A. N. Philippou, The Poisson and compound Poisson distributions of order k and some of their properties, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 130, 175–180

Андреас Н.Филиппу

ПУАССОНОВСКИЕ И СЛОЖНЫЕ ПУАССОНОВСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРЯДКА k И НЕКОТОРЫЕ ИХ СВОЙСТВА

I. Введение.

В дальнейшем k и r обычно обозначают фиксированные положительные целые числа, x_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ и x – неотрицательные целые числа, параметры p, λ и α принимают значения из промежутков, соответственно, $(0,1)$, $(0,\infty)$ и $(0,\infty)$, $q = 1-p$. Пусть X_r – случайная величина с отрицательным биномиальным распределением порядка k с параметрами (r,p), т.е.

$$P(X_r = x) = \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_k:\\ x_1+2x_2+\ldots+kx_k = x-kr}} \binom{x_1+\ldots+x_k+r-1}{x_1,\ldots,x_k,r-1} p^x \left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}, \quad x \geqslant kr. \tag{I.I}$$

Это распределение, представляющее практический интерес, было рассмотрено Филиппу в работе [I], где приводятся его производящая функция, среднее и дисперсия. Филиппу, Георгиу и Филиппу [2] в предположении, что $q \to 0$ и $rq \to \lambda$ при $r \to \infty$, показали, что

$$P(X_r - kr = x) \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_k:\\ x_1+2x_2+\ldots+kx_k = x}} e^{-k\lambda} \frac{\lambda^{x_1+\ldots+x_k}}{x_1!\ldots x_k!}, \quad x = 0,1,\ldots \tag{I.2}$$

В настоящей работе мы устанавливаем, что предел в (I.2) представляет собой вероятностное распределение, формально определяемое в разделе 2 и обозначаемое $P_k(x;\lambda)$. Это распределение естественно назвать пуассоновским распределением порядка k. Далее мы находим его производящую функцию $\Upsilon_k(\cdot)$, среднее и дисперсию. Затем, эта производящая функция используется для доказательства сохранения типа распределения при сложении независимых величин. Наконец, мы вводим обобщенное составное пуассоновское распределение, обозначаемое $CP_k(\cdot\,; r,\alpha)$, и изучаем его свойства. В конце работы формулируются две нерешенные задачи.

Предлагаемая работа обобщает хорошо известные свойства пуассоновского и сложного пуассоновского распределений и может представить интерес для прикладной теории вероятностей и статистики.

2. Пуассоновское распределение порядка k .

В этом разделе дается формальное определение пуассоновского распределения порядка k и изучаются некоторые его свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.I. Говорят, что случайная величина X имеет пуассоновское распределение порядка k с параметром λ (обозначается $P_k(x,\lambda)$), если

$$P(X=x) \stackrel{def}{=} P_k(x,\lambda) = \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_k:\\ x_1+2x_2+\ldots+kx_k=x}} e^{-k\lambda} \frac{\lambda^{x_1+\ldots+x_k}}{x_1!\ldots x_k!}, \qquad x=0,1,\ldots$$

Очевидно, $P_1(\cdot;\lambda)$ – обычное пуассоновское распределение.

ЛЕММА 2.I. $\sum_{x=0}^{\infty} P_k(x,\lambda)=1$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из мультиномиальной теоремы с помощью преобразования $x_i=n_i \ (1\leq i\leq k)$ и $x=n+\sum_{i=1}^{k}(i-1)n_i$.

ЛЕММА 2.2. Пусть X – случайная величина, распределенная по закону $P_k(x;\lambda)$. Тогда ее производящая функция, обозначаемая $Y_k(\cdot)$, задается формулой

$$Y_k(s)=exp\Big[-\lambda\big(k-\sum_{i=1}^{k}s^i\big)\Big], \ |s|\leq 1 \quad .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$Y_k(s)=E(s^X)=\sum_{x=0}^{\infty}s^x P_k(x,\lambda)$$

и по лемме 2.I ряд сходится абсолютно при $|s|\leq 1$. Далее, при $|s|<1$

$$Y_k(s)=\sum_{x=0}^{\infty}s^x \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_k:\\ x_1+2x_2+\ldots+kx_k=x}} e^{-k\lambda}\frac{\lambda^{x_1+\ldots+x_k}}{x_1!\ldots x_k!} =$$

$$= e^{-k\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_k:\\ x_1+2x_2+\ldots+kx_k=x}} \binom{x_1+\ldots+x_k}{x_1,\ldots,x_k}\frac{\lambda^{x_1+\ldots+x_k}}{(x_1+\ldots+x_k)!}s^x =$$

$$= e^{-k\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{\substack{n_1,\dots,n_k:\\ n_1+\dots+n_k=n}}\binom{n_1+\dots+n_k}{n_1,\dots,n_k} s^{n_1+2n_2+\dots+kn_k},$$

(полагая $x_i = n_i\ (1\leq i\leq k)$ и $x = n + \sum_{i=1}^{n}(i-1)n_i$)

$$= e^{-k\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(s+s^2+\dots+s^k)^n = \exp(-\lambda k + \lambda\sum_{i=1}^{k} s^i).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть случайная величина X имеет распределение $P_k(x;\lambda)$, тогда $E(X) = \frac{k(k+1)}{2}\lambda$ и $\sigma^2(X) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{2}\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $E(X) = \frac{\partial}{\partial s}Y_k(s)\Big|_{s=1} = \lambda\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}\lambda$,

$$E[X(X-1)] = \frac{\partial^2}{\partial s^2}Y_k(s)\Big|_{s=1} = \lambda\sum_{i=1}^{k}(i-1)i + (\lambda\sum_{i=1}^{k} i)^2 =$$

$= \frac{(k-1)k(k+1)}{3}\lambda + \left[\frac{k(k+1)}{2}\lambda\right]^2$, откуда $\sigma^2(X)$ находится немедленно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $X_1, X_2, \dots X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $P_k(\cdot\,;\lambda)$, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Из предложения 2.1 вытекает, что $\hat{\lambda} = 2\bar{X}/k(k+1)$ является несмещенной состоятельной оценкой λ с дисперсией, равной $2(2k+1)\lambda/3k(k+1)n$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X_i ($1\leq i\leq n$) – независимо распределенные по законам $P_k(\cdot\,;\lambda_i)$ соответственно случайные величины, $X = X_1+\dots+X_n$, $\lambda = \lambda_1+\dots+\lambda_n$. Тогда X распределена по закону $P_k(\cdot\,;\lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что производящая функция распределения случайной величины X задается равенством

$$Y_k(s) = \exp\left[-\lambda(k-\sum_{i=1}^{k} s^i)\right],\ |s|\leq 1 .$$

Действительно, по лемме 2.2 с учетом независимости

$$Y_k(s) = E(s^{X_1+\dots+X_n}) = \prod_{i=1}^{n}\exp[-\lambda_i(k-\sum_{i=1}^{n} s^i)] = \exp[-\lambda(k-\sum_{i=1}^{n} s^i)],\ |s|\leq 1.$$

3. Сложное пуассоновское распределение порядка k.

В этом разделе вводится обобщенное сложное пуассоновское распределение и изучаются его свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. Пусть X и Λ такие две случайные величины, что условное распределение $X|\Lambda=\lambda$ совпадает с $P_k(\cdot;\lambda)$ и плотность распределения Λ имеет вид: $f_\Lambda(\lambda)=$
$=\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\lambda^{r-1}e^{-\alpha\lambda}$, $\lambda>0$. Тогда

$$P(X=x)=\sum_{\substack{x_1,\dots,x_k:\\ x_1+2x_2+\dots kx_k=x}}\binom{x_1+\dots+x_k+r-1}{x_1,\dots,x_k,r-1}\left(\frac{\alpha}{k+\alpha}\right)^r\left(\frac{1}{k+\alpha}\right)^{x_1+\dots+x_k},\quad x=0,1,\dots \tag{3.I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$P(X=x)=\int_0^\infty\sum_{x_1+2x_2+\dots+kx_k=x}e^{-\lambda k}\frac{\lambda^{x_1+\dots+x_k}}{x_1!\dots x_k!}\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\lambda^{r-1}e^{-\alpha\lambda}d\lambda=$$

$$=\sum_{x_1+2x_2+\dots+kx_k=x}\binom{x_1+\dots+x_k+r-1}{x_1,\dots x_k,r-1}\alpha^r\int_0^\infty\frac{\lambda^{x_1+\dots+x_k+r-1}}{(x_1+\dots+x_k+r-1)!}e^{-(k+\alpha)\lambda}d\lambda,$$

но $$\int_0^\infty\frac{\lambda^{x_1+\dots+x_k+r-1}}{(x_1+\dots+x_k+r-1)!}e^{-(k+\alpha)\lambda}d\lambda=\frac{1}{(k+\alpha)^{x_1+\dots+x_k+r}}.$$

$$\cdot\int_0^\infty\frac{(k+\alpha)^{x_1+\dots+x_k+r}}{\Gamma(x_1+\dots+x_k+r)}\lambda^{x_1+\dots+x_k+r-1}e^{-(k+\alpha)\lambda}d\lambda=\frac{1}{(k+\alpha)^{x_1+\dots+x_k+r}}.$$

чем и завершается доказательство.

В случае $k=1$ утверждение Предложения 3.I сводится к хорошо известному результату, относящемуся к обычному сложному пуассоновскому распределению; см. [3], стр.I23.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I. Говорят, что случайная величина X имеет сложное пуассоновское распределение порядка k с параметрами (r,α) обозначается $CP_k(x;r,\alpha)$), если

$$P(X=x)\overset{def}{=}CP_k(x;r,\alpha)=\sum_{\substack{x_1,\dots,x_k:\\ x_1+2x_2+\dots+kx_k=x}}\binom{x_1+\dots+x_k+r-1}{x_1,\dots x_k,r-1}\left(\frac{\alpha}{k+\alpha}\right)^r\left(\frac{1}{k+\alpha}\right)^{x_1+\dots+x_k},\ x=0,1\dots$$

При $k=1$ получаем обычное сложное пуассоновское распределение $CP(\cdot\,; r,\alpha)$, описываемое формулой (3.I). Это распределение совпадает также с обычным отрицательным биномиальным распределением с вероятностью успеха $p=\alpha/(1+\alpha)$, где X обозначает число неудач до достижения r-го успеха. Таким образом, $CP_k(\cdot\,; r,\alpha)$ – обобщенное отрицательное биномиальное распределение, отличное от распределения, изученного в [I].

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть X – случайная величина с распределением $CP_k(\cdot\,; r,\alpha)$. Тогда

(a) $E(s^X)=[1+\alpha^{-1}(k-\sum_{i=1}^{k} s^i)]^{-r}, \ |s|\le 1$

(b) $E(X)=k(k+1)r/2\alpha$

(c) $\sigma^2(X)=[k(k+1)(2k+1)r/6\alpha]+k^2(k+1)^2 r/4\alpha^2$

Для доказательства достаточно использовать предложение 2.I и 3.I и свойства гамма-распределения. Предложение 3.2 (a) может быть использовано для доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть X_i $(1\le i\le n)$ – независимые случайные величины с законами распределения $CP_k(\cdot\,; r_i,\alpha)$ соответственно. Пусть $X=X_1+\ldots+X_n$, $r=r_1+\ldots+r_n$. Тогда X распределена по закону $CP_k(\cdot\,; r,\alpha)$

В заключении сформулируем два вопроса.

4. Два нерешенных вопроса.

Хорошо известно, что пуассоновское распределение имеет единственную моду в точке $x=[\lambda]$, если λ не целое, и две моды в точках $x=\lambda$ и $x=\lambda-1$, если λ – целое.

ПРОБЛЕМА 4.I. Пусть X – случайная величина, распределенная по закону $P_k(\cdot\,;\lambda)$. Найти значения x, для которых $P_k(x;\lambda)$ достигает своей моды.

Хорошо известно также (см. [4]), что если X_1 и X_2 – независимые случайные величины и $X=X_1+X_2$ имеет пуассоновское распределение, то каждая из случайных величин X_1 и X_2 также имеет пуассоновское распределение.

ПРОБЛЕМА 4.2. Пусть X_1 и X_2 – независимые случайные величины и $X=X_1+X_2$ имеет пуассоновское распределение порядка k. Верно ли, что каждая из величин X_1 и X_2 также имеет пуассоновское распределение порядка k ?

Литература

I. P h i l i p p o u A.N. The negative binomial distribution of order k and some of its properties. Biometrical Journal, 1983, v.25.

2. P h i l i p p o u A.N., G e o r g h i o u C. and P h i l i p p o u G.N. A generalized geometric distribution and some of its properties. Probability and Statistics Letters, 1983, v.11.

3. M o o d M., G r a y b i l l F.A. and B o e s D.C. Introduction to the Theory of Statistics, 3rd edition, 1974, New York.

4. Р а й к о в Д. А. О разложении гауссовских и пуассоновских законов. – Известия АН СССР, сер. матем., 1938, т.2, № 1, с. 91–124.