Функциональный анализ и его приложения
1993, т. 27, вып. 1, с. 37–45

УДК 517

Конструкции эллиптических алгебр Склянина и квантовых R-матриц

© 1993. А. В. Одесский, Б. Л. Фейгин

Введение

Алгеброй Склянина с n образующими мы будем называть, следуя [2, 3], ассоциативную $\mathbb{N}$-градуированную алгебру с единицей $A = \mathbb{C} \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ такую, что A порождена A_1 с квадратичными соотношениями, причем $\dim A_i = C^i_{i+n-1}$, где $n = \dim A_1$. Это означает, что $A = T^*(A_1)/I(S)$, где $T^*(A_1) = \mathbb{C} \oplus A_1 \oplus A_1 \otimes A_1 \oplus \ldots$ — тензорная алгебра, $I(S)$ — двусторонний идеал, порожденный пространством квадратичных соотношений $S \subset A_1 \otimes A_1$, причем $\dim S = n(n-1)/2$. Требуется, чтобы размерность A_i равнялась размерности пространства однородных многочленов степени i от n переменных. Простой, но важный пример алгебр Склянина дает следующее определение: алгеброй косых многочленов называется алгебра с образующими $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и соотношениями: $\{x_i x_j = q_{ij} x_j x_i;\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$, где $q_{ij} \in \mathbb{C}^*$, $q_{ji} = (q_{ij})^{-1}$, $q_{ii} = 1$ при всех i, j. Легко проверить, что алгебра косых многочленов является алгеброй Склянина.

Пусть A — алгебра Склянина. Двойственной к ней алгеброй мы будем называть, следуя [8, 9], ассоциативную $\mathbb{N}$-градуированную алгебру с единицей $A^! = \mathbb{C} \oplus A^!_1 \oplus A^!_2 \oplus \ldots$ с пространством образующих $A^!_1 = A^*_1$ и с квадратичными соотношениями $S^\perp \subset A^*_1 \otimes A^*_1 = (A_1 \otimes A_1)^*$, где $S^\perp$ — ортогональное дополнение к $S \subset A_1 \otimes A_1$.

Пример: алгебра, двойственная к алгебре косых многочленов, — это алгебра с образующими $\{x^1, \ldots, x^n\}$ и соотношениями $\{x^i x^j = -q_{ij} x^j x^i;\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$.

Согласно [8, 9], если A кошулева, то градуированные компоненты алгебры $A^!$ имеют такие же размерности, как и градуированные компоненты $\Lambda^*(\mathbb{C}^n)$ — внешней алгебры с n образующими. Ясно, что и, обратно, A можно определить по $A^!$, так как $A_1 = (A^*_1)^*$, $S = (S^\perp)^\perp$.

В работах [5, 6] построено семейство алгебр Склянина $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$ с n образующими, зависящее от 2 непрерывных параметров: эллиптической кривой $\mathcal{E}$ и точки $\tau \in \mathcal{E}$. Здесь $n \geqslant 3$, $1 \leqslant k < n$, НОД$(n, k) = 1$.

В этой работе мы дадим конструкцию алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$ с помощью алгебр косых многочленов и некоторых их обобщений (см. § 3). Аналогично могут быть построены и алгебры Замолодчикова, связанные с эллиптической R-матрицей Белавина (см. [4, 6]). Наша конструкция имеет два эквивалентных варианта: для алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$ и для двойственных алгебр $(Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau))^!$. В первом случае получаются явные выражения для образующих алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$ через образующие алгебр косых многочленов и их обобщений. Во втором случае получаются явные выражения для соотношений в алгебрах $(Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau))^!$, т.е. для $S^\perp$, где S — соотношения в $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$. Проиллюстрируем основную идею этой конструкции для $S^\perp$. Для этого рассмотрим простейший случай, когда эллиптическая кривая вырождается в рациональную, а алгебра рассматривается в квазиклассическом пределе, т.е. в окрестности $\Lambda^*(\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим алгебру с образующими $\{x(u);\ u \in \mathbb{C}^*\}$, которые следует представлять себе «голоморфными по u», и соотношениями $\{x(u), x(v)\} = (u+v)(u-v)^{-1}x(u) \wedge x(v)$. Здесь $\wedge$ — обычное внешнее умножение, а $\{\cdot, \cdot\}$ — аналог скобки Пуассона для внешней алгебры. Это означает, что соотношения в соответствующей «квантовой» алгебре имеют вид

$$x(u)x(v) + x(v)x(u) = \frac{u+v}{u-v}\,(x(u)x(v) - x(v)x(u))\tau + o(\tau) \quad \text{при } \tau \to 0.$$

Обратим внимание на следующее свойство соотношений, которое мы будем называть «условием голоморфности»: в правой части числитель делится на знаменатель, так как $\lim x(u) \wedge x(v) = x(v) \wedge x(v) = 0$ при $u \to v$. Таким образом, если $x(u)$ голоморфно по u, то правая часть также голоморфна по $u, v \in \mathbb{C}^*$ и не имеет полюса при $u = v$. Положим теперь $x(u) = x_0 + x_1 u + \ldots + x_n u^n$, т.е. $x(u)$ — многочлен степени n от u. Имеем

$$\Bigl\{\sum_i x_i u^i, \sum_j x_j v^j\Bigr\} = \frac{u+v}{u-v}\Bigl(\sum_i x_i u^i\Bigr) \wedge \Bigl(\sum_j x_j v^j\Bigr),$$

$$\sum_{i,j}\{x_i, x_j\}u^i v^j = \frac{u+v}{u-v}\sum_{i,j} x_i \wedge x_j u^i v^j.$$

Из условия голоморфности вытекает, что справа, как и слева, стоит многочлен от u и v степени n по каждой переменной. Отсюда, сравнивая коэффициенты при $u^i v^j$, получим выражение для антикоммутаторов $\{x_i, x_j\}$ через $x_\alpha \wedge x_\beta$, что дает для каждого n пример алгебры с $n+1$ образующими, двойственной к алгебре Склянина (в квазиклассическом пределе).

Опишем содержание работы. В § 1 напоминаются конструкция и основные свойства алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$, а также алгебр Замолодчикова для квантовой R-матрицы. В § 2 дана конструкция алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \tau) \overset{\text{def}}{=} Q_{n,1}(\mathcal{E}, \tau)$ и двойственной к ней с помощью алгебры косых многочленов. В § 3 вводятся алгебры, являющиеся обобщением алгебр косых многочленов и одновременно обобщением алгебр Замолодчикова на случай нескольких переменных. В § 4 с помощью этих алгебр строятся алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$ и двойственные к ним, а также алгебры Замолодчикова для R-матриц Белавина.

§ 1. Пусть $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$ — эллиптическая кривая, где $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — решетка, порожденная 1 и η, $\operatorname{Im}\eta > 0$. Пусть ξ — положительное линейное расслоение на $\mathcal{E}$, $n = \dim H^0(\xi)$. Пространство $H^0(\xi)$ отождествляется с пространством функций $\Theta_n(\Gamma)$, голоморфных на всей комплексной плоскости и удовлетворяющих соотношениям $f(z+1) = f(z)$, $f(z+\eta) = -e^{-2\pi i n z} f(z)$. Известно (см. [1]), что группа $(\frac{1}{n}\Gamma)/\Gamma \cong \mathbb{Z}_n^2$ проективно действует в $\Theta_n(\Gamma)$ посредством сдвига. Это позволяет выбрать базис в $\Theta_n(\Gamma)$. Определим набор функций $\theta_\alpha(z)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_n$, посредством соотношений

$$\begin{aligned}
&\theta_\alpha(z+1/n) = \exp(2\pi i\alpha/n)\,\theta_\alpha(z),\\
&\theta_\alpha(z+\eta/n) = \exp(-2\pi i z - \pi i/2^p + (n-1)n^{-1}\pi i\eta)\,\theta_{\alpha+1}(z),
\end{aligned}\qquad n = 2^p(2l+1).$$

Функции $\theta_\alpha(z) \in \Theta_n(\Gamma)$ называются тета-функциями n-го порядка. Легко проверить, что $\theta_\alpha(-z) = -e^{-2\pi i n z}\theta_{-\alpha}(z)$, если n нечетно, и $\theta_\alpha(-z) = -\exp(-2\pi i n z + \alpha\pi i/2^{p-1})\theta_{-\alpha}(z)$ в общем случае. В частности, мы имеем $\theta_0(0) = 0$, $\theta_\alpha(0) = -\exp(\alpha\pi i/2^{p-1})\theta_{-\alpha}(0)$, а если n нечетно, то $\theta_\alpha(0) = -\theta_{-\alpha}(0)$.

Алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$ определяется как алгебра с образующими $\{x_i;\ i \in \mathbb{Z}_n\}$ и соотношениями

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}_n} \frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(0)}{\theta_{j-i-r}(-\tau)\,\theta_{kr}(\tau)}\, x_{k(j-r)} x_{k(i+r)} = 0, \qquad i, j \in \mathbb{Z}_n.$$

Напомним основные свойства алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ (подробнее см. [6]).

1. При $\tau\in\frac{1}{n}\Gamma$ алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ есть алгебра косых многочленов. В частности, $Q_{n,k}(\mathcal{E},0)$ — просто кольцо многочленов от n переменных. Алгебра $Q_{n,n-1}(\mathcal{E},\tau$ есть кольцо многочленов при всех n,τ.

2. Полагая $\deg x_i=i$, получим $\mathbb{Z}_n$-градуировку на $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ (таким образом, алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ является $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_n$-градуированной). Кроме того, алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ инвариантна относительно автоморфизма $x_i\to x_{i+1}$.

3. $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)\cong Q_{n,k'}(\mathcal{E},\tau)$, если $kk'\equiv 1 \bmod n$. Если $\tau\notin\frac{1}{n}\Gamma$, то других изоморфизмов между алгебрами $Q_{n,k}$ нет.

4. Пусть $c=\text{НОД}(n,k+1)$. Тогда центр алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ при общем τ есть кольцо многочленов от c элементов, каждый из которых имеет степень n/c.

5. Пусть $\dfrac{n}{k}=n_1-\dfrac{1}{n_2-\ldots-\dfrac{1}{n_p}}$, где $n_i\geqslant 2$ при $1\leqslant i\leqslant p$. Ясно, что такое представление существует и единственно. Легко проверить, что $\dfrac{n}{k'}=n_p-\dfrac{1}{n_{p-1}-\ldots-\dfrac{1}{n_1}}$, где $kk'\equiv 1 \bmod n$, $1\leqslant k'<n$. Введем обозначение

$$d(m_1,\ldots,m_q)=\det\begin{pmatrix} m_1 & -1 & 0 & \ldots & 0\\ -1 & m_2 & -1 & \ldots & 0\\ 0 & -1 & m_3 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m_q\end{pmatrix}$$

$$(d(m)=m,\ d(m_1,m_2)=m_1m_2-1,\ \ldots).$$

Тогда $n=d(n_1,\ldots,n_p)$, $k=d(n_2,\ldots,n_p)$, $k'=d(n_1,\ldots,n_{p-1})$. Пусть $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2=\ldots=\mathcal{E}_p=\mathcal{E}$ суть p экземпляров кривой $\mathcal{E}$. Зададим на кривой $\mathcal{E}_i$ линейное расслоение ξ_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ так, что $\dim H^0(\xi_1)=n_1+1$, $\dim H^0(\xi_p)=n_p+1$, $\dim H^0(\xi_i)=n_i+2$ при $1<i<p$. На $\mathcal{E}^p$ возникает произведение расслоений $\overline{\xi}=\xi_1\boxtimes\ldots\boxtimes\xi_p$. Пусть $\Delta_{i,i+1}$ — дивизор на $\mathcal{E}^p$, состоящий из точек $(z_1,\ldots,z_p)$ таких, что $z_i+z_{i+1}=0$. Пусть ξ — расслоение на $\mathcal{E}^p$, полученное из $\overline{\xi}$ вычитанием дивизора $\Delta_{1,2}+\ldots+\Delta_{p-1,p}$. Сечения ξ отождествляются с такими сечениями $\overline{\xi}$, которые обращаются в 0 на всех $\Delta_{i,i+1}$, $1\leqslant i<p$. Тогда ξ имеет n сечений, а ограничение ξ на $\mathcal{E}_i$ имеет n_i сечений при всех i. Вообще, ограничение ξ на $\mathcal{E}_i\times\mathcal{E}_{i+1}\times\ldots\times\mathcal{E}_{i+j}$ имеет $d(n_i,n_{i+1},\ldots,n_{i+j})$ сечений. Кроме того, $H^0(\xi)$ отождествляется с пространством функций от p переменных, голоморфных на $\mathbb{C}^p$ и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{gathered} f(z_1,z_2,\ldots,z_\alpha+1,\ldots,z_p)=f(z_1,\ldots,z_p),\\ f(z_1,z_2,\ldots,z_\alpha+\eta,\ldots,z_p)=\exp(-2\pi i(n_\alpha z_\alpha-z_{\alpha-1}-z_{\alpha+1}))f(z_1,\ldots,z_p)\\ (1\leqslant\alpha\leqslant p,\ z_0=z_{p+1}=0). \end{gathered}$$

Пространство образующих алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ естественно отождествляется с $H^0(\xi)$ (см. [6, § 3, 4]).

6. Алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ связаны друг с другом при разных n и k. См. об этом [6, § 3, пп. 4–7].

Алгебра Замолодчикова $Z_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ определяется как алгебра с бесконечным числом образующих $\{x_i(u);\ i\in\mathbb{Z}_n,\ u\in\mathbb{C}\}$ и соотношениями

$$Kx_{ki}(u)x_{kj}(v)=\sum_{r\in\mathbb{Z}_n}\frac{\theta_{j-i+r(k-1)}(v-u+\tau)}{\theta_{kr}(\tau)\theta_{j-i-r}(v-u)}\,x_{k(j-r)}(v)x_{k(i+r)}(u).$$

Здесь $i, j \in \mathbb{Z}_n$,

$$K = \frac{\theta_1(0)\dots\theta_{n-1}(0)\,\theta_0(v-u+\tau)\dots\theta_{n-1}(v-u+\tau)}{\theta_0(\tau)\dots\theta_{n-1}(\tau)\,\theta_0(v-u)\dots\theta_{n-1}(v-u)}.$$

Алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ тесно связаны с алгебрами Замолодчикова (см. [6, § 1, п. 3], а также [4]).

§ 2. Единственную тета-функцию порядка 1 обозначим $\theta(z)$. Нам понадобится следующее соотношение (билинейное соотношение Римана):

$$\begin{aligned} &e^{-2\pi i z_2}\theta(z_2+z_3)\theta(z_2-z_3)\theta(z_4+z_1)\theta(z_4-z_1)\\ &\qquad + e^{-2\pi i z_3}\theta(z_3+z_1)\theta(z_3-z_1)\theta(z_4+z_2)\theta(z_4-z_2)\\ &\qquad\qquad + e^{-2\pi i z_1}\theta(z_1+z_2)\theta(z_1-z_2)\theta(z_4+z_3)\theta(z_4-z_3)=0. \end{aligned}$$

Перейдем к построению алгебры $Q_n(\mathcal{E},\tau) \overset{\mathrm{def}}{=} Q_{n,1}(\mathcal{E},\tau)$. Введем образующие $\{z_i, e_i\,;\ i\in\mathbb{N}\}$ с соотношениями

$$e_ie_j = e_je_i,\quad z_iz_j = z_jz_i,\quad z_ie_i = e_i(z_i+(n-2)\tau),\quad z_ie_j = e_j(z_i-2\tau),\qquad i\neq j. \tag{1}$$

Положим

$$x_i = \sum_{p=1}^{N} \frac{\theta_i(z_p)}{\theta(z_1-z_p)\dots\widehat{\theta(z_p-z_p)}\dots\theta(z_N-z_p)}\,e_p\,. \tag{2}$$

Теорема. *Из соотношений* (1), (2) *следует, что образующие* $\{x_i\,;\ i\in\mathbb{Z}_n\}$ *удовлетворяют соотношениям алгебры* $Q_n(\mathcal{E},\tau)$.

Доказательство сразу следует из результатов [5] (см. § 3, теорема 3.2, этой книги), если заметить, что алгебра с образующими $\{z_i, e_i\,;\ 1\leqslant i\leqslant N\}$ и соотношениями (1) имеет естественное представление в пространстве с базисом $\{v_{i_1,\dots,i_N}\,;\ i_\alpha\in\mathbb{N}\}$, заданное следующим образом:

$$\begin{aligned} &e_\alpha v_{i_1,\dots,i_N} = v_{i_1,i_2,\dots,i_\alpha+1,\dots,i_N},\\ &z_\alpha v_{i_1,\dots,i_N} = (x_\alpha + (ni_\alpha - 2(i_1+\dots+i_N))\tau)\,v_{i_1,\dots,i_N}, \qquad x_1,\dots,x_N\in\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Замечания. 1. Из этой теоремы сразу следует описание однородных симплектических листов алгебры $Q_n(\mathcal{E},\tau)$ (см. [5]).

2. Формулу (2) можно понимать формально, так как e_α с помощью (1) можно переставлять с любыми функциями от $z_1, z_2, \dots, z_N$. Но можно считать, что $\{e_\alpha, z_\alpha\}$ — операторы в естественном представлении.

3. При $N=1$ имеем $x_i = \theta_i(z)e$, где $ze = e(z+(n-2)\tau)$. Это означает, что $\mathcal{E}\hookrightarrow\mathbb{C}P^{n-1}$ — характеристическое многообразие алгебры $Q_n(\mathcal{E},\tau)$ (см. [5, 6]).

4. Теорему достаточно доказать при $N=2$, так как соотношения квадратичны. Это можно сделать непосредственно, используя соотношения между тета-функциями.

5. Пусть $t_\alpha = e^{2\pi i z_\alpha}$ при всех $\alpha\geqslant 1$. Из соотношения (1) следует, что алгебра с образующими $\{e_\alpha, t_\alpha\,;\ \alpha\geqslant 1\}$ есть алгебра косых многочленов. С другой стороны, так как $\theta_\nu(z+1)=\theta_\nu(z)$, $\nu\in\mathbb{Z}_n$, то $\theta_\nu(z)$ есть функция от $t=e^{2\pi i z}$ (см. § 3). Поэтому формула (2) дает выражение для образующих алгебры $Q_n(\mathcal{E},\tau)$ через образующие алгебры косых многочленов.

Напомним некоторые факты о связи алгебр Склянина и двойственных к ним алгебр. Пусть A — алгебра Склянина с образующими $\{x_i\}$. Пусть $\{x^i\}$ — двойственный базис в пространстве образующих алгебры $A^!$. Определим элемент

$d \in A \otimes A^!$ формулой $d = \sum_i x_i x^i$. (Заметим, что $x_\alpha x^\beta = x^\beta x_\alpha$ в $A \otimes A^!$.) Тогда (см. [8, 9]) $d^2 = 0$. Обратно, из формулы $d^2 = 0$ и соотношений между $\{x_i\}$ вытекают соотношения между $\{x^i\}$ и, аналогично, из формулы $d^2 = 0$ и соотношений между $\{x^i\}$ вытекают соотношения между $\{x_i\}$. Пусть теперь $\{x_i\,;\ i \in \mathbb{Z}_n\}$ — образующие алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \tau)$. Формула (2) при $N = 2$ дает

$$x_i = \frac{\theta_i(z_1)}{\theta(z_2 - z_1)}\, e_1 + \frac{\theta_i(z_2)}{\theta(z_1 - z_2)}\, e_2.$$

Подставляя это в формулу $d^2 = 0$, получим

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}_n}\left(\frac{\theta_i(z_1)}{\theta(z_2 - z_1)}\, e_1 + \frac{\theta_i(z_2)}{\theta(z_1 - z_2)}\, e_2\right)x^i\right)^2 = 0.$$

Введем обозначение $x(u) = \sum_{i\in\mathbb{Z}_n}\theta_i(u)x^i$; тогда

$$\left(\frac{x(z_1)}{\theta(z_2 - z_1)}\, e_1 + \frac{x(z_2)}{\theta(z_1 - z_2)}\, e_2\right)^2 = 0\,.$$

Или, вспоминая перестановочные соотношения между $\{e_1, e_2, z_1, z_2\}$, получим

$$\frac{x(z_1)x(z_1 - (n-2)\tau)}{\theta(z_2 - z_1)\theta(z_2 - z_1 + n\tau)}\, e_1^2 + \left(\frac{x(z_1)x(z_2 + 2\tau)}{\theta(z_2 - z_1)\theta(z_1 - z_2 - n\tau)} + \frac{x(z_2)x(z_1 + 2\tau)}{\theta(z_1 - z_2)\theta(z_2 - z_1 - n\tau)}\right)e_1 e_2 + \frac{x(z_2)x(z_2 - (n-2)\tau)}{\theta(z_1 - z_2)\theta(z_1 - z_2 + n\tau)}\, e_2^2 = 0.$$

Отсюда, рассматривая коэффициент при $e_1 e_2$, получаем соотношения в алгебре $(Q_n(\mathcal{E}, \tau))^!$ в виде

$$x(u - 2\tau)x(v) = \frac{e^{2\pi i(v-u)}\theta(u - v - n\tau)}{\theta(v - u - n\tau)}\, x(v - 2\tau)x(u). \tag{3}$$

Здесь $x(u) \in (Q_n(\mathcal{E}, \tau))^!$ можно рассматривать как семейство элементов из пространства образующих алгебры $(Q_n(\mathcal{E}, \tau))^!$, параметризованное $u \in \mathbb{C}$. Формула (3) дает простую запись соотношений в алгебрах $(Q_n(\mathcal{E}, \tau))^!$.

Пусть $A(\tau_1, \tau_2)$ — алгебра с образующими $\{x(u)\,;\ u \in \mathbb{C}\}$ и соотношениями

$$x(u + \tau_1)x(v) = \frac{e^{2\pi i(v-u)}\theta(u - v + \tau_2)}{\theta(v - u + \tau_2)}\, x(v + \tau_1)x(u)\,. \tag{4}$$

Ясно, что $A(0, 0)$ — внешняя алгебра с образующими $\{x(u)\,;\ u \in \mathbb{C}\}$, а $A(\tau_1, \tau_2)$ — деформация этой алгебры, так как (4) удовлетворяет «уравнению треугольника» (см. [4]). Полагая в (4) $u = v - \tau_2$, получим $x(v + \tau_1 - \tau_2)x(v) = 0$. Отсюда следует, что правая часть (4) не имеет полюса при $u = v + \tau_2$, поскольку $x(v + \tau_1)x(v + \tau_2) = 0$. Это означает, если $x(u)$ голоморфно по u, то голоморфность сохраняется при перестановке $x(u)$ и $x(v)$ между собой. Мы хотим редуцировать $A(\tau_1, \tau_2)$ к конечно порожденной алгебре. Для этого естественно предположить, что $x(u) \in \Theta_n(\Gamma)$ как функция от u, т.е. $x(u + 1) = x(u)$, $x(u + \eta) = -e^{-2\pi i n u}x(u)$. Необходимо, чтобы в (4) правая и левая части одинаково преобразовывались при сдвиге u и v на 1 и η. Легко видеть, что это так, если и только если $\tau_1 = -2\tau$, $\tau_2 = -n\tau$ для некоторого $\tau \in \mathbb{C}$. Сравнивая с (3), получаем, что в этом случае алгебра $A(\tau_1, \tau_2)$ редуцируется к $(Q_n(\mathcal{E}, \tau))^!$, т.е. $\Theta_n(\Gamma)$ превращается в пространство образующих алгебры $(Q_n(\mathcal{E}, \tau))^!$. Из свойства голоморфности соотношений (4) легко вывести, что $(Q_n(\mathcal{E}, \tau))^!$ есть алгебра, двойственная к алгебре Склянина.

§ 3. Нам будет удобно, начиная с этого места, несколько изменить обозначения для тета-функций и использовать мультипликативную запись вместо аддитивной. Это означает, что мы сделаем замену $t = e^{2\pi i z}$, $\lambda = e^{2\pi i \eta}$ и т.д. В этих обозначениях тета-функции порядка n определены на $\mathbb{C}^*$ и удовлетворяют соотношению $\theta_\alpha(\lambda t) = -t^{-n}\theta_\alpha(t)$. В частности, для тета-функции 1-го порядка имеем $\theta(\lambda t) = -t^{-1}\theta(t)$, $\theta(t^{-1}) = -t^{-1}\theta(t)$. Как известно (см. [1]), для $\theta(t)$ имеем

$$\theta(t) = (1-\lambda)(1-\lambda^2)(1-\lambda^3)\dots(1-t)(1-\lambda t)(1-\lambda t^{-1})(1-\lambda^2 t)(1-\lambda^2 t^{-1})\dots,$$
$$\theta(t) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} (-1)^\alpha \lambda^{\alpha(\alpha-1)/2} t^\alpha. \tag{5}$$

Для построения алгебр $(Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau))^!$ при произвольном k нам понадобится обобщение алгебр косых многочленов. Приведем простейший пример такой алгебры.

Пусть $\mu, \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$. Обозначим $P_2(\mathcal{E}, \mu, \alpha, \beta)$ алгебру с образующими $\{x_p, y_q, e_{p,q};\ p, q \in \mathbb{N}\}$ и соотношениями

$$e_{pq}x_{p'} = \alpha x_{p'}e_{pq}, \quad e_{pq}x_p = \alpha\mu x_p e_{pq}, \quad e_{pq}y_{q'} = \beta y_{q'}e_{pq}, \quad e_{pq}y_q = \beta\mu y_q e_{pq},$$
$$[e_{pq}, e_{pq'}] = [e_{pq}, e_{p'q}] = [x_p, x_{p'}] = [y_q, y_{q'}] = [x_p, y_q] = 0,$$
$$e_{pq}e_{p'q'} = \frac{\mu\theta\left(\dfrac{x_{p'}}{\mu x_p}\right)\theta\left(\dfrac{y_{q'}}{y_q}\right)}{\theta\left(\dfrac{x_{p'}}{x_p}\right)\theta\left(\dfrac{\mu y_{q'}}{y_q}\right)} e_{p'q'}e_{pq} + \frac{\theta(\mu)\theta\left(\dfrac{x_{p'}y_{q'}}{x_p y_q}\right)}{\theta\left(\dfrac{x_{p'}}{x_p}\right)\theta\left(\dfrac{\mu y_{q'}}{y_q}\right)} e_{pq'}e_{p'q}. \tag{6}$$

Здесь $p \ne p'$, $q \ne q'$.

Легко проверить, что соотношения (6) удовлетворяют аналогу уравнения треугольника, т.е. элементы $\{e_{p_1q_1}^{a_1} e_{p_2q_2}^{a_2} \dots e_{p_lq_l}^{a_l};\ (p_1, q_1) < (p_2, q_2) < \dots < (p_l, q_l),\ a_\alpha \geqslant 1\}$ линейно независимы над полем функций от $\{x_p, y_q\}$. Здесь $(p, q) < (p_1, q_1)$ понимается в смысле любого упорядочения множества пар индексов, например лексикографического. Алгебра $P_2(\mathcal{E}, \mu, \alpha, \beta)$ является двумерным аналогом алгебры $P_1(\mathcal{E}, \mu, \alpha)$ с образующими $\{x_p, e_p;\ p \in \mathbb{N}\}$ и соотношениями

$$x_p x_{p'} = x_{p'}x_p, \quad e_p e_{p'} = e_{p'}e_p, \quad e_p x_{p'} = \alpha x_{p'}e_p, \quad e_p x_p = \alpha\mu x_p e_p, \qquad p \ne p'.$$

Эта алгебра использовалась в § 2 для построения алгебры $Q_n(\mathcal{E}, \tau)$ (см. (1), (2)). Аналогично с помощью $P_2(\mathcal{E}, \mu, \alpha, \beta)$ строится алгебра $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$, $n/k = n_1 - 1/n_2$ (см. § 4).

Замечание. Рассмотрим алгебру с образующими $\{x(u, v);\ u, v \in \mathbb{C}^*\}$ и соотношениями вида

$$x(u,v)x(u',v') = \alpha(u'/u, v'/v)x(u',v')x(u,v) + \beta(u'/u, v'/v)x(u,v')x(u',v).$$

Переставляя $x(u,v)x(u',v')x(u'',v'')$ двумя способами, получим, как обычно, уравнения на функции α и β (уравнения треугольника). Эти уравнения имеют следующее общее решение: $\alpha(u,v) = \varphi(u)\psi(v)$, $\beta(u,v) = \gamma(u,v)\psi(v)$, где функции φ и ψ любые, а γ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\gamma(u,v)\gamma(u',v') = \gamma(u, vv')\gamma(u'/u, v') + \gamma(u', vv')\gamma(u/u', v). \tag{7}$$

Функциональное уравнение (7) имеет следующее эллиптическое решение: $\gamma(u,v) = \theta(uv)/(\theta(u)\theta(v))$. Кроме того, существуют рациональные и тригонометрические решения. Одно из них получается при вырождении $\lambda \to 0$. При этом $\theta(u) \to 1-u$, и мы получим $\gamma(u,v) = (1-uv)(1-u)^{-1}(1-v)^{-1}$.

Обозначим $P_m(\mathcal{E},\mu)$ алгебру с образующими $\{e(u_1,\dots,u_m);\ u_\alpha \in \mathbb{C}^*\}$ и соотношениями

$$\begin{aligned} &e(u_1,\dots,u_m)e(v_1,\dots,v_m) \\ &\quad= \varphi_1(v_1/u_1,\dots,v_m/u_m)e(v_1,u_2,\dots,u_m)e(u_1,v_2,\dots,v_m) \\ &\qquad+ \varphi_2(v_1/u_1,\dots,v_m/u_m)e(v_1,v_2,u_3,\dots,u_m)e(u_1,u_2,v_3,\dots,v_m) + \dots \\ &\qquad+ \varphi_m(v_1/u_1,\dots,v_m/u_m)e(v_1,\dots,v_m)e(u_1,\dots,u_m), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i(u_1,\dots,u_m) &= \frac{\mu^{i-1}\theta(\mu)\theta(u_1)\theta(\mu^{-1}u_2)\dots\theta(\mu^{-1}u_i)\theta(u_iu_{i+1})}{\theta(\mu u_1)\dots\theta(\mu u_i)\theta(u_i)\theta(u_{i+1})}, \qquad i<m, \\ \varphi_m(u_1,\dots,u_m) &= \frac{\mu^{m-1}\theta(u_1)\theta(\mu^{-1}u_2)\dots\theta(\mu^{-1}u_m)}{\theta(\mu u_1)\dots\theta(\mu u_{m-1})\theta(u_m)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Легко проверить, что соотношения (8) удовлетворяют уравнению треугольника. Заметим, что алгебра $P_2(\mathcal{E},\mu,\alpha,\beta)$ получается из $P_2(\mathcal{E},\mu)$, если положить $e_{pq} = e(x_p,y_q)e_pf_q$, причем

$$\begin{gathered} [x_p,y_q] = [x_p,f_q] = [e_p,y_q] = [e_p,f_q] = [x_p,x_{p'}] = [y_q,y_{q'}] = [e_p,e_{p'}] = [f_q,f_{q'}] = 0, \\ e_px_{p'} = \alpha x_{p'}e_p, \quad e_px_p = \alpha\mu x_pe_p, \quad f_qy_{q'} = \beta y_{q'}f_q, \quad f_qy_q = \beta\mu y_qf_q. \end{gathered}$$

Аналогично, из $P_m(\mathcal{E},\mu)$ можно получить алгебру $P_m(\mathcal{E},\mu,\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, которая будет использована для построения алгебр Склянина $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ при $\dfrac{n}{k} = n_1 - \cfrac{1}{n_2 - \dots - \cfrac{1}{n_m}}$ (см. § 4). Для этого введем образующие $\{x_q^i, e_q^i;\ q \geqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$ с соотношениями $e_q^ix_{q'}^i = \alpha_ix_{q'}^ie_q^i$, $e_q^ix_q^i = \alpha_i\mu x_q^ie_q^i$, а коммутаторы между всеми остальными парами образующих равны 0. Алгебра $P_m(\mathcal{E},\mu,\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ — это алгебра с образующими $\{x_q^i, e_{q_1,\dots,q_m};\ q,q_1,\dots,q_m \geqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$, причем $e_{q_1,\dots,q_m} = e(x_{q_1}^1, x_{q_2}^2, \dots, x_{q_m}^m)e_{q_1}^1e_{q_2}^2\dots e_{q_m}^m$.

Имеется и другой способ построения алгебр $P_m(\mathcal{E},\mu,\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $P_m(\mathcal{E},\mu)$. Для этого введем дополнительные образующие $\{e^{i,i+1}, t^{i,i+1};\ 1 \leqslant i < m\}$ с соотношениями $e^{i,i+1}t^{i,i+1} = \mu\alpha_i\alpha_{i+1}t^{i,i+1}e^{i,i+1}$ и все остальные коммутаторы равны 0. Положим

$$e_{q_1,\dots,q_m} = \theta\left(\frac{x_{q_1}^1x_{q_2}^2}{t^{1,2}}\right)\theta\left(\frac{x_{q_2}^2x_{q_3}^3}{t^{2,3}}\right)\dots\theta\left(\frac{x_{q_{m-1}}^{m-1}x_{q_m}^m}{t^{m-1,m}}\right)e_{q_1}^1\dots e_{q_m}^me^{1,2}\dots e^{m-1,m}.$$

Из этой формулы однозначно определяются квадратичные соотношения между $\{e_{q_1,\dots,q_m};\ q_1,\dots,q_m \geqslant 1\}$. Кроме того, имеем

$$e_{q_1,\dots,q_m}x_q^i = \alpha_ix_q^ie_{q_1,\dots,q_m}, \quad e_{q_1,\dots,q_m}x_{q_i}^i = \alpha_i\mu x_{q_i}^ie_{q_1,\dots,q_m}, \qquad q \neq q_i.$$

Вообще, алгебры $P_m(\mathcal{E},\mu,\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ связаны друг с другом при разных m. Пусть $\{x_{q_\alpha}^\alpha, e_{q_1,\dots,q_i};\ 1 \leqslant \alpha \leqslant i\}$ — образующие алгебры $P_i(\mathcal{E},\mu,\alpha_1,\dots,\alpha_i)$, а $\{x_{q_\beta}^\beta, e_{q_{i+1},\dots,q_m};\ i+1 \leqslant \beta \leqslant m\}$ — образующие алгебры $P_{m-i}(\mathcal{E},\mu,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_m)$. Положим

$$e_{q_1,\dots,q_m} = \theta(x_{q_i}^ix_{q_{i+1}}^{i+1}t^{-1})e_{q_1,\dots,q_i}e_{q_{i+1},\dots,q_m}e,$$

причем $et=\alpha_i\alpha_{i+1}\mu te$. Тогда $\{x^{\alpha}_{q_\alpha}, e_{q_1,\dots,q_m}\,;\ 1\leqslant\alpha\leqslant m\}$ — образующие алгебры $P_m(\mathcal{E},\mu,\alpha_1,\dots,\alpha_m)$. Таким образом, задан гомоморфизм алгебр

$$P_m(\mathcal{E},\mu,\alpha_1,\dots,\alpha_m)\to P_i(\mathcal{E},\mu,\alpha_1,\dots,\alpha_i)\otimes A\otimes P_{m-i}(\mathcal{E},\mu,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_m),$$

где A — алгебра с образующими $\{e,t\}$ и соотношениями $et=\alpha_i\alpha_{i+1}\mu te$. Эти формулы позволяют строить $P_m(\mathcal{E},\mu,\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ индукцией по m.

§4. Перейдем к построению алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$ при произвольном k. Пусть $\dfrac{n}{k}=n_1-\dfrac{1}{n_2-\ldots-\dfrac{1}{n_m}}$, где $n_i\geqslant 2$ при $1\leqslant i\leqslant m$. Ограничимся случаем $m=2$, так как общий случай отличается лишь усложнением обозначений. Пусть $\{x_p, y_q, e_{pq}\,;\ p,q\geqslant 1\}$ — образующие алгебры $P_2(\mathcal{E},\mu,\alpha_1,\alpha_2)$ с соотношениями (6). Положим, аналогично (2),

$$x_i=\sum_{\substack{1\leqslant p\leqslant N_1\\ 1\leqslant q\leqslant N_2}}\frac{\theta_i(x_p,y_q)}{\theta\left(\dfrac{x_1}{x_p}\right)\dots\widehat{\theta\left(\dfrac{x_p}{x_p}\right)}\dots\theta\left(\dfrac{x_{N_1}}{x_p}\right)\theta\left(\dfrac{y_1}{y_q}\right)\dots\widehat{\theta\left(\dfrac{y_q}{y_q}\right)}\dots\theta\left(\dfrac{y_{N_2}}{y_q}\right)}e_{p,q}. \qquad (9)$$

Здесь $\{\theta_i(x,y)\,;\ i\in\mathbb{Z}_n\}$ — базис в пространстве сечений расслоения ξ на $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ (см. § 1), отождествленного с пространством функций на $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$, удовлетворяющих соотношениям

$$\theta_i(\lambda x,y)=x^{-n_1}y\theta_i(x,y),\quad \theta_i(x,\lambda y)=xy^{-n_2}\theta_i(x,y).$$

Размерность пространства таких функций равна $n=n_1n_2-1$. Это расслоение, а также сдвиги μ,α_1,α_2 можно найти из следующего условия (ср. § 2, формулы (3), (4)): в произведение x_ix_j подставим выражение (9) и воспользуемся соотношениями (6). В результате получим разложение x_ix_j по базису $e_{pq}e_{p'q'}$, где $(p,q)\leqslant(p',q')$, причем коэффициенты — сечения некоторых расслоений. Необходимо, чтобы коэффициент при каждом $e_{pq}e_{p'q'}$ был суммой сечений эквивалентных расслоений (если $p\neq p'$ и $q\neq q'$, то коэффициент будет состоять из четырех слагаемых). Это условие дает $\mu=e^{-2\pi in\tau}$, $\alpha_1=e^{2\pi i(n_1+1)\tau}$, $\alpha_2=e^{2\pi i(n_2+1)\tau}$. В этом случае $\{x_i\,;\ i\in\mathbb{Z}_n\}$, заданные формулой (9), удовлетворяют соотношениям в $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$, где $n=n_1n_2-1$, $k=n_2$.

Аналогично § 2 определим семейство элементов $\{x(u,v)\,;\ u,v\in\mathbb{C}^*\}$ из пространства образующих алгебры $(Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau))^!$; положим $x(u,v)=\sum_{i\in\mathbb{Z}_n}\theta_i(u,v)x^i$, где $\{x^i\,;\ i\in\mathbb{Z}_n\}$ — базис, двойственный к $\{x_i\,;\ i\in\mathbb{Z}_n\}$. Как и в § 2, получаем соотношения между $x(u,v)$ в виде

$$x(\alpha_1u_1,\alpha_2v_1)x(u_2,v_2)=-\frac{\mu\theta\left(\dfrac{u_2}{\mu u_1}\right)\theta\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)}{\theta\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)\theta\left(\dfrac{\mu v_2}{v_1}\right)}x(\alpha_1u_2,\alpha_2v_2)x(u_1,v_1)$$
$$-\frac{\theta(\mu)\theta\left(\dfrac{u_2v_1}{u_1v_2}\right)}{\mu\theta\left(\dfrac{u_2}{u_1}\right)\theta\left(\dfrac{v_1}{\mu v_2}\right)}x(\alpha_1u_1,\alpha_2v_2)x(u_2,v_1). \qquad (10)$$

Соотношения (10) определяют алгебру $(Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau))^!$, а значит, и $Q_{n,k}(\mathcal{E},\tau)$. Легко проверить, что соотношения (10) удовлетворяют уравнению треугольника и условию голоморфности, т.е. не имеют полюса при $u_1=u_2$ и при $v_1=\mu v_2$.

Замечания. 1. Условие голоморфности и уравнение треугольника однозначно определяют коэффициенты в (10).

2. Аналогичные соотношения можно написать и для $x(u_1, \ldots, u_m)$ при произвольном m. Они двойственны соотношениям (8).

С помощью алгебр $P_m(\mathcal{E}, \mu)$ можно также построить алгебры Замолодчикова $Z_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$, где $\dfrac{n}{k} = n_1 - \cfrac{1}{n_2 - \ldots - \cfrac{1}{n_{m-1}}}$. Для упрощения обозначений опять ограничимся случаем $m = 2$. Положим $e_p(u) = e(x_p, u)e_p$, где $e(u, v)$ удовлетворяют (8) при $m = 2$ и $e_p x_{p'} = \alpha x_{p'} e_p$, $e_p x_p = \alpha\mu x_p e_p$, $p \neq p'$, причем $\mu = e^{-2\pi i n\tau}$, $\alpha = e^{2\pi i\tau}$. Положим дополнительно $e_p(v)e_p(v') = e_p(v')e_p(v)$ и запишем

$$x_i(u) = \sum_{p=1}^{N} \frac{\theta_i(ux_p)}{\theta(x_1/x_p)\ldots\theta(\widehat{x_p/x_p})\ldots\theta(x_N/x_p)}\, e_p(u). \tag{11}$$

Здесь $\{\theta_i(z);\ i \in \mathbb{Z}_n\}$ — тета-функции порядка n. Тогда $\{x_i(u);\ i \in \mathbb{Z}_n,\ u \in \mathbb{C}^*\}$ удовлетворяют соотношениям в алгебре Замолодчикова в мультипликативной записи.

Замечания. 1. Согласно [6, § 1], алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$ и $Z_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$ тесно связаны. Это сразу следует и из наших конструкций, если сравнить (11) и (2) и заметить, что из (8) вытекает $e(u', v)e(u, \mu v) = e(u, v)e(u', \mu v)$.

2. Согласно [6, § 3], алгебры $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$ связаны друг с другом при разных n, k. Эти результаты вытекают из существования гомоморфизмов (см. § 3)

$$P_m(\mathcal{E}, \mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \to P_i(\mathcal{E}, \mu, \alpha_1, \ldots, \alpha_i) \otimes A \otimes P_{m-i}(\mathcal{E}, \mu, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m).$$

3. В [7] изучены некоторые рациональные вырождения алгебр $Q_{n,k}(\mathcal{E}, \tau)$. Часть этих результатов может быть получена из результатов данной работы, если заметить, что $\theta(t) \to 1 - t$ при $\lambda \to 0$ (см. (5)).

Литература

1. *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия. – М.: Мир, 1971.
2. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнениями Янга–Бакстера // Функц. анализ и его прил. – 1982. – Т. 16, вып. 4. – С. 22–34.
3. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнениями Янга–Бакстера. II. Представления квантовой алгебры // Функц. анализ и его прил. – 1983. – Т. 17, вып. 4. – С. 34–48.
4. *Чередник И. В.* Об R-матричном квантовании формальной группы токов. Теоретико-групповые методы в физике. Труды Юрмальской конференции, май 1985. Т. 2. – М.: Наука, 1986, С. 218–232.
5. *Одесский А. В., Фейгин Б. Л.* Алгебры Склянина, ассоциированные с эллиптической кривой. – Киев, изд. Ин-та теор. физики АН УССР, 1988.
6. *Одесский А. В., Фейгин Б. Л.* Эллиптические алгебры Склянина // Функц. анализ и его прил. – 1989. – Т. 23, вып. 3. – С. 45–54.
7. *Odesski A. V.* Rational degeneration of elliptic quadratic algebras. – RIMS 91, Project “Infinite Analysis”, June 1–August 31, 1991.
8. *Bergman G.* The diamond lemma for ring theory // Adv. Math. – 1979. – V. 29. – P. 175–218.
9. *Priddy S.* Koszul resolution // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – V. 152. – P. 39–60.

Институт новых технологий РАН
Институт теоретической физики РАН

Поступило в редакцию
12 мая 1992г.