

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Костарев, Т. Р. Газизов, Ю. М. Казанцев, Аналитическая оценка элементов матрицы СЛАУ в задаче электромагнитного рассеяния поверхностями произвольной формы, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2013, том 419, 154–167

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

7 февраля 2025 г., 05:24:22



И. С. Костарев, Т. Р. Газизов, Ю. М. Казанцев

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЭЛЕМЕНТОВ  
МАТРИЦЫ СЛАУ В ЗАДАЧЕ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО РАССЕЙНИЯ  
ПОВЕРХНОСТЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ**

Одна из основных моделей рассеяния электромагнитного (ЭМ) поля поверхностями произвольной формы опубликована в работе [1], а алгоритм расчета рассеяния ЭМ волны по этой методике – в работе [2]. В основе модели лежит вычисление токов, протекающих на поверхности произвольной формы при воздействии внешнего электромагнитного поля. Для этого необходимо вычислить элементы матрицы  $\mathbf{Z} = [Z_{mn}]$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  – число внутренних смежных ребер треугольников поверхности) и вектора воздействия  $\mathbf{V} = [V_n]$ , после чего необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{V} \quad (1)$$

относительно неизвестного вектора-столбца токов  $\mathbf{I} = [I_n]$ . Недостатком этого алгоритма является то, что вычисление независимых интегралов при вычислении элементов матрицы  $\mathbf{Z}$  для каждой комбинации пар граней  $p$  и  $q$  ( $q = 1, \dots, M$ ,  $p = 1, \dots, M$ , где  $M$  – число треугольников) разбитой на треугольные элементы поверхности (рис. 1) возможно только численно.

В первую очередь, это связано с тем, что интегралы такого типа нельзя взять в элементарных функциях, так как сами интегралы имеют вид

$$I(\xi, \eta, p, q) = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \frac{\exp[-j \cdot k \cdot R(\xi, \eta, p, q)]}{R(\xi, \eta, p, q)} d\xi d\eta, \quad (2)$$

---

*Ключевые слова:* СЛАУ, элемент матрицы, интегрирование, аналитическое выражение, ряд Тейлора, метод моментов.

Работа выполнена по договору от 19.02.2013 №. 10/13 “НПФ “Микран” и ТУ-СУРа в рамках реализации постановления Правительства РФ от 09.04.2010 г. №. 218, договор от 25.05.2013 г. №. 02.G25.31.0091.

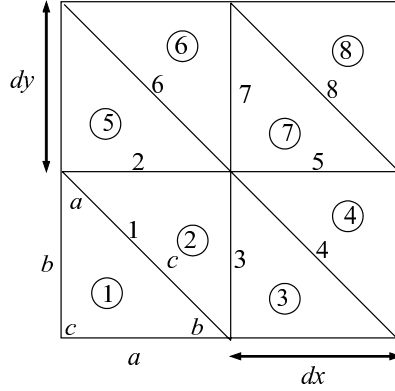


Рис. 1. Тестовая поверхность, разбитая на треугольные элементы.

$$I_{\xi}(\xi, \eta, p, q) = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi \cdot \frac{\exp[-j \cdot k \cdot R(\xi, \eta, p, q)]}{R(\xi, \eta, p, q)} d\xi d\eta, \quad (3)$$

$$I_{\eta}(\xi, \eta, p, q) = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \eta \cdot \frac{\exp[-j \cdot k \cdot R(\xi, \eta, p, q)]}{R(\xi, \eta, p, q)} d\xi d\eta, \quad (4)$$

$$I_c(\xi, \eta, p, q) = I(\xi, \eta, p, q) - I_{\xi}(\xi, \eta, p, q) - I_{\eta}(\xi, \eta, p, q), \quad (5)$$

где расстояние  $R$  задается через локальные треугольные координаты  $\xi$  и  $\eta$ :

$$R(\xi, \eta, p, q) = \left\{ [(x_{cp}^p - x_c^q - \xi \cdot (x_a^p - x_c^q) - \eta \cdot (x_b^p - x_c^q))] + [(y_{cp}^p - y_c^q - \xi \cdot (y_a^p - y_c^q) - \eta \cdot (y_b^p - y_c^q))] + [(z_{cp}^p - z_c^q - \xi \cdot (z_a^p - z_c^q) - \eta \cdot (z_b^p - z_c^q))] \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

$(x_1^n, y_1^n, z_1^n)$  и  $(x_2^n, y_2^n, z_2^n)$  – координаты начала и конца  $n$ -го ( $n = 1, 2, \dots, N_r$ ) ребра, а  $x_{cp}^p, y_{cp}^p, z_{cp}^p$  – координаты центров  $p$ -го и  $q$ -го треугольников,

$$x_{cp}^q = \frac{x_a^q + x_b^q + x_c^q}{3}, \quad y_{cp}^q = \frac{y_a^q + y_b^q + y_c^q}{3}, \quad z_{cp}^q = \frac{z_a^q + z_b^q + z_c^q}{3}. \quad (7)$$

Координаты центра  $p$ -го треугольника вычисляются по аналогичным формулам. Кроме того, при  $p = q$  интегралы (2)–(4) становятся особыми, так как  $R(\xi, \eta, p, q) \rightarrow 0$ .

Один из способов вычисления элементов матрицы  $\mathbf{Z}$  в точках сингулярности предложен в работе [3], где отмечено, что сингулярность функции Грина в интегральных уравнениях для электрического поля приводит к ограничению точности численного интегрирования, тогда как для повышения точности требуется большее количество точек, в которых вычисляется подынтегральная функция. В зависимости от базовых и тестовых функций, матрица  $\mathbf{Z}$  может быть плохо обусловлена [4–6]. Таким образом, для достижения высокой точности общего решения необходима высокая точность вычисления диагональных элементов матрицы. Поэтому для оценки диагональных элементов матрицы  $\mathbf{Z}$  обычно используется аналитический подход, поскольку область интегрирования диагональных элементов включает точки сингулярности [7–10].

В интегральном уравнении для электрического поля [11] функция Грина может быть представлена в виде

$$G(r, r') = \frac{e^{-jk_0|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}, \quad (8)$$

где  $r$  – радиус-вектор точки наблюдения,  $r'$  – радиус-вектор источника,

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}, \quad (9)$$

$\mu_0$  – магнитная проницаемость окружающей среды,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость окружающей среды,  $\omega$  – угловая частота.

Так как прямое вычисление интеграла от  $G(r, r')$  невозможно, его можно вычислить, разложив экспоненту в ряд Тейлора [7–9]:

$$\frac{e^{-jk_0|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} = \frac{1}{4\pi|r-r'|} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-j)^p k_0^p |r-r'|^p}{p!}. \quad (10)$$

Если длина  $|r-r'|$  достаточно мала, то  $G(r, r')$  можно аппроксимировать суммой нескольких членов ряда Тейлора:

$$\frac{e^{-jk_0|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \approx \frac{1}{4\pi|r-r'|} \sum_{p=0}^n \frac{(-j)^p k_0^p |r-r'|^p}{p!}, \quad (11)$$

и ошибка усечения ряда до  $n$  членов может быть оценена как

$$error \leq k_0^{n+1} |r-r'|^{n+1} / (n+1)!. \quad (12)$$

Выбор размера сетки равным  $\lambda/10$  дает  $\max |r - r'| = \sqrt{2}\lambda/10$  при базисных и тестовых функциях для поверхности [3]. Оценки ошибок аппроксимации для различных  $n$  и размеров сетки, вычисленные по формуле (12), приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значение ошибки (%) в зависимости от количества членов ряда Тейлора и размера элемента сетки.

Количество членов ряда Тейлора	Размер элемента сетки			
	$\lambda/10$	$\lambda/20$	$\lambda/30$	$\lambda/40$
1	39,4	9,9	4,4	2,4
2	11,7	1,4	0,4	0,2
3	2,6	0,2	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
4	0,5	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$

Из табл. 1 видно, что при  $\lambda/10$  ошибка расчета диагональных элементов для  $n = 4$  не превышает 0,5%, а при более частой сетке она значительно меньше. Это также означает, что при более частой сетке довольно малой может оказаться ошибка не только для диагональных, но и для других элементов  $\mathbf{Z}$ . Этот факт делает возможной аппроксимацию также и внедиагональных элементов, особенно с учетом уменьшения их вклада в решение по мере удаления от главной диагонали.

Ниже приведены интегралы (2)–(4) в виде конечных комбинаций элементарных функций.

Интеграл (2) представляется в виде

$$I(p, q) = I_1(p, q) + I_2(p, q) + I_3(p, q) + I_4(p, q). \tag{13}$$

Слагаемые в (13) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_1(p, q) = & \frac{1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{D_i} \left\{ u_i \ln(R_i + x_i) \right. \\
 & - \frac{b_i}{2\sqrt{a_i}(a_i - 1)} \ln |2\sqrt{a_i}R_i + 2a_i x_i + b_i| \\
 & \left. + d_i \tan^{-1} \left( \frac{u_i}{d_i} \right) - d_i \arctan \left[ \frac{2d_i R_i (a_i - 1)}{b_i x_i + 2c_i} \right] \right\} \Big|_{\eta=0}^1, \tag{14}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_i &= \sqrt{A_i \eta^2 + B_i \eta + C_i}, \quad u_i = x_i \frac{b_i}{2(a_i - 1)}, \quad x_i = D_i \eta + E_i, \\
 A_i &= |\bar{r}_3 - \bar{r}_i|^2, \quad B_i = -2(\bar{r}_3 - \bar{r}_i)(\bar{r} - \bar{r}_i), \\
 C_i &= |\bar{r} - \bar{r}_i|^2, \quad D_i = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_i)/|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|, \\
 E_i &= -(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r} - \bar{r}_i)/|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|, \\
 a_i &= A_i/D_i^2, \quad b_i = \frac{B_i D_i - 2A_i E_i}{D_i^2}, \\
 c_i &= \frac{C_i D_i^2 - B_i E_i D_i + A_i E_i^2}{D_i^2}, \\
 d_i^2 &= \frac{C_i}{a_i - 1} - \frac{b_i^2}{4(a_i - 1)^2},
 \end{aligned} \tag{15}$$

и

$$\begin{aligned}
 A_1 &= |\bar{r}_3 - \bar{r}_2|^2, \quad B_1 = -2(|\bar{r}_3 - \bar{r}_2|)(\bar{r} - \bar{r}_2)^2, \quad C_1 = |\bar{r} - \bar{r}_2|^2, \\
 D_1 &= (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_2)/|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|, \quad E_1 = -(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r} - \bar{r}_2)/|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|, \\
 A_2 &= |\bar{r}_3 - \bar{r}_1|^2, \quad B_2 = -2(\bar{r}_3 - \bar{r}_1)(\bar{r} - \bar{r}_1), \quad C_2 = |\bar{r} - \bar{r}_1|^2, \\
 D_2 &= \frac{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1)}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|}, \quad E_2 = -\frac{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r} - \bar{r}_1)}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|};
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$I_2(p, q) = \frac{-jk}{2}, \tag{17}$$

$$I_3(p, q) = I_{31}(p, q) + I_{32}(p, q), \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{31}(p, q) &= I_{31-1}(p, q) + I_{31-2}(p, q) + I_{31-3}(p, q) \\
 &\quad + I_{31-4}(p, q) + I_{31-5}(p, q) + I_{31-6}(p, q),
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 I_{31-1}(p, q) &= \frac{C}{4A} \int_{\eta=0}^1 \sqrt{l\eta^2 + m\eta + nd\eta} \\
 &= \frac{C}{4A} \left\{ \frac{m}{4l} \sqrt{l+m+n} + \frac{\ln\left(\frac{2l+m}{2\sqrt{l}} + \sqrt{l+m+n}\right) \left(l \cdot n - \frac{m^2}{4}\right)}{2l^{3/2}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$- \frac{\ln \left( \frac{m}{2\sqrt{l}} + \sqrt{n} \right) \left( l \cdot n - \frac{m^2}{4} \right)}{2l^{3/2}} + \frac{m}{4l} \sqrt{n} \left. \right\},$$

$$\begin{aligned} I_{31-2}(p, q) &= \frac{C}{4A} \int_{\eta=0}^1 \eta \sqrt{l\eta^2 + m\eta + nd\eta} \\ &= \frac{E}{4A} \left\{ \frac{\ln \left( \frac{2l+m}{\sqrt{l}} + 2\sqrt{l+m+n} \right) (m^3 - 4l \cdot m \cdot n)}{16 \cdot l^{5/2}} \right. \\ &\quad - \frac{\sqrt{l+m+n} \cdot (2lm - 3m^2 + 8l(l+n))}{24l^2} \\ &\quad \left. - \frac{\ln \left( \frac{m}{\sqrt{l}} + 2\sqrt{n} \right) (m^3 - 4l \cdot m \cdot n)}{16 \cdot l^{5/2}} - \frac{\sqrt{n} \cdot (3m^2 + 8l \cdot n)}{24l^2} \right\}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$I_{31-3}(p, q) = \frac{1}{2} \int_{\eta=0}^1 \eta \sqrt{l\eta^2 + m\eta + nd\eta} = -\frac{2A}{E} I_{31-2},$$

$$I_{31-4}(p, q) = \frac{1}{2} \int_{\eta=0}^1 \sqrt{l\eta^2 + m\eta + nd\eta} = \frac{2A}{C} I_{31-1},$$

$$\begin{aligned} I_{31-5}(p, q) &= \frac{C}{4A} \int_{\eta=0}^1 \sqrt{B\eta^2 + D\eta + F} d\eta \\ &= \frac{C}{4A} \left\{ \frac{D}{4B} \sqrt{B+D+F} + \frac{\ln \left( \frac{2B+D}{2\sqrt{B}} + \sqrt{B+D+F} \right) \left( B \cdot F - \frac{D^2}{4} \right)}{2B^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\ln \left( \frac{D}{2\sqrt{B}} + \sqrt{F} \right) \left( B \cdot F - \frac{D^2}{4} \right)}{2B^{3/2}} + \frac{D}{4B} \sqrt{F} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{31-6}(p, q) &= \frac{E}{4A} \int_{4A}^1 \eta \sqrt{B\eta^2 + D\eta + F} d\eta \\
&= \frac{E}{4A} \left\{ \frac{\ln \left( \frac{2B+D}{\sqrt{B}} + 2\sqrt{B+D+F} \right) (D^3 - 4B \cdot D \cdot F)}{16 \cdot B^{5/2}} \right. \\
&\quad - \frac{\sqrt{B+D+F} \cdot (2BD - 3D^2 + 8B(B+F))}{24l^2} \\
&\quad \left. - \frac{\ln \left( \frac{D}{\sqrt{B}} + 2\sqrt{F} \right) (D^3 - 4B \cdot D \cdot F)}{16 \cdot B^{5/2}} - \frac{\sqrt{F} \cdot (3D^2 + 8B \cdot F)}{24B^2} \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{32}(p, q) &= \left[ \ln(A_2 + B_2 + C_2 + D_2 + E_2) \right. \\
&\quad \times (4A_2C_2 + 4A_2E_2 - B_2^2 - B_2D_2 - D_2)^{1/2} \\
&\quad \times (2A_2 + B_2 + D_2) - 4(4A_2C_2 + 4A_2E_2 - B_2^2 - 2B_2D_2 - D_2^2)^{1/2} A_2 \\
&\quad \left. + \arctan \left( \frac{2A_2 + B_2 + D_2}{(4A_2C_2 + 4A_2E_2 - B_2^2 + 2B_2D_2 - D_2^2)^{1/2}} \right) \right. \\
&\quad \times (8C_2A_2 + 8E_2A_2 - 2B_2^2 - 4B_2D_2 - 2D_2^2) \left. \right] \quad (21) \\
&\quad - \left[ \ln(C_2 + E_2)(4A_2E_2 + 4A_2C_2 - B_2^2 - B_2D_2 - D_2)^{1/2}(B_2 + D_2) \right. \\
&\quad \left. + \arctan \left( \frac{B_2 + D_2}{(4A_2C_2 + 4A_2E_2 - B_2^2 + 2B_2D_2 - D_2^2)^{1/2}} \right) \right. \\
&\quad \times (8C_2A_2 + 8E_2A_2 - 2B_2^2 - 4B_2D_2 - 2D_2^2) \left. \right] \\
&\quad \times \frac{1}{4A(4C_2A_2 + 4E_2A_2 - B_2^2 - 2B_2D_2 - D_2^2)},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= |\bar{r}_3 - \bar{r}_2|^2, \quad B_1 = -2|\bar{r}_3 - \bar{r}_2|(\bar{r} - \bar{r}_2)^2, \quad C_1 = |\bar{r} - \bar{r}_2|^2, \\
D_1 &= (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_2)/|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|, \quad E_1 = -(\bar{r}_3 - \bar{r}_1)(\bar{r} - \bar{r}_2)/|\bar{r}_3 - \bar{r}_1|, \\
A_2 &= |\bar{r}_3 - \bar{r}_1|^2, \quad B_2 = -2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r} - \bar{r}_1), \quad C_2 = |\bar{r} - \bar{r}_1|^2, \quad (22) \\
D_2 &= \frac{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1)}{|\bar{r}_3 - \bar{r}_1|}, \quad E_2 = \frac{(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r} - \bar{r}_1)}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|};
\end{aligned}$$



$$I_4(p, q) = \frac{1}{6} j k^3 \left( \frac{A}{12} + \frac{B}{12} + \frac{C}{6} + \frac{D}{6} + \frac{E}{24} + \frac{F}{2} \right), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} A &= |\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2, & B &= |\bar{r}_3 - \bar{r}_1|^2, & C &= -2(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \\ D &= -2(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1), & E &= 2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1), & F &= |\bar{r} - \bar{r}_1|^2. \end{aligned}$$

Интеграл (3) представляется в виде

$$I_\xi(p, q) = I_{1\xi}(p, q) + I_{2\xi}(p, q) + I_{3\xi}(p, q) + I_{4\xi}(p, q), \quad (24)$$

а его отдельные слагаемые вычисляются следующим образом:

$$I_{1\xi}(p, q) = \frac{4B(J_1 - J_2) - 2E(J_3 - J_4) - (2BC - ED)I_1}{4AB - E^2}, \quad (25)$$

где  $I_1$  вычисляется по формуле (15),

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{(2B - C + D + E(\sqrt{B + D + F}) + (2A + C - D - E)(\sqrt{A + C + F}))}{4(4 + B - E)} \\ &+ \frac{4(A + C)(B + D + F) + 4F(B - C - E) - (C + D + E)^2}{8(A + B - E)^{3/2}} \\ &\times \ln \left| \frac{2\sqrt{(A + B - E)(B + D + F)} + (2B - C - E)}{2\sqrt{(A + B - E)(A + C + F)} - (2F + C - D - E)} \right|, \\ J_2 &= \frac{(2B + D)\sqrt{B + D + F} - D\sqrt{F}}{4B} + \frac{4BF - D^2}{8B\sqrt{B}} \ln \left| \frac{2\sqrt{B}\sqrt{B + D + F}}{2\sqrt{BF} + D} \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 = & \frac{(2A + C - D - E)\sqrt{A + C + F} + (2B - C + D - E)\sqrt{B + D + F}}{4(A + B - E)} \\
& + \frac{4(A + C)(B + D + F) + 4F(B - C - E) - (C + D + F)}{8(A + B + E)^{3/2}} \quad (26) \\
& \times \ln \left| \frac{2\sqrt{(A + B - E)(A + C + F)} + (2A + C - D - E)}{2\sqrt{(A + B - E)(B + D + F)} - (2B - C + D - E)} \right|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4 = & \frac{(2A + C)\sqrt{A + C + F} - C\sqrt{F}}{4A} \\
& + \frac{4AF - C^2}{8A\sqrt{A}} \ln \left| \frac{2\sqrt{A}\sqrt{A + C + F} + 2A + C}{2\sqrt{AF} + C} \right|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A = |\bar{r}_2 - \bar{r}_2|^2, \quad B = |\bar{r}_3 - \bar{r}_1|^2, \quad C = -2(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \\
D = -2(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1), \quad E = 2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1), \quad F = |\bar{r} - \bar{r}_1|^2;
\end{aligned}$$

$$I_{2\xi}(p, q) = \frac{-jk}{6}, \quad (27)$$

$$I_{3\xi}(p, q) = -\frac{1}{24A^2}I_{\xi 31}(p, q) + \frac{1}{24A^2}I_{\xi 32}(p, q) + \frac{1}{16A^{5/2}}I_3(p, q), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned}
I_{\xi 31}(p, q) = & \frac{4A(3C^2 + 8A)}{C}I_{31-1} \\
& - \frac{E}{2A}(2CE + 2CA - 2AE + 8A(D - 2))I_{31-2} \\
& + \frac{[8A(B - 2D + 2) + E + 2AE]4An}{4lC}I_{31-1} \\
& + \frac{(l + m + n)^{3/2}}{5l} - \frac{28A^2(D - 2B)mn}{5l^2C}I_{31-1} \quad (29) \\
& + \frac{(l + m + n)^{3/2}}{6l} + \frac{24ABmn}{20l^2A}I_{31-2},
\end{aligned}$$

$$I_{\xi 32}(p, q) = \frac{4A(3C^2 + 8AF)}{C}I_{31-5}(6CE - 8AD)I_{31-6}$$

$$+ \frac{E}{2A} + \frac{[3E^2 - 8AB]4A}{C} I_{31-5}, \quad (30)$$

$$a = (A + C + F), \quad b = (D + E), \quad c = (A + B - E),$$

а  $I_{31-1}(p, q), I_{31-2}(p, q), I_{31-3}(p, q), I_{31-4}(p, q), I_{31-5}(p, q), I_{31-6}(p, q)$  вычисляются по формуле (20);

$$I_{4\xi}(p, q) = \frac{1}{6}jk^3 \left( \frac{A}{20} + \frac{B}{60} + \frac{C}{12} + \frac{D}{24} + \frac{E}{60} + \frac{F}{6} \right), \quad (31)$$

где

$$A = |\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2, \quad B = |\bar{r}_3 - \bar{r}_1|^2, \quad C = -2(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \\ D = -2(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1), \quad E = 2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1), \quad F = |\bar{r} - \bar{r}_1|^2.$$

Интеграл (4) представляется в виде

$$I_\eta(p, q) = I_{1\eta}(p, q) + I_{2\eta}(p, q) + I_{3\eta}(p, q) + I_{4\eta}(p, q), \quad (32)$$

а его слагаемые вычисляются следующим образом:

$$I_{1\eta}(p, q) = \frac{4A(J_3 - J_4) - 2E(J_1 - J_2) - (2AD - EC)I_1}{4AB - E^2}, \quad (33)$$

где

$$A = |\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2, \quad B = |\bar{r}_3 - \bar{r}_1|^2, \quad C = -2(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \\ D = -2(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1), \quad E = 2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1), \quad F = |\bar{r} - \bar{r}_1|^2,$$

$I_1$  вычисляется по формуле (14),  $J_1$  и  $J_2$  – по формуле (25),  $J_3$  и  $J_4$  – по формуле (26);

$$I_{2\eta}(p, q) = \frac{-jk}{6}, \quad (34)$$

$$I_{3\eta}(p, q) = \frac{C}{(2E + C)} I_{\xi 31}(\eta, p, q) - \frac{B}{2D} I_{\xi 32}(\eta, p, q) \\ - \frac{C}{2D} I_3(\xi, \eta, p, q), \quad (35)$$

где  $I_{\xi 31}$  вычисляется по формуле (29),  $I_{\xi 32}$  – по формуле (30), а  $I_3$  – по формуле (18);

$$I_{4\eta}(p, q) = \frac{1}{6}jk^3 \left( \frac{A}{60} + \frac{B}{20} + \frac{C}{24} + \frac{D}{12} + \frac{E}{60} + \frac{F}{6} \right), \quad (36)$$

где

$$A = |\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2, \quad B = |\bar{r}_3 - \bar{r}_1|^2, \quad C = -2(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1), \\ D = -2(\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1), \quad E = 2(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1), \quad F = |\bar{r} - \bar{r}_1|^2.$$

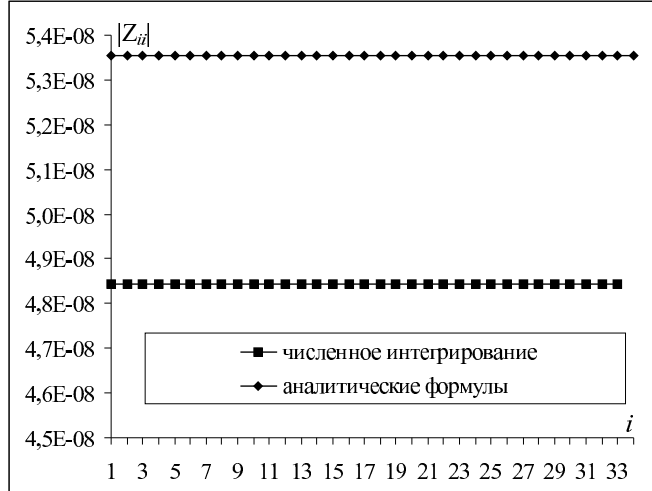


Рис. 2. Модуль диагональных элементов матрицы  $Z$ , вычисленный с использованием численного интегрирования и по аналитическим формулам.

Во всех представленных выше формулах использованы обозначения

$$\bar{r}_1 = (x_c^q, y_c^q, z_c^q), \quad \bar{r}_2 = (x_a^p, y_a^p, z_a^p), \\ \bar{r}_3 = (x_b^p, y_b^p, z_b^p), \quad \bar{r} = (x_{cp}^q, y_{cp}^q, z_{cp}^q).$$

Другой подход к вычислению интегралов (2)–(4) основан на численных методах интегрирования, позволяющих вычислить значения интегралов с определенной точностью. Один из наиболее распространенных методов численного интегрирования – метод Ньютона–Котеса [12]. Он широко применяется в системах математического моделирования, в том числе и в системе TALGAT, в которую включен модуль

Таблица 2. Результаты вычисления вещественной и мнимой частей  $Z_{11}$ .

Способ вычисления интегралов	Задаваемая точность вычисления интегралов											
	1		0,1		0,01		0,001					
	результат	$t$ , мс	результат	$t$ , мс	результат	$t$ , мс	результат	$t$ , мс				
Численный (Ньютона -Котеса)	$Re$	$4,814 \cdot 10^{-8}$	95	$4,902 \cdot 10^{-8}$	453	$5,101 \cdot 10^{-8}$	1322	$5,293 \cdot 10^{-8}$	6000			
	$Im$	$-5,327 \cdot 10^{-9}$		$-5,326 \cdot 10^{-9}$		$-5,324 \cdot 10^{-9}$		$-5,327 \cdot 10^{-9}$				
По аналитическим формулам	$Re$	$5,328 \cdot 10^{-8}$	502	$5,328 \cdot 10^{-8}$	502	$5,328 \cdot 10^{-8}$	502	$5,328 \cdot 10^{-8}$	502			
	$Im$	$-5,327 \cdot 10^{-9}$		$-5,327 \cdot 10^{-9}$		$-5,327 \cdot 10^{-9}$		$-5,327 \cdot 10^{-9}$				

расчета рассеяния ЭМ волны. Поэтому можно провести сравнительный анализ результатов вычисления по аналитическим формулам и на основе формул Ньютона–Котеса.

Результаты вычисления диагональных элементов матрицы  $\mathbf{Z}$  обоими методами для пластины шириной  $0,5\lambda$  представлены на рис. 3 (при точности интегрирования равной 1). Как видно, значения почти не зависят от индекса, поэтому детально можно рассмотреть лишь один элемент. Результаты более детального исследования (значений вещественной и мнимой частей  $Z_{11}$  для различных значений точности) приведены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что значения мнимой части  $Z_{11}$  при расчете по аналитическим формулам и методом Ньютона–Котеса отличаются незначительно. Различие значений вещественной части  $Z_{11}$  колеблется в пределах:  $\pm 5\%$  (при точности 1);  $\pm 4\%$  (при точности 0,1);  $\pm 2\%$  (при точности 0,01);  $\pm 0,3\%$  (при точности 0,001).

Таким образом, с ростом точности интегрирования его результаты сходятся к результатам, полученным по аналитическим формулам. При этом увеличивается время вычисления (при точности решения 0,001 – в 12 раз), а время вычисления по аналитическим формулам остается неизменным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. M. Rao, D. R. Wilton, A. W. Glisson, *Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape*. — IEEE Trans. Antennas & Propag. **30**, No. 3 (1982), 409–418.
2. И. С. Костарев, *Электромагнитное рассеяние поверхностями произвольной формы*. — Тез. докл. науч.-техн. конф. молодых специалистов “Электронные и электромеханические системы и устройства”, Томск (2008), 171–174.
3. Eng-Kee Chus, Xing-Chang Wei, *Closed-form evaluation of the integration of Green's function for method of moments*. — IEEE Trans. Inst. High Perform. Comput. **8** (2008), 942–945.
4. R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. Macmillan, New York (1968).
5. A. R. Hall, *Generalized Method of Moments*. Oxford University Press, 2005.
6. A. F. Peterson, S. L. Ray, R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*. — IEEE Press, 1998.
7. K. Mahadevan, H. A. Auda, *Electromagnetic field of a rectangular patch of uniform and linear distributions of current*. — IEEE Trans. Antennas & Propag. **37**, No. 12 (1989), 1503–1509.
8. L. Alatan, M. I. Aksum, K. Mahadevan, M. T. Birand, *Analytical evaluation of the MoM matrix elements*. — IEEE Trans. Microw. Theory & Techn. **44**, No. 4 (1996), 519–525.
9. E. K. Chua, K. Y. See, Z. N. Liu, *Accurate and efficient computation of MoM matrix involving 2D triangular basis functions with line matching*. — Int. J. Comput. Meth. **3**, No. 3 (2006), 355–370.

10. J. Waldovgen, *The Newtonian potential of a homogenous cube.* — J. Appl. Math. Phys. **27** (1976), 867–871.
11. K. Y. See, T. V. Freeman, *Rigorous approach to modeling electromagnetic radiation from finite-size printed circuit structure.* — IEE Proc. Microw. Antennas & Propag. **146**, No. 1 (1999), 29–34.
12. А. А. Самарский, А. В. Гулин, *Численные методы.* Наука, М., 1989.

Kostarev I. S., Gazizov T. R., Kazantsev Yu. M. Analytic evaluation of the matrix entries for linear algebraic systems in the problem of electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape.

The paper considers computation of the matrix entries for linear algebraic systems of equations occurring in the Rao–Wilton–Glisson solution by the method of moments for problems of electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. Using the Taylor series expansion and its truncation to four terms, all double integrals needed in computing the matrix entries are taken, and closed-form analytic expressions are obtained. It is demonstrated that these expressions provide for a faster and more accurate solution than numerical integration.

ОАО НПЦ “Полюс”,  
пр. Кирова 56в,  
634050, г. Томск, Россия  
*E-mail:* polus@online.tomsk.net

Поступило 26 апреля 2013 г.

ТУСУР,  
кафедра телевидения и управления,  
пр. Ленина 40, 634050, г. Томск, Россия  
*E-mail:* talgat@tu.tusur.ru

НИ ТПУ,  
кафедра промышленной и медицинской электроники,  
пр. Ленина 30, 634050,  
г.Томск, Россия  
*E-mail:* kazantsev@tpu.ru