E. V. Troitskii, D. V. Fufaev, Compact Operators and Uniform Structures in Hilbert C^*-Modules,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 2020, Volume 54, Issue 4, 74–84

Функциональный анализ и его приложения
2020, т. 54, вып. 4, с. 74–84

УДК 917.98

Компактные операторы и равномерные структуры в гильбертовых C^*-модулях[1]

© 2020. Е. В. Троицкий, Д. В. Фуфаев

Недавно был найден критерий $\mathcal{A}$-компактности оператора $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ между гильбертовыми C^*-модулями, допускающего сопряженный, где $\mathcal{N}$ — счетно порожденный модуль. А именно, была обнаружена такая равномерная структура (система псевдометрик) в $\mathcal{N}$, что оператор F является $\mathcal{A}$-компактным тогда и только тогда, когда множество $F(B)$ вполне ограничено, где $B \subset \mathcal{M}$ — единичный шар.

Мы доказываем, что (1) $\mathcal{A}$-компактность влечет за собой вполне ограниченность для модуля $\mathcal{N}$ общего вида, (2) для $\mathcal{N}$ со свойством $\mathcal{N} \oplus K \cong L$, где L — модуль ℓ_2-типа, не являющийся счетно порожденным, вполне ограниченность влечет за собой компактность и (3) для $\mathcal{N}$, близких к счетно порожденным, достаточно использовать лишь псевдометрики, «похожие на фреймовые», чтобы получить критерий $\mathcal{A}$-компактности.

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3809

Введение

В теории операторов в гильбертовых C^*-модулях над алгеброй $\mathcal{A}$ важнейшее место занимают так называемые $\mathcal{A}$-компактные, или «компактные», операторы — такие, которые приближаются по норме операторами конечного ранга (точнее, операторами с конечно порожденными образами). Их значение определяется той центральной ролью, которую они играют в K-теории и теории индекса эллиптических операторов с коэффициентами в C^*-алгебрах.

Для операторов в гильбертовых пространствах (т. е. в частном случае $\mathcal{A} = \mathbb{C}$) имеется критерий компактности: оператор компактен тогда и только тогда, когда он переводит ограниченные множества во вполне ограниченные по норме. Для общих операторов в гильбертовых C^*-модулях это не так: для унитальной бесконечномерной алгебры, рассматриваемой как модуль над собой, тождественный оператор будет оператором конечного ранга, но единичный шар не является вполне ограниченным по норме. Поскольку указанный критерий является основой важных инструментов исследований, то с самого начала развития теории (конец 70-х годов прошлого столетия) стоял вопрос о нахождении какого-то его аналога для модулей над алгебрами общего вида. Однако общее мнение склонялось к тому, что задача неразрешима. Некоторые попытки были предприняты в [5], [7], однако полученные утверждения работают для ограниченных классов модулей и алгебр и почти всегда дают не критерий, а только одностороннюю импликацию. Однако вслед за этим в [10] была найдена

[1] Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

такая равномерная структура, которая давала критерий $\mathcal{A}$-компактности в случае, когда оператор отображает произвольный модуль в счетно порожденный, в терминах вполне ограниченности образа единичного шара по отношению к этой равномерной структуре. В связи с этим ограничением (счетной порожденностью) возникает первый естественный вопрос: распространяется ли данный критерий на более широкий класс модулей?

С другой стороны, при построении указанной равномерной структуры используются системы элементов, по своим свойствам схожие с последовательностями Бесселя в теории фреймов в гильбертовых модулях — широко развитой области, которая берет начало от работ Франка и Ларсона [2], [3]. Таким образом, второй естественный вопрос — о возможной связи свойств построенной равномерной структуры и фреймовых свойств.

Настоящая работа посвящена изучению этих двух вопросов.

А именно, после некоторых предварительных определений и напоминаний (§1) мы доказываем, что у $\mathcal{A}$-компактного оператора образ единичного шара вполне ограничен относительно рассматриваемой равномерной структуры, для произвольного гильбертова C^*-модуля. Для этого мы доказываем следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес: $\mathcal{A}$-компактность оператора $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ влечет за собой $\mathcal{A}$-компактность оператора $F\colon \mathcal{M} \to F(\mathcal{M})$ (§2).

В §3 мы доказываем обратное утверждение (а именно, что вполне ограниченность образа единичного шара относительно рассматриваемой равномерной структуры влечет за собой $\mathcal{A}$-компактность) для некоторого класса гильбертовых C^*-модулей — а именно, для модулей, допускающих реализацию в качестве ортогонального прямого слагаемого в несчетном обобщении «стандартного модуля» ℓ_2.

В §4 мы вводим фреймовое свойство для допустимых систем (см. определение в §1) и доказываем, что если модуль $\mathcal{N}$ имеет хотя бы одну систему с этим свойством, то вполне ограниченные множества можно находить с использованием одних лишь систем с этим свойством.

Авторы благодарны А. И. Корчагину за полезные обсуждения.

§ 1. Определения и напоминания

Начнем с краткого напоминания основных понятий и фактов о C^*-алгебрах, гильбертовых C^*-модулях и операторах в них, которые можно найти в [6], [9], [8].

Определение 1.1. (Правым) предгильбертовым C^*-модулем над C^*-алгеброй $\mathcal{A}$ называется $\mathcal{A}$-модуль, снабженный $\mathcal{A}$-*внутренним произведением* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{A}$, являющимся такой полуторалинейной формой на подлежащем линейном пространстве, что для любых $x, y \in \mathcal{M}$, $a \in \mathcal{A}$

(1) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$;

(2) $\langle x, x\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(3) $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle^*$;

(4) $\langle x, y \cdot a\rangle = \langle x, y\rangle a$.

Гильбертов C^*-модуль — это такой предгильбертов C^*-модуль над $\mathcal{A}$, который полон по норме $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{1/2}$.

Предгильбертов C^*-модуль $\mathcal{M}$ называется *счетно порожденным*, если существует такой счетный набор его элементов, что их $\mathcal{A}$-линейные комбинации плотны в $\mathcal{M}$.

Мы будем обозначать через $\oplus$ гильбертову сумму гильбертовых C^*-модулей в понятном смысле.

Определение 1.2. *Оператор* — это ограниченный $\mathcal{A}$-гомоморфизм. Оператор, имеющий сопряженный (в понятном смысле), называется *допускающим сопряженный* (см. [9, §2.1]). Для произвольных гильбертовых C^*-модулей $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ обозначим банахово пространство всех операторов $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ через $\mathbf{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ и банахово пространство операторов, допускающих сопряженный, через $\mathbf{L}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Определение 1.3. Обозначим через $\theta_{x,y}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, где $x \in \mathcal{N}$ и $y \in \mathcal{M}$, *элементарный $\mathcal{A}$-компактный* оператор, который определяется формулой $\theta_{x,y}(z) := x\langle y, z\rangle$. Тогда банахово пространство *$\mathcal{A}$-компактных* операторов $\mathbf{K}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ — замыкание подпространства, порожденного всеми элементарными $\mathcal{A}$-компактными операторами в $\mathbf{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Замечание 1.4. Пространство $\mathbf{K}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ является инволютивным подпространством в $\mathbf{L}^*(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, C^*-алгебра $\mathbf{K}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ является идеалом C^*-алгебры $\mathbf{L}^*(\mathcal{M}, \mathcal{M})$, $\mathbf{K}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ является $\mathbf{L}^*(\mathcal{M}, \mathcal{M})$-$\mathbf{L}^*(\mathcal{N}, \mathcal{N})$-бимодулем, и, кроме того, $\mathbf{K}(\mathcal{M}, \mathcal{N})\mathbf{L}^*(\mathcal{N}, \mathcal{N}) \subseteq \mathbf{K}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ и $\mathbf{L}^*(\mathcal{M}, \mathcal{M})\mathbf{K}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \subseteq \mathbf{K}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ (см. [9, §2.2]).

Сейчас мы напомним определение равномерной структуры, заданной некоторой конкретной системой псевдометрик, и основной результат о ней из [10], где можно найти все необходимые детали и доказательства.

Определение 1.5. Рассмотрим гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над $\mathcal{A}$. Счетная система его элементов $X = \{x_i\}$ называется *допустимой* для (возможно, незамкнутого) подмодуля $\mathcal{N}^0 \subseteq \mathcal{N}$ (или *$\mathcal{N}^0$-допустимой*), если

(1) при каждом $x \in \mathcal{N}^0$ ряд $\sum_i \langle x, x_i\rangle\langle x_i, x\rangle$ сходится по норме;

(2) его сумма ограничена элементом $\langle x, x\rangle$, т. е. $\sum_i \langle x, x_i\rangle\langle x_i, x\rangle \leqslant \langle x, x\rangle$;

(3) $\|x_i\| \leqslant 1$ для любого i.

Определение 1.6. Обозначим через Φ произвольный счетный набор $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ состояний на $\mathcal{A}$. Для каждой пары (X, Φ) с $\mathcal{N}^0$-допустимой системой X рассмотрим неотрицательную функцию $d_{X,\Phi}(\,\cdot\,, \,\cdot\,)$, заданную равенством

$$d_{X,\Phi}(x, y)^2 := \sup_k \sum_{i=k}^{\infty} |\varphi_k(\langle x - y, x_i\rangle)|^2, \qquad x, y \in \mathcal{N}^0. \tag{1.1}$$

Эти псевдометрики задают *равномерную структуру*. Будем писать $(X, \Phi) \in \mathbb{A}(\mathcal{N}, \mathcal{N}^0)$ о парах с допустимой системой X.

Замечание 1.7. Легко видеть, что если $\mathcal{N}^0 \subseteq \mathcal{N}$ является подмодулем, то $\mathbb{A}(\mathcal{N}^0, \mathcal{N}^0) \subseteq \mathbb{A}(\mathcal{N}, \mathcal{N}^0)$ и $\mathbb{A}(\mathcal{N}, \mathcal{N}) \subseteq \mathbb{A}(\mathcal{N}, \mathcal{N}^0)$.

Определение 1.8. Множество $Y \subseteq \mathcal{N}^0 \subseteq \mathcal{N}$ называется *вполне ограниченным* по отношению к этой равномерной структуре, если для любой пары (X, Φ), где $X \subseteq \mathcal{N}$ является $\mathcal{N}^0$-допустимой, и любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть в Y для $d_{X,\Phi}$.

Мы будем говорить в этом случае, что Y является $(\mathcal{N}, \mathcal{N}^0)$-*вполне ограниченным.*

Замечание 1.9. В силу замечания 1.7 легко видеть, что если Y является $(\mathcal{N}, \mathcal{N}^0)$-вполне ограниченным, то Y является $(\mathcal{N}, \mathcal{N})$-вполне ограниченным.

Имеется следующая эквивалентность, связывающая это понятие и $\mathcal{A}$-компактность.

Теорема 1.10 [10, теорема 2.13]**.** *Пусть $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ — морфизм гильбертовых $\mathcal{A}$-модулей, допускающий сопряженный, и $\mathcal{N}$ — счетно порожденный модуль. Тогда F является $\mathcal{A}$-компактным в том и только том случае, когда $F(B)$ является $(\mathcal{N}, \mathcal{N})$-вполне ограниченным, где B — единичный шар в $\mathcal{M}$.*

Везде в данной работе мы не уточняем, открытый или замкнутый шар рассматривается, поскольку это безразлично для наших определений и утверждений.

Напомним понятие фрейма в гильбертовом модуле.

Определение 1.11 **(**[3, определение 2.1]**).** *Фреймом* в гильбертовом C^*-модуле $\mathcal{N}$ над унитальной C^*-алгеброй $\mathcal{A}$ называется счетная система $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, \dots)$ его элементов, такая, что существуют положительные постоянные c и C, такие, что для любого $x \in \mathcal{N}$ ряд $\sum_i \langle x, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle$ сходится в $\mathcal{A}$ и справедливо неравенство

$$c\langle x, x \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle \leqslant C \langle x, x \rangle.$$

Роль теории фреймов в нашем контексте заключается в следующем. Из теоремы Каспарова о стабилизации ([4], см. также [9, теорема 1.4.2]) и результатов Франка и Ларсона ([3, 3.5, 4.1 и 5.3]) вытекает

Теорема 1.12. *Следующие три свойства гильбертова модуля $\mathcal{N}$ над унитальной C^*-алгеброй $\mathcal{A}$ эквивалентны:*

(1) *$\mathcal{N}$ — счетно порожденный модуль;*

(2) $\mathcal{N} \oplus \ell_2(\mathcal{A}) \cong \ell_2(\mathcal{A})$;

(3) *в $\mathcal{N}$ существует счетный фрейм.*

§ 2. $\mathcal{A}$-компактность влечет за собой вполне ограниченность

Определение 2.1. Обозначим через $\dot{\mathcal{A}}$ алгебру $\mathcal{A}$, если она унитальна, и ее унитализацию в противном случае. Таким образом, $\dot{\mathcal{A}}$ унитальна.

Теорема 2.2. *Пусть $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ есть $\mathcal{A}$-компактный оператор. В частности, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральное n и элементы $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{N}$*

и $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{M}$, *такие, что*

$$\left\| F - \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i, y_i} \right\| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Тогда найдутся $\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n \in F(\mathcal{M})$ *и* $\widehat{y}_1, \dots, \widehat{y}_n \in \mathcal{M}$, *такие, что*

$$\left\| F - \sum_{i=1}^{n} \theta_{\widehat{x}_i, \widehat{y}_i} \right\| < 2\varepsilon. \tag{2.2}$$

Как следствие $F\colon \mathcal{M} \to F(\mathcal{M})$ *есть* $\mathcal{A}$*-компактный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M} \oplus (\dot{\mathcal{A}})^n$. Обозначим через p ортогональный проектор $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}$, а через $e_1, \dots, e_n$ стандартный базис в $(\dot{\mathcal{A}})^n$. Рассмотрим

$$\widetilde{y}_i := y_i + \frac{\varepsilon}{n\|x_i\|} e_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

Это образующие свободного конечно порожденного подмодуля $M_n \subset \mathcal{M}_1$. Такой модуль имеет ортогональное дополнение в любом модуле (см., например, [9, лемма 2.3.7]). Обозначим через $f_1, \dots, f_n$ $\dot{\mathcal{A}}$-ортонормированный базис в M_n и через q_n ортогональный проектор $\mathcal{M}_1 \to M_n$.

Теперь определим оператор $\widetilde{F}\colon \mathcal{M}_1 \to \mathcal{N}$ равным F на $\mathcal{M}$ и 0 на $(\dot{\mathcal{A}})^n$, т. е.

$$\widetilde{F} = F \circ p. \tag{2.4}$$

Заметим, что операторы θ_{x_i, y_i} могут рассматриваться как определенные на $\mathcal{M}_1$ и обращающиеся в нуль на $(\dot{\mathcal{A}})^n$. Следовательно, из (2.1) вытекает, что

$$\left\| \widetilde{F} - \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i, y_i} \right\| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Теперь из (2.5) и (2.3) следует, что

$$\left\| \widetilde{F} - \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i, \widetilde{y}_i} \right\| < 2\varepsilon. \tag{2.6}$$

Тогда

$$2\varepsilon > \left\| \left(\widetilde{F} - \sum_{i=1}^{n} \theta_{x_i, \widetilde{y}_i} \right)(1 - q_n) \right\| = \|\widetilde{F}(1 - q_n)\|. \tag{2.7}$$

Для любого $z \in \mathcal{M}_1$ и его проекции $q_n(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j \alpha_j$ имеем

$$\left(\widetilde{F} - \sum_{i=1}^{n} \theta_{\widetilde{F}(f_i), f_i} \right) q_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{F}(f_j)\alpha_j - \sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{F}(f_i)\langle f_i, f_j \rangle \alpha_j = 0. \tag{2.8}$$

Из (2.7) получаем

$$\left\| \left(\widetilde{F} - \sum_{i=1}^{n} \theta_{\widetilde{F}(f_i), f_i} \right)(1 - q_n) \right\| = \|\widetilde{F}(1 - q_n)\| < 2\varepsilon. \tag{2.9}$$

Теперь (2.8) и (2.9) дают $\|\widetilde{F}-\sum_{i=1}^n \theta_{\widetilde{F}(f_i),f_i}\|<2\varepsilon$. Ограничивая эту разность на $\mathcal{M}$, приходим к соотношению

$$2\varepsilon > \left\|F-\sum_{i=1}^n \theta_{\widetilde{F}(f_i),p(f_i)}\right\| = \left\|F-\sum_{i=1}^n \theta_{F(p(f_i)),p(f_i)}\right\|. \tag{2.10}$$

Таким образом, имеем (2.2) для $\widehat{x}_i=F(p(f_i))$, $\widehat{y}_i=p(f_i)$, $i=1,\dots,n$. □

Следствие 2.3. *Образ $\mathcal{A}$-компактного оператора — счетно порожденный модуль.*

Теорема 2.4. *Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ — гильбертовы C^*-модули над алгеброй $\mathcal{A}$, $F\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ есть $\mathcal{A}$-компактный оператор, B — единичный шар в $\mathcal{M}$. Тогда $F(B)$ является $(\mathcal{N},\mathcal{N})$-вполне ограниченным.*

Доказательство. По следствию 2.3 модуль $F(M)$ является счетно порожденным. Возьмем произвольную пару $(X,\Phi)\in\mathbb{A}(\mathcal{N},\mathcal{N})$. Модуль $\mathcal{N}_X$, порожденный модулем $F(M)$ и $\{x_i\}=X$, также счетно порожденный, при этом $(X,\Phi)\in\mathbb{A}(\mathcal{N}_X,\mathcal{N}_X)$, так как $\mathcal{N}_X\subseteq\mathcal{N}$. Оператор F, рассматриваемый как оператор, действующий в модуль $\mathcal{N}_X$, также является $\mathcal{A}$-компактным. Действительно, по теореме 2.2 он является $\mathcal{A}$-компактным как оператор $\mathcal{M}\to F(\mathcal{M})$, а значит, и как оператор $\mathcal{M}\to\mathcal{N}_X\supseteq F(\mathcal{M})$. Следовательно, по теореме 1.10 множество $F(B)$ является $(\mathcal{N}_X,\mathcal{N}_X)$-вполне ограниченным. Значит, оно имеет конечную ε-сеть относительно полуметрики $d_{X,\Phi}$ для любой пары $(X,\Phi)\in\mathbb{A}(\mathcal{N}_X,\mathcal{N}_X)$, в частности, для исходной пары (X,Φ). □

§ 3. Унитально проективные модули

Определение 3.1. Пусть $\{\mathcal{N}^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — семейство гильбертовых $\mathcal{A}$-модулей; тогда можно определить гильбертов $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{N}=\bigoplus_{\omega\in\Omega}\mathcal{N}^\omega$ всех функций $x(\,\cdot\,)\colon\Omega\to\bigcup_{\omega\in\Omega}\mathcal{N}^\omega$, таких, что $x(\omega)\in\mathcal{N}^\omega$, $x(\omega)\neq 0$ только для счетного множества $\omega(i)$, $i\in\mathbb{N}$, и ряд $\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle x(\omega(i)),x(\omega(i))\rangle$ сходится по норме в $\mathcal{A}$ (причем все $\omega(i)$ различны). $\mathcal{A}$-значное внутреннее произведение в $\mathcal{N}$ определяется по формуле $\langle x(\,\cdot\,),y(\,\cdot\,)\rangle=\sum_{\omega\in\Omega}\langle x(\omega),y(\omega)\rangle$, где сумма берется по ненулевым слагаемым. Также будем использовать обозначение $x(\,\cdot\,)=x$.

Заметим, что, в частности, $\lim_{i\to\infty}\|\langle x(\omega(i)),x(\omega(i))\rangle\|=0$.

Через $\ell_2^\Omega(\mathcal{A})$ обозначим «ℓ_2-модуль мощности Ω», т. е. модуль $\bigoplus_{\omega\in\Omega}\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ рассматривается как $\mathcal{A}$-модуль с внутренним произведением $\langle a,b\rangle=a^*b$.

Лемма 3.2. *Пусть для системы $\{x_i\}=X\subset\mathcal{N}=\bigoplus_{\omega\in\Omega}\mathcal{N}^\omega$ существуют $\omega(i)\in\Omega$, $i\in\mathbb{N}$, такие, что $\omega(i)\neq\omega(k)$ при $i\neq k$, $\|x_i\|\leqslant 1$ для всех i и у x_i только компонента с индексом $\omega(i)$ не равна нулю (т. е. $x_i(\omega(i))\neq 0$, $x_i(\omega(k))=0$ при $i\neq k$). Тогда X является $\mathcal{N}$-допустимой.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x\in\mathcal{N}$. Нетрудно видеть, что ряд $\sum_{i\in\mathbb{N}}\langle x(\omega(i)),x(\omega(i))\rangle$ сходится по норме в $\mathcal{A}$. Пусть q_i — ортогональный проектор на модуль $\mathcal{N}^{\omega(i)}$. В частности, $x_i=q_i^*q_ix_i$, $q_ix=x(\omega(i))$ и

$\|q_i x_i\| \leqslant 1$. Для любых $n < m$ по неравенству Коши–Буняковского для гильбертовых C^*-модулей (см., например, [9, 1.2.4]) имеем

$$\sum_{i=n}^{m} \langle x, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle = \sum_{i=n}^{m} \langle x, q_i^* q_i x_i \rangle \langle q_i^* q_i x_i, x \rangle = \sum_{i=n}^{m} \langle q_i x, q_i x_i \rangle \langle q_i x_i, q_i x \rangle$$
$$\leqslant \sum_{i=n}^{m} \|q_i x_i\|^2 \langle q_i x, q_i x \rangle \leqslant \sum_{i=n}^{m} \langle x(\omega(i)), x(\omega(i)) \rangle.$$

Отсюда по критерию Коши ряд $\sum_{i \in \mathbb{N}} \langle x, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle$ сходится. Пункт (2) определения $\mathcal{N}$-допустимости доказан. Для доказательства п. (3) заметим, что

$$\sum_{i=1}^{m} \langle x, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m} \langle x(\omega(i)), x(\omega(i)) \rangle \leqslant \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle x(\omega(i)), x(\omega(i)) \rangle$$
$$\leqslant \sum_{\omega \in \Omega} \langle x(\omega), x(\omega) \rangle = \langle x, x \rangle. \qquad \square$$

Следующее утверждение — некоторое обобщение леммы 4.4 из [10].

Лемма 3.3. *Предположим, что* $Y \subset \mathcal{N} = \bigoplus_{\omega \in \Omega} \mathcal{N}^\omega$ *является* $(\mathcal{N}, \mathcal{N})$*-вполне ограниченным. Тогда*

(1) *для любого* $\delta > 0$ *существует только конечное число индексов* $\omega(1), \dots, \omega(d)$, *таких, что* $\sup_{z \in Y} \|q_{\omega(k)} z\| > \delta$, $k = 1, \dots, d$, *где* q_ω *— проектор на модуль* $\mathcal{N}^\omega$;

(2) $\sup_{z \in Y} \|q_\omega z\| = 0$ *для всех* $\omega \in \Omega$ *кроме счетного числа*;

(3) *найдется счетное множество индексов* $\Omega' \subset \Omega$, *такое, что* Y *содержится в* $\mathcal{N}' = \bigoplus_{\omega \in \Omega'} \mathcal{N}^\omega$;

(4) Y *является* $(\mathcal{N}', \mathcal{N}')$*-вполне ограниченным.*

Доказательство. Предположим, что утверждение (1) неверно. Тогда найдутся $\delta > 0$, последовательность индексов $\omega(i) \in \Omega$ и соответствующая последовательность элементов $z_i \in Y$, таких, что $\|q_{\omega(i)} z_i\| > \delta$.

Пусть $a_i = q_{\omega(i)}(z_i) / \|q_{\omega(i)}(z_i)\| \in \mathcal{N}^{\omega(i)}$. Тогда a_i имеет норму 1 и удовлетворяет неравенству

$$\|\langle a_i, q_{\omega(i)}(z_i) \rangle\| > \delta. \tag{3.1}$$

Пусть x_i — элемент из $\mathcal{N}$, такой, что $x_i = q_{\omega(i)}^* a_i$, $(1 - q_{\omega(i)}) x_i = 0$, т. е. мы продолжили a_i вне $\mathcal{N}^{\omega(i)}$ нулем. По лемме 3.2 система $X = \{x_i\}$ является $\mathcal{N}$-допустимой.

На $\mathcal{A}$ найдется состояние φ_i, такое, что

$$|\varphi_i(\langle a_i, q_{\omega(i)}(z_i) \rangle)| > \delta/2, \qquad i = 1, 2, \dots \tag{3.2}$$

(см., например, [10, лемма 1.2]). Возьмем $\Phi = \{\varphi_i\}$. По условию Y вполне ограничено относительно полуметрики $d_{X,\Phi}$, поэтому существует $\delta/8$-сеть $\{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$.

Найдется число D, такое, что для любого $k = 1, \dots, n$ и всех $i > D$ справедливо неравенство

$$\|q_{\omega(i)} y_k\| < \delta/4 \tag{3.3}$$

Тогда

$$\begin{aligned} d_{X,\Phi}(z_i, y_k) &\geqslant |\varphi_i(\langle z_i - y_k, x_i \rangle)| = |\varphi_i(\langle x_i, z_i - y_k \rangle)| \\ &= |\varphi_i(\langle a_i, q_{\omega(i)} z_i \rangle) - \varphi_i(\langle a_i, q_{\omega(i)} y_k \rangle)| \geqslant \delta/2 - \delta/4 = \delta/4. \end{aligned}$$

Поэтому $\{y_1, \dots, y_n\}$ не является $\delta/8$-сетью. Противоречие.

Утверждение (2) следует из (1), если положить $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, и (3) следует из (2), после чего (4) вытекает из доказательства леммы 2.15 из [10]. □

Замечание 3.4. Если мы будем рассматривать операторы между двумя $\mathcal{A}$-модулями как операторы между $\dot{\mathcal{A}}$-модулями, то условие $\mathcal{A}$-компактности равносильно условию $\dot{\mathcal{A}}$-компактности.

Докажем теперь утверждение, обратное к теореме 2.4, для некоторого класса гильбертовых C^*-модулей, которые можно назвать «унитально проективными».

Теорема 3.5. *Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ и $\mathcal{K}$ — гильбертовы $\mathcal{A}$-модули, $\mathcal{N} \oplus \mathcal{K} \cong \ell_2^\Omega(\dot{\mathcal{A}})$ для некоторого Ω, $F \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ — оператор, допускающий сопряженный, и $F(B)$ является $(\mathcal{N}, \mathcal{N})$-вполне ограниченным множеством, где B — единичный шар в $\mathcal{M}$. Тогда F является $\mathcal{A}$-компактным как оператор из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$.*

Доказательство. Обозначим через S отображение стабилизации $S \colon \mathcal{N} \to \mathcal{N} \oplus \mathcal{K} \cong \ell_2^\Omega(\dot{\mathcal{A}})$ (отметим, что этот изоморфизм может рассматриваться как изоморфизм $\dot{\mathcal{A}}$-модулей) и положим $F' = S \circ F$. Тогда по лемме 2.15 из [10] $F'(B)$ также является $(\ell_2^\Omega(\dot{\mathcal{A}}), \ell_2^\Omega(\dot{\mathcal{A}}))$-вполне ограниченным. По лемме 3.3 найдется счетное множество Ω', такое, что $F'(B) \subset \ell_2^{\Omega'}(\dot{\mathcal{A}})$ и $F'(B)$ является $(\ell_2^{\Omega'}(\dot{\mathcal{A}}), \ell_2^{\Omega'}(\dot{\mathcal{A}}))$-вполне ограниченным. Очевидно, $\ell_2^{\Omega'}(\dot{\mathcal{A}})$ счетно порожден как $\dot{\mathcal{A}}$-модуль. Тогда по теореме 1.10 оператор $Q_{\Omega'} \circ F'$ является $\dot{\mathcal{A}}$-компактным. Поскольку $Q_{\Omega'} \circ S$ — изоморфизм на $F(\mathcal{M})$, то по замечанию 1.4 F также является $\dot{\mathcal{A}}$-компактным. По замечанию 3.4 F является $\mathcal{A}$-компактным. □

Замечание 3.6. Если алгебра $\mathcal{A}$ как модуль над собой является счетно порожденным модулем, то она также является счетно порожденным $\dot{\mathcal{A}}$-модулем. Отсюда и из теоремы Каспарова о стабилизации следует, что для модулей над такими алгебрами из проективности вытекает унитальная проективность, поэтому в условии предыдущей теоремы достаточно условия проективности. Тем не менее для этого случая можно дать и независимое доказательство.

§ 4. Фреймовое свойство для равномерных структур

Определение 4.1. Мы будем говорить, что $\mathcal{N}^0$-допустимая система X является **f**-$\mathcal{N}^0$-допустимой (“**f**” от “frame”), или имеет фреймовое свойство, если условие (2) определения 1.5 заменено следующим:

(2**f**) существует такое $c \in (0, 1]$, что $c\langle x, x \rangle \leqslant \sum_i \langle x, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle \leqslant \langle x, x \rangle$.
Константа c называется *нижней границей* для системы X.

Определение 4.2. Мы будем говорить, что множество Y является $\mathbf{f}$-$(\mathcal{N},\mathcal{N}^0)$-*вполне ограниченным*, если в определении 1.8 мы рассматриваем только $\mathbf{f}$-$\mathcal{N}^0$-допустимые системы.

Очевидно, что следующее утверждение — самое большее, на что можно рассчитывать при сравнении вполне ограниченности и $\mathbf{f}$-вполне ограниченности.

Теорема 4.3. *Пусть у $\mathcal{N}$ имеется $\mathbf{f}$-$\mathcal{N}^0$-допустимая система $\widehat{X}=\{\widehat{x}_i\}$. Тогда множество $Y\subseteq\mathcal{N}^0$ является $(\mathcal{N},\mathcal{N}^0)$-вполне ограниченным в том и только том случае, когда оно является $\mathbf{f}$-$(\mathcal{N},\mathcal{N}^0)$-вполне ограниченным.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно, так что нам нужно доказать следующее. Пусть Y не является $(\mathcal{N},\mathcal{N}^0)$-вполне ограниченным, т. е. существуют такие допустимая пара (X,Φ), $\varepsilon>0$ и последовательность $y_1,y_2,\dots$, что $d_{X,\Phi}(y_i,y_j)\geqslant\varepsilon$ для любых $i\neq j$ (можно считать, что $\varepsilon<1$). Тогда найдутся такие $\mathbf{f}$-$\mathcal{N}^0$-допустимая система $X'=\{x'_k\}$ и набор состояний $\Phi'=\{\varphi'_k\}$, что $d_{X',\Phi'}(y_i,y_j)\geqslant\varepsilon/2$ для любых $i\neq j$. Действительно, определим пару (X',Φ') следующим образом:

$$x'_{2i-1}:=\sqrt{1-(\varepsilon/2)^2}\,x_i,\quad x'_{2i}=(\varepsilon/2)\widehat{x}_i,$$
$$\varphi'_{2i-1}=\varphi_i,\quad \varphi'_{2i}\ \text{произвольно},\ i=1,2,\dots.$$

Очевидно, что для любого $x\in\mathcal{N}^0$ ряд $\sum_k\langle x,x'_k\rangle\langle x'_k,x\rangle$ сходится по норме,

$$\sum_k\langle x,x'_k\rangle\langle x'_k,x\rangle=\Bigl(1-\Bigl(\frac{\varepsilon}{2}\Bigr)^2\Bigr)\sum_i\langle x,x_i\rangle\langle x_i,x\rangle+\Bigl(\frac{\varepsilon}{2}\Bigr)^2\sum_i\langle x,\widehat{x}_i\rangle\langle\widehat{x}_i,x\rangle\leqslant\langle x,x\rangle,$$

и

$$\sum_k\langle x,x'_k\rangle\langle x'_k,x\rangle\geqslant\Bigl(\frac{\varepsilon}{2}\Bigr)^2\sum_i\langle x,\widehat{x}_i\rangle\langle\widehat{x}_i,x\rangle\geqslant c\Bigl(\frac{\varepsilon}{2}\Bigr)^2\langle x,x\rangle,$$

где c — нижняя граница для системы $\widehat{X}$. Таким образом, X' является $\mathbf{f}$-$\mathcal{N}^0$-допустимой. Для любого $\delta>0$ мы можем найти такое s, что

$$\varepsilon^2\leqslant d_{X,\Phi}(y_i,y_j)^2\leqslant\sum_{m=s}^{\infty}|\varphi_s(\langle y_i-y_j,x_m\rangle)|^2+\delta^2.$$

Тогда при $\delta=\varepsilon/2$

$$\begin{aligned}d_{X',\Phi'}(y_i,y_j)^2&\geqslant\sum_{r=2s-1}^{\infty}|\varphi'_{2s-1}(\langle y_i-y_j,x'_r\rangle)|^2\\&\geqslant\Bigl(1-\Bigl(\frac{\varepsilon}{2}\Bigr)^2\Bigr)\sum_{m=s}^{\infty}|\varphi_s(\langle y_i-y_j,x_m\rangle)|^2\\&\geqslant\Bigl(1-\Bigl(\frac{\varepsilon}{2}\Bigr)^2\Bigr)(\varepsilon^2-\delta^2)\geqslant\frac{3}{4}\,\frac{3\varepsilon^2}{4}>\frac{\varepsilon^2}{4}.\end{aligned}$$

Значит, (X',Φ') имеет необходимые свойства. $\square$

Тем не менее неизвестно, можно ли ответить на вопрос о вполне ограниченности для всех множеств, используя только одну конкретную систему с фреймовым свойством. В качестве иллюстрации мы приведем пример таких модуля $\mathcal{N}$, его подмодуля $\mathcal{N}^0$ и двух $\mathbf{f}$-$\mathcal{N}^0$-допустимых систем, что единичный шар в $\mathcal{N}^0$ вполне ограничен относительно первой системы и любого набора состояний и не является вполне ограниченным относительно второй системы и некоторого набора состояний.

Пример 4.4. Пусть $\mathcal{N} = C[0,1]$, $\mathcal{N}_0 = C_0(0,1]$, $\widehat{X} = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots\}$, $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, где $x_i \colon [0,1] \to [0,1]$, $t_i := 1/i$, $x_i(t_i) = 1$, $\operatorname{supp} x_i \subseteq [t_{i+1}, t_{i-1}]$ при $i \geqslant 2$, $\operatorname{supp} x_1 \subseteq [t_2, 1]$ и поточечно

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \neq 0, \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

Мы утверждаем, что единичный шар B в $\mathcal{N}_0$ является вполне ограниченным для любого $d_{\widehat{X},\widehat{\Phi}}$ (в понятном смысле) и не является вполне ограниченным для некоторого $d_{X,\Phi}$. Для первого определение полуметрики сводится к

$$d_{\widehat{X},\widehat{\Phi}}(x,y) = |\widehat{\varphi}_1(x-y)|.$$

Поэтому B вполне ограничен по отношению к $d_{\widehat{X},\widehat{\Phi}}$. В самом деле, это вычисление факторизуется через $\mathbb{C}$ (см. [1, гл. IX, разд. 2.1]), а в $\mathbb{C}$ любое ограниченное множество является вполне ограниченным (относительно стандартной метрики).

Теперь рассмотрим $d_{X,\Phi}$, где $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$, а каждое φ_i — взятие значения в t_i. Имеем $\varphi_i(x_i) = 1$ и $\varphi_i(x_j) = 0$, если $i \neq j$. Тогда если $i \neq j$, то

$$d_{X,\Phi}(x_i, x_j) \geqslant \varphi_i(x_i(x_i - x_j)) = 1.$$

Значит, B не является вполне ограниченным по отношению к $d_{X,\Phi}$.

Литература

[1] Н. Бурбаки, *Общая топология*: *Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов*, Наука, М., 1975.

[2] M. Frank, D. R. Larson, *A module frame concept for Hilbert C^*-modules*, in: *The functional and harmonic analysis of wavelets and frames* (*San Antonio*, *TX*, 1999), Contemp. Math., vol. 247, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 207–233.

[3] M. Frank, D. R. Larson, *Frames in Hilbert C^*-modules and C^*-algebras*, J. Operator Theory, **48**:2 (2002), 273–314.

[4] G. G. Kasparov, *Hilbert C^*-modules*: *theorems of Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory, **4** (1980), 133–150.

[5] D. J. Kečkić, Z. Lazović, *Compact and "compact" operators on standard Hilbert modules over W^*-algebras*, Ann. Funct. Anal., **9**:2 (2018), 258–270; arXiv: 1610.06956.

[6] E. C. Lance, *Hilbert C^*-modules. A toolkit for operator algebraists*, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[7] Z. Lazović, *Compact and "compact" operators on standard Hilbert modules over C^*-algebras*, Adv. Oper. Theory, **3**:4 (2018), 829–836.

[8] V. M. Manuilov, E. V. Troitsky, *Hilbert C^*- and W^*-modules and their morphisms*, J. Math. Sci., **98**:2 (2000), 137–201.

[9] В. М. Мануйлов, Е. В. Троицкий, *C^*-гильбертовы модули*, Факторил Пресс, М., 2001.

[10] E. V. Troitsky, *Geometric essence of "compact" operators on Hilbert C^*-modules*, J. Math. Anal. Appl., **485**:2 (2020), 123842.

Е. В. Троицкий
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: troitsky@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
15 июня 2020 г.
После доработки
15 июля 2020 г.
Принята к публикации
21 июля 2020 г.

Д. В. Фуфаев
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: fufaevdv@rambler.ru