42) и (43) получаем $|\hat{f}_t(u_k v_k) - \hat{f}_t(u_k) - \hat{f}_t(v_k)| = \lambda k^p$.

Пусть $p_1 < p$. Если предположить, что построенная функция f_t принадлежит пространству $KX_{p_1,\gamma}(S)$, то получим, что для некоторых неотрицательных δ_1, θ выполняется соотношение

$$|\lambda k^p| \leqslant \delta_1 + \theta[\gamma(u_k)^{p_1} + \gamma(v_k)^{p_1}] = \delta_1 + \theta[k^{p_1} + k^{p_1}] = \delta_1 + 2\theta k^{p_1}.$$

Поэтому $|\lambda k^{p-p_1}| \leqslant \frac{\delta_1}{k^{p_1}} + 2\frac{\theta}{\lambda}$ для любых $k > 0$, что невозможно. Следовательно, $\hat{f}_t \notin PX_{p_1,\gamma}(\prod_{i=1}^{\infty} F_i)$. То есть если $p_1 < p$, то $PX_{p_1,\gamma}(\prod_{i=1}^{\infty} F_i)$ является собственным подпространством $PX_{p,\gamma}(\prod_{i=1}^{\infty} F_i)$. Откуда следует — пространство $PJ_{p_1,\gamma}(\prod_{i=1}^{\infty} F_i)$ является собственным подпространством в $PJ_{p,\gamma}(\prod_{i=1}^{\infty} F_i)$.

§4. Устойчивость

Определение. Будем говорить, что уравнение (11) *устойчиво* на группе G, если для любого f, удовлетворяющего функциональному неравенству

$$|f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)], \quad x, y \in G$$

(для некоторых $a, \theta \geqslant 0$), существует решение j функционального уравнения (11) такое, что функция $f(x) - j(x)$ принадлежит пространству $B_{p,\gamma}(G)$.

Ясно, что уравнение (11) устойчиво на группе G тогда и только тогда, когда $PJ_{p,\gamma}(G) = J_0(G)$.

В статьях [21, 22] установлено существование нетривиальных псевдохарактеров на некоторых классах групп. В связи с этим представляет интерес следующее

Замечание 2. Если группа G имеет нетривиальный псевдохарактер, то уравнение (11) не является устойчивым на G.

Доказательство. Сначала проверим, что для любой группы G справедливо соотношение

$$PX_{p,\gamma}(G) \cap J(G) = X(G). \tag{45}$$

Предположим, что $f \in PX_{p,\gamma}(G) \cap J(G)$. По теореме 4 (p,γ)-псевдохарактер обладает свойством $f(xy) = f(yx)$ для любых $x, y \in G$. Теперь из уравнения (11) имеем

$$f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) = 0 \tag{46}$$

и

$$f(yx) + f(yx^{-1}) - 2f(y) = 0.$$

Значит,

$$f(xy) - f(xy^{-1}) - 2f(y) = 0. \tag{47}$$

Складывая (46) и (47), получим $2f(xy) - 2f(x) - 2f(y) = 0$. Следовательно, $f(xy) = f(x) + f(y)$ и $f \in X(G)$, т.е. $PX_{p,\gamma}(G) \cap J(G) \subseteq X(G)$. В силу того, что обратное включение очевидно, получаем (45).

Пусть φ — нетривиальный (p,γ)-псевдохарактер G. Предположим, что существует $j \in J(G)$ и неотрицательные a и θ такие, что $|\varphi(x) - j(x)| \leqslant a + \theta\gamma^p(x)$ для любого $x \in G$. Поэтому для любого $n \in N$ имеем

$$n|\varphi(x) - j(x)| = |\varphi(x^n) - j(x^n)| \leqslant a + \theta\gamma^p(x^n),$$

поэтому

$$|\varphi(x) - j(x)| \leqslant \frac{a}{n} + \theta\frac{n^p}{n}\psi(x),$$

и мы видим, что последнее возможно лишь, когда $\varphi(x) = j(x)$. Таким образом, $\varphi \in PX_{p,\gamma}(G) \cap J(G)$. Из (45) следует, что $f \in X(G)$, и мы приходим к противоречию с предположением относительно f. •

Теперь получим теорему устойчивости для нильпотентных групп ступени два, т.е. групп, в которых выполняется тождественное соотношение $[[x,y],z] = 1$, где $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$.

Рассмотрим группу H с образующими a, b и определяющими соотношениями $[b,a]a = a[b,a]$, $b[b,a] = [b,a]b$. Пусть $c = [b,a]$, тогда мы получим следующее представление группы H:

$$H = \langle a, b, c | c = [b,a],\ [c,a] = [c,b] = 1\rangle. \tag{48}$$

Хорошо известно, что каждый элемент группы H представляется и единственным способом в виде $g = a^m b^n c^k$, где $m, n, k \in \mathbb{Z}$, и что H является свободной нильпотентной группой ступени два, а элементы a и b — ее свободные образующие.

Лемма 8. *Пусть* $f \in PJ_{p,\gamma}(H)$ *и* $f(a) = f(b) = (c) = 0$, *тогда* $f \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $x = a^m b^n c^k$, $y = a^m b^{n_1} c^{k_1}$, тогда из (48) следует

$$xy = a^{m+m_1} b^{n+n_1} c^{m_1 n+k+k_1}, \quad yx = a^{m+m_1} b^{n+n_1} c^{mn_1+k+k_1}.$$

Значит,

$$f(xy) = f(a^{m+m_1} b^{n+n_1}) + f(c^{m_1 n+k+k_1}) = f(a^{m+m_1} b^{n+n_1}),$$
$$f(yx) = f(a^{m+m_1} b^{n+n_1}) + f(c^{mn_1+k+k_1}) = f(a^{m+m_1} b^{n+n_1}).$$

И мы видим, что $f(xy) = f(yx)$ для любых $x, y \in H$. По теореме 5 $f \in PX_{p,\gamma}$, т.е. существуют неотрицательные δ и θ такие, что для любых $x, y \in H$ справедливо неравенство

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant \delta + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)].$$

Индукцией по q легко проверить, что для любых $m, n, k, p \in \mathbb{Z}$ справедливо соотношение $(a^n b^m)^p = a^{nq} b^{mq} c^{\rho(q)nm}$, где $\rho(q) = \sum_{i=1}^{q-1} i$.

Из этого соотношения следует

$$(a^n b^m c^k)^q = a^{np} b^{mq} c^{\rho(q)nm+q^k}. \tag{49}$$

Далее, имеем $f(a^n b^m c^k) = f(a^n b^m)$, поэтому для любого $q \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned}
|f(a^n b^m c^k)| &= \left|\frac{1}{q} f((a^n b^m c^k)^q)\right| \\
&= \frac{1}{q} |f((a^n b^m)^q)| \\
&= \frac{1}{q} |f(a^n b^{mq})| \\
&= \frac{1}{q} |[f(a^n b^{mq}) - f(a^{nq}) - f(b^{mq})]| \\
&\leqslant \frac{1}{q} (\delta + \theta[\gamma^p(a^{nq}) + \gamma^p(b^{mq})]) \\
&\leqslant \frac{1}{q}\delta + \frac{q^p}{q}\theta[\gamma^p(a^n) + \gamma^p(b^m)].
\end{aligned}$$

Откуда следует, что $f(a^n b^m c^k) = 0$. То есть $f \equiv 0$. •

Лемма 9. *Функция ϕ, определенная формулой*

$$\phi(a^m b^n c^k) = mn - 2k,$$

является элементом из $J_0(H)$.

Доказательство. Пусть $x = a^m b^n c^k$, $y = a^{m_1} b^{n_1} c^{k_1}$, тогда

$$xy^{-1} = a^m b^n c^k c^{-k_1} b^{-n_1} a^{-m_1} = a^{m-m_1} b^{n-n_1} c^{m_1 n_1 - m_1 n + k - k_1}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} &f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x) \\ &\quad = (m + m_1)(n + n_1) - 2(m_1 n + k + k_1) + (m - m_1)(n - n_1) \\ &\qquad - 2(m_1 n_1 - m_1 n + k - k_1) - 2(mn - 2k) = 0. \quad \bullet \end{aligned}$$

Теорема 8. *Пусть G — произвольная нильпотентная группа ступени два, тогда $PJ_{p,\gamma}(G) = J_0(G)$. То есть уравнение* (11) *устойчиво на группе G.*

Доказательство. Сначала докажем теорему для группы H. Пусть $g \in PJ_{p,\gamma}(H)$ и $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, $g(c) = \gamma$. Тогда существует аддитивный характер ψ группы H такой, что $\psi(a) = \alpha$, $\psi(b) = \beta$ и существует λ такое, что $\lambda\phi(c) = \gamma$, здесь ϕ — функция из леммы 9. Ясно, что $j = \psi + \lambda\phi \in J_0(H)$ и $(g-j)(a) = (g-j)(b) = (g-j)(c) = 0$. По лемме 8 имеем $(g-j) \equiv 0$. Следовательно, $g = j$ и $g \in J_0(H)$.

Пусть теперь G — произвольная нильпотентная ступени два группа. Проверим, что $PJ_{p,\gamma}(G) = J(G)$. Пусть $f \in PJ_{p,\gamma}(G)$, причем в группе G нашлись элементы u и v такие, что $f(uv) + f(uv^{-1}) - 2f(u) \neq 0$. Обозначим через M подгруппу группы G, порожденную элементами u и v. Так как H — свободная нильпотентная ступени два группа, то отображение $\tau : a \to u$, $\tau : b \to v$ однозначно продолжается до эпиморфизма H на M. Рассмотрим на группе H функцию g, определенную по правилу $g(x) = f(x^\tau)$. Пусть $\gamma^*(x) = \gamma(x^\tau)$. Тогда ясно, что $\gamma^*(xy) \leqslant \gamma^*(x) + \gamma^*(y)$, $\gamma^*(x^{-1}) = \gamma^*(x)$ для любых $x, y \in H$. Очевидно, что

$$g(ab) + g(ab^{-1}) - 2f(a) = f(uv) + f(uv^{-1}) - 2f(u) \neq 0,$$

и мы приходим к противоречию с установленным фактом $PJ_{p,\gamma^*}(H) = J_0(H)$. Таким образом, $PJ_{p,\gamma}(G) = J_0(G)$. $\bullet$

§5. Теорема о вложении

Определение. Будем говорить, что квазийенсенова функция f на группе G инвариантна относительно автоморфизма α, если справедливо соотношение $f(x^\alpha) = f(x)$ для любого $x \in G$. Если это равенство выполняется для любого α из подгруппы A группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} G$, то будем говорить, что f инвариантна относительно A.

Ясно, что множество всех псевдойенсеновых функций, инвариантных относительно A, является подпространством $PJ_{p,\gamma}(G)$, которое обозначим через $PJ_{p,\gamma}(G, A)$.

Лемма 10. *Пусть G — произвольная группа, f — элемент из пространства $PJ_{p,\gamma}(G)$ и b — элемент второго порядка из группы G. Тогда f инвариантен относительно внутреннего автоморфизма, соответствующего элементу b.*

Доказательство. Пусть для некоторых неотрицательных a и θ любых $x, y \in G$ выполняется неравенство

$$|f(xy) + f(xy^{-1}) - 2f(x)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)].$$

Тогда

$$\begin{aligned}
|f(bxb) + f(bb^{-1}x^{-1}) - 2f(b)| &\leqslant a + \theta[\gamma^p(b) + \gamma^p(xb)],\\
|f(bxb) + f(x^{-1}) - 2f(b)| &\leqslant a + \theta[\gamma^p(b) + \gamma^p(xb)],\\
|f(x^b) + f(x^{-1})| &\leqslant a + \theta[\gamma^p(b) + \gamma^p(xb)],\\
|f(x^b) - f(x)| &\leqslant a + \theta[\gamma^p(b) + \gamma^p(xb)].
\end{aligned}$$

Из последнего соотношения получаем

$$|f(x^{nb}) - f(x^n)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(b) + \gamma^p(x^n b)]$$

для любого $n \in N$. Далее, получаем

$$n|f(x^b) - f(x)| \leqslant a + \theta[\gamma^p(b) + \gamma^p(x^n b)].$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
|f(x^b) - f(x)| &\leqslant \frac{a}{n} + \frac{\theta\gamma^p(b)}{n} + \frac{\theta\gamma^p(x^n b)}{n}\\
&\leqslant \frac{a}{n} + \frac{\theta\gamma^p(b)}{n} + \frac{\theta\gamma^p(x^n)}{n} + \frac{\theta\gamma^p(b)}{n}\\
&\leqslant \frac{a}{n} + \theta\frac{\gamma^p(b)}{n} + \theta\frac{\gamma^p(b)}{n}.
\end{aligned}$$

Откуда видно, что $f(x^b) = f(x)$. •

Пусть A и B — произвольные группы. Для каждого $b \in B$ обозначим через $A(b)$ группу, изоморфную A при изоморфизме $a \to a(b)$. Обозначим через $D = A^{(B)} = \prod_{b\in B} A(b)$ прямое произведение групп $A(b)$. Ясно, что если $a_1(b_1)a_2(b_2)\cdots a_k(b_k)$ — некоторый элемент из D, то для любого $b \in B$ отображение

$$b^* : a_1(b_1)a_2(b_2)\cdots a_k(b_k) \to a_1(b_1b)a_2(b_2b)\cdots a_k(b_kb)$$

является автоморфизмом группы D, а отображение $b \to b^*$ является вложением B в $\operatorname{Aut} D$. Следовательно, можно образовать полупрямое произведение $G = B \cdot D$. Эта группа называется *сплетением* групп A и B и обозначается через $G = A \wr B$. Будем отождествлять группу A с подгруппой $A(1)$ группы D, где 1 — единица группы B. Значит, можно считать, что A вложена в D.

Теорема 9. *Всякая группа A может быть вложена в группу G, для которой уравнение* (11) *устойчиво.*

Доказательство. Обозначим через C группу $\prod_{i\in N} C_i$ — прямое произведение групп, где C_i, $i \in N$, — группы второго порядка. Проверим, что уравнение (11) устойчиво на $G = A \wr C$. Обозначим через D подгруппу G, порожденную группами $A(b)$, $b \in C$. Продолжим функцию γ, заданную на группе A на D, полагая

$$\gamma(a_1(b_1)a_2(b_2)\cdots a_k(b_k)) = \sum_{i=1}^{k} \gamma(a_i).$$

Ясно, что функция γ на группе D удовлетворяет условиям, накладываемым на функцию γ. Причем для любого $d \in D$ и любого $c \in C$ справедливо равенство $\gamma(d^c) = \gamma(d)$. Теперь продолжим γ на всю группу G, полагая $\gamma(bd) = \gamma(d)$ для любых $b \in C$ и $d \in D$. Очевидно, что γ будет инвариантна относительно внутренних автоморфизмов группы G соответствующим элементам из C. По лемме 10 если $f \in PJ_{p,\gamma}(G)$, то $f|_D \in PJ_{p,\gamma}(D, C)$. Пусть b_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — различные элементы из C. Тогда для любых a_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, подгруппа D, порожденная множеством $a_i(b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, является абелевой. Значит, если

$$u_k = a_1(b_1)a_2(b_2)\cdots a_k(b_k), \quad v_k = \alpha_1(b_1)\alpha_2(b_2)\cdots \alpha_k(b_k) \in D$$

и $f \in PJ_{p,\gamma}(D, C)$, то по следствию 1

$$|f(uv) + f(uv^{-1}) - 2f(u)| = \left|\sum_{i=1}^{k}[f(a_i\alpha_i(b_i)) + f(a_i\alpha_i^{-1}(b_i)) - 2f(a_i(b_i))]\right|.$$

Полагая в последнем равенстве $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \alpha$, получим

$$|f(u_k v_k) + f(u_k v_k^{-1}) - 2f(u_k)| = \left|\sum_{i=1}^{k}[f(a\alpha(b_i)) + f(a\alpha^{-1}(b_i)) - 2f(a(b_i))]\right|.$$

По лемме 10 имеем $f(d(b_i)) = f(d(1))$ для любого $d \in A$ и любого $i \in N$. Пусть $r = f(a\alpha(1)) + f(a\alpha^{-1}(1)) - 2f(a(1))$. Значит,

$$\begin{aligned}|f(u_k v_k) + f(u_k v_k^{-1}) - 2f(u_k)| &= \left|\sum_{i=1}^{k}[f(a\alpha(b_i)) + f(a\alpha^{-1}(b_i)) - 2f(a(b_i))]\right| \\ &= |k[f(a\alpha(1)) + f(a\alpha^{-1})) - 2f(a(1))]| \\ &= k \cdot |r|.\end{aligned}$$

Пусть δ и θ — такие неотрицательные числа, что для любых $x, y \in G$ справедливо неравенство

$$|f(xy) - f(x) - f(y)| \leqslant \delta + \theta[\gamma^p(x) + \gamma^p(y)].$$

Тогда

$$|f(u_k v_k) + f(u_k v_k^{-1}) - 2f(u_k)| \leqslant \delta + \theta[\gamma^p(u_k) + \gamma^p(v_k)].$$

Следовательно, $k|r| \leqslant a + \theta[\gamma^p(u_k) + \gamma^p(v_k)]$, в силу того, что $\gamma(u_k) = k\gamma(a)$, $\gamma(v_k) = k\gamma(\alpha)$, получаем $\gamma^p(u_k) \leqslant k\gamma^p(a)$, $\gamma^p(u_k) \leqslant k\gamma^p(a)$, поэтому

$$|r| \leqslant \frac{\delta}{k} + \theta\gamma^p(a)\frac{k^p}{k} + \theta\gamma^p(\alpha)\frac{k^p}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Последнее возможно лишь, когда $r = 0$. Таким образом, $f \in J_0(D, C)$. Обозначим через j_b ограничение f на $A(b)$. Пусть a — произвольный элемент из A. Согласно действию C на группе D, имеем

$$f(a(b)) = f(a(1)^b) = f^b(a(1)) = f(a(1)),$$

т.е. $j_b(a(b)) = j_1(a(1))$. Значит, существует элемент j в $J_0(A)$ такой, что $j_b(a(b)) = j(a)$ для любого $a \in A$ и любого $b \in C$. Следовательно, для любого $u = a_1(b_1)a_2(b_2)\cdots a_k(b_k)$ справедливо соотношение

$$f(a_1(b_1)a_2(b_2)\cdots a_k(b_k)) = \sum_{i=i}^{k} j(a_i).$$

Пусть $b, b_1, b_2 \in C$; $d, d_1, d_2 \in D$ и $u = b_1 d_1$, $v = b_2 d_2$. Тогда

$$\begin{aligned}|f(uv) + f(uv^{-1}) - 2f(u)| &= |f(b_1 b_2 d_1^{b_2} d_2) + f(b_1 b_2^{-1} d_2^{b_2^{-1}}) - 2f(b_1 d_1)| \\ &\leqslant \delta + \theta[\gamma^p(u) + \gamma^p(v)]. \qquad (50)\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}|f(db) + f(db^{-1}) - 2f(d)| &\leqslant \delta + \theta[\gamma^p(d) + \gamma^p(b)], \\ |f(db) + f(db) - 2f(d)| &\leqslant \delta + \theta[\gamma^p(d) + \gamma^p(b)], \\ |2f(db) - 2f(d)| &\leqslant \delta + \theta[\gamma^p(d) + \gamma^p(b)]\end{aligned}$$

или

$$|f(db) - f(d)| \leqslant \frac{\delta + \theta[\gamma^p(d) + \gamma^p(b)]}{2}. \qquad (51)$$

Последнее соотношение эквивалентно неравенству

$$|f(bd^b) - f(d)| \leqslant \frac{\delta + \theta[\gamma^p(d) + \gamma^p(b)]}{2}. \qquad (52)$$

Заменяя в (52) d на d^b, получим

$$|f(bd) - f(d^b)| \leqslant \frac{\delta + \theta[\gamma^p(d^b) + \gamma^p(b)]}{2}. \qquad (53)$$

поэтому, учитывая, что $f(d^b) = f(d)$ и $\gamma(d^b) = \gamma(d)$, имеем

$$|f(bd) - f(d)| \leqslant \frac{\delta + \theta[\gamma^p(d) + \gamma^p(b)]}{2}. \qquad (54)$$

Полагая $b_1 = b_2$ в (50), получаем

$$|f(d_1^{b_2} d_2) + f(d_1^{b_2} {d_2^{-1}}^{b_2}) - 2f(b_2 d_1)| \leqslant \delta + \theta[\gamma^p(b_2 d_1) + \gamma^p(b_2 d_2)]. \qquad (55)$$

Учитывая (54) и соотношение $f(d^b) = f(d)$, получаем из (55)

$$\begin{aligned}&|f(d_1^{b_2} d_2) - f(d_1 d_2) + f(d_1 d_2) + f(d_1 d_2^{-1}) - 2f(d_1)| \\ &= |f(d_1^{b_2} d_2) + f(d_1 d_2^{-1}) - 2f(d_1)| \\ &\leqslant 2\delta + 2\theta[\gamma^p(b_2 d_1) + \gamma^p(b_2 d_2)].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|f(d_1^b d_2) - f(d_1 d_2)| &= \big|f(d_1^b d_2) - f(d_1 d_2) + [f(d_1 d_2) + f(d_1 d_2^{-1}) - 2f(d_1)] \\ &\qquad - [f(d_1 d_2) + f(d_1 d_2^{-1}) - 2f(d_1)]\big| \\ &\leqslant |f(d^b d_2) - f(d_1 d_2) + [f(d_1 d_2^{-1}) - 2f(d_1)]| + |[f(d_1 d_2) + f(d_1 d_2^{-1}) - 2f(d_1)]| \\ &\leqslant 3(\delta + \theta[\gamma^p(bd_1) + \gamma^p(bd_2)]) \qquad (56)\end{aligned}$$

для любых $d_1, d_2 \in D$ и любого $b \in C$. Пусть $b \neq 1$, и a_1, a_2 — произвольные элементы из A. Полагая $d_1 = a_1(1)$, $d_2 = a_2(1)$, получим из (56)

$$|f(a_1(b)a_2(1)) - f(a_1a_2(1))| \leqslant 3(\delta + \theta[\gamma^p(ba_1) + \gamma^p(ba_2)]),$$

т.е.

$$|j(a_1(b)) + j(a_2(1)) - j(a_1a_2(1))| \leqslant 3(\delta + \theta[\gamma^p(ba_1) + \gamma^p(ba_2)])$$

и

$$|j(a_1) + j(a_2) - j(a_1a_2)| \leqslant 3(\delta + \theta[\gamma^p(ba_1) + \gamma^p(ba_2)]) \leqslant 3\delta + 3\theta[\gamma^p(a_1) + \gamma^p(a_2)].$$

Следовательно, $j \in PX_{p,\gamma}(A)$. Но $PX_{p,\gamma}(A) \cap J_0(A) = X(A)$, и мы видим, что $j \in X(A)$. Пусть $\psi = f|_D$, тогда ψ является характером D, инвариантным относительно C. Продолжим ψ на G следующим образом: $\psi_1(bd) = \psi(d)$. Легко видеть, что $\psi_1 \in KX_{p,\gamma}(G)$, поэтому $\widehat{\psi}_1 \in PX_{p,\gamma}(G)$. С другой стороны, из теоремы 5 следует, что $\psi_1 \in KJ_{p,\gamma}(G)$. Поэтому $\widehat{\psi}_1 \in PJ_{p,\gamma}(G)$. Значит, $g = f - \widehat{\psi}_1 \in PJ_{p,\gamma}(G)$ и $g|_{C\cup D} \equiv 0$. Проверим, что $g \equiv 0$ на G. Действительно, для любого элемента $bd \in G$ имеем

$$2g(bd) = g((bd)^2) = g(b^2d^bd) = g(d^bd) = 0,$$

следовательно, $g(bd) = 0$. Таким образом, $f = \widehat{\psi}_1$ и $f \in PX_{p,\gamma}(G)$.

Теперь проверим, что $f \in X(G)$. Для этого установим, что $2f$ является характером группы G. Действительно,

$$\begin{aligned}2f(b_1d_1b_2d_2) - 2f(b_1d_1) - 2f(b_2d_2) &= f(d_1^{b_2b_1b_2}d_2^{b_1b_2}d_1^{b_1}d_2) - f(d_1^{b_1}d_1) - f(d_2^{b_2}d_2)\\ f(d_1^{b_1}) + f(d_2^{b_1b_2}) + f(d_1^{b_1}) &+ f(d_2) - f(d_1) - f(d_1) - f(d_2) - f(d_2) \equiv 0.\end{aligned}$$

Значит, $2f \in X(G)$ и $f \in X(G)$. Следовательно, $f \in J_0(G)$ и уравнение (11) устойчиво на G. Теорема доказана. •

Список литературы

[1] Ulam S. M., *A collection of mathematical problems*, Intersci. Tracts in Pure Appl. Math., no. 8, Intersci. Publishers, New York-London, 1960.

[2] Hyers D. H., *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **27** (1941), no. 2, 222-224.

[3] Forti G. L., *Sulla stabilitá degli omomorfismi e sue applocazioni alle equazilni funczionali.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **58** (1988), 9-25 (1990).

[4] Rassias Th. M., *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 297-300.

[5] Forti G. L., *Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables*, Aequationes Math. **50** (1995), 143-190.

[6] Hyers D. H, Ulam S. M., *On approximate isometries*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 288–292.

[7] Hyers D. H., Ulam S. M., *Approximate isometries of the space of continuous functions*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), no. 2, 285–289.

[8] Hyers D. H., *The stability of homomorphisms and related topics*, Global Analysis—Analysis on Manifolds (Th. M. Rassias, ed.), Teubner-Texte Math., vol. 57, Teubner, Leipzig, 1983, pp. 140–153.

[9] Hyers D. H., Rassias Th. M., *Approximate homomorphisms*, Aequationes Math. **44** (1992), 125–153.

[10] Hyers D. H., Isac G., Rassias Th. M., *Topics in nonlinear analysis and applications*, World Sci. Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1997.

[11] Hyers D. H., Isac G., Rassias Th. M., *Stability of functional equations in several variables*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 34, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

[12] Szekelyhidi L., *Ulam's problem, Hyers's solution - and to where they led*, Functional Equations and Inequalities (Th. M. Rassias, ed.), Math. Appl., vol. 518, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 259–285.

[13] Aczél J., Dhombres J., *Functional equations in several variables*, Encyclopedia Math. Appl., vol. 31, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1989.

[14] Aczél J., Chung J. K., Ng C. T., *Symmetric second differences in product form on groups*, Topics in Mathematical Analysis (Th. M. Rassias, ed.), Ser. Pure Math., vol. 11, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989, pp. 1–22.

[15] Chung J. K., Ebanks B. R., Ng C. T., Sahoo P. K., *On a quadratic-trigonometric functional equation and some applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 1131–1161.

[16] Ng C. T., *Jensen's functional equation on groups*, Aequationes Math. **39** (1990), 85–99.

[17] Soon-Mo Jung, *Hyers-Ulam-Rassias stability of Jensen's equation and its application*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 11, 3137–3143.

[18] Kominek Z., *On a local stability of the Jensen functional equation*, Demonstratio Math. **22** (1989), 499–507.

[19] Laczkovich M., *The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation*, Aequationes Math. **58** (1999), 135–142.

[20] Tabor Jacek, Tabor Józef, *Local stability of the Cauchy and Jensen equations in function spaces*, Aequationes Math. **58** (1999), 296–310.

[21] Faĭziev V. A., *Pseudocharacters on a class of extensions of free groups*, New York J. Math. **6** (2000), 135–152.

[22] Faĭziev V. A., *Description of pseudocharacters' space on free product of groups*, Math. Inequal. Appl. **3** (2000), 269–293.

Поступило 11 ноября 2001 г.