

## В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

## СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

## ТРЕХВАЛЕНТНЫЕ ГРАФЫ И СОЛИТОНЫ

И. М. КРИЧЕВЕР, С. П. НОВИКОВ

До недавнего времени нелинейные интегрируемые системы были известны только на решетках  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z}^2$  ( $(L, A)$ -пары типа цепочки Тода для  $\mathbb{Z}$  и  $(L, A, B)$ -тройки для  $\mathbb{Z}^2$ , равно как и дискретные спектральные симметрии линейного оператора  $L$  второго порядка типа преобразований Эйлера–Дарбу и Лапласа – см. [1]). Заметим, что трехвалентное дерево  $\Gamma_3$  представляет собой дискретную модель гиперболической геометрии – плоскости Лобачевского, а не Евклида, в отличие от  $\mathbb{Z}^2$ . Никаких изоспектральных деформаций операторов  $L$  второго порядка на  $\Gamma_3$  обнаружить не удалось – даже и в виде  $(L, A, B)$ -тройки  $\dot{L} = LA - BL$ , деформирующем лишь один спектральный уровень  $L\Psi = 0$  (см. [2]–[4]).

Порядком уравнения  $L\Psi = 0$ , где  $(L\Psi)_P = \sum_Q b_{P,Q} \Psi_Q$ , называется максимальный диаметр  $\max_P d(Q_1, Q_2)$ , где  $b_{P,Q_1} \neq 0, b_{P,Q_2} \neq 0$  или  $b_{Q_1,Q_2} \neq 0$ . Метрика на графе определяется так, что длина ребра равна 1; здесь  $\Psi_P$  – это функция от вершин  $P$ .

Мы рассматриваем графы, где каждое ребро имеет ровно две вершины и в каждой вершине сходится 3 ребра.

**ТЕОРЕМА 1.** *Общий вещественный самосопряженный оператор  $L$  четвертого порядка на дереве  $\Gamma_3$  обладает изоспектральными деформациями одного уровня энергии  $L\Psi = 0$  в виде  $(L, A, B)$ -тройки:*

$$\dot{L} = LA - BL$$

где

$$(L\Psi)_P = \sum b_{PP''} \Psi_{P''} + b_{PP'} \Psi_{P'} + w_P \Psi_P,$$

$P, P', P''$  – вершины,  $d(P, P'') = 2$ ,  $d(P, P') = 1$ , и мы предполагаем, что  $b_{P,P''} > 0$ . При этом  $B = -A^t$ ,  $(A\Psi)_P = \sum c_{PP'} \Psi_{P'}$ .

Для выражения коэффициентов  $c_{P,P'}$  для ближайших соседей  $P, P'$  мы выберем начальную вершину  $\Gamma_3$ , обозначаемую через  $P_0$ . Возьмем минимальный путь  $\gamma$ , состоящий из ребер  $R_i \in \gamma$ , соединяющий  $P_0$  и  $P$  и ориентированный от  $P_0$  к  $P$ . Пусть ребра  $R'_{i_1}, R'_{i_2}$  сходятся в начальной вершине ребра  $R_i$ , а ребра  $R''_{i_1}, R''_{i_2}$  расходятся в конечной вершине ребра  $R_i$ . Рассмотрим мультипликативный 1-коцикл на  $\Gamma_3$  такой, что

$$\chi(R_i) = - \frac{(b_{R'_{i_1} R_i} \cdot b_{R'_{i_2} R_i})}{(b_{R'_{i_1} R_i} \cdot b_{R'_{i_2} R_i})}.$$

По определению положим

$$c_R = -\frac{1}{b_{R'_1 R'_2}} \left( \prod_{R_i \in \gamma} \chi(R_i) \right), \quad R = PP'.$$

Эти формулы получаются из условия, что оператор  $LA + A^t L$  имеет порядок не более 4. После этого динамическая система  $\dot{L} = LA + A^t L$  корректно определена. Она имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{b}_{PP''} &= b_{P'P''} c_{P'P} + c_{P'P} b_{P'P}; \\ \dot{b}_{PP'} &= b_{P'P''} c_{P''P'} + c_{P''P'} b_{P''P'} + w_P c_{PP'} + w_{P'} c_{P'P}; \\ \dot{w}_P &= 2b_{PP'} c_{P'P}, \quad i, \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь  $P_\alpha^* PP' P''_i$  – это кратчайшие пути длины  $d = 3$ , содержащие отрезок  $PP' = R$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Для любого тривалентного графа  $\Gamma$  коэффициенты  $c_{PP'}$  оператора  $A$  определены на абелевой накрывающей  $\tilde{\Gamma}$ , определяемой 1-коциклом  $\chi$  (выше), вдоль 1-циклов.

**ТЕОРЕМА 2.** *Общий самосопряженный вещественный оператор  $L$  четвертого порядка на дереве  $\Gamma_3$  допускает однопараметрическое семейство факторизации вида*

$$L = Q^t Q + u_P, \quad \text{где } (Q\psi)_P = \sum_Q d_{PQ} \psi_Q + v_P \psi_P,$$

где

$$\begin{aligned} b_{PP''} &= d_{P'P} d_{P'P''}; & b_{PP'} &= d_{P'P} v_{P'} + d_{PP'} v_P, \\ w_P &= v_P^2 + \sum_{P'} d_{P'P}^2 + u_P & (\text{пусть } d_{PQ} > 0). \end{aligned}$$

При этом коэффициенты  $d_{PQ}$  определены однозначно, коэффициент  $v_P$  определяется одним параметром – значением в избранной центральной точке  $P_0 \in \Gamma_3$ . Эта факторизация определяет преобразование типа Лапласа

$$\tilde{L} = Qu_P^{-1} Q^t + 1, \quad \tilde{\psi} = Q\psi,$$

где  $\tilde{L}\tilde{\psi} = 0$ , если  $L\psi = 0$ . Самосопряженный оператор  $\tilde{L}$  определен с точностью до преобразования

$$\tilde{L} \rightarrow f_P^{-1} \cdot \tilde{L} \cdot f_P, \quad \tilde{\psi} \rightarrow f_P^{-1} \cdot \tilde{\psi}.$$

Удобно выбрать  $f_P = u_P^{1/2}$ . Тогда мы имеем  $\tilde{L} = \tilde{Q}^t \tilde{Q} + u_P$ , где

$$\tilde{Q} = u_P^{-1/2} Q^t u_P^{1/2}, \quad \tilde{\psi} = u_P^{-1/2} Q\psi$$

(ср. [5] для  $\mathbb{Z}^2$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Факторизация оператора  $L$  зависит только от разрешимости линейного уравнения  $b_{PQ} = d_{QP} v_Q + d_{PQ} v_P$ . Кстати, этот оператор обладает нетривиальным (одномерным) ядром, если и только если коцикл  $\chi$  (выше) – когомологичен нулю на графе  $\Gamma$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Новиков С., Дынников И. // УМН. 1997. Т. 52. №5. С. 175–234. [2] Манаков С. // УМН. 1976. Т. 31. №5. С. 245–246. [3] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. С. 15–18. [4] Novikov S., Veselov A. // Physica D. 1986. V. 18. P. 267–273. [5] Novikov S., Veselov A. // Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 109–132.