



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов, Б. Т. Сапарбаева, Коммутирующие дифференциальные операторы Кричевера–Новикова с полиномиальными коэффициентами, *Сиб. матем. журн.*, 2016, том 57, номер 5, 1048–1053

DOI: 10.17377/smzh.2016.57.510

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

15 февраля 2025 г., 20:37:56



УДК 517.957

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
ОПЕРАТОРЫ КРИЧЕВЕРА — НОВИКОВА
С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов,
Б. Т. Сапарбаева

Аннотация. Изучаются коммутирующие дифференциальные операторы ранга два с полиномиальными коэффициентами. Доказано, что для любой фиксированной спектральной кривой вида $w^2 = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$ с произвольными коэффициентами c_i существуют коммутирующие несамосопряженные операторы порядков 4 и 6 с полиномиальными коэффициентами произвольной степени.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.510

Ключевые слова: коммутирующие дифференциальные операторы.

Посвящается А. П. Веселову в честь его 60-летия.

1. Введение

В статье изучаются пары коммутирующих дифференциальных операторов порядков 4 и 6 ранга два. Общий вид таких операторов в терминах специальных функций на эллиптической спектральной кривой найден И. М. Кричевером и С. П. Новиковым [1]. Оператор порядка 4 имеет вид

$$L_{KN} = (\partial_x^2 + V_1(x))^2 + V_2(x)\partial_x + \partial_x V_2(x) + V_3(x), \quad (1)$$

где

$$V_1(x) = -\frac{1}{4c_x^2} + \frac{c_{xx}^2}{4c_x^2} + 2(\zeta(\gamma_0 + c) - \zeta(2c) - \zeta(\gamma_0 - c))c_x - \frac{c_{xxx}}{2c_x} + c_x^2(2\wp(2c) - \wp(\gamma_0 + c) - \wp(\gamma_0 - c) - (\zeta(\gamma_0 + c) - \zeta(2c) - \zeta(\gamma_0 - c))^2),$$

$V_2(x) = c_x(\wp(\gamma_0 - c(x)) - \wp(\gamma_0 + c(x))),$ $V_3(x) = -(\wp(\gamma_0 - c(x)) + \wp(\gamma_0 + c(x))),$
 $\wp(z), \zeta(z)$ — функции Вейерштрасса, $c(x)$ — произвольная функция, γ_0 — постоянная. Оператор L_{KN} коммутирует с оператором \tilde{L}_{KN} порядка 6. Эти операторы удовлетворяют тождеству

$$\tilde{L}_{KN}^2 = 4L_{KN}^3 + g_2L_{KN} + g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbb{C}.$$

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00178-а), работа второго и третьего авторов выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-11-00441).

© 2016 Жеглов А. Б., Миронов А. Е., Сапарбаева Б. Т.

Совместные собственные функции L_{KN} и \tilde{L}_{KN} образуют векторное расслоение ранга два над аффинной алгебраической (спектральной) кривой

$$w^2 = 4z^3 + g_2z + g_3$$

(общую теорию операторов ранга больше 1 см. в [2]). Операторы L_{KN} , \tilde{L}_{KN} изучались в [3–11]. Примечательно, что операторы Кричевера — Новикова могут иметь полиномиальные коэффициенты. Первые примеры таких операторов были найдены Диксмье [12]:

$$L_D = (\partial_x^2 - x^3 - a)^2 - 2x, \quad \tilde{L}_D = (\partial_x^2 - x^3 - a)^3 - \frac{3}{2}(x(\partial_x^2 - x^3 - a) + (\partial_x^2 - x^3 - a)x),$$

при этом $\tilde{L}_D^2 = L_D^3 + a$.

П. Г. Гриневич [11] нашел условия, когда операторы Кричевера — Новикова имеют рациональные коэффициенты.

Теорема 1.1 [11]. *Пара коммутирующих операторов L_{KN} , \tilde{L}_{KN} с неособой алгебраической кривой Γ , определяемой уравнением $w^2 = P(z) = 4z^3 + g_2z + g_3$, имеет рациональные коэффициенты тогда и только тогда, когда*

$$c(x) = \int_{q(x)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

где $q(x)$ — произвольная рациональная функция. Если $\gamma_0 = 0$, $q(x) = x$ и $P(z) = 4z^3 + 4a$, то L_{KN} , $1/2\tilde{L}_{KN}$ совпадают с операторами Диксмье L_D , \tilde{L}_D .

Формально самосопряженные операторы с полиномиальными коэффициентами изучались в [13]. В этой статье мы изучаем общий (несамосопряженный) случай и показываем, что для любой эллиптической спектральной кривой существуют самосопряженные операторы порядка 4 и 6 с полиномиальными коэффициентами произвольной степени. Основным результатом является

Теорема 1.2. *Для произвольной спектральной кривой Γ , заданной уравнением*

$$w^2 = F(z) = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0, \quad c_i \in \mathbb{C},$$

произвольных $(z_0, w_0) \in \Gamma$, $w_0 \neq 0$, и произвольного целого $n \geq 1$ существуют полиномы

$$R = \delta_{2n+2}x^{2n+2} + \dots + \delta_0, \quad P = \beta_n x^n + \dots + \beta_0$$

с $\delta_{2n+2} \neq 0$, $\beta_n \neq 0$ такие, что оператор

$$L_4 = (\partial_x^2 + R)^2 + (4w_0P_x)\partial_x + \partial_x(4w_0P_x) - 16F(z_0)P^2 + 4F'(z_0)P - \frac{1}{2}F''(z_0) + z_0$$

коммутирует с оператором L_6 порядка 6 с полиномиальными коэффициентами. Спектральной кривой операторов L_4 , L_6 является Γ .

Отметим, что операторы ранга три в случае эллиптических спектральных кривых найдены О. И. Моховым [14]. Было бы интересно найти среди этих операторов операторы с полиномиальными коэффициентами. Отметим также, что недавно получены новые результаты о коммутирующих операторах ранга больше 1 в случае спектральных кривых рода больше единицы (см. [15–24]).

2. Доказательство теоремы 1.2

Коэффициенты оператора L_{KN} выражены через функциональный параметр $c(x)$ с помощью функций Вейерштрасса (см. (1)). Такая параметризация не очень удобна для изучения операторов с полиномиальными коэффициентами. Для доказательства теоремы 1.2 понадобится другая параметризация через функциональный параметр коэффициентов L_{KN} .

Лемма 2.1. Пусть Γ — кривая, заданная уравнением

$$w^2 = F(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Тогда оператор

$$L_4 = (\partial_x^2 + R)^2 + (4w_0 P_x) \partial_x + \partial_x (4w_0 P_x) - 16F(z_0) P^2 + 4F'(z_0) P - \frac{1}{2} F''(z_0) + z_0, \quad (2)$$

где $(z_0, w_0) \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{W(x) + 2z_0 + c_2}, \\ R(x) &= \frac{1}{4P_x^2} (2P(x) - 16F(z_0)P^4(x) + 8F'(z_0)P^3(x) \\ &\quad - 2F''(z_0)P^2(x) + P_{xx}^2 - 2P_x P_{xxx}), \end{aligned} \quad (3)$$

$W(x)$ — произвольная гладкая функция, коммутирует с некоторым оператором шестого порядка L_6 . При этом спектральной кривой L_4 и L_6 является Γ .

Доказательство. Рассмотрим коммутирующие формально самосопряженные операторы \tilde{L}_4 , \tilde{L}_6 порядков 4 и 6 со спектральной кривой Γ . Оператор \tilde{L}_4 может быть записан в виде

$$\tilde{L}_4 = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x).$$

Тогда $V(x)$ выражается через $W(x)$ следующим образом:

$$V(x) = \frac{-16F(-\frac{1}{2}(c_2 + W)) + W_{xx}^2 - 2W_x W_{xxx}}{4W_x^2}$$

(см., например, [22] или [4]). Оператор $\tilde{L}_4 - z_0$ разлагается на множители следующим образом (см. [22]):

$$\tilde{L}_4 - z_0 = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x) - z_0 = (\partial_x^2 + \chi_1 \partial_x + \chi_2)(\partial_x^2 - \chi_1 \partial_x - \chi_0), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_0 &= -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V, \quad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q}, \quad \chi_2 = \frac{3Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - \frac{Q_x^2}{Q^2} + V, \\ Q &= z_0 + \frac{1}{2}(W + c_2). \end{aligned}$$

При этом

$$\tilde{L}_6 - w_0 = l_4(\partial_x^2 - \chi_1 \partial_x - \chi_0), \quad (5)$$

где l_4 — некоторый оператор четвертого порядка. По теореме Лазамы — Превиато [6, следствие 2] несамосопряженные операторы Кричевера — Новикова могут быть получены из формально самосопряженных операторов $\tilde{L}_4 - z_0$ и $\tilde{L}_6 - w_0$ с помощью преобразования Дарбу, т. е. перестановкой множителей в (4) и (5):

$$L_4 = (\partial_x^2 - \chi_1 \partial_x - \chi_0)(\partial_x^2 + \chi_1 \partial_x + \chi_2) + z_0, \quad L_6 = (\partial_x^2 - \chi_1 \partial_x - \chi_0)l_4 + w_0.$$

Прямыми вычислениями можно убедиться, что L_4 принимает вид (2). \square

Далее предполагаем, что $w_0 \neq 0$ (иначе L_4 формально самосопряженный).

Лемма 2.2. Оператор L_4 имеет полиномиальные коэффициенты тогда и только тогда, когда $P(x)$ и $R(x)$ — полиномы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если P и R — полиномы, то очевидно, что L_4 имеет полиномиальные коэффициенты. Покажем обратное утверждение. Для этого перепишем L_4 в следующем виде:

$$L_4 = \partial_x^4 + a_2(x)\partial_x^2 + a_1(x)\partial_x + a_0(x),$$

где из (2) следует, что

$$a_2 = 2R = \frac{1}{2P_x^2}(2P(x) - 16F(z_0)P^4(x) + 8F'(z_0)P^3(x) - 2F''(z_0)P^2(x) + P_{xx}^2 - 2P_xP_{xxx}),$$

$$a_1 = 2R_x + 8w_0P_x.$$

Следовательно, $a_{2x} - a_1 = 8w_0P_x$. Таким образом, если a_1 и a_2 — полиномы, то и P_x — полином, а значит, и P — полином. \square

Из (3) следует, что

$$4P_x^2R = 2P - 16F(z_0)P^4 + 8F'(z_0)P^3 - 2F''(z_0)P^2 + P_{xx}^2 - 2P_xP_{xxx}. \quad (6)$$

Далее предполагаем, что P, R — полиномы вида

$$R = \alpha_{2n+2}^2x^{2n+2} + \dots + \alpha_0^2, \quad P = \beta_nx^n + \dots + \beta_0, \quad \alpha_{2n+2} \neq 0, \beta_n \neq 0. \quad (7)$$

Теорема 2.1. Для любого $n > 0$ существует решение уравнения (6) вида (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем обе части (6) по x , а затем разделим на P_x . Получим

$$32F(z_0)P^3 + 4RP_{xx} + 2R_xP_x - 12F'(z_0)P^2 + 2F''(z_0)P + P_{xxx} - 1 = 0. \quad (8)$$

Уравнение (6) эквивалентно системе уравнений: уравнению (8) и уравнению на свободный член в (6):

$$2\alpha_0^2\beta_1^2 = \beta_0 - 8F(z_0)\beta_0^4 + 4F'(z_0)\beta_0^3 - F''(z_0)\beta_0^2 + 2\beta_2^2 - 6\beta_1\beta_3. \quad (9)$$

Уравнение (8) эквивалентно системе из $3n+1$ уравнений с $3n+4$ переменными α_i, β_j . Заметим, что все уравнения имеют степень 3 и множество их решений состоит из точек в \mathbb{C}^{3n+4} (с координатами α_i, β_j), которые лежат в пересечении $3n+1$ кубик, заданных этими уравнениями. По теореме 7.2 из [25, гл. 1] пересечение X этих кубик с кватрикой (9) в \mathbb{P}^{3n+4} (с однородными координатами α_i, β_j, u) непусто и каждая его неприводимая компонента имеет размерность, большую или равную 2. По этой же причине пересечение X с гиперплоскостью $Z = \{u = 0\}$ на бесконечности непусто и каждая его неприводимая компонента имеет размерность, большую или равную 1.

Для доказательства утверждения достаточно доказать, что для любого фиксированного $n > 0$ существует одномерная неприводимая компонента $X \cap Z$. Из этого факта можем заключить, что аффинная часть пересечения X непуста (на самом деле увидим, что эта аффинная часть содержит точку с ненулевыми координатами α_{2n+2} и β_n).

Однородные части наших уравнений в \mathbb{P}^{3n+4} , которые не зависят от u , могут быть легко записаны: для уравнения (8) это в точности коэффициенты при x^i уравнения

$$KP^3 + 4RP_{xx} + 2R_xP_x = 0, \quad (10)$$

где $K = 32F(z_0)$, и для уравнения (9) это

$$\alpha_0^2\beta_1^2 + 4F(z_0)\beta_0^4 = 0. \quad (11)$$

Следующим наблюдением является то, что уравнения (10) всегда имеют решения вида

$$O = (\alpha_{2n+2} \neq 0 : \beta_n \neq 0 : 0 : \dots : 0), \quad \text{т. е. } R = \alpha_{2n+2}^2 x^{2n+2}, \quad P = \beta_n x^n$$

для любого $n > 0$. Поэтому можно положить, например, $\beta_n = 1$, $\alpha_{2n+2} = i\sqrt{K}/(\sqrt{8n})$.

Докажем, что для любого фиксированного $n > 0$ любая неприводимая компонента $X \cap Z$, содержащая O , имеет размерность 1. Рассмотрим открытую аффинную окрестность O : $\beta_n = 1$, и пересечение $X \cap Z$ с аффинной гиперплоскостью $\beta_0 = 0$. Так как пересечение содержит ту же точку O , оно непусто, поэтому каждая его неприводимая компонента имеет размерность, большую или равную нулю. Докажем что это пересечение содержит в точности две точки: O и $O' = (-\alpha_{2n+2} : 1 : 0 : \dots : 0)$ (а следовательно, все неприводимые компоненты $X \cap Z$, содержащие O , имеют размерность один).

Из (11) следует, что либо $\alpha_0 = 0$, либо $\beta_1 = 0$. Если $\beta_0 = \beta_1 = 0$, то из уравнения (10) вытекает, что $\alpha_0 = 0$. С другой стороны, можно рассмотреть (10) как обыкновенное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами на функцию $R(x)$. Решением этого уравнения является

$$R = \frac{-KP^4/8 + C}{P_x^2}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Так как $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, постоянная C должна быть нулем. Но тогда P должно делиться на P_x , т. е. $P = x^n$, ибо $\beta_n = 1$ и $\beta_0 = 0$. Поэтому имеется только одно решение (P, R) у (10) и только два решения O, O' у соответствующих однородных уравнений.

Это означает что имеется точка в аффинной карте $u \neq 0$ в X , которая близка к O , т. е. ее координаты α_{2n+2} и β_n ненулевые. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Практически дословно таким же способом можно дать более короткое доказательство теоремы 1.1 в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 6. С. 47–68.
2. Кричевер И. М. Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1978. Т. 12, № 3. С. 20–31.
3. Гриневич П. Г., Новиков С. П. О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 25–26.
4. Grunbaum F. Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six // Phys. D. 1988. V. 31, N 3. P. 424–433.
5. Latham G. Rank 2 commuting ordinary differential operators and Darboux conjugates of KdV // Appl. Math. Lett. 1995. V. 8, N 6. P. 73–78.

6. Latham G., Previato E. Darboux transformations for higher-rank Kadomtsev–Petviashvili and Krichever–Novikov equations // Acta Appl. Math. 1995. V. 39. P. 405–433.
7. Previato E., Wilson G. Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves // Compositio Math. 1992. V. 81, N 1. P. 107–119.
8. Dehornoy P. Operateurs differentiels et courbes elliptiques // Compositio Math. 1981. V. 43, N 1. P. 71–99.
9. Mokhov O. I. On commutative subalgebras of Weyl algebra, which are associated with an elliptic curve // Reports on theory of rings, algebras and modules / Inter. conf. on algebra in memory of A. I. Shirshov (1921–1981). (Barnaul, USSR, 20–25 August, 1991). С. 85.
10. Mokhov O. I. On the commutative subalgebras of Weyl algebra, which are generated by the Chebyshev polynomials // 3rd Inter. Conf. on algebra in Memory of M. I. Kargapolov (1928–1976) (Krasnoyarsk, Russia, 23–28 August, 1993). Krasnoyarsk.: Inoprof, 1993. P. 421.
11. Гриневич П. Г. Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 19–24.
12. Dixmier J. Sur les algèbres de Weyl // Bull. Soc. Math. France. 1968. V. 96. P. 209–242.
13. Mironov A. E., Zhiglov A. B. Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra // Int. Math. Res. Notices. 2015. doi: 10.1093/imrn/rnv218. Published online.
14. Мохов О. И. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные дифференциальные уравнения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 6. С. 1291–1315.
15. Мохов О. И. О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 314–316.
16. Mokhov O. I. Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2014. V. 234. P. 309–322.
17. Давлетшина В. Н. О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 109–112.
18. Давлетшина В. Н. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга два с тригонометрическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 513–519.
19. Давлетшина В. Н., Шамаев Э. И. О коммутирующих дифференциальных операторах ранга два // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 744–749.
20. Zuo D. Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2 // SIGMA. 2012. V. 8. P. 044.
21. Оганесян В. С. Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 произвольного рода g с полиномиальными коэффициентами // Успехи мат. наук. 2015. Т. 70, № 1. С. 179–180.
22. Mironov A. E. Self-adjoint commuting ordinary differential operators // Invent Math. 2014. V. 197, N 2. P. 417–431.
23. Mironov A. E. Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2014. V. 234. P. 309–322.
24. Миронов А. Е., Сапарбаева Б. Т. О собственных функциях одномерного оператора Шредингера с полиномиальным потенциалом // Докл. АН. 2015. Т. 461, № 3. С. 261–262.
25. Hartshorne R. Algebraic geometry. New York; Berlin; Heilderberg: Springer-Verl., 1977.

Статья поступила 20 января 2016 г.

Жеглов Александр Борисович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, ГСП1, Москва 119899
azheglov@mech.math.msu.su

Миронов Андрей Евгеньевич, Сапарбаева Баян Талгатовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mironov@math.nsc.ru, saparbayevabt@gmail.com