МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **10** номер **8** год **1998**

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ПЛОСКОЙ НЬЮТОНОВОЙ ПРОБЛЕМЕ МНОГИХ ТЕЛ

© *Е.А. Гребеников*

Институт высокопроизводительных вычислительных систем РАН, Москва

Доказано существование нового класса точных симметричных решений дифференциальных уравнений движения в плоской ньютоновой задаче $n+1$ тел, геометрически изображаемых правильным, подобно себе изменяющимся многоугольником, вращающимся с переменной угловой скоростью вокруг центра P_0.

THE EXISTENCE OF THE EXACT SYMMETRIC SOLUTIONS IN THE PLANE NEWTON PROBLEM OF MANY BODIES

E.A. Grebenikov

The existence of a new class of the exact symmetric solutions is proved for differential equations of movement in the plane Newton problem of $n+1$ bodies, vectorially represented by correct, scale-similarly to self varied polygon, rotated with variable angular speed around the centre P_0.

В монографии А.Уинтнера [1] изложена достаточно полная качественная теория гомографических и гомотетических решений ньютоновой проблемы n тел, основанная на классических результатах Эйлера, Лагранжа, Якоби, Брунса, Пуанкаре, Дзиобека, Пиццетти и других математиков по названной проблеме. Им также найдены некоторые достаточные условия, обеспечивающие принадлежность автономной динамической системы к так называемому классу лиувиллевых систем.

Тем не менее многие аналитические и качественные вопросы проблемы n тел, поставленные, в частности, Уинтнером, ждут своего решения.

Сформулируем некоторые из них.

1. Существуют ли гомографические и гомотетические решения в системах координат, отличных от инерциальной барицентрической системы.

2. Разрешимы ли уравнения, выражающие условия существования барицентрических гомографических и гомотетических решений в проблеме n тел для любого конечного n и произвольных масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$. По мнению Уинтнера это представляет собой неподъемную алгебраическую задачу.

3. Какова структура множества начальных условий, порождающих эти решения.

На первый вопрос частичный ответ дает сам Уинтнер, указав, что в проблеме n тел существуют центральные конфигурации в относительной системе координат (начало координат совпадает с одной из притягивающих масс) вида правильного $(n-1)$-угольника, если массы, находящиеся в его вершинах, равны между собой.

Подчеркнем, что речь идет о центральных конфигурациях, а не о решениях уравнений динамики, которые имеют один и тот же аналитический вид, но зависят от различных параметров.

Пусть, например, $n = 5$. Тогда в инерциальной барицентрической системе координат существует гомографическое решение, геометрически изображаемое правильным пятиугольником, в вершинах которого находятся массы m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, вращающимся с некоторой угловой скоростью вокруг центра масс. Если же рассматривать движение масс m_1, m_2, m_3, m_4 относительно массы m_5, то можно утверждать, что гомографическое решение существует тогда и только тогда, когда $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, и оно изображается квадратом, вращающимся с другой, нежели в первом случае, угловой скоростью относительно m_5. Но для исследования динамики в обоих случаях необходимо знать начальные условия, порождающие такие решения, и желательно иметь аналитические выражения для динамических параметров (прежде всего, для угловых скоростей). Первым решил эту задачу Б.Эльмабсут, который нашел в явной форме те аналитические условия [2], которые гарантируют существование частного решения в проблеме $n + 1$ тела $P_0, P_1, \ldots, P_n$ с массами m_0, $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, $n \geq 2$, геометрически изображаемого правильным выпуклым n-угольником с вершинами $P_1, \ldots, P_n$ и с центром P_0, равномерно вращающимся с постоянной угловой скоростью вокруг центра P_0. Кроме того он исследовал проблему линейной и квадратичной устойчивости этой центральной конфигурации для различных соотношений между параметрами m_0, m, n [3-5].

В данной статье приведены начальные условия, которые гарантируют существование точных решений дифференциальных уравнений движения в плоской ньютоновой задаче $n + 1$ тела, геометрически изображаемых правильным, масштабно-подобно себе изменяющимся многоугольником (точнее, n-угольником), вращающимся с переменной угловой скоростью вокруг центра P_0.

Теорема. *Пусть:*

1) *тела $P_0, P_1, \ldots, P_n$ с массами m_0 и m соответственно взаимно притягивают друг друга по закону всемирного тяготения;*

2) *в начальный момент $t = 0$ тела $P_1, \ldots, P_n$ образуют правильный многоугольник с центром P_0;*

3) *начальные скорости тел $P_1, \ldots, P_n$ образуют произвольное, симметричное поле скоростей относительно центра P_0.*

Тогда решение дифференциальных уравнений движения тел $P_1, \ldots, P_n$ для любого t представляет собой правильный, масштабно-подобно себе изменяющийся многоугольник, вращающийся с переменной угловой скоростью вокруг центра P_0, а каждое из тел $P_1, \ldots, P_n$ движется по орбите, определяемой уравнениями классической задачи двух тел, в которой массами этих тел являются некоторые новые, редуцированные величины, зависящие от m_0, m и n.

Для доказательства теоремы нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *При любом целом n и $k = 2, 3, \ldots, n$ имеют место следующие тождества:*

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \cos \frac{2\pi(i-k)}{n} - \sum_{s=2}^{n} \cos \frac{2\pi(s-1)}{n} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \sin \frac{2\pi(i-k)}{n} - \sum_{s=2}^{n} \sin \frac{2\pi(s-1)}{n} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-1} - \sum_{s=2}^{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-1} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{}' \sin\frac{2\pi(i-k)}{n}\left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-3} -$$

$$-\sum_{s=2}^{n}\cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-2} = 0. \qquad (1)$$

В этих суммах знак штрих означает, что $i \neq k$.

Доказательство. Рассмотрим, например, последнее тождество. Будем иметь

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}{}' \sin\frac{2\pi(i-k)}{n}\left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-3} - \sum_{s=2}^{n}\cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\sin\frac{2\pi(i-k)}{n}\left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-3} + \frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{n}\sin\frac{2\pi(i-k)}{n}\left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-3} -$$

$$-\sum_{s=2}^{n-k+1}\cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-2} - \sum_{s=n-k+2}^{n}\cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-2} =$$

$$-\sum_{i=1}^{k-1}\cos\frac{\pi(i-k)}{n}\left(\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right)^{-2} + \sum_{i=k+1}^{n}\cos\frac{\pi(i-k)}{n}\left(\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right)^{-2} -$$

$$-\sum_{s=2}^{n-k+1}\cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-2} - \sum_{s=n-k+2}^{n}\cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-2} =$$

$$= \sum_{j=n-k+2}^{n}\cos\frac{\pi(j-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(j-1)}{n}\right)^{-2} + \sum_{j=2}^{n-k+1}\cos\frac{\pi(j-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(j-1)}{n}\right)^{-2} -$$

$$-\sum_{s=2}^{n-k+1}\cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-2} - \sum_{s=n-k+2}^{n}\cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-2} = 0.$$

Последнее равенство получено путем замены индекса суммирования, в первой сумме $j = n+i-k+1$, во второй сумме $j = i-k+1$. Другие тождества (1) проверяются аналогично.

Для дальнейшего нам понадобятся дифференциальные уравнения движения тел $P_1, \ldots, P_n$ относительно тела P_0. Они имеют вид [6]

$$\frac{d^2\rho_k}{dt^2} - \rho_k\left(\frac{d\lambda_k}{dt}\right)^2 + \frac{f(m_0+m)}{\rho_k^2} =$$

$$= fm\sum_{i=1}^{n}{}' \left[\frac{\rho_i\cos(\lambda_i-\lambda_k)-\rho_k}{\Delta_{ki}^3} - \frac{\cos(\lambda_i-\lambda_k)}{\rho_i^2}\right], \tag{2}$$

$$\rho_k\frac{d^2\lambda_k}{dt^2} + 2\frac{d\rho_k}{dt}\frac{d\lambda_k}{dt} = fm\sum_{i=1}^{n}{}'\left(\frac{\rho_i}{\Delta_{ki}^3} - \frac{1}{\rho_i^2}\right)\sin(\lambda_i-\lambda_k),$$

где ρ_k, λ_k — полярные координаты тела P_k, f — постоянная тяготения, $\Delta_{ki}^2 = \rho_i^2 + \rho_k^2 - 2\rho_i\rho_k\cos(\lambda_i-\lambda_k)$, $i \neq k, k = 1, \ldots, n$.

Справедлива

Основная лемма. *Решение системы* (2), *имеющей порядок* $4n$, *определяемое начальными условиями*

$$\rho_k(0) = a_0, \qquad \frac{d\rho_k(0)}{dt} = b_0, \qquad \lambda_k(0) = \frac{2\pi(k-1)}{n}, \qquad \frac{d\lambda_k(0)}{dt} = c_0, \tag{3}$$

$$k = 1, \ldots, n,$$

одновременно является решением n *одинаковых систем дифференциальных уравнений 4-го порядка*

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = -\frac{A_n}{\rho^2},$$

$$\rho\frac{d^2\lambda}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\lambda}{dt} = 0, \tag{4}$$

с начальными условиями

$$\rho(0) = a_0, \qquad \frac{d\rho(0)}{dt} = b_0, \qquad \lambda(0) = 0, \qquad \frac{d\lambda(0)}{dt} = c_0. \tag{5}$$

Иными словами, система (2) *с начальными условиями* (3) *эквивалентна* n *системам* (4) *с начальными условиями* (5), *то есть является "обобщенно лиувиллевой"* [1].

В уравнениях (4) использованы обозначения

$$\rho(t) \equiv \rho_1(t), \quad \lambda(t) \equiv \lambda_1(t),$$

$$A_n = f\left[m_0 + \frac{m}{4}\sum_{s=2}^{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-1}\right]. \tag{6}$$

Доказательство. Введем новые переменные u_k, v_k:

$$u_k = \rho_k - \rho, \qquad v_k = \lambda_k - \lambda, \qquad k = 2, \ldots, n. \tag{7}$$

В переменных ρ, λ, u_k, v_k система (2) записывается в виде двух подсистем:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \frac{f(m_0+m)}{\rho^2} = fm\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{(\rho+u_s)\cos v_s - \rho}{\Delta_{1s}^3} - \frac{\cos v_s}{(\rho+u_s)^2}\right],\\
&\rho\frac{d^2\lambda}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\lambda}{dt} = fm\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{\rho+u_s}{\Delta_{1s}^3} - \frac{1}{(\rho+u_s)^2}\right]\sin v_s,
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u_k}{dt^2} - \rho\left[2\frac{d\lambda}{dt}\frac{dv_k}{dt} + \left(\frac{dv_k}{dt}\right)^2\right] - u_k\left(\frac{d\lambda}{dt} + \frac{dv_k}{dt}\right)^2 =\\
&\quad = -f(m_0+m)\left[\frac{1}{(\rho+u_k)^2} - \frac{1}{\rho^2}\right] +\\
&\quad + fm\sum_{i=1}^{n}{}'\left[\frac{(\rho+u_i)\cos(v_i-v_k) - (\rho+u_k)}{\Delta_{ki}^3} - \frac{\cos(v_i-v_k)}{(\rho+u_i)^2}\right] -\\
&\quad - fm\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{(\rho+u_s)\cos v_s - \rho}{\Delta_{1s}^3} - \frac{\cos v_s}{(\rho+u_s)^2}\right],
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{d^2v_k}{dt^2} + u_k\left(\frac{d^2\lambda}{dt^2} + \frac{d^2v_k}{dt^2}\right) + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{dv_k}{dt} + 2\frac{du_k}{dt}\left(\frac{d\lambda}{dt} + \frac{dv_k}{dt}\right) =\\
&\quad = fm\sum_{i=1}^{n}{}'\left[\frac{\rho+u_i}{\Delta_{ki}^3} - \frac{1}{(\rho+u_i)^2}\right]\sin(v_i-v_k) -\\
&\quad - fm\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{(\rho+u_s)}{\Delta_{1s}^3} - \frac{1}{(\rho+u_s)^2}\right]\sin v_s,
\end{aligned}$$

$$\Delta_{1s}^2 = \rho^2 + (\rho+u_s)^2 - 2\rho(\rho+u_s)\cos v_s,$$

$$\Delta_{ki}^2 = (\rho+u_i)^2 + (\rho+u_k)^2 - 2(\rho+u_i)(\rho+u_k)\cos(v_i-v_k), \quad s,k = 2,\ldots,n.$$

Подсистема (8), очевидно, имеет порядок 4, а подсистема (9) - порядок $4n-4$. Подсистема (9) при любой дифференцируемой функции $\rho(t)$ имеет частное решение

$$\begin{aligned}
&u_2(t) = \ldots = u_n(t) = u(t) \equiv 0,\\
&v_k(t) = \frac{2\pi(k-1)}{n}, \quad k = 2,\ldots,n,
\end{aligned} \tag{10}$$

определенное начальными условиями

$$u(0) = \frac{du(0)}{dt} = \frac{dv_k(0)}{dt} = 0, \quad v_k(0) = \frac{2\pi(k-1)}{n}, \quad k = 2,\ldots,n.$$

Для того, чтобы функции (10) были решением подсистемы (9), необходимо, чтобы имели место следующие тригонометрические тождества (учтено, что здесь $\Delta_{ki} = 2\rho\left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|$, $\Delta_{1s} = 2\rho\sin\frac{\pi(s-1)}{n}$):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}{}' \left[\frac{\rho\cos\frac{2\pi(i-k)}{n} - \rho}{8\rho^3\left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|^3} - \frac{\cos\frac{2\pi(i-k)}{n}}{\rho^2}\right] - \\
&\quad - \sum_{s=2}^{n}\left[\frac{\rho\cos\frac{2\pi(s-1)}{n} - \rho}{8\rho^3\sin^3\frac{\pi(s-1)}{n}} - \frac{\cos\frac{2\pi(s-1)}{n}}{\rho^2}\right] = 0, \\
&\sum_{i=1}^{n}{}' \left[\frac{\rho}{8\rho^3\left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|^3} - \frac{1}{\rho^2}\right]\sin\frac{2\pi(i-k)}{n} - \\
&\quad - \sum_{s=2}^{n}\left[\frac{\rho}{8\rho^3\sin^3\frac{\pi(s-1)}{n}} - \frac{1}{\rho^2}\right]\sin\frac{2\pi(s-1)}{n} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Но тождества (11), в силу леммы 1, всегда имеют место. Следовательно, подсистема (9) имеет точное решение (10). Если теперь подставить частное решение (10) в подсистему 4-го порядка (8) и выполнить необходимые преобразования, то мы получим систему (4). Основная лемма доказана.

Доказательство теоремы. Из основной леммы следует, что траектория каждого из тел $P_1, \ldots, P_n$ определяется уравнениями (4), причем полярное расстояние ρ_k каждого из этих тел определяется одним и тем же первым уравнением системы (4), а полярный угол $\lambda_k = \lambda(t) + (2\pi(k-1))/n$. Но уравнения (4) представляют собой дифференциальные уравнения движения задачи двух тел с массами $M_1 = m_0$ и $M_2 = \frac{m}{4}\sum_{s=2}^{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-1}$, общий интеграл которых выражается квадратурами

$$\begin{aligned}
&\pm\int\frac{\rho d\rho}{\sqrt{2h\rho^2 + 2A_n\rho - a_0^4c_0^2}} = t + c_1, \\
&\lambda(\rho) = a_0^2c_0\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{2h\rho^2 + 2A_n\rho - a_0^4c_0^2}} + c_2,
\end{aligned} \tag{12}$$

где $2h = b_0^2 + a_0^2c_0^2 - \frac{2A_n}{a_0}$, а h, c_1, c_2 — произвольные постоянные интегрирования. Теорема доказана.

Замечание 1. Таким образом, найдено 3-параметрическое семейство решений уравнений ньютоновой проблемы n тел с параметрами a_0, b_0, c_0.

Замечание 2. В части существования центральной конфигурации теорема справедлива и для более общего случая, когда сила взаимного притяжения любой пары тел P_k и P_i, $F_{ki} \sim \Delta_{ki}^{-\alpha}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. — М.: Наука, 1967, 523с.
2. *Elmabsout B.* Sur l'existence de certaines configurations d'équillibre relatif dans le problème des n corps. // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1988, v.4, № 1, p.131-151.
3. *Elmabsout B.* Sur l'instabilité de certaines configurations d'équilibre relatif dans le problème des n corps. // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1990, v.4, № 9, p.219-231.
4. *Elmabsout B.* Stability of some degenerate positions of relative equilibrium in the n-body problem. // Dynamics and Stability of Systems. 1994, v.9, № 4, p.305-319.
5. *Elmabsout B.* Nonlinear instability of some relative equilibrium configurations in the $(N+1)$-body problem. // Rom.Astr.Journal. 1996, v.6, № 1, p.61-71.
6. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. — М.: Наука, 1976, 854с.

Поступила в редакцию 22.09.97.