



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Goncharenko, V. F. Kravchenko,
V. I. Ponomarev, The inverse scattering problem for
wave beams in an inhomogeneous layer,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1986, Volume 291,
Number 2, 320–322

<https://www.mathnet.ru/eng/dan8377>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you
have read and agreed to these terms of use
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.82

April 29, 2025, 07:20:06



$$\begin{aligned}
 & -4rpv^k \left[\left(\frac{v_i}{v_n v^n} - \frac{v_i}{v_n v^n} \right)_{;k} - \left(\frac{v_k}{v_n v^n} - \frac{v_k}{v_n v^n} \right)_{;i} \right] - \\
 & -4\dot{\rho}^* \left(\frac{v_i}{v_n v^n} - \frac{v_i}{v_n v^n} \right) \frac{d(rp/\dot{\rho}^*)}{ds} = 0, \\
 (16) \quad & \left[\dot{\rho}^* \left(\frac{v_k v^k}{\sqrt{v_k v^k}} \right)^{4r} v^n \right]_{;n} = 0,
 \end{aligned}$$

причем свертка (15) с v^i тождественно равна нулю.

Для пылевидной материи $p = 0$ и (15) сводятся к уравнениям геодезического движения [9], записанным в ковариантной форме. В предельном случае $r \rightarrow 0$, (15) и (16) переходят в известные уравнения ОТО.

Научно-исследовательский институт ядерной физики
Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова

Поступило
10 XII 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. — Природа, 1984, № 11, с. 3–10.
2. Седов Л.И. Труды VII Междунар. совещ. по пробл. квантовой теории поля. Дубна, 1984, с. 368–381.
3. Христиансен Г.Б. Космические лучи сверхвысоких энергий. М.: Изд-во МГУ, 1974. 268 с.
4. Bogoslovsky G. Yu. — Nuovo Cimento B, 1977, vol. 40, № 1, p. 99–115, 116–134.
5. Bogoslovsky G. Yu. — Hadronic J., 1984, vol. 7, № 6, p. 1361–1408.
6. Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981. 504 с.
7. Bogoslovsky G. Yu. The proper time, spatial distances, and clock synchronization in the locally anisotropic space-time. Dubna, 1982. 4 p.
8. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, 1955. 504 с.
9. Богословский Г.Ю. — Укр. физ. журн., 1984, т. 29, № 1, с. 17–24.

УДК 517.9 + 550.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А.А. ГОНЧАРЕНКО, В.Ф. КРАВЧЕНКО, В.И. ПОНОМАРЕВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ

(Представлено академиком Ю.А. Митропольским 21 X 1985)

1. Известные обратные задачи определения свойств рассеивающего слоя по известному в некоторой плоскости решению волнового уравнения предполагают, что пространственная размерность потенциала, описывающего электрические характеристики неоднородной среды, меньше размерности рассеянной монохроматической волны (см. [1], где имеется обширная библиография). В то же время в различных областях (радиофизика, гидроакустика) возникает задача определения потенциала в случае совпадения размерностей последнего и рассеянной волны. В этой ситуации потенциал можно трактовать как нестационарный.

В данной работе рассматривается задача восстановления трехмерного потенциала дифференциального уравнения типа Шредингера, которое описывает распространение электромагнитных волн в малоугловом приближении в случайно-неод-

нородных средах [2, 3], а потенциал характеризует флуктуации диэлектрической проницаемости среды. Задача исследуется на реализациях среды, обладающих некоторыми аналитическими свойствами, адекватными физике процесса распространения.

2. Обратная задача формулируется следующим образом:

$$(1) \quad \begin{aligned} 2iku_x + \Delta u + k^2 \epsilon(x, \rho) u &= 0, \\ u(0, \rho) = \varphi(\rho, \gamma), \quad u(l, \rho) = f(\rho, \gamma), \quad \rho, \gamma \in R^2, \end{aligned}$$

где $\rho = (y, z)$, Δ – оператор Лапласа по ρ , k – среднее волновое число, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ – заданный параметр. Она является некорректной [1, 4]. Здесь корректная постановка достигается введением параметра γ в падающую волну. При решении обратной задачи перейдем к эквивалентному интегральному уравнению, записав его для фурье-образов по переменной ρ . Обозначим $\kappa = (\theta, \omega)$ вектор пространственных частот, причем θ соответствует координате x , а ω – переменной ρ . Функции и их образы Фурье будем различать указанием аргументов. Конечный результат – определение спектра функции $\epsilon(x, \rho)$. Предварительно приведем необходимые сведения по исследованию прямой задачи, имеющие самостоятельный интерес. В качестве падающих волн рассматриваем двухпараметрическое семейство функций, спектр которых имеет вид

$$(2) \quad \varphi(\omega, \gamma) = \eta(\gamma) \psi(\omega) \exp(i\gamma \xi(\omega)),$$

где $\gamma \xi(\omega) = \gamma_1 \xi_1(\omega) + \gamma_2 \xi_2(\omega)$, $\eta(\gamma)$ – функция степенного роста, непрерывная $\psi(\omega) \in L^2(R^2)$, $\xi_{1,2}(\omega) \in C^\infty(R^2)$. Разнообразными примерами таких волн являются ограниченные волновые пучки.

3. Изучение прямой задачи проведем при условии $|\epsilon(x, \rho)| \leq C$. Обозначим $J(\omega)$ якобиан системы функций $\xi_{1,2}(\omega)$.

Теорема 1. Пусть непрерывная функция $\epsilon(x, \omega) \in L^2(R^2)$, падающая волна имеет вид (2), $|J(\omega)| \neq 0$, тогда

а) $u(x, \omega, \gamma) \in L^2(R^2)$ для всех x, γ ;

б) если $u = w(x, \omega, \gamma) \eta(\gamma)$, то $w(x, \omega, \gamma)$ удовлетворяет уравнению

$$w = w_0 \exp(-ix\mu) + Aw,$$

$$k' = k(2\pi)^{-1}, \quad w_0 = \psi(\omega) \exp(i\gamma \xi(\omega)), \quad Aw = k'i(2)^{-1} \int_0^x \int_{R^2} g(x - \tau, \omega) \times$$

$$\times \epsilon(\tau, \omega - \omega') w(\tau, \omega', \gamma) d\omega' d\tau, \quad g(x, \omega) = \exp(-ix|\omega|^2(2k)^{-1});$$

с) для рассеянного поля $V = w(x, \omega, \gamma) - w_0(\omega, \gamma) \exp(-ix\mu)$, где $\mu = |\omega|^2(2k)^{-1}$, имеет место представление его спектра

$$V(x, \omega) = k'i(2)^{-1} \exp(-ix\chi(\kappa)) \psi(\kappa) |J(\kappa)| v(x, \kappa),$$

где $\chi(\kappa) = (1 + 2\theta) |\omega|^2(2k)^{-1}$, а $v(x, \kappa)$ является функцией ослабления спектра рассеянного поля;

д) $v(x, \kappa) \in L^2(R^3)$ для любого конечного x , непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет уравнению

$$(3) \quad v = v_0 + Bv,$$

$$v_0(x, \kappa) = \int_0^x \epsilon(\tau, \omega) \exp(-it, \omega) d\tau,$$

$$Bv = k'i(2)^{-1} \int_0^x \int_{R^2} \exp(-it\chi(\kappa, \omega')) \epsilon(\tau, \omega - \omega') v(\tau, \theta, \omega') d\omega' d\tau.$$

Следствие 1. $|v(x, \rho)| \leq C$.

Следствие 2. Обратная задача редуцируется к уравнению

$$(4) \quad \epsilon = \epsilon_0 - B_v \epsilon,$$

где оператор B_v из (3) и имеет в качестве ядра функцию $v(x, \kappa)$, $\epsilon_0(x, \kappa)$ — решение обратной задачи в линейной постановке, т.е. без учета второго слагаемого из (3).

4. Теорема 2. Задача определения $\epsilon(\kappa)$ корректна в классе непрерывных функций $\epsilon(\kappa) \in L^2(R^3)$ таких, что $|\epsilon(x, \rho)| \leq C$.

Доказательство проводится методом последовательных приближений для системы (4), (3): Сходимость имеет место для произвольных длин трасс и падающих волн, для которых приемлема модель распространения (1).

5. С прикладной точки зрения представляет интерес устойчивое восстановление $\epsilon(\kappa)$, когда исходные данные, т.е. $\epsilon_0(\kappa)$, задаются с аддитивным шумом $n(\kappa)$. Известно [4], что при широкополосном характере $n(\kappa)$ обратная задача неустойчива в среднеквадратичном смысле и необходима регуляризация для получения приемлемого решения. В работе в качестве регуляризаторов использовались линейные фильтры [5] с передаточной функцией $H(\kappa)$. Предположим, что шум моделируется случайным полем с математическим ожиданием $Mn = 0$ и спектральной плотностью $K_n(\kappa)$, а неоднородности в линейном приближении являются полем с $M\epsilon_0 = 0$ и спектральной плотностью $K_{\epsilon_0}(\kappa)$. Возмущенное решение обратной задачи находится последовательными приближениями по (4) с начальным элементом

$$q_0(\kappa) = H(\kappa)[\epsilon_0(\kappa) + n(\kappa)] = \epsilon'_0(\kappa) + n'(\kappa).$$

Теорема 3. Оптимальное фильтрованное решение задачи (4) имеет вид

$$q(\kappa) = \epsilon'_k(\kappa) + N'(\kappa),$$

где $M|N'(\kappa)|^2 < \infty$ и передаточная функция оптимального фильтра является решением интегрального уравнения второго рода типа Фредгольма

$$H(\kappa)M|n|^2 + M[B_v N'(B_v N)^*] + M[(\epsilon'_k - \epsilon_k)\epsilon^*] - 2K_{\epsilon}(\kappa) = 0.$$

В случае нормальности всех полей передаточная функция дается выражением

$$H(\kappa) = K_{\epsilon_0}(\kappa) [K_n(\kappa) + K_{\epsilon_0}(\kappa)]^{-1}$$

и определяет известный фильтр Винера.

В теореме число k означает k -ю итерацию к точному решению и определяется через длины падающей волны, трассы распространения и величину $\sigma_{\epsilon_0}^2 (\sigma_n^2)^{-1} = \delta$. При $\delta > 1$ и моделировании турбулентной атмосферы спектром Колмогорова—Обухова [2, 3] в СВЧ-диапазоне $k = 3$ и метод применим на трассах длиной порядка 10^2 км.

Харьковский авиационный институт
им. Н.Е. Жуковского

Поступило
12 XII 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
2. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978, т. 2. 463 с.
3. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981, т. 2. 317 с.
4. Тихонов А.И., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971, т. 1. 664 с.