

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Lanin, M. M. Popov, Behaviour of the whispering gallery rays in a vicinity of a point where curvature of the boundary vanishes, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 104, 146–155

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.173

January 18, 2025, 12:35:20



ДИНАМИКА ЛУЧЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК РАСПРЯМЛЕНИЯ ГРАНИЦЫ

С каждой волной шепчущей галереи, как хорошо известно, ассоциируется совокупность лучей, многократно отражающихся от границы. Эти лучи заключены между границей и каустикой и образуют две нормальные конгруэнции. Одна из них состоит из отрезков лучей, ограниченных точкой касания с огибающей (каустикой) и точкой падения на границу. Вторая — образована отрезками лучей от точки отражения на границе до точки касания с каустикой. Конгруэнции переходят друг в друга на каустике и при отражении от границы.

При набегании волны шепчущей галереи на точку распрямления границы (т.е. точку, где обращается в нуль кривизна границы или эффективная кривизна в случае неоднородной среды) происходит разрушение этой волны, см. [1,2]. В связи с этим разрушается и семейство лучей, ассоциированное с набегавшей волной, и представляется интересным проследить за поведением этих лучей в окрестности точек распрямления границы. Интерес к этому обусловлен также следующим обстоятельством. В работе [3] построена асимптотика волнового поля в каустической тени в окрестности точки перегиба границы, т.е. в области, куда не проникают лучи, ассоциированные с набегавшей волной шепчущей галереи. Поэтому знание динамики лучей в окрестности этой точки позволяет уточнить область применимости полученных асимптотических формул.

Настоящая статья посвящена изучению поведения описанного выше семейства лучей в окрестности простого нуля кривизны границы (точка перегиба) и двукратного нуля (точка распрямления вогнутой границы). Построения основываются на следующей задаче рассеяния для уравнения типа Шредингера, которое описывает в главном члене высокочастотной асимптотики процесс распространения волны шепчущей галереи в окрестности точек распрямления границы, см. [4]. Требуется в области $t \in (-\infty, +\infty), x > 0$ найти решение уравнения

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + Q(x, t) \Psi, \quad (1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\Psi|_{x=0} = 0, \quad \Psi \in L_2(0, \infty) \quad \text{при } \forall t \quad (2)$$

и при $t \rightarrow -\infty$ имеющее заданную асимптотику

$$\Psi(x,t) \rightarrow \Psi_0(x,t) \quad (3)$$

в смысле $L_2(0, \infty)$. В случае точки перегиба границы потенциал $Q(x,t)$ в уравнении (I) и функция Ψ_0 в условии (3) определяются соответственно формулами

$$Q(x,t) = -xt, \\ \Psi_0(x,t) = D(-t)^{1/6} \exp\left\{i\nu \frac{\xi}{5} 2^{-1/3} (-t)^{5/3}\right\} V\left[(-2t)^{1/3} x - \nu\right], \quad (4)$$

где $V(\nu)$ - функция Эйри, экспоненциально убывающая при $\nu \rightarrow -\infty$, $-\nu$ - ее корень ($\nu > 0$), D - нормировочная постоянная. В случае точки распрямления вогнутой (со стороны волнового поля) границы

$$Q(x,t) = xt^2, \\ \Psi_0(x,t) = D 2^{1/6} \xi^{1/3} \exp\left\{i\nu 2^{-1/3} \frac{\xi}{7} (-t)^{7/3}\right\} V\left[2^{1/3} (-t)^{2/3} x - \nu\right], \quad (5)$$

причем смысл ν , $V(\nu)$ и D тот же, что и в (4).

В приведенных формулах переменные x и t имеют следующий физический смысл: t пропорциональна длине дуги ξ границы, при этом ξ отсчитывается от точки распрямления последней, x - пропорциональна длине нормали к границе ($x > 0$ по ту сторону границы, где рассматривается волновой процесс). Физический смысл условия (3) в обоих случаях состоит в том, что со стороны отрицательных значений t (соответственно ξ) на точку $t=0$, где обращается в нуль кривизна границы, набегает одна волна шепчущей галереи, характеризуемая значением корня $-\nu$ функции Эйри V .

Формулы (I)-(5) остаются справедливыми как в случае однородной, так и неоднородной среды, меняются лишь коэффициенты пропорциональности между координатами t, x и ξ, n , где n - длина нормали к границе.

В координатах x, t граница становится локально плоской (в окрестности точки распрямления $\xi=0$), но в "параболическом" уравнении (I) появляется потенциал $Q(x,t)$. Лучи описываются решениями канонической системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (6)$$

в которой $H = \frac{1}{2} p^2 + Q(x,t)$, и оказываются кривыми даже в однородной среде. Луч, выходящий из точки $t=-\tau$ границы $x=0$ с началь-

ным импульсом $\rho_0(\tau) = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=\tau}$ задается начальными условиями

$$x \Big|_{t=\tau} = 0, \quad \rho \Big|_{t=\tau} = \rho_0(\tau). \quad (7)$$

Для описания семейства лучей, ассоциированного с набегающей волной шепчущей галереи необходимо, опираясь на асимптотику $\Psi_0(x, t)$, найти функцию $\rho_0(\tau)$ для достаточно больших отрицательных τ . После этого лучи восстанавливаются вслужу с помощью уравнений (6) и условий отражения на границе $x=0$.

Для определения функции $\rho_0(\tau)$ воспользуемся построениями, изложенными в работе [3]. При достаточно больших отрицательных t решение $\Psi(x, t)$ задачи (I)-(3) представляется в виде

$$\Psi(x, t) = \frac{q}{2i} \int_{-\infty}^t dx (t-\tau)^{-1/2} q_0(\tau) \exp\{i[\sigma(x, t|0, \tau) + \sigma_0(\tau)]\}, \quad (8)$$

где $q(t-\tau)^{-1/2} \exp\{i\sigma(x, t|0, \tau)\} = G(x, t|0, \tau)$ - функция Грина уравнения (I), и по определению $q_0(\tau) \exp\{i\sigma_0(\tau)\} = \frac{\partial \Psi_0(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0}$.

Уравнение для нахождения критических точек интеграла (8), т.е. уравнение $\frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(x, t|0, \tau) + \frac{d}{d\tau} \sigma_0(\tau) = 0$ приводит (подробнее см. [3]) к следующему выражению для $\rho_0(\tau)$:

$$\rho_0(\tau) = \pm \sqrt{-2 \frac{d\sigma_0}{d\tau}}. \quad (9)$$

Поскольку волна шепчущей галереи набегаёт на точку распрямления $t=0$ границы со стороны $t < 0$, в формуле (9) следует взять

$\rho_0(\tau) = + \sqrt{-2 \frac{d\sigma_0}{d\tau}}$ Можно убедиться путем непосредственных вычислений, что совокупность лучей, определяемая формулами (6), (7) и (9) (с $\rho_0(\tau) > 0$) соответствует при $t \rightarrow -\infty$ лучам, ассоциируемым с волной шепчущей галереи. Действительно, при отражении от границы каждый луч этого семейства переходит в луч того же семейства и огибающая (т.е. каустика) этого семейства определяется уравнением $(-2t)^{1/3} x - \nu = 0$ в случае точки перегиба и $2^{1/3} (-t)^{2/3} x - \nu = 0$ - в случае точки распрямления вогнутой границы.

§ I. Расчеты и обсуждения результатов

Для построения лучей на плоскости x, t проинтегрируем систему уравнений (6) с начальными условиями (7). В результате получим в случае точки перегиба границы и в случае точки распрямления вогнутой границы соответственно следующие формулы

$$x = \rho_0(\tau)(t-\tau) + \frac{1}{6}(t-\tau)^2(t+2\tau) \quad (10.a)$$

$$x = \rho_0(\tau)(t - \tau) - \frac{1}{12}(t - \tau)(t^3 + t^2\tau + t\tau^2 - 3\tau^3). \quad (10.6)$$

Равенства (10) позволяют представить поведение лучей в области $x > 0$, если известен начальный импульс $\rho_0(\tau)$. Считая τ достаточно большим отрицательным, определим $\rho_0(\tau)$ по формуле (9) (со знаком + в правой части). Принимая во внимание выражения (4) и (5) для функции $\Psi_0(x, t)$ получаем для двух рассматриваемых случаев соответственно

$$\rho_0(\tau) = \sqrt{\frac{3}{5}} 2^{-1/3} (-\tau)^{5/3}; \quad \rho_0(\tau) = 2^{1/3} \sqrt[3]{-\tau}^{1/3}; \quad (11.a)$$

$$\rho_0(\tau) = \sqrt{\frac{3}{4}} 2^{-1/3} (-\tau)^{7/3}; \quad \rho_0(\tau) = 2^{1/3} \sqrt[3]{-\tau}^{2/3} \quad (11.б)$$

Формулы (10), (11) описывают семейство лучей, ассоциируемое с набегающей волной шепчущей галереи, лишь при достаточно больших отрицательных τ и t и не годятся вблизи точки $t = 0$ распрямления границы. Эти формулы используются в качестве начальных для описания упомянутого семейства лучей непосредственно в окрестности точки $t = 0$. Осуществляется это следующим образом. Из точки $t = \tau_0$ границы, лежащей достаточно далеко от точки $t = 0$, ($\tau_0 < 0$) выпускаем луч (10) с начальным импульсом $\rho_0^{(0)} = \rho_0(\tau_0)$, определяемым формулой (11). Затем отыскивается точка $t = \tau_1 > \tau_0$ падения этого луча на границу $x = 0$ и строится отраженный по закону геометрической оптики луч, для чего достаточно, очевидно, в формуле (10) взять начальный импульс $\rho_0^{(1)}$ в виде $\rho_0^{(1)} = -\frac{d}{dt} x(t, \rho_0^{(0)}, \tau_0) \Big|_{t=\tau_1}$. Далее, отыскивается точка падения $t = \tau_2$ на границу найденного отраженного луча и повторяются описанные выше построения.

Приведем расчетные формулы для первого из рассматриваемых случаев - точки перегиба границы. Последовательность точек отражения τ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ вычисляется по формуле

$$\tau_n = -\frac{1}{2} \tau_{n-1} - \sqrt{\frac{g}{4} \tau_{n-1}^2 - 6\rho_0^{(n-1)}}, \quad (12)$$

а для соответствующих значений импульсов $\rho_0^{(n)}$ отраженных лучей имеем

$$\rho_0^{(n)} = -\left[\rho_0^{(n-1)} + \frac{\tau_n^2 - \tau_{n-1}^2}{2} \right]. \quad (13)$$

Процесс последовательных отражений луча от границы будет происходить до тех пор, пока вычисляемая по формуле (12) точка τ_{n+1} не

окажется комплексной. При этом для всех $t \geq \tau_n$ уравнение луча описывается равенством (10.а) с $\tau = \tau_n$ и начальным импульсом $\rho_0^{(n)}$.

В случае точки распрямления вогнутой границы схема построения лучей в основном остается такой же. Отличие состоит в том, что точки отражения τ_n определяются из уравнения третьей степени (см. формулу (10.б)), корень которого отыскивается с помощью линейной интерполяции. Необходимая точность определения корня достигалась за счет соответствующего выбора шага. Начальный импульс $\rho_0^{(n)}$ отраженного в точке τ_n луча определяется по формуле

$$\rho_0^{(n)} = - \left[\rho_0^{(n-1)} - \frac{\tau_n^3 - \tau_{n-1}^3}{3} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Описанный алгоритм вычисления τ_n и $\rho_0^{(n)}$ реализован на ЭВМ БЭСМ-6, построение лучей между точками отражения выполнено при помощи графопостроителя. Результаты вычислений приведены в виде рисунков.

Результаты расчетов в случае точки перегиба границы приведены на рисунках 1 и 2. При этом на рис.1 изображено поведение лучей, ассоциированных с набегавшей волной шепчущей галереи под номером один ($\nu = 2,33\dots$) в формуле (4)), а рис.2 соответствует второй волне шепчущей галереи ($\nu = 4,08\dots$ в (4)). В обоих случаях точка выхода τ_0 исходных лучей бралась в интервале $-7, -6$ и лучи строились до значения $t \approx 3$.

Как следует из приведенных рисунков 1 и 2 до значений $t \approx -2$ наблюдается типичное для волны шепчущей галереи поведение лучевого поля, четко просматривается наличие каустики. Начиная с $t \approx -1$ происходит изменение структуры лучевого поля, усиливающееся с ростом t . При $t > 0$ лучи быстро удаляются от границы, правее точки $t \approx +1$ образуется зона тени, приближенной границей которой является предельный луч ^{*)}, изображенный на рисунках 1 и 2 прерывистой линией. Сравнение этих рисунков с теневыми (см. [1]) показывает, что области максимального значения волнового поля (затененные области) совпадают с областями, занятыми лучами.

В случае точки распрямления вогнутой границы поведение семейства лучей, ассоциированного с первой и со второй волнами шепчущей галереи изображено соответственно на рисунках 3 и 4. Характерная для шепчущей галереи структура лучей сохраняется до $t \approx -2$

^{*)} Предельный луч - это луч, касающийся границы в точке перегиба $t = 0$. Его уравнение, как следует из формулы (10.а), имеет вид $x = \frac{1}{6} t^3$.

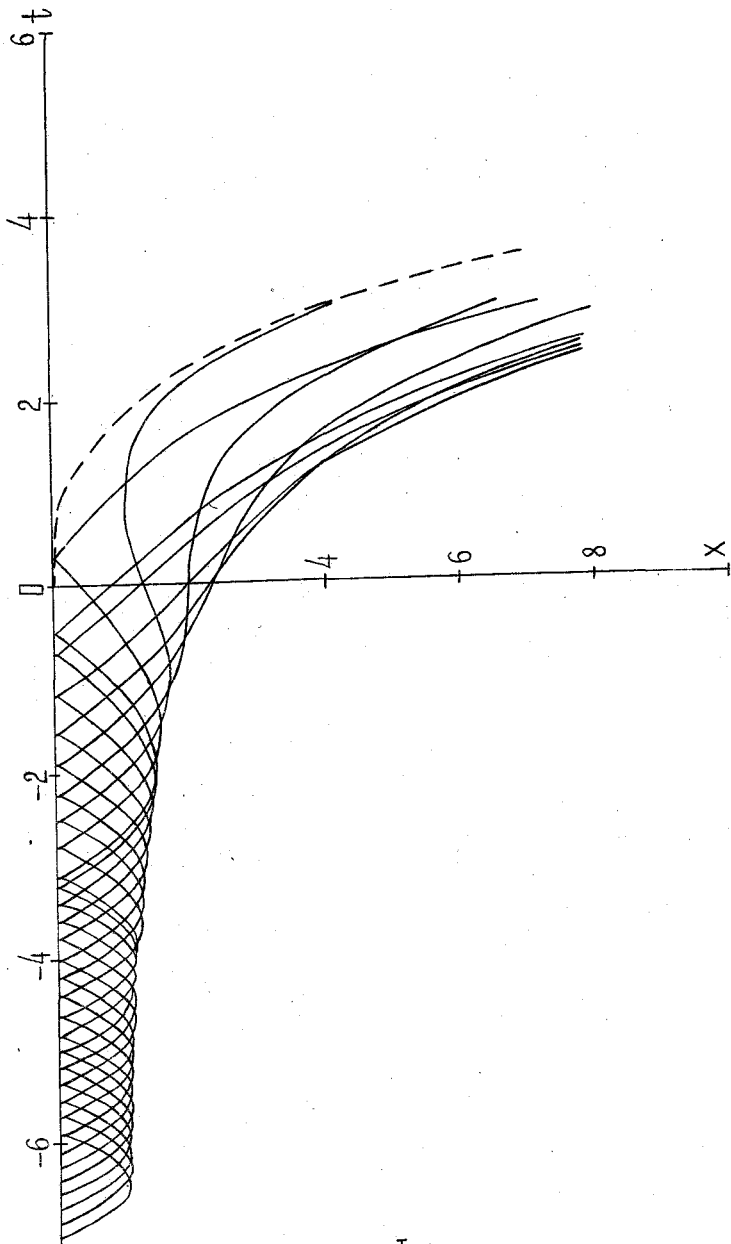


рис. I.

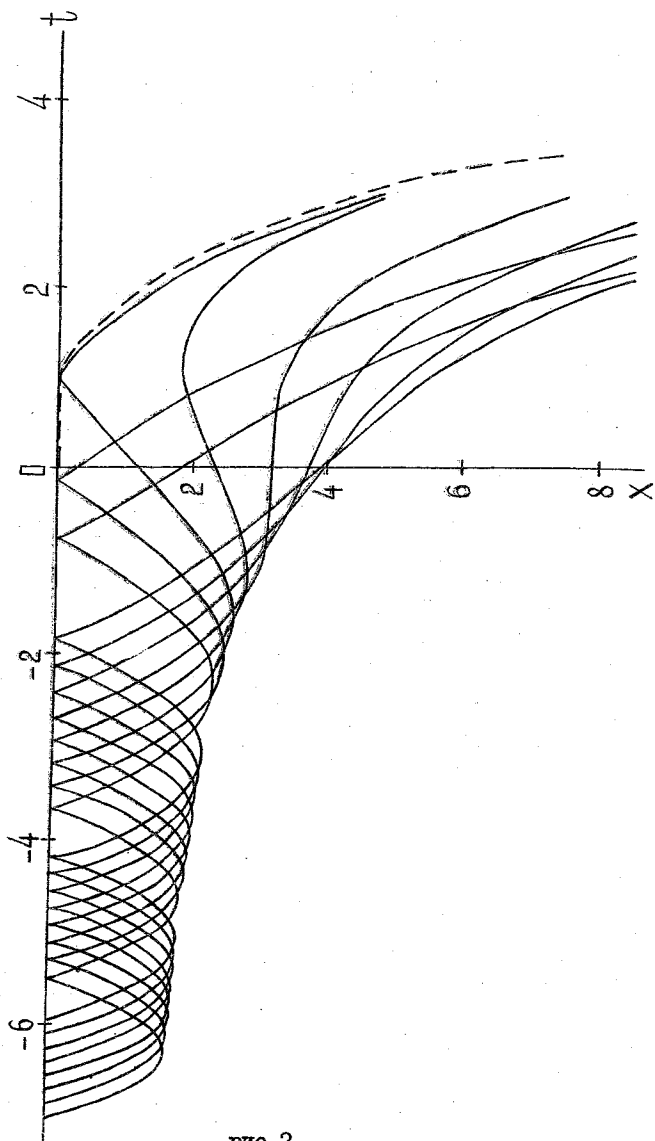


рис. 2

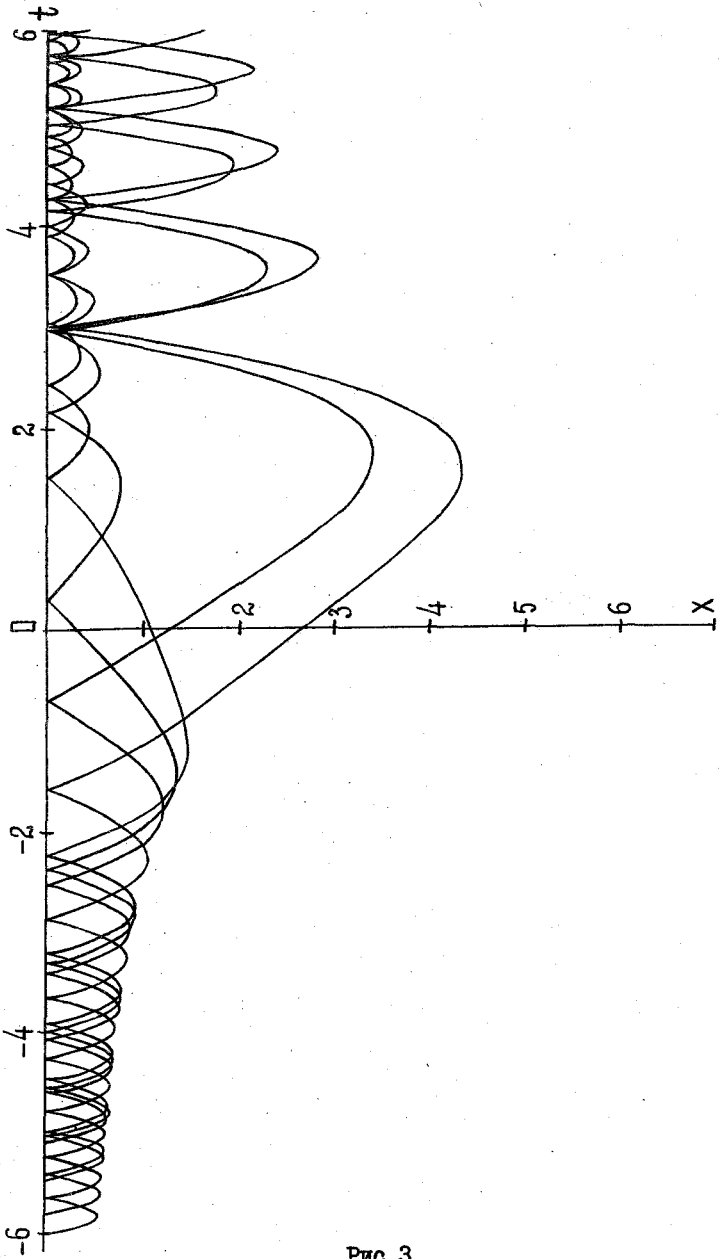


Рис. 3.

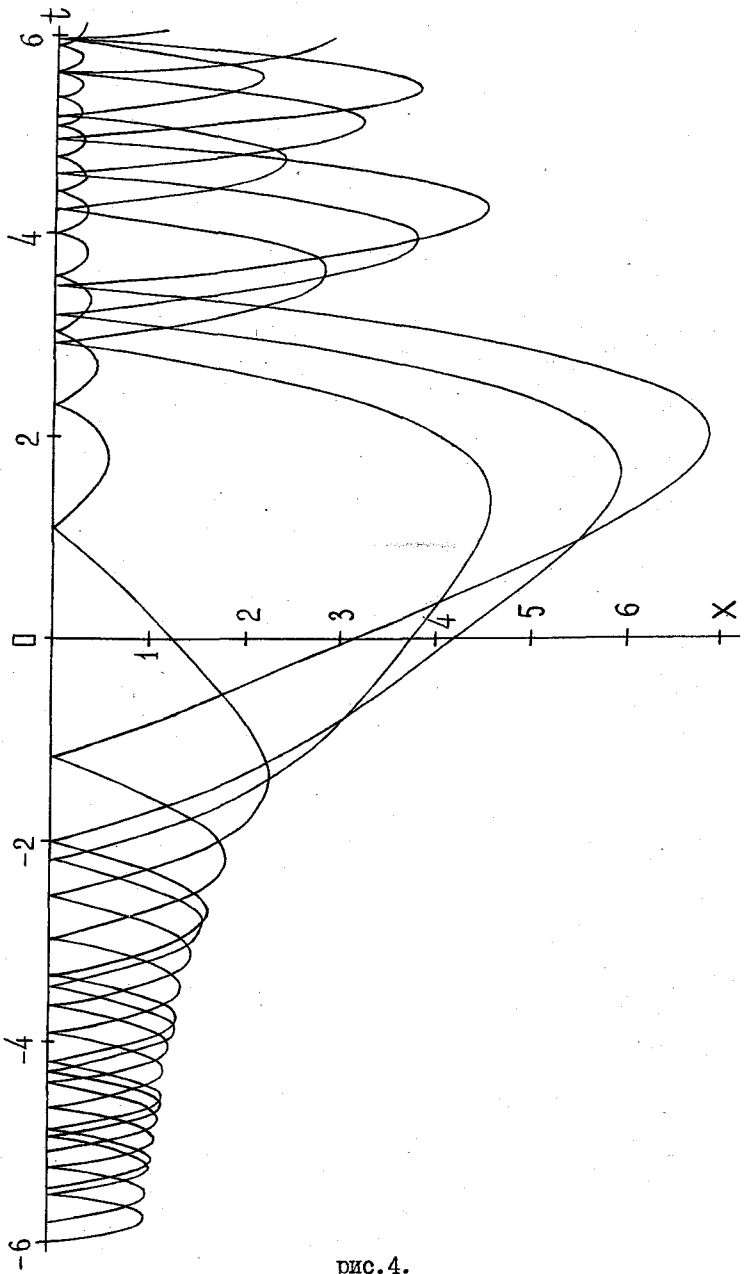


рис. 4.

На промежутке от -2 до $+2$ лучи наиболее сильно удаляются от границы, и, начиная с $t \approx +3$, они вновь концентрируются около границы, порождая довольно сложную лучевую картину. Отметим, что именно в этой области (т.е. при $t \geq +3$) на теневых рисунках (см. [2]) возникает интерференционная картина, обусловленная возбуждением за точкой распрямления $t=0$ границы большого числа волн шепчущей галереи. Так же, как и в случае точки перегиба границы, области максимального значения волнового поля на теневых рисунках [2] совпадают с областями, занятыми лучами.

Таким образом, имеет место четкая связь между качественным поведением волнового поля и динамикой лучей в окрестности рассмотренных точек распрямления границы.

Литература

1. Попов М.М., Пшеничк И. Численное решение задачи о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы. - Зап. науч. семина. ЛОМИ, 1976, т.62, с. 207-219.
2. Попов М.М., Пшеничк И. Волны шепчущей галереи в окрестности точки распрямления вогнутой границы. - Зап. науч. семина. ЛОМИ, 1978, т.78, с.203-210.
3. Попов М.М. Волновое поле в каустической тени в окрестности точки перегиба границы. - Зап. науч. семина. ЛОМИ, 1979, т.89, с.246-260.
4. Попов М.М. К задаче о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы. - Зап. науч. семина. ЛОМИ, 1976, т.62, с.197-206.

Lanin A.I., Popov M.M. Behaviour of the whispering gallery rays in a vicinity of a point where curvature of the boundary vanishes.

Behavior of whispering gallery rays in a vicinity of the boundary point $S=0$ with zero curvature is investigated in two cases. In the first one boundary curvature K is zero in this point, but $\left. \frac{dK}{dS} \right|_{S=0} \neq 0$. In the second one $K = \frac{dK}{dS} = 0$ in the point $S=0$, but $\frac{d^2K}{dS^2} \neq 0$. Results are obtained by the help of a computer and presented on the pictures.