

УДК 519.626

МЕТОДЫ КООРДИНАТНОГО СПУСКА С РЕЛАКСАЦИЕЙ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ¹⁾

© 2009 г. И. В. Коннов

(420008 Казань, ул. Кремлевская, 18, Казанский гос. ун-т, ф-т ВМК)

e-mail: konn-igor@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.04.2008 г.
Переработанный вариант 26.06.2008 г.

Для задачи дополнителности с многозначным отображением предлагаются методы типа Якоби и Гаусса–Зейделя с нижней релаксацией, а также комбинированный метод типа расщепления. Доказывается сходимость методов к решению в условиях, когда, основное отображение является верхним внедиагонально-антитонным, а допустимое множество непусто. Приводятся результаты численных расчетов на тестовых примерах. Библ. 16. Фиг. 3. Табл. 2.

Ключевые слова: задача дополнителности, многозначное отображение, внедиагональная антитонность, методы нижней релаксации, методы координатного спуска.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача дополнителности является одной из базовых задач нелинейного анализа наряду с задачами оптимизации, неподвижной точки и вариационными неравенствами; ее теории, методам решения и приложениям посвящено огромное число работ (см., например, [1]–[5] и приведенные там ссылки). Напомним, что *стандартная задача дополнителности* состоит в поиске точки $x^* \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$x^* \geq 0, \quad F(x^*) \geq 0, \quad \langle x^*, F(x^*) \rangle = 0, \quad (1.1)$$

где $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – заданное однозначное отображение (здесь и далее неравенства для векторов понимаются покоординатно). Основная часть работ (в особенности по численным методам поиска решений) связана именно с задачами вида (1.1) (см., например, [2], [4]). Наиболее изученным является случай, когда отображение F аффинно. В то же время во многих приложениях возникают многозначные отображения, в результате требуется найти решение *многозначной задачи дополнителности*, которая состоит в поиске точки $x^* \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$x^* \geq 0; \quad \exists g^* \in G(x^*), \quad g^* \geq 0; \quad \langle x^*, g^* \rangle = 0, \quad (1.2)$$

где $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ – некоторое многозначное отображение (здесь и далее $\Pi(S)$ обозначает совокупность всех подмножеств множества S). К задачам вида (1.2) приводятся, например, модели экономического равновесия при неоднозначном спросе/предложении участников, при использовании нескольких технологий производства; теоретико-игровые модели с негладкими функциями выигрыша; различные модели механики со свободной и движущейся границей, с препятствием в области (см., например, [6]–[9] и приведенные там ссылки). Известно (см., например, [10, лемма 1]), что задача (1.2) совпадает с многозначным вариационным неравенством, где допустимое множество имеет вид

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\},$$

т.е. является неотрицательным ортантом в \mathbb{R}^n . В этих условиях вместо общих свойств монотонности можно использовать более слабые свойства порядковой монотонности. Тем не менее как

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ-ГФЕН (код проекта 07-01-92101).

теоретическое исследование, так и численное нахождение решений многозначных задач вызывает обычно значительные трудности.

Сравнительно недавно в [10], [11], [9] были предложены обобщения понятия внедиагональной антитонности для многозначных отображений, получены результаты существования решений для соответствующих классов задач дополненности, а также построены обобщения метода типа Якоби для этих задач. В [12] этот подход распространен на задачу о многозначном включении. Отметим, что в [11], [9] рассматривались задачи вида (1.2), где отображение G являлось конечной суммой композиций внедиагонально-антитонных и диагональных отображений, при этом аналог метода Якоби включал дополнительную процедуру, обеспечивающую монотонность по двум уровням переменных. Поэтому возникает естественный вопрос о построении аналогов обычных одноуровневых методов координатного спуска типа Якоби и Гаусса–Зейделя для подобных задач. Другой вопрос связан с возможностью введения параметров релаксации в схему подобных методов, что делает метод намного более гибким и адаптируемым к особенностям конкретной задачи. Методы с релаксацией (нижней и верхней) весьма эффективны при решении нелинейных уравнений, но даже в однозначном случае их обоснование проведено в условиях, когда, в дополнение к внедиагональной антитонности, основное отображение сильно монотонно (либо строго диагонально изотонно, обратно изотонно), т.е. якобиан основного отображения является M -матрицей (см., например, [13], [14], а также [8]). Основная трудность здесь состоит в том, что при наличии только внедиагональной антитонности допустимое множество, в котором должна находиться итерационная последовательность для сохранения ее монотонной сходимости, может быть невыпуклым и несвязным и поэтому введение параметров релаксации приводит к недопустимости итерационных точек. Тогда становятся неприменимыми обычные схемы обоснования сходимости процессов без релаксации (см. [15], [16]). Между тем обоснование методов с релаксацией является особенно важным еще и по той причине, что в рамках таких схем включаются варианты методов с неточным линейным поиском, которые реально используются в нелинейном случае.

В настоящей работе даются положительные ответы на поставленные вопросы, а именно: предлагаются покоординатные одноуровневые алгоритмы с релаксацией для достаточно широкого класса задач вида (1.2) с внедиагонально-антитонными отображениями и обосновывается их сходимость. На этой основе предлагается и обосновывается также комбинированный метод типа расщепления.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Напомним определения свойств порядковой монотонности для однозначных отображений.

Определение 1. Отображение $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется:

- а) *изотонным* на множестве D , если для любых точек $x', x'' \in D$ таких, что $x' \geq x''$, выполняется неравенство $F(x') \geq F(x'')$;
- б) *антитонным* на множестве D , если отображение $-F$ изотонно на D ;
- в) *обратно-изотонным* на множестве D , если для любых точек $x', x'' \in D$ таких, что $F(x') \geq F(x'')$, выполняется условие $x' \geq x''$;
- г) *внедиагонально-антитонным* (ВДА) на множестве D , если для любых точек $x', x'' \in D$ таких, что $x' \geq x''$, выполняется неравенство $F_k(x') \leq F_k(x'')$ для любого индекса k такого, что $x'_k = x''_k$;
- д) *M -отображением* на множестве D , если оно является внедиагонально-антитонным и обратно-изотонным на D .

Отметим, что существуют несколько эквивалентных определений ВДА-отображений; кроме того, они называются также Z -отображениями, а в математической экономике широко используется близкое понятие (негативной) валовой заменимости (см., например, [16], [7], [5]). В аффинном случае, когда отображение F имеет вид $F(x) = Ax + b$, указанные свойства порядковой монотонности тесно связаны со свойствами матрицы A , в частности, ВДА соответствует неположительности всех внедиагональных элементов матрицы A , т.е. A есть Z -матрица. Если все главные миноры Z -матрицы A положительны, то она является M -матрицей, а отображение F является M -отображением. Также изотонность (антитонность) F соответствует здесь неотрицательности (неположительности) всех элементов матрицы A . В нелинейном дифференцируемом случае данные свойства можно определить с помощью якобиана отображения F (см., например, [2], [3], [13]).

Перейдем теперь к рассмотрению свойств многозначных отображений, следуя [10], [11], [9].

Определение 2. Отображение $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ называется:

а') *верхним (нижним) изотонным* на множестве D , если для любых точек $x', x'' \in D$ таких, что $x' \geq x''$, для любого $g'' \in G(x'')$ существует $g' \in G(x')$ (соответственно, для любого $g' \in G(x')$ существует $g'' \in G(x'')$) такой, что $g' \geq g''$;

б') *изотонным* на множестве D , если для любых точек $x', x'' \in D$ таких, что $x' \geq x''$ и $x' \neq x''$, и любых $g' \in G(x'), g'' \in G(x'')$ выполняется неравенство $g' \geq g''$;

в') *верхним (нижним) антитонным* на множестве D , если отображение G является нижним (верхним) изотонным на D ;

г') *антитонным* на множестве D , если отображение G является изотонным на D ;

д') *верхним (нижним) внедиагонально-антитонным (верхним (нижним))* на множестве D , если для любых точек $x', x'' \in D$ таких, что $x' \leq x''$, для любого $g'' \in G(x'')$ существует $g' \in G(x')$ (соответственно, для любого $g' \in G(x')$ существует $g'' \in G(x'')$) такой, что $g'_k \geq g''_k$ для любого индекса k , для которого $x'_k = x''_k$;

е') *внедиагонально-антитонным* на множестве D , если для любых точек $x', x'' \in D$ таких, что $x' \leq x''$, $x' \neq x''$, и любых $g' \in G(x'), g'' \in G(x'')$ выполняется $g'_k \geq g''_k$, если $x'_k = x''_k$.

Очевидно, что свойства из а'), в'), д') намного слабее соответствующих свойств из б'), г'), е'). Отметим, что прямолинейное обобщение свойств из определения 1 на многозначный случай (т.е. снятие условия $x' \neq x''$ в б'), г'), е')) некорректно, поскольку в этих условиях отображение может быть только однозначным.

Определение 3. Отображение $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ называется:

а'') *диагональным*, если $G(x) = \bigotimes_{i=1}^n G_i(x_i)$, где $G_i : \mathbb{R} \rightarrow \Pi(\mathbb{R})$ для $i = 1, 2, \dots, n$;

б'') *квазидиагональным* (см. [10]), если $G(x) = \bigotimes_{i=1}^n G_i(x)$, где $G_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R})$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Здесь и далее \otimes обозначает прямое (декартово) произведение.

Очевидно, что из а'') следует б''), кроме того, любое однозначное отображение квазидиагонально. Далее, любое однозначное диагональное отображение является ВДА-отображением в смысле определений 1 и 2, но многозначное диагональное отображение не является ВДА-отображением в смысле определения 2 е'). Поэтому в дальнейшем используются определения из 2 а'), в'), д').

Как показано в [9, предложение 2.5], если отображение $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ имеет вид $G(x) = x - T(x)$, где $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ – верхнее (нижнее) изотонное отображение, то отображение G является нижним (верхним) ВДА-отображением; обратное утверждение неверно. Поэтому задача поиска неподвижных точек изотонных отображений тесно связана с задачей поиска решений многозначных включений для ВДА-отображений, а значит, и с задачей дополненности для таких отображений.

Нам потребуются также свойства типа непрерывности для многозначных отображений.

Определение 4. Отображение $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ называется:

а) *полунепрерывным сверху* на множестве D , если для любой точки $x \in D$ и любой окрестности U множества $G(x)$ найдется окрестность V точки x такая, что $G(y) \subseteq U$, как только $y \in V \cap D$;

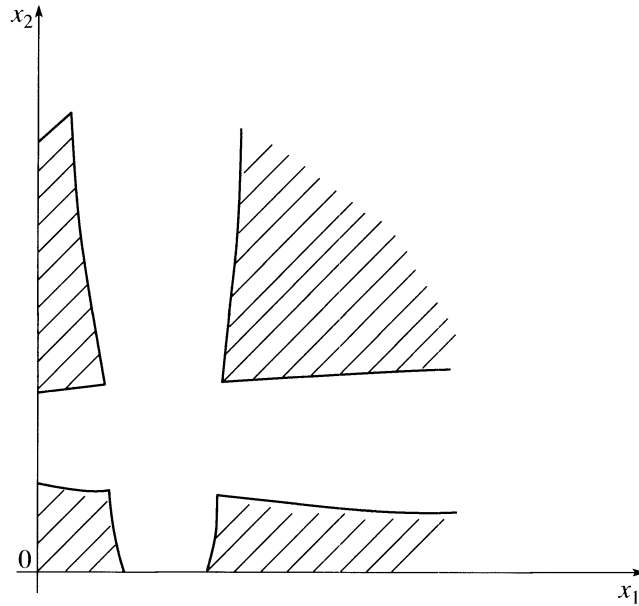
б) *K-отображением* (отображением Какутани) на множестве D , если оно полунепрерывно сверху и имеет непустые, выпуклые и компактные образцы на D .

3. ДОПУСТИМОЕ МНОЖЕСТВО И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим задачу дополненности (1.2) при следующих предположениях на отображение G .

Предположение А1. Отображение $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ является квазидиагональным, верхним ВДА-, а также К-отображением на \mathbb{R}_+^n .

В силу аддитивности свойств из определения 2, задача (1.2) в условиях А1 содержит произвольную конечную сумму диагональных и квазидиагональных (в частности, однозначных) верх-



Фиг. 1.

них ВДА-отображений, т.е. охватывает многие классы значимых приложений, приведенные в [9]–[12].

Особую роль в исследовании задач дополнителности играет следующее вспомогательное множество, называемое также *допустимым множеством* задачи (1.2):

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \exists g \in G(x), g \geq 0\}. \quad (3.1)$$

Как следует из леммы 4.1 в [9], при условиях А1 множество Q является нижней подрешеткой, т.е. вместе с любыми точками $x, y \in Q$ содержит их покоординатный минимум $z = \min\{x, y\}$, где $z_i = \min\{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть

$$\min Q = \{x^* \in Q \mid x^* \leq x \quad \forall x \in Q\}.$$

Тогда, как следует из теоремы 4.3 в [9], при условиях в А1 и непустом множестве Q элемент $\min Q$ существует и является решением задачи (1.2). Важность изучения свойств множества Q проистекает из того факта, что монотонные координатные процессы генерируют последовательности допустимых точек, что и обеспечивает во многом их сходимость к решению. Однако геометрические свойства множества Q могут быть достаточно сложными даже в однозначном случае, что иллюстрируется следующими примерами.

Пример 1. Рассмотрим задачу (1.1) со следующим отображением:

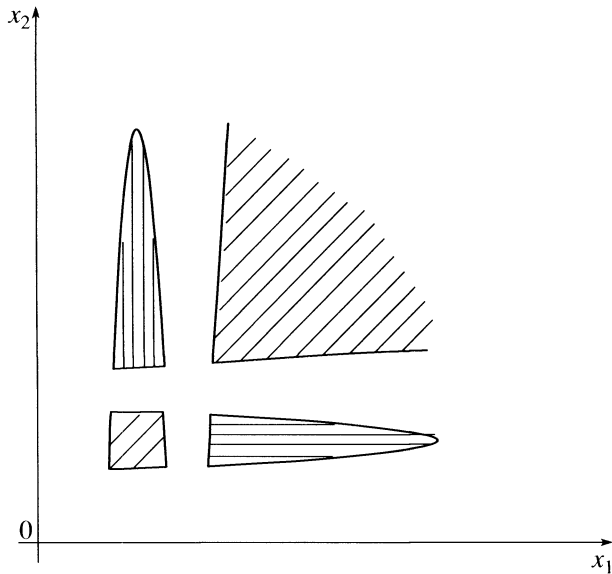
$$F(x) = \begin{pmatrix} 10x_1^2 - 30x_1 - x_2 + 20 \\ 10x_2^2 - 30x_2 - x_1 + 20 \end{pmatrix},$$

т.е. при $n = 2$. Очевидно, что якобиан $\nabla F(x) = \begin{pmatrix} (20x_1 - 30) & -1 \\ -1 & (20x_2 - 30) \end{pmatrix}$ есть Z -матрица, поэтому

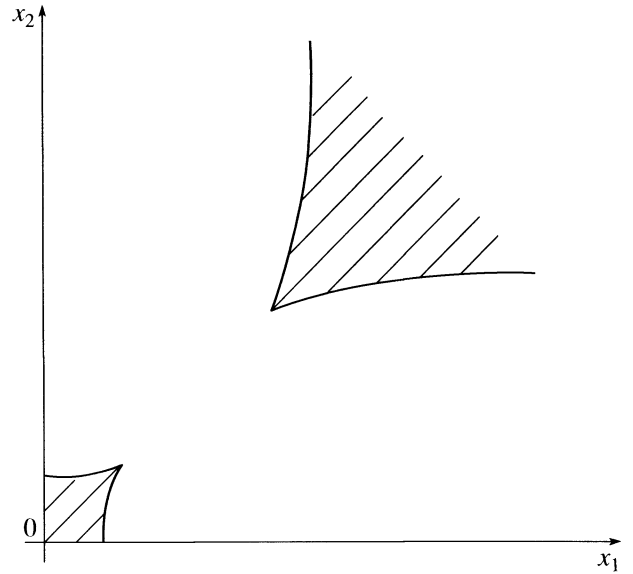
F есть непрерывное ВДА-отображение. Допустимое множество задачи

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, F(x) \geq 0\} \quad (3.2)$$

невыпукло и несвязно (см. фиг. 1; здесь и далее область Q заштрихована). Тогда задача (1.1) имеет конечное число решений, в том числе точку $(0, 0)^T$. Заметим, что множество решений здесь несвязно.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Пример 2. Пусть при $n = 2$ в задаче (1.1)

$$F(x) = \begin{pmatrix} 5x_1^3 - 45x_1^2 + 600x_1 - x_2 - 76 \\ 5x_2^3 - 45x_2^2 + 600x_2 - x_1 - 76 \end{pmatrix}.$$

Тогда якобиан

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} (15x_1^2 - 90x_1 + 600) & -1 \\ -1 & (15x_2^2 - 90x_2 + 600) \end{pmatrix}$$

также является Z -матрицей. Допустимое множество задачи невыпукло и несвязно (см. фиг. 2). Тогда задача (1.1) также имеет конечное число решений, множество решений несвязно. В отличие от примера 1, здесь точка $(0, 0)^T$ не является решением.

Пример 3. Пусть при $n = 2$ в задаче (1.1)

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 3x_2 + 1 \\ x_2^2 - 3x_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь якобиан $\nabla F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -3 \\ -3 & 2x_2 \end{pmatrix}$ является Z -матрицей, более того, на \mathbb{R}_+^2 диагональные элементы неотрицательны. Но допустимое множество Q из (3.2) также невыпукло и несвязно (см. фиг. 3). Задача (1.1) в этом случае имеет три изолированных решения.

4. МЕТОД ЯКОБИ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Построим обобщение метода Якоби с релаксацией для задачи (1.2) в условиях A1. Для вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ и числа y_i введем обозначения $(x_{-i}, y_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i; x_{i+1}, \dots, x_n)^T$.

Алгоритм 1 (Якоби)

Дана точка $\tilde{x} \in Q$, где Q определено в (3.1); выберем число $\varepsilon \in (0, 1]$ и последовательности чисел $\{\alpha_{ki}\}$, $\alpha_{ki} \in [\varepsilon, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots$. Положим $x^0 = y^0 = \tilde{x}$.

На k -й итерации, $k = 0, 1, \dots$, имеем точки $x^k, y^k \in \mathbb{R}_+^n$ такие, что $y^k \leq x^k$. Для каждого индекса $i = 1, 2, \dots, n$ находим число y_i^{k+1} . Для этого выбираем $g_i' \in G_i(x_{-i}^k, 0)$, затем

- 1) если $g_i' \geq 0$, то полагаем $y_i^{k+1} = 0$;
- 2) если $g_i' < 0$, то находим $y_i^{k+1} \in [0, x_i^k]$ так, чтобы $0 \in G_i(x_{-i}^k, y_i^{k+1})$.

После этого полагаем

$$x_i^{k+1} = (1 - \alpha_{ki})x_i^k + \alpha_{ki}y_i^{k+1} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \tag{4.1}$$

и переходим к следующей $(k + 1)$ -й итерации.

Отметим, что в алгоритме допускаются разные значения параметров релаксации по разным координатам. В то же время при $\alpha_{ki} \equiv 1$ получается вариант алгоритма из [10], но здесь применяются более слабые условия на отображение G .

Получим вначале простые свойства алгоритма 1.

Лемма 1. *В алгоритме 1 число y_i^{k+1} существует для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $k = 0, 1, \dots, a$ для $k = 0, 1, \dots$ выполняются соотношения*

$$0 \leq y^{k+1} \leq x^{k+1} \leq x^k, \tag{4.2}$$

$$y^{k+1} \in Q. \tag{4.3}$$

Доказательство. Прежде всего рассмотрим ситуацию, когда для данных индексов k и i существует отрезок $[x_i', x_i''] \subseteq [0, x_i^k]$ такой, что $g_i' < 0$, $g_i'' \geq 0$ для некоторых $g_i' \in G_i(x_{-i}^k, x_i')$, $g_i'' \in G_i(x_{-i}^k, x_i'')$. Тогда можно построить последовательность вложенных отрезков, выбирая $\tilde{x}_i = 0.5(x_i' + x_i'')$, $\tilde{g}_i \in G_i(x_{-i}^k, \tilde{x}_i)$ и полагая $x_i' = \tilde{x}_i$ при $\tilde{g}_i < 0$ и $x_i'' = \tilde{x}_i$ при $\tilde{g}_i \geq 0$. Эта последовательность будет стягиваться к числу \tilde{y}_i . Тогда, учитывая, что G есть К-отображение, получаем, что найдутся числа $g_i' \in G_i(x_{-i}^k, \tilde{y}_i)$ и $g_i'' \in G_i(x_{-i}^k, \tilde{y}_i)$ такие, что $g_i' \leq 0$ и $g_i'' \geq 0$, а в силу выпуклости множества $G_i(x_{-i}^k, \tilde{y}_i)$ получаем, что $0 \in G_i(x_{-i}^k, \tilde{y}_i)$, поэтому можно положить $y_i^{k+1} = \tilde{y}_i$.

Далее, при $k = 0$ имеем $x^0 = y^0 \in Q$, поэтому найдется $g'' \in G(x^0)$, $g'' \geq 0$, т.е. в случае 2) алгоритма отрезок $[x_i', x_i''] = [0, x_i^0]$. Тогда число y_i^1 существует для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и выполняется условие $0 \leq y^1 \leq x^1 \leq x^0$ по построению. Поэтому $(x_{-i}^0, y_i^1) \geq y^1$ и $\tilde{g}_i \geq 0$ для некоторого $\tilde{g}_i \in G_i(x_{-i}^0, y_i^1)$. Поскольку G – верхнее ВДА-отображение, существует $g_i \in G_i(y^1)$ такое, что $g_i \geq \tilde{g}_i \geq 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, значит, $y^1 \in Q$ и соотношения (4.2), (4.3) справедливы при $k = 0$.

Пусть утверждения леммы 1 справедливы при $0, 1, \dots, k - 1$ и выполняется k -я итерация. Тогда число y_i^{k+1} существует в случае 1) алгоритма, а в случае 2) имеем $\tilde{g}_i \geq 0$ для некоторого $\tilde{g}_i \in G_i(x_{-i}^{k-1}, y_i^k)$ на предыдущей итерации. Но $(x_{-i}^k, y_i^k) \leq (x_{-i}^{k-1}, y_i^k)$ по предположению, поэтому в силу верхнего ВДА-свойства найдется $g_i'' \in G_i(x_{-i}^k, y_i^k)$, $g_i'' \geq 0$, при этом $y_i^k \in [0, x_i^k]$ и можно определить требуемый отрезок $[x_i', x_i''] = [0, y_i^k] \subseteq [0, x_i^k]$, который, как показано выше, содержит число y_i^{k+1} для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда соотношения в (4.2) справедливы. Поэтому $(x_{-i}^k, y_i^{k+1}) \geq y^{k+1}$ и $\tilde{g}_i \geq 0$ для некоторого $\tilde{g}_i \in G_i(x_{-i}^k, y_i^{k+1})$. Поскольку G – верхнее ВДА-отображе-

ние, то существует $g_i \in G_i(y^{k+1})$ такое, что $g_i \geq \tilde{g}_i \geq 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, значит, $y^{k+1} \in Q$ и соотношение (4.3) справедливо.

Обозначим через A_k диагональную матрицу порядка n с диагональю $(\alpha_{k1}, \dots, \alpha_{kn})$. Установим сходимость алгоритма 1.

Теорема 1. *Если множество Q из (3.1) непусто, то алгоритм 1 корректен и строит последовательности $\{x^k\}$ и $\{y^k\}$ такие, что*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = x^*, \tag{4.4}$$

где x^* – решение задачи (1.2), при этом

$$x^* \leq x^k \leq \tilde{x}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{4.5}$$

Доказательство. Если множество Q непусто, то точка $\tilde{x} \in Q$ существует и, согласно лемме 1, алгоритм 1 корректен. Из (4.1) вытекает, что последовательность $\{x^k\}$ монотонно не возрастает и ограничена снизу, поэтому она имеет предел, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$. Далее, по определению, $y^{k+1} = x^k + A_k^{-1}(x^{k+1} - x^k)$, поэтому имеем

$$\begin{aligned} \|y^{k+1} - x^*\| &= \|(x^k - x^*) + A_k^{-1}(x^{k+1} - x^k)\| \leq \\ &\leq \|x^k - x^*\| + \|A_k^{-1}\| \|x^{k+1} - x^k\| \leq \\ &\leq \|x^k - x^*\| + \varepsilon^{-1} \|x^{k+1} - x^k\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$ и соотношение (4.4) справедливо; более того, $x^* \in Q$, поскольку $y^k \in Q$, а Q – замкнутое множество. Кроме того, имеем, по построению,

$$\exists g_i^{k+1} \in G_i(x_{-i}^k, y_i^{k+1}), \quad g_i^{k+1} \geq 0, \quad y_i^{k+1} g_i^{k+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$, беря подпоследовательность, если необходимо, и учитывая, что G есть K -отображение, получаем, что

$$x_i^* \geq 0; \quad \exists g_i^* \in G_i(x^*), \quad g_i^* \geq 0; \quad x_i^* g_i^* = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Итак, x^* – решение задачи (1.2). Соотношение (4.5) теперь следует из (4.4) и (4.2).

В условиях, когда известно все множество $G(x)$ (например, когда оно является многогранником), число y_i^{k+1} в алгоритме 1 можно находить по следующим правилам:

(i) если существует $g_i \in G_i(x_{-i}^k, 0)$, $g_i \geq 0$, то полагаем $y_i^{k+1} = 0$;

(ii) если $g_i' < 0$ для всех $g_i' \in G_i(x_{-i}^k, 0)$, то находим $y_i^{k+1} \in (0, x_i^k]$ так, чтобы $0 \in G_i(x_{-i}^k, y_i^{k+1})$.

Назовем этот вариант *модификацией* М1, для которой, как нетрудно видеть, справедливы утверждения леммы 1 и теоремы 1.

Следует отметить, что возможная недопустимость точек $\{x^k\}$ (что легко показать на примере 1) не препятствует общей сходимости к решению. Кроме того, если в алгоритме 1 для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ в случае 2) находить $y_i^{k+1} \in [0, y_i^k]$ (существование требуемой точки показано в лемме 1), то можно гарантировать вместо (4.5) выполнение дополнительных неравенств

$$y_i^{k+1} \leq y_i^k \quad \text{и} \quad x^* \leq y^k \leq x^k \leq \tilde{x} \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots \tag{4.6}$$

Как нетрудно показать на примере 2, в общем случае эти соотношения могут не выполняться. С другой стороны, хотя число y_i^{k+1} существует, найти его точно в нелинейном, а тем более в многозначном случае вряд ли возможно. Но его можно находить приближенно с заданной длиной отрезка локализации $[x_i', x_i'']$.

А именно, для каждого индекса $i = 1, 2, \dots, n$ в случае 2) после достижения заданной длины отрезка локализации точки y_i^{k+1} можно вместо y_i^{k+1} определять точку z_i^{k+1} как правый конец от-

резка, т.е. $z_i^{k+1} = x_i''$, тогда по построению существует $g_i'' \in G_i(x_{-i}^k, z_i^{k+1})$ такое, что $g_i'' \geq 0$. В случае 1) просто полагаем $z_i^{k+1} = y_i^{k+1} = 0$. После определения точки z^{k+1} полагаем

$$x_i^{k+1} = (1 - \beta_{ki})x_i^k + \beta_{ki}z_i^{k+1} \quad (4.7)$$

для каждого индекса $i = 1, 2, \dots, n$, где $\beta_{ki} \in (0, 1]$, тогда выполняется (4.1), но при этом выбор чисел β_{ki} должен гарантировать, что $\alpha_{ki} \in [\varepsilon, 1]$ для $i = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots$.

Этот вариант с неточным вычислением назовем *модификацией* М2. Он укладывается в схему алгоритма 1, причем в лемме 1 и теореме 1 точку y^k можно заменить на z^k в том смысле, что теперь выполняется

$$0 \leq z^{k+1} \leq x^{k+1} \leq x^k \quad \text{и} \quad z^k \in Q \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots; \quad (4.8)$$

а в случае 2) в качестве начального отрезка локализации точки y_i^{k+1} можно брать $[0, z_i^k]$. Из (4.4) тогда следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = x^*, \quad (4.9)$$

где x^* – решение задачи (1.2). Таким образом, в теореме 1 дано обоснование сходимости и для вариантов метода Якоби с приближенными вычислениями.

Заметим, что для сходимости не требуется высокой точности выполнения линейных поисков, она адаптируется к длине стартового отрезка, что обеспечивается разными шагами релаксации, а это сокращает объем вычислений в методе.

5. МЕТОД ГАУССА–ЗЕЙДЕЛЯ С РЕЛАКСАЦИЕЙ

В отличие от метода Якоби, в методе Гаусса–Зейделя найденное приближение по каждой координате сразу же используется при поиске нового приближения по следующей координате. Это несколько усложняет обоснование, но обычно ускоряет сходимость. Построим реализации данного метода, использующие релаксацию, для задачи (1.2) в условиях А1. Для краткости введем такие обозначения:

$$(x_{<i}, y_i, z_{>i}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, z_{i+1}, \dots, z_n),$$

$$(x_{\leq i}, z_{>i}) = (x_1, \dots, x_i, z_{i+1}, \dots, z_n),$$

$$(x_{<i}, z_{\geq i}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, \dots, z_n).$$

Алгоритм 2 (Гаусса–Зейделя).

Дана точка $\tilde{x} \in Q$, где Q определено в (3.1), выберем число $\varepsilon \in (0, 1]$ и последовательности чисел $\{\alpha_{ki}\}$, $\alpha_{ki} \in [\varepsilon, 1]$, для $i = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots$. Полагаем $x^0 = y^0 = \tilde{x}$.

На k -й итерации, $k = 0, 1, \dots$, имеем точки $x^k, y^k \in \mathbb{R}_+^n$ такие, что $y^k \leq x^k$. Для каждого индекса $i = 1, 2, \dots, n$ находим число y_i^{k+1} . Для этого выбираем $g_i' \in G_i(y_{<i}^{k+1}, 0, x_{>i}^k)$ при условиях:

1) если $g_i' \geq 0$, то полагаем $y_i^{k+1} = 0$;

2) если $g_i' < 0$, то находим $y_i^{k+1} \in [0, x_i^k]$ так, чтобы $0 \in G_i(y_{\leq i}^{k+1}, x_{>i}^k)$.

После этого полагаем $x_i^{k+1} = (1 - \alpha_{ki})x_i^k + \alpha_{ki}y_i^{k+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и переходим к следующей итерации.

Лемма 2. В алгоритме 2 число y_i^{k+1} существует для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $k = 0, 1, \dots$, а для $k = 0, 1, \dots$ выполняются соотношения

$$0 \leq y^{k+1} \leq x^{k+1} \leq x^k \quad \text{и} \quad y^{k+1} \leq y^k, \quad (5.1)$$

$$y^{k+1} \in Q. \quad (5.2)$$

Доказательство. Если существует отрезок $[x'_i, x''_i] \subseteq [0, y_i^k]$ такой, что $g'_i < 0, g''_i \geq 0$ для некоторых $g'_i \in G_i(y_{<i}^{k+1}, x'_i, x_{>i}^k), g''_i \in G_i(y_{<i}^{k+1}, x''_i, x_{>i}^k)$, то, как и в лемме 1, можно показать, что найдется число $\tilde{y}_i \in [x'_i, x''_i]$ такое, что $0 \in G_i(y_{<i}^{k+1}, \tilde{y}_i, x_{>i}^k)$.

Далее, при $k = 0$ имеем $x^0 = y^0 \in Q$, поэтому найдется $\tilde{g} \in G(x^0), \tilde{g} \geq 0$. В случае 2) алгоритма 2 при $i = 1$ требуемый отрезок $[x'_i, x''_i] = [0, y_i^0]$, т.е. и число y_i^1 , существует. При $i > 1$ для этого достаточно, чтобы $0 \leq y_j^1 \leq x_j^1 \leq y_j^0$ при $j < i$. Действительно, тогда $x^0 \geq (y_{<i}^1, y_i^0, x_{>i}^0)$ и в силу верхнего ВДА-свойства найдется $g''_i \in G_i(y_{<i}^1, y_i^0, x_{>i}^0), g''_i \geq 0$. Отсюда сразу следует, что соотношения выполняются для $j = i$, а тогда и для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Отсюда получаем, что число y_i^1 существует для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и соотношения в (5.1) справедливы при $k = 0$. Поэтому $(y_{\leq i}^1, x_{>i}^0) \geq y^1$, но, по построению, $\tilde{g}_i \geq 0$ для некоторого $\tilde{g}_i \in G_i(y_{\leq i}^1, x_{>i}^0)$. Поскольку G – верхнее ВДА-отображение, то существует $g_i \in G_i(y^1)$ такое, что $g_i \geq \tilde{g}_i \geq 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, а значит, $y^1 \in Q$ и (5.2) справедливо при $k = 0$.

Пусть утверждения леммы 2 справедливы при $0, 1, \dots, k - 1$ и выполняется k -я итерация. Очевидно, что число y_i^{k+1} существует в случае 1) алгоритма 2. Рассмотрим случай 2). Тогда $\tilde{g}_i \geq 0$ для некоторого $\tilde{g}_i \in G_i(y_{\leq i}^k, x_{>i}^{k-1})$ на предыдущей итерации. По предположению, $(y_{\leq i}^k, x_{>i}^{k-1}) \geq (y_{<i}^{k+1}, y_i^k, x_{>i}^k)$ и, в силу верхнего ВДА-свойства, найдется $g''_i \in G_i(y_{<i}^{k+1}, y_i^k, x_{>i}^k), g''_i \geq 0$. Поэтому требуемый отрезок $[x'_i, x''_i] = [0, y_i^k]$, т.е. и число y_i^{k+1} , существует при $i = 1$. При $i > 1$ для этого достаточно, чтобы $0 \leq y_j^{k+1} \leq x_j^{k+1} \leq x_j^k$ и $y_j^{k+1} \leq y_j^k$ при $j < i$. Действительно, тогда $(y_{\leq i}^k, x_{>i}^{k-1}) \geq (y_{<i}^{k+1}, y_i^k, x_{>i}^k)$ и, в силу верхнего ВДА-свойства, найдется $g''_i \in G_i(y_{<i}^{k+1}, y_i^k, x_{>i}^k), g''_i \geq 0$. Отсюда сразу следует, что соотношения выполняются для $j = i$, тогда и для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Получаем, что число y_i^{k+1} существует для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и соотношения в (5.1) справедливы. Поэтому $(y_{\leq i}^{k+1}, x_{>i}^k) \geq y^{k+1}$, но, по построению, $\tilde{g}_i \geq 0$ для некоторого $\tilde{g}_i \in G_i(y_{\leq i}^{k+1}, x_{>i}^k)$. Поскольку G – верхнее ВДА-отображение, существует $g_i \in G_i(y^{k+1})$ такое, что $g_i \geq \tilde{g}_i \geq 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, значит, $y^{k+1} \in Q$ и (5.2) справедливо.

Теперь установим сходимость алгоритма 2.

Теорема 2. Если множество Q из (3.1) непусто, то алгоритм 2 корректен и строит последовательности $\{x^k\}$ и $\{y^k\}$ такие, что выполняются соотношения (4.4) и (4.6), где x^* – решение задачи (1.2).

Доказательство. Так же как и в обосновании теоремы 1, получаем, что справедливы соотношения (4.4) и (4.5) для некоторой точки $x^* \in Q$. Из (5.1) теперь сразу следует (4.6). Далее, по построению имеем

$$\exists g_i^{k+1} \in G_i(y_{\leq i}^{k+1}, x_{>i}^k), \quad g_i^{k+1} \geq 0, \quad y_i^{k+1} g_i^{k+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$, беря подпоследовательность, если необходимо, и учитывая, что G есть К-отображение, получаем

$$x_i^* \geq 0, \quad \exists g_i^* \in G_i(x^*) : g_i^* \geq 0, \quad x_i^* g_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому x^* есть решение задачи (1.2).

Описанный вариант метода Гаусса–Зейделя, в котором вначале выполняется итерация обычного метода по всем координатам, а затем происходит смещение в новую точку с учетом параметров релаксации, требует достаточно высокой точности определения чисел y_i^{k+1} при реализации. Более удобно сразу вычислять релаксированную точку x_i^{k+1} , даже и без точного определения точки y_i^{k+1} . Такой вариант метода описывается следующим образом.

Алгоритм 3 (Гаусса–Зейделя).

Дана точка $\tilde{x} \in Q$, где Q определено в (3.1), выберем число $\varepsilon \in (0, 1]$ и последовательности чисел $\{\alpha_{ki}\}$, $\alpha_{ki} \in [\varepsilon, 1]$, для $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots$. Полагаем $x^0 = y^0 = \tilde{x}$.

На k -й итерации, $k = 0, 1, \dots$, имеем точки $x^k, y^k \in \mathbb{R}_+^n$ такие, что $y^k \leq x^k$. Для каждого индекса $i = 1, 2, \dots, n$ находим число y_i^{k+1} . Для этого выбираем $g_i' \in G_i(x_{<i}^{k+1}, 0, x_{>i}^k)$ при условиях:

1) если $g_i' \geq 0$, то полагаем $y_i^{k+1} = 0$;

2) если $g_i' < 0$, то находим $y_i^{k+1} \in [0, x_i^k]$ так, чтобы $0 \in G_i(x_{<i}^{k+1}, y_i^{k+1}, x_{>i}^k)$.

После этого полагаем

$$x_i^{k+1} = (1 - \alpha_{ki})x_i^k + \alpha_{ki}y_i^{k+1}, \quad (5.3)$$

при $i < n$ переходим к следующему индексу $i = i + 1$. При $i = n$ итерация завершена, переходим к следующей, $(k + 1)$ -й итерации.

Лемма 3. Утверждения леммы 1 справедливы для алгоритма 3.

Доказательство. Если существует отрезок $[x_i', x_i''] \subseteq [0, x_i^k]$ такой, что $g_i' < 0$, $g_i'' \geq 0$ для некоторых $g_i' \in G_i(x_{<i}^{k+1}, x_i', x_{>i}^k)$, $g_i'' \in G_i(x_{<i}^{k+1}, x_i'', x_{>i}^k)$, то, как и в лемме 1, можно показать, что найдется число $\tilde{y}_i \in [x_i', x_i'']$ такое, что $0 \in G_i(x_{<i}^{k+1}, \tilde{y}_i, x_{>i}^k)$.

Далее, при $k = 0$ имеем $x^0 = y^0 \in Q$, поэтому найдется $\tilde{g} \in G(x^0)$, $\tilde{g} \geq 0$. В случае 2) алгоритма 3 при $i = 1$ требуемый отрезок $[x_i', x_i''] = [0, x_i^0]$, т.е. и число y_i^1 , существует. При $i > 1$ для этого достаточно, чтобы $0 \leq y_j^1 \leq x_j^1 \leq x_j^0$ при $j < i$. Действительно, тогда $x^0 \geq (x_{<i}^1, x_i^0, x_{>i}^0)$ и, в силу верхнего ВДА-свойства, найдется $g_i'' \in G_i(x_{<i}^1, x_i^0, x_{>i}^0)$, $g_i'' \geq 0$. Отсюда сразу следует, что соотношения выполняются для $j = i$, тогда и для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Отсюда получаем, что число y_i^1 существует для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и соотношения в (4.2) справедливы при $k = 0$. Поэтому $(x_{<i}^1, y_i^1, x_{>i}^0) \geq y^1$, но, по построению, $\tilde{g}_i \geq 0$ для некоторого $\tilde{g}_i \in G_i(x_{<i}^1, y_i^1, x_{>i}^0)$. Поскольку G – верхнее ВДА-отображение, то существует $g_i \in G_i(y^1)$ такое, что $g_i \geq \tilde{g}_i \geq 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, значит $y^1 \in Q$ и (4.3) справедливо при $k = 0$.

Пусть утверждения леммы 2 справедливы при $0, 1, \dots, k - 1$ и выполняется k -я итерация. Очевидно, что число y_i^{k+1} существует в случае 1) алгоритма 3. Рассмотрим случай 2). Тогда имеем $\tilde{g}_i \geq 0$ для некоторого $\tilde{g}_i \in G_i(x_{<i}^k, y_i^k, x_{>i}^{k-1})$ на предыдущей итерации. По предположению, $(x_{<i}^k, y_i^k, x_{>i}^{k-1}) \geq (x_{<i}^{k+1}, y_i^k, x_{>i}^k)$ и, в силу верхнего ВДА-свойства, найдется $g_i'' \in G_i(y_{<i}^{k+1}, y_i^k, x_{>i}^k)$, $g_i'' \geq 0$. Поэтому требуемый отрезок $[x_i', x_i''] = [0, y_i^k] \subseteq [0, x_i^k]$, т.е. и число y_i^{k+1} существует при $i = 1$. При $i > 1$ для этого достаточно, чтобы $0 \leq y_j^{k+1} \leq x_j^{k+1} \leq x_j^k$ при $j < i$. Действительно, тогда $(x_{<i}^k, y_i^k, x_{>i}^{k-1}) \geq (x_{<i}^{k+1}, y_i^k, x_{>i}^k)$ и, в силу верхнего ВДА-свойства, найдется $g_i'' \in G_i(y_{<i}^{k+1}, y_i^k, x_{>i}^k)$, $g_i'' \geq 0$. Отсюда сразу следует, что соотношения выполняются для $j = i$, а тогда и для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Получаем, что число y_i^{k+1} существует для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и соотношения в (4.2) справедливы. Поэтому $(x_{<i}^{k+1}, y_i^{k+1}, x_{>i}^k) \geq y^{k+1}$, но, по построению, $\tilde{g}_i \geq 0$ для некоторого $\tilde{g}_i \in G_i(x_{<i}^{k+1}, y_i^{k+1}, x_{>i}^k)$. Поскольку G – верхнее ВДА-отображение, то существует $g_i \in G_i(y^{k+1})$ такое, что $g_i \geq \tilde{g}_i \geq 0$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, значит, $y^{k+1} \in Q$ и (4.3) справедливо. Итак, утверждения леммы 2 справедливы для алгоритма 3.

Сходимость алгоритма 3 устанавливается в основном так же, как и для алгоритма 2.

Теорема 3. Если множество Q из (3.1) непусто, то алгоритм 3 корректен и строит последовательности $\{x^k\}$ и $\{y^k\}$ такие, что выполняются соотношения (4.4) и (4.5), где x^* – решение задачи (1.2).

Доказательство. Так же как и в обосновании теоремы 1, получаем, что справедливы соотношения (4.4) и (4.5) для некоторой точки $x^* \in Q$. Далее, по построению, имеем

$$\exists g_i^{k+1} \in G_i(x_{<i}^{k+1}, y_i^{k+1}, x_{>i}^k), \quad g_i^{k+1} \geq 0, \quad y_i^{k+1} g_i^{k+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$, беря подпоследовательность, если необходимо, и учитывая, что G есть К-отображение, получаем

$$x_i^* \geq 0, \quad \exists g_i^* \in G_i(x^*), \quad g_i^* \geq 0; \quad x_i^* g_i^* = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому x^* есть решение задачи (1.2).

Если в алгоритме 3 для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ в случае 2) находить $y_i^{k+1} \in [0, y_i^k]$ (существование требуемой точки показано в лемме 3), то можно гарантировать вместо (4.5) выполнение дополнительных неравенств (4.6).

Для алгоритмов 2 и 3 также можно применять модификацию М1, при этом останутся справедливыми все полученные утверждения. Для алгоритма 3, например, она будет состоять в определении числа y_i^{k+1} для каждого индекса $i = 1, 2, \dots, n$ по следующим правилам:

(i) если существует $g_i \in G_i(x_{<i}^{k+1}, 0, x_{>i}^k), g_i \geq 0$, то полагаем $y_i^{k+1} = 0$;

(ii) если $g_i^k < 0$ для всех $g_i \in G_i(x_{<i}^{k+1}, 0, x_{>i}^k)$, то находим $y_i^{k+1} \in (0, x_i^k]$ так, чтобы выполнялось $0 \in G_i(x_{<i}^{k+1}, y_i^{k+1}, x_{>i}^k)$.

Для алгоритма 3 также удобно применять модификацию М2. Тогда нет необходимости находить явно точки y_i^{k+1} . Достаточно задать определенную относительную точность решения задачи одномерного включения на отрезке $[0, y_i^k]$, а именно: для каждого индекса $i = 1, 2, \dots, n$ в случае (ii) после достижения заданной длины отрезка $[x_i^k, x_i^k]$ локализации точки y_i^{k+1} можно вместо y_i^{k+1} определять точку z_i^{k+1} как правый конец отрезка, т.е. $z_i^{k+1} = x_i^k$; тогда, по построению, существует $g_i'' \in G_i(x_{<i}^{k+1}, z_i^k, x_{>i}^k)$ такой, что $g_i'' \geq 0$. В случае (i) просто полагаем $z_i^{k+1} = y_i^{k+1} = 0$. После определения точки z_i^{k+1} определяем x_i^{k+1} по формуле (4.7), где $\beta_{ki} \in (0, 1]$, тогда выполняется (5.3), но при этом выбор чисел β_{ki} должен гарантировать, что $\alpha_{ki} \in [\varepsilon, 1]$ для $i = 1, 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots$. Такой подход позволяет сократить общий объем вычислений.

Этот вариант с неточным вычислением укладывается в схему алгоритма 3, причем в лемме 3 и теореме 3 точку y^k можно заменить на z^k в том смысле, что теперь выполняется (4.8), а в случае (ii) в качестве начального отрезка локализации точки y_i^{k+1} можно брать $[0, z_i^k]$. Из (4.4) тогда также следует (4.9), где x^* – решение задачи (1.2). Таким образом, в теореме 3 дано обоснование сходимости и для вариантов метода Гаусса–Зейделя с приближенными вычислениями.

6. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ТИПА РАСЩЕПЛЕНИЯ

Основываясь на полученных результатах построим метод решения задачи вида (1.2) при более общих предположениях, а именно: рассмотрим задачу поиска точки $z^* \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$z^* \geq 0; \quad \exists g^* \in G(z^*), \quad \exists h^* \in H(z^*) : g^* + h^* \geq 0, \quad \langle z^*, g^* + h^* \rangle = 0, \quad (6.1)$$

где многозначное отображение $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям (A1), а многозначное отображение $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям.

Предположение A2. Отображение $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ является верхним антитонным K -отображением на \mathbb{R}_+^n .

Таким образом, от отображения H не требуется квазидиагональности. В то же время если $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ – некоторое верхнее внедиагонально антитонное (не обязательно квазидиагональное) K -отображение и существует однозначное непрерывное ВДА-отображение $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое является мажорантой для S , т.е. $S - T$ – верхнее антитонное, то задача дополнителности с основным отображением S эквивалентна задаче (6.1), где $H = S - T$, $G = T$, причем условия A1 и A2 выполняются.

Таким образом, условия A1 и A2 позволяют намного расширить область применения задачи (6.1) по сравнению с задачей (1.2) в условиях A1. Для решения задачи (6.1) предлагается использовать следующий двухуровневый алгоритм типа расщепления.

Алгоритм 4

Дана точка

$$\tilde{x} \in Q = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \exists g \in G(x), \exists h \in H(x), g + h \geq 0\}, \quad (6.2)$$

выберем последовательность чисел $\{\delta_l\} \searrow 0$, положим $u^0 = v^0 = \tilde{x}$, выберем $h^0 \in H(v^0)$ так, чтобы $g^0 + h^0 \geq 0$ для некоторого $g^0 \in G(v^0)$.

На l -й большой итерации, $l = 0, 1, \dots$, имеем точку $u^l \geq 0$, элемент $h^l \in H(v^l)$ и точку

$$v^l \in Q_l = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \exists g \in G(x), g + h^l \geq 0\},$$

при этом $v^l \leq u^l$. Начиная с точки v^l , применяем один из алгоритмов 1–3 для решения задачи

$$z^l \geq 0; \quad \exists \tilde{g}^l \in G(z^l) : \tilde{g}^l + h^l \geq 0, \quad \langle z^l, \tilde{g}^l + h^l \rangle = 0, \quad (6.3)$$

а именно: строим последовательности $\{x^k\}$ и $\{y^k\}$, пока не выполняются условия

$$\begin{aligned} x_i^k &\geq -\delta_l; \quad \exists \tilde{g}^l \in G(x^k) : \tilde{g}_i^l + h_i^l \geq -\delta_l, \\ |x_i^k (\tilde{g}_i^l + h_i^l)| &\leq \delta_l \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.4)$$

после чего полагаем $u^{l+1} = x^k$, $v^{l+1} = y^k$ и переходим к $(l+1)$ -й большой итерации.

Отметим, что близкий алгоритм для решения задачи дополнителности с однозначными отображениями G и H был предложен в [14, теорема 5.3], однако там в качестве новой итерационной точки берется минимальный элемент допустимого множества вспомогательной задачи (6.3), что значительно усложняет его реализацию. В алгоритме 4 указан способ построения полностью численно реализуемой схемы метода как в однозначном, так и в многозначном случае.

Лемма 4. Предположим, что множество Q из (6.2) непусто, тогда алгоритм 4 корректен. В нем выполняются соотношения

$$0 \leq v^{l+1} \leq u^{l+1} \leq v^l \leq \tilde{x} \quad \text{для } l = 0, 1, \dots \quad (6.5)$$

Доказательство. Отметим, что, согласно леммам 1–3, последовательности $\{x^k\}$ и $\{y^k\}$ на каждой l -й большой итерации удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq y^{k+1} \leq x^{k+1} \leq x^k;$$

кроме того, $y^k \in Q_l$ для $k = 0, 1, \dots$. Поэтому, в силу теорем 1–3, если множество Q_l в (6.2) непусто, то через конечное число итераций любого из алгоритмов 1–3 для задачи (6.3) будут найдены точки x^k и y^k такие, что x^k удовлетворяет условиям (6.4), а $y^k \in Q_l$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} u_i^{l+1} &\geq -\delta_l; \quad \exists g^{l+1} \in G(u^{l+1}) : g_i^{l+1} + h_i^l \geq -\delta_l, \\ |u_i^{l+1}(g_i^{l+1} + h_i^l)| &\leq \delta_l; \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{6.6}$$

и

$$0 \leq v^{l+1} \leq u^{l+1} \leq v^l; \tag{6.7}$$

более того, существует элемент $g_{(v)}^{l+1} \in G(v^{l+1})$ такой, что $g_{(v)}^{l+1} + h^l \geq 0$ и $v^{l+1} \geq 0$.

Очевидно, что при $l = 0$ множество Q_0 непусто. Если предположить, что непусты множества Q_0, \dots, Q_l , то на l -й итерации находим требуемые элементы u^{l+1} , v^{l+1} и $g_{(v)}^{l+1}$. Далее, учитывая верхнюю антитонность H , из $v^{l+1} \leq v^l$ получаем, что найдется элемент $h_{(v)}^{l+1} \in H(v^{l+1})$ такой, что $h_{(v)}^{l+1} \geq h^l$, но тогда

$$g_{(v)}^{l+1} + h_{(v)}^{l+1} \geq g_{(v)}^{l+1} + h^l \geq 0$$

и можно положить $h^{l+1} = h_{(v)}^{l+1}$; тогда множество Q_{l+1} будет также непустым. Поэтому первое утверждение леммы 4 справедливо. Второе утверждение следует из (6.7).

Теперь обоснуем сходимость алгоритма 4.

Теорема 4. *Предположим, что множество Q из (6.2) непусто, тогда для алгоритма 4 выполняются следующие свойства:*

а) каждая большая итерация конечна по числу итераций одного из алгоритмов 1–3, применяемого для поиска точек u^{l+1} и v^{l+1} ;

б) $\lim_{l \rightarrow \infty} u^l = \lim_{l \rightarrow \infty} v^l = z^*$, где z^* – решение задачи (6.1).

Доказательство. Утверждение а) доказано в лемме 4. Далее из (6.5) следует, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} u^l = \lim_{l \rightarrow \infty} v^l = z^*,$$

где z^* – некоторая точка из \mathbb{R}^n . Переходя теперь к пределу в (6.6) при $l \rightarrow \infty$ и беря подпоследовательность, если необходимо, получаем, что выполняются условия (6.1), поэтому z^* – решение задачи (6.1). Таким образом, утверждение б) также справедливо.

В алгоритме 4 можно также использовать приближенные версии алгоритмов 1 и 3, тогда следует использовать точку z^k вместо y^k и все утверждения леммы 4 и теоремы 4 останутся справедливыми.

7. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Приведем результаты численных расчетов на тестовых примерах с целью проверки эффективности критерия относительной точности линейного поиска в алгоритмах Якоби и Гаусса–Зейделя, т.е. модификации М2. Как отмечалось в разд. 4 и 5, эта модификация с неточным линейным поиском полностью укладывается в схему алгоритмов 1 и 3. В качестве альтернативы для сравнения были выбраны алгоритмы без релаксации, но с высокой абсолютной точностью выполнения линейного поиска.

Все расчеты проводились на компьютере с процессором Pentium M, частота 1.73 ГГц, использовалась двойная точность вещественных переменных.

Таблица 1

n	Итерации, G	Алгоритм Якоби		Алгоритм Гаусса–Зейделя	
		(абс. точн.)	(относ. точн.)	(абс. точн.)	(относ. точн.)
50	ит	53	54	28	29
	%	100%	77%	53%	39%
	%			100%	73%
100	ит	101	103	53	56
	%	100%	71%	52.5%	36%
	%			100%	68.6%

Таблица 2

n	Итерации, G	Алгоритм Якоби		Алгоритм Гаусса–Зейделя	
		(абс. точн.)	(относ. точн.)	(абс. точн.)	(относ. точн.)
100	ит	21	22	12	13
	%	100%	72%	57%	40%
	%			100%	70%

Для решения использовались задачи дополненности (1.2) с основным отображением следующего вида:

$$G(x) = Ax - b + \Phi(x) + \Psi(x), \quad (7.1)$$

где A – квадратная матрица порядка n с неположительными внедиагональными элементами, Φ и Ψ – нелинейные диагональные отображения, а именно:

$$\Phi(x) = \bigotimes_{i=1}^n \Phi_i(x_i), \quad \Phi_i(x_i) = \max\{x_i^2 - 1/\sin(i), 0\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\Psi(x) = \bigotimes_{i=1}^n \Psi_i(x_i), \quad \Psi_i(x_i) = \partial\psi_i(x_i),$$

$$\psi_i(x_i) = \alpha_i |x_i - \beta_i|, \quad \alpha_i = (1+i)/i, \quad \beta_i = 1/\cos(i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, отображение Φ является непрерывным и однозначным, но негладким, а отображение Ψ – многозначным К-отображением. Для оценки точности приближения к решению использовались значения вспомогательной функции

$$\varphi(x) = \min_{g \in G(x)} \left(\sum_{i=1}^n \min\{x_i, g_i\}^2 \right)^{1/2},$$

очевидно, что $\varphi(x) \geq 0$ на \mathbb{R}^n , причем равенство $\varphi(x^*) = 0$ эквивалентно тому, что точка x^* есть решение задачи (1.2). Для всех алгоритмов использовалась модификация М1. В алгоритмах с абсолютной точностью линейного поиска в качестве меры погрешности использовалась длина отрезка $[x_i', x_i'']$, т.е. проверялось неравенство $x_i'' - x_i' \leq \theta$, в алгоритмах с относительной точностью (модификация М2) использовался критерий

$$\frac{(y_i^k - x_i')}{(x'' - x_i')} \geq \varepsilon.$$

Для всех расчетов был выбран критерий останковки $\varphi(x) \leq 10^{-2}$. Были проведены расчеты на двух-тестовых примерах. В первой серии элементы матрицы A в (7.1) определялись по формулам

$$a_{ij} = \begin{cases} -|\sin(i)\cos(j)|, & i \neq j, \\ 1 + \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, & i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

а также

$$b_i = \sin(i)/i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Начальная точка $\tilde{x} = (9, \dots, 9)^T$. Расчеты проводились для размерности $n = 50$ и $n = 100$. При $n = 50$ полагалось $\theta = 10^{-4}$, при $n = 100$ брали $\theta = 10^{-5}$, параметр $\varepsilon = 0.9$. В табл. 1 указано число итераций (ит) соответствующих вариантов алгоритмов Якоби и Гаусса–Зейделя, а также объем вычислений компонент отображения G (в процентном отношении к наибольшему).

Во второй серии расчетов элементы матрицы A в (7.1) определялись по формулам

$$a_{ij} = \begin{cases} -|\sin(i)\cos(j)|, & i \neq j, \\ \sin(i)\cos(i), & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

а также

$$b_i = \sin(i)/i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В этом случае матрица A не имела ни положительной диагонали, ни диагонального преобладания. Начальная точка $\tilde{x} = (100, \dots, 100)^T$. Расчеты проводились для размерности $n = 100$, полагалось $\theta = 10^{-5}$, $\varepsilon = 0.9$. Результаты (число итераций и объем вычислений в процентном отношении) даны в табл. 2.

При всех расчетах время работы алгоритмов не превышало 1 с. Число итераций также оказалось везде небольшим, тем не менее алгоритмы с относительной точностью давали экономию объема вычислений $\sim 30\%$ при незначительном увеличении числа итераций, причем с ростом размерности экономия увеличивалась (при той же точности решения). Кроме того, подтвердилось преимущество метода Гаусса–Зейделя по отношению к методу Якоби примерно в два раза и по количеству итераций, и по объему вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берцанский Я.М., Мееров М.В. Теория и методы решения задач дополнителности // Автоматика и телемехан. 1983. № 6. С. 5–31.
2. Cottle R.W., Pang J.S., Stone R.E. The linear complementarity problem. Boston: Acad. Press, 1992.
3. Isac G. Complementarity problems. Berlin: Springer, 1992.
4. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. Berlin: Springer, 2003 (two volumes).
5. Konnov I.V. Equilibrium models and variational inequalities. Amsterdam: Elsevier, 2007.
6. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
7. Полтерович В.М., Спивак В.А. Отображения с валовой заменимостью в теории экономического равновесия // Итоги науки и техн. Современные пробл. матем. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 19. С. 111–154.
8. Lapin A.V. Domain decomposition and parallel solution of free boundary problems // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во “ДАС”, 2001. Т. 13. С. 90–126.
9. Konnov I.V. An extension of the Jacobi algorithm for multi-valued mixed complementarity problems // Optimization. 2007. V. 56. № 3. P. 399–416.
10. Коннов И.В., Костенко Т.А. Многочная смешанная задача дополнителности // Изв. вузов. Математика. 2004. № 12. С. 28–36.

11. *Коннов И.В.* Обобщение алгоритма Якоби для задачи дополнителъности в условиях многозначности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 7. С. 1167–1173.
12. *Konnov I.V.* Iterative algorithms for multivalued inclusions with Z mappings // J. Comput. and Appl. Math. 2007. V. 206. № 1. P. 358–365.
13. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
14. *Pang J.-S., Chan D.* Iterative methods for variational and complementarity problems // Math. Program. 1982. V. 24. № 3. P. 284–313.
15. *More J.J.* Classes of functions and feasibility conditions in nonlinear complementarity problems // Math. Program. 1974. V. 6. № 3. P. 327–338.
16. *Tamir A.* Minimality and complementarity problems associated with Z-functions and M-functions // Math. Program. 1974. V. 7. № 1. P. 17–31.