



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. D. Luk'yanov, ELECTROMAGNETIC-WAVE
EXCITATION IN PIECEWISE HOMOGENEOUS
WAVE-GUIDES,
Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, 1985, Volume 55,
Issue 6, 1041–1047

<https://www.mathnet.ru/eng/jtf1273>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that
you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.174

April 28, 2025, 04:59:38



УДК 538.561 : 621.372.834

О ВОЗБУЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ

В. Д. Лукьянов

Решена задача о рассеянии электромагнитных волн в кусочно-однородном волноводе. Каждая неоднородность в волноведущей системе характеризуется обобщенной матрицей рассеяния, которая предполагается известной на основании теоретического рассмотрения или экспериментальных данных. Исследовано рассеяние нормальных волн на двух двухсторонних диафрагмах в волноводе. Каждая створка двухсторонней диафрагмы занимает четверть ширины волновода. Матрица рассеяния на одной такой двухсторонней диафрагме теоретически изучена в [1]. Исследовано резонансное рассеяние нормальных волн на диафрагмах. Получено решение и проведен численный анализ задачи об отражении нормальных волн в полубесконечном волноводе, на конце которого находится камера, образованная стенками волновода и двухсторонней диафрагмой, расположенной на некотором расстоянии от торца волновода.

1. Постановка задачи

Решается скалярная задача о распространении стационарных электромагнитных волн в волноведущей системе. Волноведущая система (рис. 1) состоит из отрезков плоских волноводов постоянной ширины, которые соединяют между собой всевозможные конструктивные элементы. Как показано на рис. 1, волновод с номером s , для которого $a_{s+1} < x < b_s$ и $|y| < H$, соединяет конструктивные элементы с номерами s и $s+1$, где $s=1, 2, \dots, m$. Для составляющей электрического поля, перпендикулярной плоскости xoy , $E_z=Q(x, y)$ выполнено внутри волноводов однородное уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial y^2} + k^2 Q(x, y) = 0.$$

Здесь $k=\omega/c$ — волновое число; ω — круговая частота; c — скорость света; множитель $\exp(-i\omega t)$, задающий зависимость волновых процессов от времени; везде для краткости опущен. Считаем, что на стенках волновода для поля $Q(x, y)$ выполнено некоторое граничное условие.

Электромагнитные колебания в системе возбуждаются набегающими со стороны положительных значений x нормальными волнами волновода

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^N u_n \varphi_n(y) e^{-i\lambda_n x}, \quad (1)$$

u_n — комплексная амплитуда нормальной волны с номером n ; $\varphi_n(y)$ — функция, описывающая распределение поля для нормальной волны с номером n в поперечном сечении волновода. Суммирование в (1) производится по распространяющимся нормальным волнам, для которых при $\text{Im } k=0$ волновые числа λ_n вещественны, $n=1, 2, \dots, N$, где N — число распространяющихся в волноводе нормальных волн, причем $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$. Отметим, что прочие нормальные волны в волноводе неоднородные. Их волновые числа λ_n , $n=N+1, \dots$ чисто мнимые и $\text{Im } \lambda_{N+1} < \text{Im } \lambda_{N+2} < \dots$.

Предполагаем, что $\varphi_n(y)$ нормирована так, что каждая распространяющаяся нормальная волна в (1) переносит одинаковую порцию электромагнитной энергии.

Требуется определить отраженное $w(x, y) = Q(x, y) - u(x, y)$ и прошедшее $v(x, y) = Q(x, y)$ поля соответственно в правом $x > 0$ и левом $x < b_m$ волноводах, а также поля $w_s(x, y)$ и $v_s(x, y)$, возбуждаемые в волноводе с номером s ; $w(x, y)$ и $v(x, y)$ строятся в соответствии с принципом предельного поглощения.

Искомые поля ищем в виде разложения по нормальным волнам волноводов — распространяющихся и неоднородных

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \varphi_n(y) e^{i\lambda_n x}, \quad x > 0,$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \varphi_n(y) e^{-i\lambda_n (x-b_m)}, \quad x < b_m,$$

$$w_s(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ns} \varphi_n(y) e^{i\lambda_n (x-a_{s+1})}, \quad a_{s+1} < x < b_s,$$

$$v_s(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{ns} \varphi_n(y) e^{-i\lambda_n (x-b_s)}, \quad a_{s+1} < x < b_s,$$

$w_n, v_n, \alpha_{ns}, \beta_{ns}$ — искомые комплексные амплитуды соответствующих нормальных волн; $w_s(x, y)$ есть сумма нормальных волн распространяющихся ($n =$

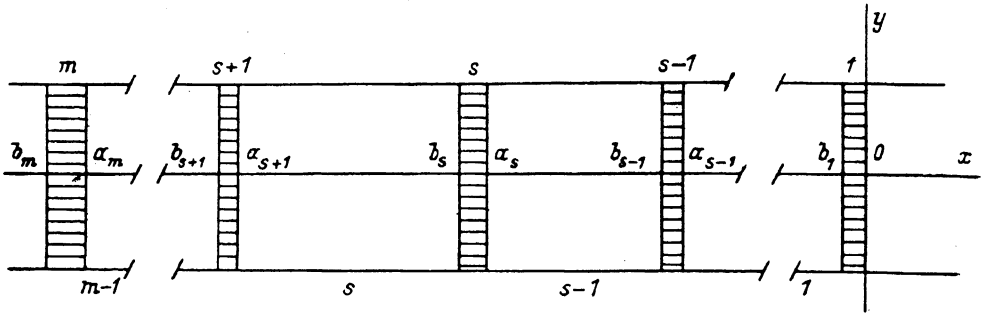


Рис. 1.

$= 1, 2, \dots, N$) и волн, амплитуда которых экспоненциально убывает ($n = N+1, N+2, \dots$) в направлении оси (ox) от левого конца $x = a_{s+1}$ s -го волновода; $v_s(x, y)$ — в противоположном направлении, от правого конца этого волновода $x = b_s$.

Состояние волнового поля в волноводе с номером s будем описывать бесконечномерными матрицами—столбцами, элементами которых являются комплексные амплитуды нормальных [волн — α_{ns} и β_{ns}

$$X_s = \|\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \alpha_{3s}, \dots, \alpha_{Ns}, \alpha_{N+1, s}, \dots\|',$$

$$Y_s = \|\beta_{1s}, \beta_{2s}, \beta_{3s}, \dots, \beta_{Ns}, \beta_{N+1, s}, \dots\|'.$$

Штрих означает действие транспонирования матрицы.

Падающее $u(x, y)$, отраженное $w(x, y)$ и прошедшее $v(x, y)$ поля определяют матрицы—столбцы

$$U = \|u_1, u_2, \dots, u_N, 0, \dots\|',$$

$$W = \|w_1, w_2, \dots, w_N, w_{N+1}, \dots\|',$$

$$V = \|v_1, v_2, \dots, v_N, v_{N+1}, \dots\|'.$$

Относительно конструктивных элементов, которые соединены между собой волноводами, предполагаем известными обобщенные матрицы рассеяния на этих элементах. Так, для элемента с номером s ($s = 1, 2, \dots, m$) (рис. 1), к которому подходят волноводы с номерами $s-1$ и s , известна обобщенная матрица прохождения $T_s = \|t_{ji}^{(s)}\|$ и отражения $R_s = \|r_{ji}^{(s)}\|$, где $j, l = 1, 2, \dots$. Если считать, что элемент с номером s — единственный конструктивный элемент в волноводной системе, то с использованием матриц T_s и R_s рассчитываются отра-

женное от элемента поле $w_s(x, y)$ и прошедшее через него поле $v_s(x, y)$ по известному облучающему полю

$$u_s(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{ns} \varphi_n(y) e^{-i\lambda_n(x-a_s)} \quad (x > a_s).$$

Комплексные амплитуды нормальных волн поля $w_s(x, y)$ и $v_s(x, y)$ определяются при этом из соотношений

$$W_s = R_s U_s, \quad V_s = T_s U_s,$$

где $U_s = \|u_{1s}, u_{2s}, \dots, u_{ns}, \dots\|$. Элементы матриц T_s и R_s определяются или на основании теоретического рассмотрения, или на основании экспериментальных данных.

2. Построение решения

Рассмотрим конструктивный элемент с номером s . На этот элемент справа по волноводу с номером $s-1$ набегают поле $v_{s-1}(x, y)$ и слева по волноводу с номером s — поле $w_s(x, y)$. Взаимодействуя с препятствием, они преобразуются в отраженные от элемента поля $v_s(x, y)$, $a_{s+1} < x < b_s$ и $w_{s-1}(x, y)$, $a_s < x < b_{s-1}$. Используя известные матрицы отражения R_s и прохождения T_s , для этого элемента волноведущей системы получим следующие соотношения:

$$X_{s-1} = T_s M_s X_s + R_s M_{s-1} Y_{s-1}, \quad (2)$$

$$Y_s = R_s M_s X_s + T_s M_{s-1} Y_{s-1}. \quad (3)$$

Здесь M_s — бесконечномерная диагональная матрица, диагональный элемент которой имеет вид $m_{nn} = e^{i\lambda_n(b_s - a_{s+1})}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Появление матриц M_s и M_{s-1} в (2) и (3) вызвано тем, что на входе элемента с номером s поля $w_s(x, y)$ и $v_{s-1}(x, y)$ имеют вид

$$w_s(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{ns} \varphi_n(y) e^{i\lambda_n(b_s - a_{s+1})},$$

$$v_{s-1}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n, s-1} \varphi_n(y) e^{i\lambda_n(b_{s-1} - a_s)}.$$

Отметим, что при $\text{Im } k = 0$ $\text{Im } \lambda_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots, N$) и первые N диагональных элементов матрицы M_s — комплексные числа, модуль которых равен единице, и эти элементы матрицы M_s описывают набег фазы распространяющихся волн на длине s -го волновода. Последующие элементы экспоненциально убывают с увеличением длины s -го волновода и описывают ослабление неоднородных волн волновода на расстоянии, равном длине s -го волновода.

Для первого ($s=1$) и последнего ($s=m$) элемента соотношения, аналогичные (2) и (3), имеют вид

$$W = R_1 U + T_1 M_1 X_1, \quad Y_1 = T_1 U + R_1 M_1 X_1, \quad (4), (5)$$

$$X_{m-1} = R_m M_{m-1} Y_{m-1}, \quad V = T_m M_{m-1} Y_{m-1}. \quad (6), (7)$$

Для решения полученных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, какими являются уравнения (2)–(7), подставим выражения для X_{m-1} из (6) в равенства (2) и (3), считая, что здесь $s = m-1$. Имеем тогда:

$$Y_{m-1} = R_{m-1} M_{m-1} R_m M_{m-1} Y_{m-1} + T_{m-1} M_{m-2} Y_{m-2}, \quad (8)$$

$$X_{m-2} = T_{m-1} M_{m-1} R_m M_{m-1} Y_{m-1} + R_{m-1} M_{m-2} Y_{m-2}. \quad (9)$$

Разрешая уравнение (8) относительно Y_{m-1} и предполагая при этом, что существует A_{m-1}^{-1} , получим

$$Y_{m-1} = A_{m-1}^{-1} T_{m-1} M_{m-2} Y_{m-2}, \quad (10)$$

где

$$A_{m-1}^{-1} = I - R_{m-1} M_{m-1} R_m M_{m-1}.$$

Отметим, что элементы матрицы $A_{m-1}^{-1} = \|a_{jl}\|$ имеют вид

$$a_{jl} = \delta_{jl} - \sum_{n=1}^{\infty} r_{jn}^{(m-1)} r_{ni}^{(m)} e^{-i(\lambda_n + \lambda_l)(a_m - b_{m-1})},$$

где δ_{jl} — символ Кронекера. При достаточно больших l ($l \gg N$) внедиагональные элементы a_{jl} имеют поведение $a_{jl} \sim e^{-l(b_{m-1} - a_m)}$ и экспоненциально убывают с увеличением l ($j = \text{const}$). Поэтому при приближенном нахождении обратной матрицы A_{m-1}^{-1} можно ограничиваться обращением матрицы конечного порядка,

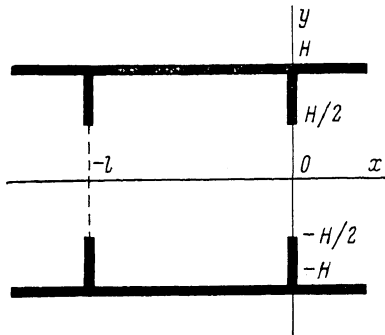


Рис. 2.

причем этот порядок превосходит на несколько единиц число распространяющихся волн N . При этом для изучения рассеяния на элементе с номером s привлекаются в рассмотрение все распространяющиеся в волноводе и несколько неоднородных волн, число которых зависит от длин $m-1$ -го волновода. Прочими неоднородными волнами пренебрегаем, учитывая их малую по модулю комплексную амплитуду на входе конструктивного элемента.

Равенство (9) с учетом (10) определяет X_{m-2}

$$X_{m-2} = [T_{m-1} M_{m-1} R_m M_{m-1} A_{m-1}^{-1} T_{m-1} M_{m-2} + R_{m-1} M_{m-2}] Y_{m-2}.$$

Продолжая эту процедуру, далее выразим X_{m-3} через Y_{m-3} и т. д. В конце концов получим соотношение, связывающее X_1 и Y_1 , что с учетом соотношения (4) позволяет найти X_1 и Y_1 . Прodelывая обратный ход, найдем X_2 и Y_2, \dots, X_{m-1} и Y_{m-1} . Используя затем соотношения (5) и (7), найдем W и \bar{V} .

3. Рассеяние на двух диафрагмах в волноводе

Изучим распространение электромагнитных волн в волноводе с двумя двухсторонними диафрагмами. Эти диафрагмы расположены в сечении $x=0$ и $x=-l$ по отрезкам $H/2 \leq y \leq H$ (рис. 2). Диафрагмы, как и стенки волновода, представляют собой идеальные проводники с бесконечной проводимостью. Здесь для поля $Q(x, y)$ в волноводе выполнено граничное условие $Q|_s = 0$. Будем считать, что как падающее, так и рассеянные поля на диафрагмах симметричны относительно оси ox . Антисимметричный случай рассматривается аналогично.

В [1] получено точное решение задачи о построении матрицы рассеяния на одиночной двухсторонней диафрагме в таком волноводе. Решение задачи было получено сведением к матричной задаче Римана, которая в данном случае решается в замкнутом виде.

В частности, для элементов матрицы отражения $R = \|r_{mn}\|$ и матрицы прохождения $T = \|t_{mn}\|$ были получены следующие выражения:

$$r_{mn} = t_{mn} = \frac{2i \operatorname{ch}\left(\gamma_m \frac{H}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\gamma_n \frac{H}{2}\right) [\gamma_n \lambda_m (-1)^n - \gamma_m \lambda_n (-1)^m]}{(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \sqrt{\lambda_m \lambda_n} H} A_{mn}, \quad (m \neq n),$$

$$r_{nn} = -\frac{1}{2} - \frac{ik^2}{2\lambda_n^2 \gamma_n} A_{nn}, \quad t_{nn} = 1 + r_{nn}$$

где

$$A_{mn} = B_m^{(-1)^m} B_n^{(-1)^n},$$

$$B_m = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \beta_{2j-1}^{\pm}(\lambda_m)}{1 + \beta_{2j-1}^{\mp}(\lambda_m)} \right) \left(\frac{1 + \beta_{2j}^{\pm}(\lambda_m)}{1 + \beta_{2j}^{\mp}(\lambda_m)} \right),$$

$$\beta_j^{\pm}(\lambda_m) = \frac{\lambda_m \pm \gamma_m}{\lambda_j - \gamma_j}, \quad \gamma_m = \sqrt{\lambda_m^2 - k^2}, \quad \lambda_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi(2m-1)}{2H}\right)^2},$$

$\varphi_n(y)$ в данном случае имеет вид

$$\varphi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cos \frac{\pi(2n-1)}{2H} y, \quad n=1, 2, \dots$$

Для волноведущей системы с двумя двухсторонними диафрагмами количество конструктивных элементов равно двум. Искомыми неизвестными матрицами—столбцами являются матрицы X_1 и Y_1 , для которых справедливы соотношения

$$Y_1 = TU + RM_1 X_1, \quad X_1 = RM_1 Y_1. \quad (11), (12)$$

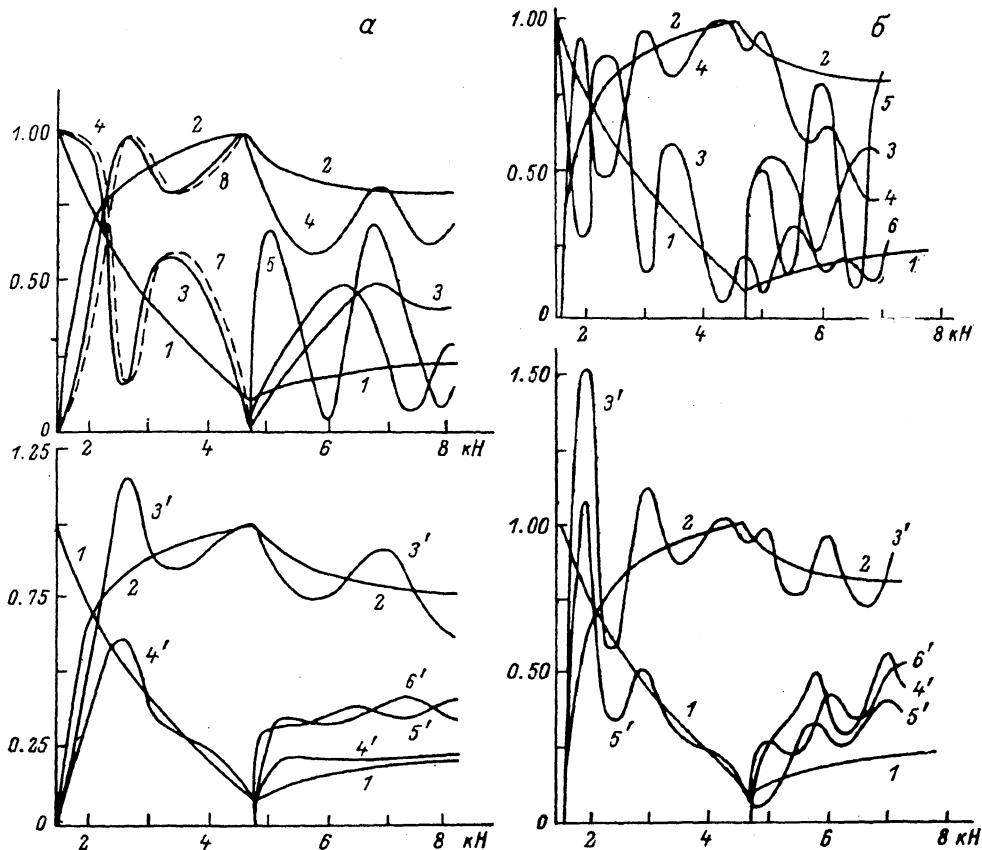


Рис. 3.

Разрешая (11) и (12), имеем

$$X_1 = RM_1 A^{-1} TU, \quad Y_1 = A^{-1} TU, \quad (13), (14)$$

где

$$A = I - RM_1 RM_1. \quad (15)$$

Матрицы—столбцы $W = \|w_1, w_2, \dots\|'$ и $V = \|v_1, v_2, \dots\|'$, определяющие соответственно отраженное $w(x, y)$ ($x > 0$) и прошедшее $v(x, y)$ ($x < -l$) поля определяются по формулам

$$W = RU + TM_1 X_1, \quad V = TM_1 Y_1. \quad (16)$$

4. Исследование решения для системы двух диафрагм в волноводе

Выберем в качестве облучающего диафрагмы поля первую нормальную волну в волноводе, набегающую со стороны положительных значений x : $u(x, y) = \varphi_1(y) e^{-k_1 x}$, здесь $kH > \pi/2$. Матрица—столбец, задающая падающее поле, имеет вид $U = \|1, 0, \dots\|'$.

Из формул (13)—(16), если учитывать только первую распространяющуюся нормальную волну в волноводе, получим следующие приближенные выражения для комплексных амплитуд нормальных волн, рассеянных на системе двух двухсторонних диафрагм в волноводе:

$$x_1 = t_{11}\Delta, \quad y_1 = r_{11}t_{11}e^{2i\lambda_1 l}\Delta, \quad (17), (18)$$

$$w_1 = r_{11}(1 + t_{11}^2 e^{2i\lambda_1 l}\Delta), \quad v_1 = t_{11}^2 e^{2i\lambda_1 l}\Delta, \quad (19), (20)$$

где

$$\Delta = (1 - r_{11}^2 e^{2i\lambda_1 l})^{-1}. \quad (21)$$

Более точные формулы для вычисления искомых комплексных амплитуд можно получить, если принять во внимание большее число нормальных волн в волноводе. Эти формулы из-за своей громоздкости здесь не приводятся.

Результаты численных расчетов модуля комплексных амплитуд в зависимости от безразмерной частоты kH показаны на рис. 3 для $l/H=1.0$ (а) и 2.0 (б):

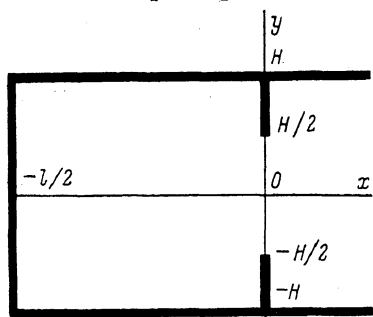


Рис. 4.

1 и 2 — модуль коэффициента отражения и прохождения для одной двухсторонней диафрагмы [1]; 3 — модуль коэффициента отражения падающей первой нормальной волны $|w_1|$; 4 — модуль коэффициента прохождения этой волны $|v_1|$; 5 — модуль коэффициента трансформации падающей волны в отраженную, 6 — прошедшую вторую нормальную волну для случая двух диафрагм в волноводе; 3—6 — модуль комплексных амплитуд нормальных волн, возбуждаемых в камере между диафрагмами, для $|\beta_{11}|, |\beta_{21}|, |\alpha_{11}|, |\alpha_{21}|$.

При вычислении учитывались две нормальные волны в волноводе. Сопоставление результатов

вычислений модулей комплексных амплитуд с учетом двух и шести нормальных волн показывает, что различие в численных результатах здесь не более 1% в диапазоне частот $\pi/2 \leq kH \leq 3\pi/2$ и не более 4% в диапазоне $3\pi/2 \leq kH \leq 5\pi/2$. Результаты вычислений по формулам (19) и (20) $|w_1|$ и $|v_1|$ даны на рис. 3, а (кривые 7, 8). Видно, что расчеты по формулам (17)—(20) дают удовлетворительную точность в диапазоне частот $\pi/2 \leq kH \leq 3\pi/2$, в котором в волноводе распространяющейся волной является только первая нормальная волна, которая и учитывалась при выводе этих формул.

Зависимость модуля комплексных амплитуд от безразмерной частоты показывает, что рассеяние нормальных волн на системе двух диафрагм в волноводе носит резонансный характер [2]. Резонансные частоты, при которых наблюдаются экстремумы на кривых 3, 3', 4, 4' (рис. 3, а, б), объясняются наличием у функции $\det A$, которая определяется формулой (15) и зависит от безразмерной частоты kH , комплексных корней в плоскости комплексной переменной kH ; $kH = \text{Re } kH + i \text{Im } kH$. Если воспользоваться приближенной формулой (21) для вычисления $\det A \approx \Delta^{-1} = 1 - r_{11}^2 e^{2i\lambda_1 l}$, то результаты численного анализа при $\pi/2 \leq \text{Re } kH \leq 3\pi/2$ показывают, что при $l/H=1.0$ Δ^{-1} имеет комплексный корень $kH \approx 2.44 - 2.52i$. Это и объясняет резонансный пик на кривых 4, 3' и 4' (рис. 3, а). Резонансные частоты можно вычислить приближенно как собственные частоты $k_{nm}H$ закрытого резонатора с теми же геометрическими размерами, что и у камеры между диафрагмами в волноводе. На стенках этого резонатора выполнено граничное условие Дирихле: $Q|_s=0$, здесь $k_{nm}H = \pi\sqrt{(n-0.5)^2 + (mH/l)^2}$, $n, m=1, 2, \dots$. При значении параметра $l/H=1.0$ — $k_{11}H \approx 2.22$, при $l/H=2.0$ — $k_{11}H \approx 1.75$, $k_{12}H \approx 2.83$, $k_{13}H \approx 4.22$, что и объясняет ход кривых на рис. 3, б. Отметим, что вблизи резонансных частот две двухсторонних диафрагмы хуже отражают падающую первую нормальную волну, чем одна двухсторонняя диафрагма.

5. Отражение нормальных волн от полуоткрытой камеры в полубесконечном волноводе

Самостоятельный интерес представляет задача об отражении нормальных волн от камеры, расположенной на конце полубесконечного волновода (рис. 4). На боковых стенках волновода и на диафрагме, расположенной в сечении $x=0$, выполняется условие Дирихле.

Решение этой задачи в зависимости от граничного условия на торце полубесконечного волновода при $x=-l/2$, $|y| \leq H$ есть функция $Q_+(x, y) =$

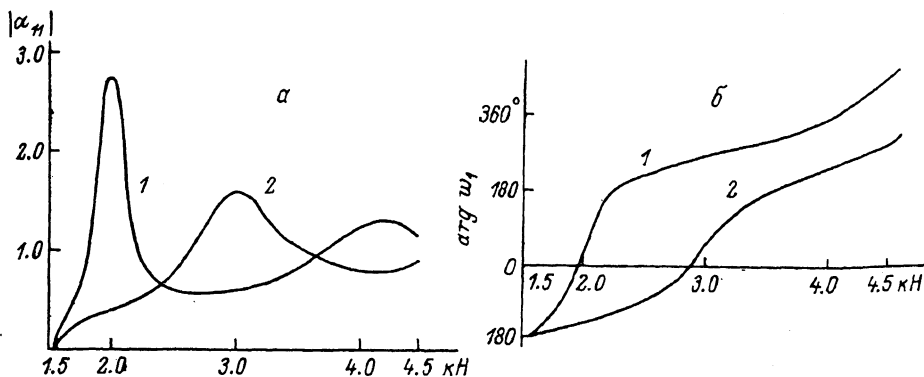


Рис. 5.

$= Q(x, y) + Q(-x-l, y)$, если граничное условие $(\partial Q_+ / \partial x)(-l/2, y) = 0$, и функция $Q_-(x, y) = Q(x, y) - Q(-x-l, y)$, если граничное условие $Q_-(-l/2, y) = 0$. $Q(x, y)$ есть решение задачи о дифракции волн на двух диафрагмах в волноводе из п. 3.

Результаты численных расчетов модуля комплексной амплитуды первой нормальной волны, возбуждаемой в камере падающей на камеру первой нормальной волны, показаны на рис. 5, а: 1 — $Q_+(x, y)$, 2 — $Q_-(x, y)$. В силу закона сохранения энергии в диапазоне частот $\pi/2 \leq kH \leq 3\pi/2$ выполнено соотношение $|\omega_1| = 1$. Поэтому представляет интерес зависимость $\arg \omega_1$ от kH (рис. 5, б; здесь нумерация кривых такая же, как и на рис. 5, а). Резкое изменение аргумента комплексной амплитуды отраженного поля в зависимости от kH является характерным признаком резонансного рассеяния [2].

Литература

- [1] Лукьянов В. Д., Никитин Г. Л. О рассеянии электромагнитных волн в плоском волноводе с двухсторонней диафрагмой. — ЖТФ, 1984, т. 54, № 5, с. 865—872.
 [2] Тейлор Дж. Теория рассеяния. М.: Мир, 1975.

Ленинградское высшее военное инженерное строительное училище им. генерала армии А. Н. Комаровского

Поступило в Редакцию
22 июня 1984 г.