



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

K. M. D'yakonov, Kernels of Toeplitz operators,
smooth functions, and Bernstein type inequalities,
Zap. Nauchn. Sem. POMI, 1992, Volume 201, 5–21

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

January 16, 2025, 08:56:13



ЯДРА ОПЕРАТОРОВ ТЭЙЛИЦА, ГЛАДКИЕ ФУНКЦИИ
И НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА

Введение

В этой статье изучается связь между гладкостью символа тейлцева оператора и гладкостью элементов его ядра.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. $\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; $\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathbb{D}$; m - нормированная мера Лебега на \mathbb{T} ; $L^p \stackrel{\text{def}}{=} L^p(\mathbb{T}, m)$, $0 < p < \infty$; H^p - класс Харди [4, 5, 9] голоморфных функций в \mathbb{D} , воспринимаемый также как подпространство в L^p ; $H_0^p \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in H^p : f(0) = 0\}$; $P_+(P_-)$ - ортогональный проектор в L^2 на $H^2(\overline{H}_0^2)$, продолженный естественным образом на L^1 .

Пусть $\varphi \in L^\infty$ и T_φ - оператор Тейлица с символом φ : $T_\varphi f \stackrel{\text{def}}{=} P_+(\varphi f)$, $f \in H^1$. Через $K_p(\varphi)$, $1 \leq p \leq +\infty$, обозначим ядро оператора T_φ в пространстве H^p :

$$K_p(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in H^p : T_\varphi f = 0\}.$$

Предположим теперь, что функция φ унимодулярна ($|\varphi| = 1$ п.в. на \mathbb{T}) и обладает некоторой гладкостью (скажем, лежит в классе Соболева W_τ^s или Бесова B_τ^s при каких-нибудь τ , $s > 0$), причем $K_p(\varphi) \neq \{0\}$. Что можно сказать о дифференциальных свойствах функций из $K_p(\varphi)$? В разных ситуациях ниже будет получен ответ (как правило, в каком-то смысле наилучший) на этот вопрос.

Заметим пока, что рассмотрение унимодулярных символов φ фактически не уменьшает общности. См., например, работы [17, 18], где показано, что если $\varphi \in L^\infty$ и $K_2(\varphi) \neq \{0\}$, то найдется функция h , $h \in H^2$, для которой $K_2(\varphi) = K_2(\overline{z}h/h)$. Отметим ещё, что если θ - внутренняя функция (т.е. унимодулярная функция класса H^∞), то подпространство $K_p(\theta)$ инвариантно относительно оператора обратного сдвига S^* и совпадает с множеством $K_\theta^p \stackrel{\text{def}}{=} H^p \cap \theta H_0^p$. Если вдобавок $\theta \in W_\tau^s$ или $\theta \in B_\tau^s$ при $s\tau > 1$, то θ - конечное произведение Бляшке, а функции класса K_θ^p рациональны.

Настоящая статья содержит ряд утверждений следующего типа:

$$|\varphi| = 1, \quad \varphi \in X \Rightarrow K_p(\varphi) \subset Y,$$

где X и Y - некоторые пространства гладких функций на окружности T . Полученные результаты можно сформулировать и в виде "неравенств типа Бернштейна"

$$\|f\|_Y \leq \text{const} \|\varphi\|_X^\alpha \|f\|_p, \quad f \in K_p(\varphi), \quad (I)$$

где $\alpha > 0$, $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$ - нормы (квазинормы) пространств X и Y , а $\|\cdot\|_p$ - норма в L^p . Частными случаями доказываемых (и приводимых без доказательства в § 4) неравенств являются - с одной стороны - оценка

$$\|f^{(n)}\|_p \leq \text{const} \|\theta'\|_\infty^n \|f\|_p, \quad f \in K_\theta^p,$$

принадлежащая автору [7, § 4] и обобщающая неравенство С.Н.Бернштейна для полиномов (или целых функций), и - с другой стороны - оценки А.А.Пекарского [II, § 2] для производных рациональных дробей.

Напомним, что классическое неравенство С.Н.Бернштейна

$$\|Q'\|_p \leq n \|Q\|_p,$$

(где Q - полином степени $\leq n$, т.е. $Q \in K_{2n+1}^p$) возникает при доказательстве обратных теорем полиномиальной аппроксимации [2, 10], а упомянутые выше неравенства А.А.Пекарского служат инструментом для получения аналогичных теорем в теории рациональной аппроксимации [II]. Из неравенств типа (I), доказанных ниже, также можно извлечь различные аппроксимационные теоремы, следствиями которых являются как классические (полиномиальные) обратные теоремы типа Бернштейна, так и обратные теоремы рациональной аппроксимации [II].

Еще одно применение неравенства типа (I) находят при изучении взаимосвязи между граничной гладкостью аргумента $a \cap \varphi$ аналитической функции f и её собственной гладкостью (см. § 3 ниже).

В настоящей статье содержатся также результаты эпизодического характера, относящиеся к сходимости ряда Фурье внутренней функции θ (и рядов Фурье функций класса K_θ^p) в фиксированной точке окружности.

§ I. Дифференциальные неравенства
и коммутаторы Кальдерона

Пусть $W_{\nu}^1 = W_{\nu}^1(T)$, $\nu > 1$ - пространство Соболева, т.е. множество тех абсолютно непрерывных функций g на окружности T для которых $g' \in L^{\nu}$. (Здесь $g'(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} dg/d\xi = -ie^{-it} dg/dt$, $\xi = e^{it} \in T$)

ТЕОРЕМА I. Пусть $1 < p, q < +\infty$, $1 < \nu < +\infty$, $q^{-1} = p^{-1} + \nu^{-1}$. Если $\psi \in W_{\nu}^1$, $|\psi| = 1$, то $K_p(\psi) \subset W_q^1$, причем для $f \in K_p(\psi)$ имеем

$$\|f'\|_q \leq c(p, \nu) \|\psi'\|_{\nu} \|f\|_p,$$

где $c(p, \nu)$ - положительная постоянная, зависящая только от p и ν .

В основе доказательства лежит

ТЕОРЕМА А. (Кальдерон [14]). Пусть показатели p, q, ν - такие же, как в теореме I, и b - абсолютно непрерывная функция на прямой \mathbb{R} , для которой $b' \in L^{\nu}(\mathbb{R})$. Тогда сингулярный интегральный оператор C_b ("коммутатор Кальдерона"), определённый формулой

$$(C_b g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(x) - b(y)}{(x-y)^2} g(y) dy,$$

ограниченно действует из $L^p(\mathbb{R})$ в $L^q(\mathbb{R})$. При этом

$$\|C_b\|_{L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})} \leq c(p, \nu) \|b'\|_{\nu}. \quad (2)$$

Нам понадобится слегка видоизменённый вариант теоремы А. Из доказательства Кальдерона видно, что оценка (2) сохранится, если заменить C_b оператором $C_b^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$, где

$$(C_b^{(\varepsilon)} g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(x) - b(y)}{(x-y+i\varepsilon)^2} g(y) dy.$$

(Константа в правой части (2) не зависит от ε). Аналогичный результат для окружности принимает следующий вид.

ТЕОРЕМА Б. При прежних ограничениях на p, q, ν и при $b \in W_{\nu}^1$ оператор $C_{b,p}$ ($0 < p < 1$), определённый равенством

$$(C_{b,p}f)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}} \frac{b(\xi) - b(\zeta)}{(\xi - p\zeta)^2} f(\zeta) d\zeta \quad (\xi \in \mathbb{T}), \quad (3)$$

ограниченно действует из $L^p = L^p(\mathbb{T}, m)$ в $L^q = L^q(\mathbb{T}, m)$, причем

$$\sup_{0 < p < 1} \|C_{b,p}\|_{L^p \rightarrow L^q} < c(p, \nu) \|b'\|_{\nu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Поскольку $f \in K_p(\psi)$, то $f\psi \in H_0^p$, так что $\int f(\xi)\psi(\xi)(\xi - z)^{-1} d\xi = 0$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Поэтому при $p \in (0, 1)$, $\xi \in \mathbb{T}$ имеем:

$$\begin{aligned} f'(p\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - p\xi)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int f(\zeta)\psi(\zeta) \frac{\bar{\psi}(\zeta) - \bar{\psi}(\xi)}{(\zeta - p\xi)^2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} (C_{\bar{\psi}, p}(f\psi))(\xi) \end{aligned}$$

(по поводу последнего обозначения см. формулу (3)). Применяя теорему Б, получаем

$$\begin{aligned} \sup_{0 < p < 1} \left(\int |f'(p\xi)|^q dm(\xi) \right)^{1/q} &\leq c(p, \nu) \|\psi'\|_{\nu} \|f\psi\|_p = \\ &= c(p, \nu) \|\psi'\|_{\nu} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Таким образом, $f' \in H^q$, и выполняется нужное неравенство. ●

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $1 < p < +\infty$. Если $\psi \in \text{Lip } 1$ ($\stackrel{\text{def}}{=} W_\infty^1$) и $|\psi| \equiv 1$, то $K_p(\psi) \subset W_p^1$, причем для $f \in K_p(\psi)$ имеет место неравенство

$$\|f'\|_p \leq c_p \|\psi'\|_\infty \|f\|_p. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $1 < p < +\infty$ достаточно применить теорему I, положив $\nu = +\infty$. Для $p=1$ неравенство (4) (а значит, и включение $K_1(\psi) \subset W_1^1$) вытекает из доказательства теоремы I. Действительно, оператор $C_{\bar{\psi}, p}$ является оператором Кальдерона-Зигмунда; поэтому ([6], с. 272), непрерывно действуя из L^2 в L^2 , он также действует из $H_{\mathbb{R}}^1 \stackrel{\text{def}}{=} H^1 + H_0^1$ в L^1 , причем

$$\sup_{0 < \rho < 1} \|C_{\bar{\psi}, \rho}\|_{H_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow L^1} \leq \text{const} \cdot \sup_{0 < \rho < 1} \|C_{\bar{\psi}, \rho}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \text{const} \|\psi'\|_{\infty}.$$

Поскольку $f \in K_1(\psi)$, то $f\psi \in \overline{H}_0^1$, и

$$\|f'\|_1 = \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \rho < 1} \|C_{\bar{\psi}, \rho}(f\psi)\|_1 \leq \text{const} \|\psi'\|_{\infty} \|f\|_1. \bullet$$

Пусть теперь Λ^{α} , $0 < \alpha < +\infty$, обозначает класс Гельдера (Зигмунда при $\alpha \in \mathbb{N}$) на окружности:

$$\Lambda^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ g \in C(\mathbb{T}) : \sup_{h > 0} h^{-\alpha} \|\Delta_h^m g\|_{\infty} < +\infty \right\},$$

где m - произвольное натуральное число, для которого $m > \alpha$, а Δ_h^m - разность порядка m с шагом h . (Напомним, что операторы Δ_h^k определяются по индукции: $(\Delta_h^k g)(z) = (\Delta_h g)(z) \stackrel{\text{def}}{=} g(e^{ih}z) - g(z)$, $\Delta_h^k g \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_h \Delta_h^{k-1} g$). Положим ещё $\Lambda^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} L^{\infty}$.

Известная теорема Дьёрена-Ромберга-Шилдса [16] утверждает, что пространство $\Lambda_A^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} P_+ \Lambda^{\alpha}$ сопряжено с $H^1/(1+\alpha)$ относительно стандартной антилинейной двойственности. Отсюда нетрудно вывести следующее (также известное) утверждение.

ЛЕММА. Пусть $s > 0$, $\max(1, s) < \rho < +\infty$, $\alpha = s^{-1} - \rho^{-1}$. Если $\psi \in \Lambda^{\alpha}$, то оператор Ганкеля H_{ψ} , определенный формулой

$$H_{\psi} f = P_-(\psi f), \quad f \in H^2,$$

ограниченно действует (может быть продолжен до оператора, ограниченно действующего) из H^s в H_0^{ρ} , причем

$$\|H_{\psi}\|_{H^s \rightarrow H_0^{\rho}} \leq \text{const} \|\psi\|_{\Lambda^{\alpha}},$$

где $\|\cdot\|_{\Lambda^{\alpha}}$ - естественная норма в пространстве Λ^{α} , а const - постоянная, зависящая только от α .

Установим ещё одно следствие теоремы I.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть ψ - абсолютно непрерывная функция на \mathbb{T} , $|\psi| = 1$, $f \in K_1(\psi)$.

а) Если $1 < \rho < r \leq +\infty$, $\alpha > 0$, $s > 0$, причем $\rho^{-1} = s^{-1} + r^{-1} - \alpha$,

то

$$\|f'\|_q \leq C(s, \nu, \alpha) \|\psi'\|_\nu \|\psi\|_{\Lambda^\alpha} \|f\|_s. \quad (5)$$

б) Если $1 < q < \nu \leq +\infty$, то

$$\|f'\|_q \leq C(q, \nu) \|\psi'\|_\nu \|\psi\|_{\Lambda^{1/\nu}} \|f\|_q. \quad (6)$$

в) Если $1 < q < 2$, то

$$\|f'\|_q \leq C_q \|\psi'\|_2^2 \|f\|_q. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Определим показатель ρ равенством $\rho^{-1} = q^{-1} - \nu^{-1}$. Тогда $\alpha = s^{-1} - \rho^{-1}$, и в силу теоремы I имеем $\|f'\|_q \leq \text{const} \|\psi'\|_\nu \|f\|_\rho$, а в силу приведенной выше леммы

$$\|f\|_\rho = \|\psi f\|_\rho = \|H_\psi f\|_\rho \leq \text{const} \|\psi\|_{\Lambda^\alpha} \|f\|_s.$$

Комбинируя эти неравенства, получаем (5).

б) Полагаем в (5) $\alpha = 1/\nu$, $s = q$.

в) Полагаем в (6) $\nu = 2$ и замечаем, что $W_2^1 \subset \Lambda^{1/2}$. ●

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Все доказанные неравенства в определенном смысле точны. Поясним это применительно к наиболее общему неравенству (5). (Теорема I получается из него при $\alpha = 0$). Положим $f_a(\xi) = (1 - \bar{a}\xi)^{-n}$, $\psi_a(\xi) = (\bar{\xi} - \bar{a})^n (1 - a\bar{\xi})^{-n}$, где $a \in \mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}$, и $s > 1$. Тогда $f_a \in K_1(\psi_a)$, и прямое вычисление показывает, что при $|a| \rightarrow 1-0$

$$\|f'_a\|_q \asymp \|\psi'_a\|_\nu \|\psi_a\|_{\Lambda^\alpha} \|f_a\|_s \asymp (1 - |a|)^{1/q - n - 1}.$$

(Знак \asymp означает, что отношение величин, расположенных справа и слева от него, заключено между двумя положительными постоянными, не зависящими от a).

2. Любопытно сравнить неравенства (4) и (7).

3. В [7] автором был доказан аналог неравенства (4) (в том числе и при $\rho = +\infty$) для случая, когда $\psi = \bar{\theta}$, θ - внутренняя функция в верхней полуплоскости \mathbb{C}_+ , $f \in K_\theta^P \stackrel{\text{def}}{=} H^P \cap \bar{\theta} H^P$,

$H^P = H^P(\mathbb{C}_+)$. Классическое неравенство Бернштейна для целых функций (правда, с несколько завышенной константой) получается отсюда при $\theta(z) = \exp(i\sigma z)$, $\sigma > 0$. Кроме того, в [7] показано, что при условии $\theta' \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ имеет место оценка для высших производных

$$\|f^{(n)}\|_p \leq \text{const} \|f\|_p, \quad f \in K_\theta^P \quad (8)$$

(и тогда можно положить $\text{const} = c(n, p) \|\theta'\|_\infty^n$), и что справедливо обратное утверждение: неравенство (8) с константой, не зависящей от f , влечет условие $\theta' \in H^\infty(C_+)$.

§ 2. Коэффициенты Фурье и наилучшие приближения

Для функции f , $f \in L^1$, положим $\hat{f}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{T}} f \bar{z}^k dm$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Через \mathcal{P}_n обозначим множество тригонометрических полиномов степени $\leq n$: $\mathcal{P}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{Q \in L^1: \hat{Q}(k) = 0 \text{ при } |k| > n\}$. Пусть, наконец,

$E_p(f, n) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \|f - Q\|_p : Q \in \mathcal{P}_n \}$ — наилучшее приближение функции f , $f \in L^p$, полиномами степени $\leq n$. Следующая, совсем простая, теорема позволяет оценивать коэффициенты Фурье (Тейлора) функции f , $f \in K_p(\psi)$, через наилучшие приближения

$$E_{p'}(\psi, n), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть ψ — унимодулярная функция на окружности \mathbb{T} , $f \in K_p(\psi)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Тогда

$$|\hat{f}(n)| < \|f\|_p E_{p'}(\psi, n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \in \mathcal{P}_n$. Поскольку $f\psi \in \overline{H}_0^p$, $\bar{z}^n \bar{Q} \in \overline{H}^\infty$, то $\int f \bar{z}^n \bar{Q} dm = 0$, и мы имеем:

$$\hat{f}(n) = \int f \bar{z}^n dm = \int f \psi \bar{z}^n (\bar{\psi} - \bar{Q}) dm,$$

откуда

$$|\hat{f}(n)| < \|f\|_p \|\psi - Q\|_{p'}.$$

Взяв инфимум по $Q \in \mathcal{P}_n$, получаем (9). ●

Напомним теперь определение пространств Бесова B_{pq}^s ($1 \leq p, q \leq +\infty; s > 0$): если $f \in L^p$, то

$$f \in B_{pq}^s \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\|\Delta_t^m f\|_p^q}{|t|^{1+sq}} dt < +\infty, & q < +\infty, \\ \|\Delta_t^m f\|_p = O(|t|^s), & q = +\infty, \end{cases}$$

где m — какое-нибудь целое число, такое что $m > s$. Нам понадобится также конструктивная характеристика классов Бесова (см.,

например, [10]): если $f \in L^p$, то

$$f \in B_{pq}^s \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n^{sq-1} E_p(f, n)^q < +\infty, \quad q < +\infty, \\ E_p(f, n) = O\left(\frac{1}{n^s}\right), \quad q = +\infty. \end{cases}$$

При этом нормы в пространстве B_{pq}^s , отвечающие естественным образом каждой из приведённых характеристик, эквивалентны.

Как всегда, полагаем $B_p^s \stackrel{\text{def}}{=} B_{pp}^s$. Отметим, что пространства Λ^α , введенные в предыдущем параграфе, совпадают с B_∞^α .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p$, $q \leq +\infty$, $s > 0$, и пусть ψ - унимодулярная функция класса B_{pq}^s , $f \in K_{p'}(\psi)$. Тогда

а) при $q < +\infty$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{sq-1} |\hat{f}(n)|^q \right)^{1/q} \leq \text{const} \|\psi\|_{B_{pq}^s} \|f\|_{p'}, \quad (10)$$

где const зависит только от p, q, s ;

б) при $q = +\infty$: $|\hat{f}(n)| \leq \text{const} \|\psi\|_{B_{p\infty}^s} \|f\|_{p'} n^{-s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) В силу (9)

$$|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_{p'} E_p(\psi, n).$$

Возводя это неравенство в степень q , умножая затем обе его части на n^{sq-1} и суммируя по n , получаем (10). (При этом используется конструктивное описание класса B_{pq}^s , см. выше).

Доказательство пункта б) аналогично (и ещё проще). ●

СЛЕДСТВИЕ 3. Если ψ -унимодулярная функция на \mathbb{T} , $f \in K_1(\psi)$, то при $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq q < +\infty$ имеем

$$\|f\|_{\ell_A^q} \leq \text{const} \|\psi\|_{B_{pq}^{1/q}} \|f\|_{\ell_A^p},$$

где $\|f\|_{\ell_A^p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n>0} |\hat{f}(n)|^p \right)^{1/p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (10) $s = q^{-1}$ и воспользуемся неравенством Хаусдорфа-Литла $\|f\|_{p'} \leq \|f\|_{\ell_A^p}$. ●

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть φ и f имеют прежний смысл, и пусть $1 \leq p \leq +\infty$, $2 \leq q \leq +\infty$, $l > 0$. Тогда

$$\|f^{(l)}\|_q \leq \text{const} \|\varphi\|_{B_{p'/q'}^{l+1/q'}} \|f\|_p,$$

где $f^{(l)}$ - дробная производная порядка l : $f^{(l)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^l \hat{f}(n) x^n$,
 $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем неравенство (10), заменив в нём p на p' , q на q' :

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{sq'-1} |\hat{f}(n)|^{q'} \right)^{1/q'} \leq \text{const} \|\varphi\|_{B_{p'/q'}^s} \|f\|_p.$$

Положим $s = l + 1/q'$. Левая часть последнего неравенства принимает теперь вид $\|f^{(l)}\|_{eq'_A} \|f^{(l)}\|_q$ и по теореме Хаусдорфа-Юнга она мажорирует величину $\|f^{(l)}\|_q$. ●

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Любопытно сравнить следствие 3 (оно содержательно при $1 \leq q < p \leq 2$) с неравенством

$$\|f\|_p \leq \text{const} \|\varphi\|_{\Lambda^{1/q-1/p}} \|f\|_q,$$

справедливым для $f \in K_1(\varphi)$ при $q > 0$, $\max(1, q) < p < +\infty$ (см. доказательство следствия 2 в § I).

2. Следствие 4 при $l=1$, $2 \leq q \leq p \leq +\infty$, даёт результат, близкий к теореме I (однако, не сводящийся к ней).

Пусть теперь $\varphi = \bar{\theta}$, где θ - внутренняя функция в \mathbb{D} . Напомним обозначение $K_p^{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} H^p \cap \theta H_0^p$, $1 \leq p \leq +\infty$, и положим

$K_{*,\theta} \stackrel{\text{def}}{=} K_{\theta}^2 \cap BMOA$. (По поводу пространства $BMOA$ и его свойств см. [4], глава VI). В пространстве $BMOA$ будем рассматривать норму $\|\cdot\|_*$,

$$\|f\|_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \left| \int f \bar{g} dm \right| : g \in H^2, \|g\|_1 \leq 1 \right\},$$

эквивалентную стандартной BMO -норме, определяемой в терминах средних осцилляций.

Следующая теорема представляет собой несколько улучшенный вариант теоремы 2 для случая $\varphi = \bar{\theta}$, $p = +\infty$.

ТЕОРЕМА 4. Для $f \in K_{*,\theta}$ и для $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место неравенство

$$|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_* E_1(\theta, n). \quad (II)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы 2, при любом $Q \in \mathcal{P}_n$ имеем:

$$\hat{f}(n) = \int f \bar{\theta} \bar{z}^n (\theta - Q) dm.$$

Поскольку $\bar{\theta} \bar{z}^n (\theta - Q) \in \overline{H}^\infty$, то $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_* \|\theta - Q\|_1$.
Взяв *infimum* по $Q \in \mathcal{P}_n$, получаем (II). ●

Аналогичное улучшение допускает теорема 3: при $p=1$, $f \in K_{*,\theta}$ неравенство (IO) можно заменить следующим

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{sq-1} |\hat{f}(n)|^q \right)^{1/q} \leq \text{const} \|\theta\|_{B_{1q}^s} \|f\|_*,$$

с очевидной модификацией при $q = +\infty$:

$$|\hat{f}(n)| \leq \text{const} \|\theta\|_{B_{1\infty}^s} \|f\|_* n^{-s}. \quad (I2)$$

Отметим, что эффективные критерии принадлежности внутренней функции классу B_p^s , $sp < 1$, содержатся в [12]; по поводу произведений Бляшке класса $B_{p\infty}^s$ см. также [3].

ТЕОРЕМА 5. Пусть B - произведение Бляшке в \mathbb{D} с нулями $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющими слабому условию Ньмана

$$\sup_j (1 - |a_j|)^{-1} \sum_{k>j} (1 - |a_k|) < +\infty. \quad (wN)$$

Тогда

- а) для любой f , $f \in K_{*,B}$, имеем $\hat{f}(n) = O(1/n)$;
б) если к тому же в некоторой точке ζ , $\zeta \in \mathbb{T}$, выполнено условие Фростмана

$$A(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |a_k|}{|\zeta - a_k|} < +\infty, \quad (F_\zeta)$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \zeta^n$ сходится для любой функции $f \in K_{*,B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [3], что при условии (wN) $B \in B_{1\infty}^1$. Полагая в (I2) $\theta = B$, $s=1$, приходим к утверждению а).

Чтобы доказать б), воспользуемся результатом работы [15], согласно которому условие (F_ζ) равносильно существованию радиальных пределов $\lim_{z \rightarrow 1-0} f(z\zeta)$ для всех $f \in K_{*,B}$. Сходимость ряда Фурье каждой такой функции f в точке ζ следует из последнего факта, пункта а) и тауберовой теоремы Литтлвуда. ●

ЗАМЕЧАНИЕ I. Аналогичный метод применялся в [19] для конструкции произведения Бляшке B , такого что $\text{clos } B^{-1}(0) \supset T$, но ряд Фурье $\sum_{n \geq 0} \hat{B}(n) z^n$ сходится в каждой точке $\zeta \in T$.

2. Несколько более слабый вариант теоремы 5 доказан в [1]: вместо (WN) там фигурирует сильное условие Ньмана $\sup_k (1 - |a_{k+1}|) / (1 - |a_k|) < 1$, а вместо пространства $K_{*,B}$ его подмножество K_B^∞ . (Если последовательность $\{a_k\}$ не удовлетворяет равномерному условию Фростмана $\sup \{A(\zeta) : \zeta \in T\} < +\infty$, то включение $K_B^\infty \subset K_{*,B}$ строгое; см. [15], где этот факт выводится из результатов статьи [19]).

Пусть теперь $\theta = BS_\mu$ - каноническая факторизация внутренней функции θ : B - произведение Бляшке с нулями $\{a_k\}$, а S_μ - сингулярная внутренняя функция, порожденная мерой μ .

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\zeta \in T$, $\theta = BS_\mu$ - внутренняя функция. Если

$$\sum_k \frac{1 - |a_k|}{|\zeta - a_k|^2} + \int \frac{d\mu(t)}{|t - \zeta|^2} < +\infty, \quad (I3)$$

то ряд $\sum_{n \geq 0} \hat{\theta}(n) \zeta^n$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z - фиксированная точка круга, а $k_z(t) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \overline{\theta(z)}\theta(t))(1 - \bar{z}t)^{-1}$ - отвечающее ей воспроизводящее ядро в пространстве K_θ^2 . По теореме 2 имеем

$$|\hat{k}_z(n)| \leq \|k_z\|_2 \|E_n(\theta, n)\|_2 = \|k_z\|_2 \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{\theta}(k)|^2 \right)^{1/2}. \quad (I4)$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\hat{k}_z(n) = \bar{z}^n (1 - \overline{\theta(z)} \sum_{k=0}^n \hat{\theta}(k) \bar{z}^{-k}); \quad \|k_z\|_2 = \left(\frac{1 - |\theta(z)|^2}{1 - |z|^2} \right)^{1/2}. \quad (I5)$$

Хорошо известно (см., например, [13]), что при условии (I3)

Функция θ обладает угловой производной в точке ζ . Это значит, что существуют пределы $\lim_{r \rightarrow 1-0} \theta(r\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\zeta)$ и $\lim_{r \rightarrow 1-0} \theta'(r\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \theta'(\zeta)$, причём $|\theta(\zeta)| = 1$. Более того,

$$\begin{aligned} |\theta'(\zeta)| &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1 - |\theta(r\zeta)|}{1-r} = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1 - |\theta(r\zeta)|^2}{1-r^2} = \\ &= \sum_k \frac{1 - |a_k|^2}{|\zeta - a_k|^2} + \lambda \int \frac{d\mu(t)}{|t - \zeta|^2} \end{aligned}$$

Подставляя выражения (15) в (14), полагая $z = r\zeta$ и переходя в (14) к пределу при $r \rightarrow 1-0$, получаем:

$$|\theta(z) - \sum_{k=0}^n \hat{\theta}(k) z^k| \leq |\theta'(z)|^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{\theta}(k)|^2 \right)^{1/2},$$

откуда следует утверждение теоремы. ●

§ 3. Гладкость аналитической функции на границе и гладкость её аргумента

Результаты этого параграфа основаны на следующем элементарном соображении: если $f \in H^1$, то $f \in K_1(\bar{z}f/f)$. Действительно,

$$T_{\bar{z}f/f} f = P_+(\bar{z}f) = 0.$$

Это наблюдение позволяет извлечь из "неравенства типа Бернштейна"

$$\|f\|_Y \leq \text{const} \|\varphi\|_X^\alpha \|f\|_p, \quad f \in K_p(\varphi) \quad (I)$$

(где X и Y - те или иные пространства гладких функций), следствие: если $f \in H^p$ и $f/f \in X$, то $f \in Y$. Для доказательства достаточно положить в (I) $\varphi = \bar{z}f/f$ (умножение на \bar{z} не выводит из X).

Таким образом, в ряде случаев гладкость функции \bar{f}/f (или $\arg f$) на окружности влечет гладкость самой функции f , $f \in H^p$. В следующей теореме собрано несколько утверждений такого рода. Все они получаются описанным способом из неравенств типа (I), доказанных в §§ 1, 2.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f \in H^p$.

а) Если $1 < p < +\infty$, $1 < r \leq +\infty$, $q^{-1} = p^{-1} + r^{-1} < 1$
(при $r = +\infty$ возможны также значения $p = q = 1$), то справедлива импликация

$$\bar{f}/f \in W_r^1 \implies f' \in H^q.$$

б) Если $1 < p < r$, $r \geq 2$, то справедлива импликация

$$\bar{f}/f \in W_r^1 \implies f' \in H^p.$$

в) Если $1 \leq p < q < +\infty$, $\alpha = p^{-1} - q^{-1}$, то

$$\bar{f}/f \in \Lambda^\alpha \implies f \in H^q.$$

г) Если $1 \leq p \leq +\infty$, $2 \leq q \leq +\infty$, $l > 0$, то

$$\bar{f}/f \in B_{p/q'}^{l+1/q'} \implies f \in W_q^l, \quad \text{т.е. } f^{(l)} \in H^q.$$

(Напомним, что $f^{(l)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^l \hat{f}(n) z^n$).

Дополним эту теорему следующим предложением, вытекающим из следствия 3 предыдущего параграфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $1 \leq q < p \leq 2$ и пусть $f \in \mathcal{L}_A^p$ (т.е. $f \in H^1$ и $\sum_{n \geq 0} |\hat{f}(n)|^p < +\infty$). Если к тому же $\bar{f}/f \in B_{pq}^{1/q}$, то $f \in \mathcal{L}_A^q$.

§ 4. Пространство K_θ^p и рациональная аппроксимация

Здесь будет анонсировано без доказательства еще одно неравенство типа Бернштейна для пространств $K_\theta^p = H^p \cap \theta H_0^p$, где θ - внутренняя функция в \mathbb{D} . Доказательство (довольно трудоемкое) будет опубликовано в другой работе автора. Отметим только, что оно основано на иных соображениях, нежели доказательства родственных неравенств в §§ I, 2 настоящей статьи.

Напомним предварительно определение пространств Соболева W_p^l ($p \geq 1$, $l > 0$): $W_p^l \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in L^p: f^{(l)} \in L^p\}$, где

$$f^{(l)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^l \hat{f}(n) z^n \quad (z \in \mathbb{T}).$$

Как известно, $B_p^l \subset W_p^l$ при $1 \leq p \leq 2$ и $W_p^l \subset B_p^l$ при $p \geq 2$. Норму $\|\cdot\|_{W_p^l}$ определим равенством $\|f\|_{W_p^l} = |\hat{f}(0)| + \|f^{(l)}\|_p$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $1 \leq p, r < +\infty, s > 0, r \stackrel{\text{def}}{=} r/(r-1)$.
 Предположим, что $\theta' \in H^{r, s, p}$. Тогда $K_{\theta}^{r, p} \subset B_p^s \cap W_p^s$, причём
 для любой функции $f \in K_{\theta}^{r, p}$ имеет место неравенство

$$\max(\|f\|_{B_p^s}, \|f\|_{W_p^s}) \leq c(p, r, s) \|\theta'\|_{r, s, p}^s \|f\|_{r, p}. \quad (I6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $r, s, p > 1$ условие $\theta' \in H^{r, s, p}$ означает, что θ — конечное произведение Бляшке. При этом пространство $K_{\theta}^{r, p}$ конечномерно и состоит из рациональных функций с теми же полюсами, что и у функции θ . Тем самым вложение $K_{\theta}^{r, p} \subset B_p^s \cap W_p^s$ тривиально; однако неравенство (I6) содержательно и в этом случае. При $r, s, p < 1$ класс внутренних функций θ , подчиненных условию $\theta' \in H^{r, s, p}$, существенно шире, см. [I3].

Рассмотрим два частных случая неравенства (I6).

1. Пусть $r = +\infty$. Тогда $r' = 1$, и из (I6) следует, что

$$\|f^{(s)}\|_p \leq \text{const} \|\theta'\|_{\infty}^s \|f\|_p, \quad f \in K_{\theta}^{p, p}. \quad (I7)$$

Для $s \in \mathbb{N}$ последнее неравенство было получено автором [7] с использованием кратных коммутаторов Кальдерона.

2. Пусть $sp < 1, r = (sp)^{-1}$. Тогда $\|\theta'\|_{r, s, p} = \|\theta'\|_1 = n$, где n — число корней (с учетом кратностей) произведения Бляшке θ в круге D , так что (I6) сводится к неравенству

$$\max(\|f\|_{B_p^s}, \|f\|_{W_p^s}) \leq c(p, s) n^s \|f\|_q, \quad (I8)$$

где $q = p/(1-sp)$, а f — произвольная рациональная функция степени $\leq n$ с полюсами в $\mathbb{C} \setminus \text{clos } D$. Неравенство (I8), принадлежащее А.А. Пекарскому, применялось им в [II] для описания классов $B_p^s \cap H^p$ и $W_p^s \cap H^p$ в терминах наилучших рациональных L^q -приближений.

Следуя классическому методу, восходящему к С.Н. Бернштейну, из (I6) также можно извлечь ряд аппроксимационных теорем. Приведем одну из них, отвечающую случаю $r = +\infty$.

Положим

$$\mathcal{R}_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\theta} \{ K_{\theta}^{\infty} : \|\theta'\|_{\infty} \leq n \}.$$

(Элементы множества \mathcal{R}_n — это рациональные функции "степени не выше n " с полюсами вне $\text{clos } D$; при этом "степенью" рациональной дроби R считается величина $\|B'_R\|_{\infty}$, где B_R — ко-

нечное произведение Бляшке, построенное естественным образом по полюсам функции R).

ТЕОРЕМА 9. Пусть $f \in H^p$, $1 \leq p, q \leq +\infty$, $s > 0$. Следующие утверждения равносильны.

1. $f \in B_{pq}^s$.

2. $\{2^{js} \text{dist}_{L^p}(f, R_{2^j})\}_{j=0}^{\infty} \in \ell^q$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Поскольку множество $K_{2^n}^{\infty}$, состоящее из всех аналитических полиномов степени $< n$, содержится в R_n , то импликация $1 \Rightarrow 2$ ("теорема типа Джексона") вытекает из соответствующей части классической теоремы о полиномиальных приближениях [10, глава 5].

Доказательство обратной импликации $2 \Rightarrow 1$ ("теоремы типа Бернштейна") проходит так же, как в классическом случае, с той единственной разницей, что вместо неравенства Бернштейна для полиномов нужно использовать его обобщение (17). ●

В заключение отметим, что справедлив "неаналитический" аналог теоремы 9, где *a priori* предполагается только, что $f \in L^p$, а приближающим рациональным функциям разрешается иметь полюсы как в D , так и в $C \setminus \text{clos } D$ (см. [8]).

Литература

1. А й р а п е т я н Г.М. О граничных значениях функций, порожденных неполными системами рациональных дробей с фиксированными полюсами. - Изв. АН Арм.ССР, сер.мат., 1988, т.23, № 3, с.297-301.
2. А х и е з е р Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
3. В е р б и ц к и й И.Э. О коэффициентах Тейлора и L^p -модулях непрерывности произведений Бляшке. - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. X. Зап.науч.семина. ЛОМИ, 1982, т.107, с.27-35.
4. Г а р н е т т Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
5. Г о ф м а н К. Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
6. Д ы н ь к и н Е.М. Методы теории сингулярных интегралов. (Преобразование Гильберта и теория Кальдерона-Зигмунда.) -

- Итоги науки и техн. ВИНИТИ, Совр.пробл.матем., Фунд.напр., 1986, т.15, с.197-292.
7. Дьяконов К.М. Целые функции экспоненциального типа и модельные подпространства в H^p . - В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. XIX. Зап.научн.семинар. ЛОМИ, 1991, т.190, с.81-100.
 8. Дьяконов К.М. Инвариантные подпространства оператора обратного сдвига в пространствах Харди. Дис.на соискание уч.ст.канд.физ.-мат.наук.Л.: ЛГУ, 1991, 114 с.
 9. Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. М.: Наука, 1980.
 10. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
 - II. Пекарский А.А. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации. - Матем.сб., 1984, т.124 (166), № 4(8), с.571-588.
 12. Ahern P.R. The mean modulus and the derivative of an inner function. - Indiana Univ.Math.J., 1979, v.28, p.311-348.
 13. Ahern P.R., Clark D.N. On inner functions with H^p -derivative. - Mich.Math.J., 1974, v.21, N 2, p.115-127.
 14. Calderón A.P. Commutators of singular integral operators. - Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 1965, v.53, p.1092-1099.
 15. Cohn W.S. Radial limits and star invariant subspaces of bounded mean oscillation. - Amer.J.Math., 1986, v.108, N 3, p.719-749.
 16. Duren P.L., Romberg B.W., Shields A.L. Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$. - J. Reine Angew.Math., 1969, v.238, p.32-60.
 17. Hayashi E. The kernel of a Toeplitz operator. - Integral Equations and Operator Theory, 1986, v.9, p.588-591.
 18. Hayashi E. Classification of nearly invariant subspaces of the backward shift. - Proc.Amer.Math.Soc., 1990, v.110, N 2, p.441-448.
 19. Hruščev S.V., Vinogradov S.A. Inner functions and multipliers of Cauchy type integrals. - Ark. Mat., 1981, v.19, N 1, p.23-42.

K.M.D'yakonov. Kernels of Toeplitz operators, smooth functions, and Bernstein type inequalities.

Summary

Let φ be a unimodular function on the unit circle \mathbb{T} and let $K_p(\varphi)$ denote the kernel of the Toeplitz operator T_φ in the Hardy space H^p , $p \geq 1$: $K_p(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in H^p : T_\varphi f = 0\}$. Suppose $K_p(\varphi) \neq \{0\}$. The problem is to find out how the smoothness of the symbol φ influences the boundary smoothness of functions in $K_p(\varphi)$. One of the main results is as follows.

THEOREM 1. Let $1 < p, q < +\infty$, $1 < r \leq +\infty$, $q^{-1} = p^{-1} + r^{-1}$. Suppose $|\varphi| \equiv 1$ on \mathbb{T} and $\varphi \in W_r^1$ (i.e. $\varphi' \in L^r(\mathbb{T})$). Then $K_p(\varphi) \subset W_q^1$. Moreover, for any $f \in K_p(\varphi)$ we have $\|f'\|_q \leq c(p, r) \|\varphi'\|_r \|f\|_p$.