А. Н. Кабанов, В. А. Романьков, Строго неручные примитивные элементы свободной метабелевой алгебры Ли ранга 3, *Сиб. матем. журн.*, 2009, том 50, номер 1, 82–95

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 512.54

СТРОГО НЕРУЧНЫЕ ПРИМИТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СВОБОДНОЙ МЕТАБЕЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ РАНГА 3

А. Н. Кабанов, В. А. Романьков

Аннотация. Доказано, что свободная метабелева алгебра Ли M_3 ранга 3 над произвольным полем K допускает строго неручные примитивные элементы.

Ключевые слова: алгебра Ли, автоморфизм, ручной автоморфизм, примитивный элемент, свободная алгебра, метабелева алгебра, свободное дифференцирование.

1. Введение

Свободные алгебры. Пусть K — поле произвольной характеристики, $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 2$, — конечное множество. Считаем, что $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Определим некоторые свободные алгебры с множеством свободных порождающих X_n. Через $P_n = K[X_n]$ обозначим алгебру многочленов над K от коммутирующих переменных из X_n. Через $A_n = K\langle X_n \rangle$ обозначим свободную ассоциативную алгебру над K с множеством свободных порождающих X_n.

Хорошо известно, что относительно операции $[u, v] = uv - vu$, $u, v \in A_n$, множество $X_n \subseteq A_n$ свободно порождает алгебру Ли $L_n = K(X_n)$.

Для любой алгебры Ли T полагаем $T' = [T, T]$, $T'' = [T', T']$. Свободная метабелева алгебра Ли $M_n = K((X_n))$, свободно порожденная множеством X_n, определяется как $M_n = L_n / L_n''$.

Автоморфизмы. Будем записывать произвольный автоморфизм (более обще, эндоморфизм) φ свободной алгебры F_n с множеством свободных порождающих X_n как $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$, где $\varphi(x_i) = f_i$, $i = 1, \dots, n$. Если F_n — алгебра Ли, то автоморфизм (эндоморфизм) $\varphi \in \operatorname{Aut} F_n$ ($\varphi \in \operatorname{End} F_n$) называется *$IA$-автоморфизмом* (*$IA$-эндоморфизмом*), если φ индуцирует тождественное отображение на алгебре F_n/F_n'. Мы имеем соответственно подгруппу $\operatorname{IAut} F_n \leq \operatorname{Aut} F_n$ и подполугруппу $\operatorname{IAEnd} F_n \leq \operatorname{End} F_n$, состоящие из автоморфизмов (эндоморфизмов) указанного вида.

Ручные автоморфизмы. Пусть F_n — свободная алгебра над X_n. Автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut} F_n$ называется *элементарным*, если он имеет вид

$$\varphi = (x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha x_j + u(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), x_{j+1}, \dots, x_n),$$

где $\alpha \in K^*$, элемент $u(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ не зависит от x_j.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07.01.00392).

Автоморфизм ψ, принадлежащий подгруппе $\mathrm{TAut}\, F_n \leq \mathrm{Aut}\, F_n$, порожденной всеми элементарными автоморфизмами, называется *ручным.* В противном случае ψ называется *неручным* или *диким.*

Известные результаты. В 1964 г. Кон [1] доказал, что все автоморфизмы свободной алгебры Ли L_n являются ручными. Хорошо известно [2–5], что все автоморфизмы алгебры многочленов P_2 и свободной ассоциативной алгебры A_2 являются ручными при любом поле K.

В 1972 г. Нагата [6] предположил, что ставший впоследствии известным автоморфизм

$$\sigma = \big(x_1 + (x_1^2 - x_2x_3)x_3, x_2 + 2\big(x_1^2 - x_2x_3\big)x_1 + \big(x_1^2 - x_2x_3\big)^2 x_3, x_3\big)$$

алгебры многочленов P_3 является неручным, если поле K имеет характеристику 0.

И. П. Шестаков и У. У. Умирбаев [7–9], используя метод скобок Пуассона, ограничение степени и слабую редукцию, доказали, что автоморфизм Нагаты σ действительно неручной.

В случае свободной ассоциативной алгебры A_3 вопрос о существовании диких автоморфизмов известен как проблема Кона. У. У. Умирбаев [10] доказал, что так называемый автоморфизм Аника

$$\delta = (x_1 + x_3(x_1x_3 - x_3x_2), x_2 + (x_1x_3 - x_3x_2)x_3, x_3)$$

алгебры $A_3 = K\langle X_3\rangle$ над полем K характеристики 0 является диким.

В случае свободных метабелевых алгебр Ли M_n, $n \geq 2$, кроме ручных автоморфизмов выделяется естественная подгруппа $\mathrm{Inn}\, M_n$ так называемых внутренних автоморфизмов, аналог сопряжений в группах. Автоморфизм $\mu \in \mathrm{Inn}\, M_n$ задается как $\mu = \mu(u) = (x_1 + [x_1, u], x_2 + [x_2, u], \ldots, x_n + [x_n, u])$, где $u \in M_n'$. Легко проверить, что $\mu(u_1)\mu(u_2) = \mu(u_1 + u_2)$, следовательно, $\mathrm{Inn}\, M_n \simeq (M_n', +)$. В. А. Артамонов [11] доказал, что $\mathrm{Aut}\, M_2 = \mathrm{TAut}\, M_2 \cdot \mathrm{Inn}\, M_2$. Легко видеть, что группа $\mathrm{TAut}\, M_2$ изоморфна группе $GL_2(K)$, а любой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{TAut}\, M_2$ взаимно однозначно соответствует невырожденной линейной замене X_2. Итак, $\mathrm{Aut}\, M_2$ изоморфна $GL_2(K) \cdot (M_2, +)$ и очевидным образом содержит неручные автоморфизмы. Ю. А. Бахтурин и С. Набиев [12] установили подобным же образом наличие неручных автоморфизмов в группе $\mathrm{Aut}\, M_n$ при любом $n \geq 3$.

Однако, по существу, внутренние автоморфизмы из $\mathrm{Inn}\, M_n$ в силу их простоты следует также считать ручными. Если придерживаться этой точки зрения, то естественно возникает вопрос о наличии в группах $\mathrm{Aut}\, M_n$, $n \geq 3$, автоморфизмов, не принадлежащих подгруппе, порожденной всеми ручными и всеми внутренними автоморфизмами. Назовем автоморфизмы вне указанной подгруппы *строго неручными.*

В недавней работе [13] В. А. Романьков доказал, что строго неручные автоморфизмы существуют в группе $\mathrm{Aut}\, M_3$ при любом поле K. Он указал способ массового построения таких автоморфизмов. Кроме того, в работе [13] установлен ряд существенно более сильных утверждений, касающихся структуры группы $\mathrm{Aut}\, M_3$. Из анонсированного В. А. Романьковым утверждения [14] о порождающих элементах группы $\mathrm{Aut}\, M_n$, $n \geq 4$, следует, что при $n \geq 4$ строго неручных автоморфизмов не существует.

Примитивные элементы. Элемент g свободной алгебры F_n называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторое свободное множество

Y_n порождающих алгебры F_n. Примитивный элемент $g \in F_n$ называется *ручным*, если он является образом $\varphi(x_1) = g$ при некотором ручном автоморфизме $\varphi \in \mathrm{TAut}\, F_n$. В противном случае g называется *неручным* или *диким.*

Если примитивный элемент g свободной метабелевой алгебры M_n не является образом $\varphi(x_1) = g$ ни для какого автоморфизма φ, принадлежащего подгруппе, порожденной всеми ручными и внутренними автоморфизмами, то он называется *строго неручным.*

Целью данной работы является доказательство того, что алгебра M_3 обладает строго неручными примитивными элементами при любом поле K.

Из уже упомянутого результата В. А. Романькова [14] следует, что в алгебре M_n при $n \geq 4$ нет строго неручных примитивных элементов.

Дифференцирования Фокса. Пусть KG_n обозначает групповую алгебру над полем K свободной группы G_n ранга n с множеством свободных порождающих X_n.

В [15] Фокс дал детальное описание дифференциального исчисления в групповом кольце ZG_n, которое очевидным образом распространяется на любую групповую алгебру KG_n. Поскольку любая свободная ассоциативная алгебра $A_n = K\langle X_n \rangle$ естественно вложена в KG_n и в то же время значения частных свободных производных Фокса на KG_n переводят $A_n \leq KG_n$ в себя, большинство технических утверждений относительно этих производных остаются верными для A_n.

Напомним, что (частные) свободные дифференцирования алгебры A_n, индуцированные соответствующими дифференцированиями групповой алгебры KG_n, суть отображения

$$d/dx_j : A_n \to A_n, \quad 1 \leq j \leq n,$$

удовлетворяющие следующим условиям для $\alpha, \beta \in K$; $u, v \in A_n$:

$$dx_i/dx_j = \delta_{ij} \quad \text{(символ Кронекера)};$$

$$d(\alpha u + \beta v)/dx_j = \alpha du/dx_j + \beta dv/dx_j;$$

$$d(uv)/dx_j = du/dx_j v^{\varepsilon} + u dv/dx_j,$$

где $\varepsilon : A_n \to K$ — гомоморфизм специализации, определенный как $x_j^{\varepsilon} = 1$, $j = 1, \dots, n$.

Из определения следует, что $d\alpha/dx_j = 0$ для любых $\alpha \in K$, $j = 1, \dots, n$. Прямое вычисление показывает, что

$$d[x_i, x_j]/dx_i = 1 - x_j.$$

Следующая формула известна как *основное тождество для дифференцирований Фокса*:

$$\sum_{j=1}^{n} du/dx_j (x_j - 1) = u - u^{\varepsilon}.$$

Поскольку L_n является подалгеброй Ли алгебры A_n, мы можем рассматривать также дифференцирования

$$d/dx_j : L_n \to A_n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $\pi : A_n \to P_n$ — стандартный эпиморфизм. Определим производные $\partial/\partial x_j : A_n \to P_n$, $j = 1, \dots, n$, полагая для любого $u \in A_n$

$$\partial u/\partial x_j = (du/dx_j)^{\pi}.$$

Поскольку $\partial u/\partial x_j = 0$ для любого $u \in L_n''$, $j = 1, \ldots, n$ (это легко проверяется), также определены производные

$$\partial/\partial x_j : M_n \to P_n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Нормальная форма элемента свободной метабелевой алгебры Ли. Следующие тождества имеют место в любой свободной метабелевой алгебре Ли M_n над произвольным полем:

$$[u, v] = -[v, u];$$

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad \text{(тождество Якоби);}$$

$$[[u, v], [w, t]] = 0;$$

$$[z_1, [z_2, [\ldots, [z_k, [x, y]] \ldots]]] = [z_{\sigma(1)}, [z_{\sigma(2)}, [\ldots, [z_{\sigma(k)}, [x, y]] \ldots]]]$$

для любого $\sigma \in S_k$.

Следовательно, подалгебра $M_n^2 = M_n'$ свободной метабелевой алгебры Ли M_n ранга $n \geq 2$ может рассматриваться как модуль над алгеброй многочленов P_n следующим образом.

Любой элемент $v \in P_n$ однозначно представим в виде

$$v = \alpha + \sum_{(k_1, \ldots, k_n) \in N^n} \alpha_{k_1, \ldots, k_n} (x_1 - 1)^{k_1} \ldots (x_n - 1)^{k_n}, \tag{1}$$

где $\alpha, \alpha_{k_1, \ldots, k_n} \in K$. Для любого $u \in M_n^2$ и любого $v \in P_n$ вида (1) полагаем

$$u^v = \alpha u + \sum_{(k_1, \ldots, k_n) \in N^n} \alpha_{k_1, \ldots, k_n} [x_n, [\ldots, [x_1, u] \ldots]],$$

где x_j повторяется k_j раз. Легко видеть, что

$$\partial u^v/\partial x_j = v \partial u/\partial x_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Определим правонормированный коммутатор $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}]$, полагая

$$[x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}] = [x_{i_1}, [\ldots, [x_{i_{m-1}}, x_{i_m}] \ldots]].$$

При $m = 1$ имеем $[x_{i_1}] = x_{i_1}$. В дальнейшем будем рассматривать только элементы с правонормированной расстановкой скобок.

Согласно [16] базис свободной метабелевой алгебры Ли M_n состоит из всевозможных коммутаторов вида $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$, где $x_{i_j} \in X_n$, $x_{i_k} > x_{i_{k-1}}$, $x_{i_{k-1}} \leq \cdots \leq x_{i_1}$. Будем говорить, что элемент алгебры M_n записан *в нормальной форме*, если он представлен в виде линейной комбинации базисных элементов.

2. Предварительные результаты

В дальнейшем для сокращения записи будем обозначать $x_i - 1$ через b_i. Пусть λ — отображение, которое каждому эндоморфизму φ из $\mathrm{IAEnd}\, M_n$ ставит в соответствие матрицу Якоби $J_\varphi = \left(\partial x_i^\varphi/\partial x_j\right)$.

Лемма 1. *Отображение λ является гомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{IAEnd}\, M_n$ и $x_i^\varphi = x_i + u_i$, $x_i^\psi = x_i + v_i$, где $u_i = u_i(x_1, \ldots, x_n)$, $v_i = v_i(x_1, \ldots, x_n) \in M_n^2$. Докажем, что $J_\varphi J_\psi = J_{\varphi\psi}$. Имеем

$$J_\varphi = E + (\partial u_i/\partial x_j), \quad J_\psi = E + (\partial v_i/\partial x_j).$$

С другой стороны, $x_i^{\varphi\psi} = x_i + v_i + u_i(x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n)$. Значит, достаточно доказать, что

$$\partial w_i/\partial x_j = \partial u_i/\partial x_j + \sum_{k=1}^{n} \partial u_i/\partial x_k \cdot \partial v_k/\partial x_j,$$

где $w_i = u_i(x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n)$.

Допустим, что $u_i = [x_m, x_l]^s$, где $s \in P_n$, $m < l \le n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \partial u_i/\partial x_k \cdot \partial v_k/\partial x_j = -b_l s \cdot \partial v_m/\partial x_j + b_m s \cdot \partial v_l/\partial x_j,$$

а $w_i = u_i - v_m^{b_l s} + v_l^{b_m s}$. Значит,

$$\partial w_i/\partial x_j = \partial u_i/\partial x_j - b_l s \cdot \partial v_m/\partial x_j + b_m s \cdot \partial v_l/\partial x_j.$$

Отсюда, учитывая, что произвольный элемент u_i является линейной комбинацией элементов вида $[x_m, x_l]^s$, получаем $J_\varphi J_\psi = J_{\varphi\psi}$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Ядро отображения λ тривиально.*

Доказательство. Допустим, что существует нетождественный эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{IAEnd}\, M_n$, матрица Якоби которого J_φ единичная. Пусть $x_i^\varphi = x_i + u_i$, где $u_i \in M_n^2$. Тогда из $\partial x_i^\varphi/\partial x_j = \delta_{ij}$ следует, что $\partial u_i/\partial x_j = 0$. При дифференцировании u_i, представленного в нормальной форме, по переменной x_1 не обращаются в нуль только элементы вида $[x_1, x_m]^s$, где $m > 1$, $s \in P_n$. Из вида нормальной формы одночлена $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}]$ ($i_k > i_{k-1}$, $i_{k-1} \le i_{k-2} \le \cdots \le i_1$) следует, что при различных m_1 и m_2 производные элементов $[x_1, x_{m_1}]^{s_1}$ и $[x_1, x_{m_2}]^{s_2}$ не могут сократиться. Значит, элементов вида $[x_1, x_m]^s$ в u_i нет. Отсутствие в u_i других элементов можно доказать по индукции с помощью дифференцирования по соответствующей переменной. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{IAEnd}\, M$ и $J(\varphi\psi) = J(\varphi)J(\psi) = E$. Тогда $\varphi, \psi \in \mathrm{IAut}\, M$ и $\varphi = \psi^{-1}$.*

Определим стабилизатор

$$\mathrm{Stab}(b_1, \ldots, b_n)^T = \{A \in GL_n(P_n) \mid A \cdot (b_1, \ldots, b_n)^T = (b_1, \ldots, b_n)^T\},$$

где T означает транспонирование.

Лемма 3. *Пусть $A \in \mathrm{Stab}(b_1, \ldots, b_n)^T$. Тогда существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{IAut}\, M$, матрица Якоби которого J_φ равна A.*

Доказательство. Пусть $A = E + (a_{ij})$. Так как

$$A \cdot (b_1, \ldots, b_n)^T = (b_1, \ldots, b_n)^T,$$

для любого i имеем

$$a_{i1} b_1 + \cdots + a_{in} b_n = 0.$$

Докажем существование $u_i \in M_n^2$ такого, что $\partial u_i/\partial x_j = a_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$. Доказательство ведем по индукции. Если $n = 1$, то $a_{11} b_1 = 0$, откуда $a_{11} = 0$.

В этом случае u_1 можно взять равным 0. Пусть $n > 1$. Запишем a_{ij} в виде $a_{ij} = c_{ij}b_n + d_{ij}$, где d_{ij} не содержит b_n. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}b_nb_j + a_{in}b_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_{ij}b_j = 0.$$

При специализации $x_n \to 1, x_i \to x_i, i \neq n$, получаем $\sum\limits_{j=1}^{n-1} d_{ij}b_j = 0$. По предположению индукции существует $v_i \in M_{n-1}^2$ такой, что $\partial v_i/\partial x_j = d_{ij},\ j = 1, \ldots, n-1$. Теперь

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}b_nb_j + a_{in}b_n = 0.$$

Рассмотрим элемент

$$w_i = \sum_{j=1}^{n-1} [x_n, x_j]^{c_{ij}},$$

его производные имеют вид

$$\partial w_i/\partial x_j = c_{ij}b_n \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \partial w_i/\partial x_j \cdot b_j + a_{in}b_n = 0.$$

С другой стороны, известно, что

$$\sum_{j=1}^{n-1} \partial w_i/\partial x_j \cdot b_j + \partial w_i/\partial x_n \cdot b_n = 0,$$

значит, $a_{in} = \partial w_i/\partial x_n$. В качестве u_i можно взять $u_i = v_i + w_i$. Полученное отображение φ является эндоморфизмом. Но те же вычисления можно провести для матрицы A^{-1} и получить некоторый эндоморфизм ψ. Поскольку $J(\varphi\psi) = E$, по следствию 1 $\varphi = \psi^{-1} \in \mathrm{IAut}\, M$. Лемма доказана.

Рассмотрим сопряжение матрицы Якоби J_φ некоторого автоморфизма $\varphi \in \mathrm{IAut}\, M_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}^{-1} J_\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} A(\varphi) \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} * & * \end{matrix} & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$A(\varphi) = E + \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x_1 - b_1b_3^{-1}\partial u_3/\partial x_1 & \partial u_1/\partial x_2 - b_1b_3^{-1}\partial u_3/\partial x_2 \\ \partial u_2/\partial x_1 - b_2b_3^{-1}\partial u_3/\partial x_1 & \partial u_2/\partial x_2 - b_2b_3^{-1}\partial u_3/\partial x_2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Обозначим через μ гомоморфизм, ставящий в соответствие каждому автоморфизму $\varphi \in \mathrm{IAut}\, M_3$ матрицу $A(\varphi) \in GL_2\big(P_3 + b_3^{-1}P_2\big)$.

Лемма 4. *Ядро гомоморфизма* $\mu : \mathrm{IAut}\, M_3 \to GL_2\big(P_3 + b_3^{-1}P_2\big)$ *состоит из внутренних автоморфизмов.*

Доказательство. Приравняв матрицу $A(\varphi)$ к единичной, получаем, что

$$\partial u_i/\partial x_j - b_ib_3^{-1}\partial u_3/\partial x_j = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Отсюда
$$b_3 \partial u_i/\partial x_j = b_i \partial u_3/\partial x_j.$$
Следовательно, существуют многочлены $v_j \in P_3$ $(j = 1, 2)$ такие, что $\partial u_i/\partial x_j = b_i v_j$ для любых $i = 1, 2, 3$. Значит, существует элемент $w \in M_3^2$ такой, что $u_i = w^{b_i}$, $i = 1, 2, 3$, что и требовалось доказать.

Так как произвольный элемент $c \in P_3$ однозначно записывается в виде $c = b_3^2 c_2 + b_3 c_1 + c_0$, где $c_2 \in P_3$, $c_1, c_0 \in P_2$, то матрица $A(\varphi)$ однозначно представима в виде
$$A(\varphi) = E + b_3^2 A_2 + b_3 A_1 + A_0 + b_3^{-1} A_{-1}, \tag{3}$$
где $A_2 \in M_2(P_3)$, $A_1, A_0, A_{-1} \in M_2(P_2)$.

Рассмотрим автоморфизм $\psi \in \mathrm{IAut}\, M_3$, оставляющий x_1 и x_2 на месте, а x_3 переводящий в $x_3 + [x_1, x_2]$ (якобиан такого отображения равен 1, так что это действительно автоморфизм). Применив к нему гомоморфизм μ, получаем
$$A(\psi) = E + \begin{pmatrix} b_1 b_3^{-1} b_2 & -b_1 b_3^{-1} b_1 \\ b_2 b_3^{-1} b_2 & -b_2 b_3^{-1} b_1 \end{pmatrix}.$$
Обозначим матрицу
$$X = \begin{pmatrix} b_1 b_2 & -b_1^2 \\ b_2^2 & -b_2 b_1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$
Тогда $A(\psi) = E + b_3^{-1} X$.

Аннулятором матрицы $A \in M_2(P_2)$ называется множество $\mathrm{Ann}\, A = \{B \in M_2(P_2) \mid BA = AB = 0\}$.

Лемма 5. *Пусть матрица $X \in M_2(P_2)$ имеет вид (4). Тогда $\mathrm{Ann}\, X = \alpha X$, где $\alpha \in P_2$.*

Доказательство. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(P_2)$$
и $AX = XA = 0$. Вычисляя AX и приравнивая ее элементы к 0, получаем
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0, \quad a_3 b_1 + a_4 b_2 = 0.$$
Отсюда $a_1 = \alpha_1 b_2$, $a_2 = -\alpha_1 b_1$, $a_3 = \alpha_2 b_2$, $a_4 = -\alpha_2 b_1$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in P_2$. Аналогично из $XA = 0$ выводим, что $a_1 = \alpha_3 b_1$, $a_3 = \alpha_3 b_2$, $a_2 = \alpha_4 b_1$, $a_4 = \alpha_4 b_2$, где $\alpha_3, \alpha_4 \in P_2$. Так как $a_1 = \alpha_1 b_2 = \alpha_3 b_1$, имеем $\alpha_1 = \alpha b_1$, $\alpha_3 = \alpha b_2$, где $\alpha \in P_2$. Точно так же получаем $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_4 = -\alpha_1$. Таким образом,
$$A = \begin{pmatrix} \alpha b_1 b_2 & -\alpha b_1^2 \\ \alpha b_2^2 & -\alpha b_2 b_1 \end{pmatrix} = \alpha X.$$
Лемма доказана.

Возьмем произвольный автоморфизм $\varphi \in \mathrm{IAut}\, M_3$ и вычислим $A(\varphi\psi)$. Обозначая $A = A(\varphi)$ и учитывая разложение (3), приходим к равенству
$$A\bigl(E + b_3^{-1} X\bigr) = A + b_3^{-1} X + b_3 A_2 X + A_1 X + b_3^{-1} A_0 X + b_3^{-2} A_{-1} X.$$
Но $A(\varphi\psi)$ должна иметь вид (2), следовательно, в ее записи не может содержаться b_3^{-2}, отсюда $A_{-1} X = 0$. Аналогично, вычисляя $A(\psi\varphi)$, получаем $X A_{-1} = 0$. Значит, $A_{-1} \in \mathrm{Ann}\, X$, и по лемме 5 $A_{-1} = \alpha X$, $\alpha \in P_2$.

В записи $A(\psi\varphi\psi)$ присутствует $b_3^{-2}XA_0X$, следовательно, $XA_0X = 0$. Из записи $A(\varphi\psi\psi)$ вытекает, что $A_0X^2 = 0$, откуда $A_0X = \beta X$, $\beta \in P_2$. Аналогично из записи $A(\psi\psi\varphi)$ следует, что $X^2A_0 = 0$, тем самым $XA_0 = \gamma X$, $\gamma \in P_2$. Точно так же, рассматривая $A(\psi\varphi\psi\psi)$ и $A(\psi\psi\varphi\psi)$, получаем $(XA_1X)X = X(XA_1X) = 0$, откуда $XA_1X = \delta X$, $\delta \in P_2$.

Определим отображение

$$\rho : \varphi \to \begin{pmatrix} 1+\beta & \alpha \\ \delta & 1+\gamma \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathrm{IAut}\, M_3.$$

Лемма 6. *Отображение $\rho : \mathrm{IAut}\, M_3 \to GL_2(P_2)$ является гомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{IAut}\, M_3$ и $\mu(\varphi) = A$, $\mu(\psi) = B$. Тогда, используя разложения вида (3) матриц A и B, получаем

$$\begin{aligned}(AB)_{-1} = A_{-1}B_0 + A_0B_{-1} + A_{-1} + B_{-1} &= \alpha_1 XB_0 + \alpha_2 A_0X + \alpha_1 X + \alpha_2 X \\ &= \alpha_1\gamma_2 X + \alpha_2\beta_1 X + \alpha_1 X + \alpha_2 X.\end{aligned}$$

Аналогично, учитывая, что $X^2 = 0$, имеем $(AB)_0X = (A_0 + B_0 + A_1B_{-1} + A_{-1}B_1 + A_0B_0)X = (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1\delta_2 + \beta_1\beta_2)X$, $X(AB)_0 = (\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_2\delta_1 + \gamma_1\gamma_2)X$, $X(AB)_1X = X(A_1 + B_1 + A_2B_{-1} + A_{-1}B_2 + A_1B_0 + A_0B_1)X = (\delta_1 + \delta_2 + \beta_2\delta_1 + \gamma_1\delta_2)X$. Значит, $\rho(\varphi\psi) = \rho(\varphi)\rho(\psi)$, что и требовалось доказать.

Теперь найдем формулы для вычисления коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Обозначим через u_{ij} производную $\partial u_i/\partial x_j$ элемента $u_i \in M_3$, через u_{ij}^k — компоненту, отвечающую степени b_3^k в разложении $u_{ij} = b_3^2u_{ij}^2 + b_3u_{ij}^1 + u_{ij}^0$.

Лемма 7. *Пусть $\varphi = (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3) \in \mathrm{IAut}\, M_3$, $u_i \in M_3^2$, $i = 1, 2, 3$, и*

$$\rho(\varphi) = \begin{pmatrix} 1+\beta & \alpha \\ \delta & 1+\gamma \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in P_2$. Тогда элементы матрицы $\rho(\varphi)$ можно вычислить по следующим формулам:

$$\alpha = -u_{31}^0 b_2^{-1} = u_{32}^0 b_1^{-1}; \tag{5}$$

$$\beta = -u_{31}^1 b_1 - u_{32}^1 b_2; \tag{6}$$

$$\gamma = u_{11}^0 - u_{21}^0 b_1 b_2^{-1} = u_{22}^0 - u_{12}^0 b_2 b_1^{-1}; \tag{7}$$

$$\delta = u_{23}^0 b_1 - u_{13}^0 b_2. \tag{8}$$

Доказательство. Представим матрицу $A(\varphi)$, как показано в (3). Из (2) видно, что

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -b_1u_{31}^0 & -b_1u_{32}^0 \\ -b_2u_{31}^0 & -b_2u_{32}^0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\alpha b_2 = -u_{31}^0$, $\alpha b_1 = u_{32}^0$. Следовательно,

$$\alpha = -u_{31}^0 b_2^{-1} = u_{32}^0 b_1^{-1}.$$

Из (2) $A_0 = \left(u_{ij}^0 - b_iu_{3j}^1\right)$, $i, j = 1, 2$. Вычисляя A_0X и приравнивая ее компоненты к соответствующим компонентам βX, получаем

$$\left(u_{11}^0 - b_1u_{31}^1\right)b_1 + \left(u_{12}^0 - b_1u_{32}^1\right)b_2 = \beta b_1,\ \left(u_{21}^0 - b_2u_{31}^1\right)b_1 + \left(u_{22}^0 - b_2u_{32}^1\right)b_2 = \beta b_2.$$

Так как $u_{11}b_1+u_{12}b_2+u_{13}b_3=0$, то $u^0_{11}b_1+u^0_{12}b_2=0$. Аналогично $u^0_{21}b_1+u^0_{22}b_2=0$. Следовательно,

$$-u^1_{31}b_1^2-u^1_{32}b_1b_2=\beta b_1,\ -u^1_{31}b_1b_2-u^1_{32}b_1^2=\beta b_2.$$

Значит, $\beta=-u^1_{31}b_1-u^1_{32}b_2$.

Точно так же из $XA_0=\gamma X$ получаем

$$u^0_{11}b_2-u^0_{21}b_1=\gamma b_2,\quad u^0_{12}b_2-u^0_{22}b_1=\gamma b_1.$$

Поэтому

$$\gamma=u^0_{11}-u^0_{21}b_1b_2^{-1}=u^0_{22}-u^0_{12}b_2b_1^{-1}.$$

Из (2) $A_1=\bigl(u^1_{ij}-b_1u^2_{3j}\bigr)$, $i,j=1,2$. Так как $XA_1X=\delta X$, то $XA_1=\delta E$. Отсюда

$$\delta=b_1b_2\bigl(u^1_{11}-b_1u^2_{31}\bigr)-b_1^2\bigl(u^1_{21}-b_2u^2_{31}\bigr)+b_2^2\bigl(u^1_{12}-b_1u^2_{32}\bigr)-b_1b_2\bigl(u^1_{22}-b_2u^2_{32}\bigr)$$

и

$$\delta=b_1b_2\bigl(u^1_{11}-u^1_{22}\bigr)-b_1^2u^1_{21}+b_2^2u^1_{12}=b_2\bigl(b_1u^1_{11}+b_2u^1_{12}\bigr)-b_1\bigl(b_1u^1_{21}+b_2u^1_{22}\bigr).$$

Из (6) следует $u_{11}b_1+u_{12}b_2=-u_{13}b_3$. Тогда

$$\delta=u^0_{23}b_1-u^0_{13}b_2.$$

Лемма доказана.

Следовательно, образом IA-автоморфизма при гомоморфизме ρ будет матрица вида

$$\begin{pmatrix}1+\Delta_2 & P_2\\ \Delta_2^2 & 1+\Delta_2\end{pmatrix},$$

где $\Delta_2=\mathrm{id}(b_1,b_2)$. При этом поскольку ρ — гомоморфизм, определитель этой матрицы будет равен 1. Действительно, если $\varphi\in\mathrm{IAut}\,M_3$ и $\rho(\varphi)=A$, то $\rho(\varphi^{-1})=A^{-1}$. Значит, $\det A\in K$ и из вида матрицы получаем, что $\det A=1$.

Обозначим множество всех таких матриц через $SL_2\bigl(P_2,\Delta_2,\Delta_2^2\bigr)=\widetilde{SL_2}$. Подгруппу группы $\widetilde{SL_2}$, состоящую из всех ручных матриц указанного вида, обозначим через $SE_2\bigl(P_2,\Delta_2,\Delta_2^2\bigr)=\widetilde{SE_2}$.

Лемма 8. *Если* $\mathrm{char}\,K\neq 2$, *то гомоморфизм* ρ *сюръективен.*

Доказательство. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1+a_1 & a_2\\ b_1^2a_{31}+b_1b_2k+b_2^2a_{32} & 1+a_4\end{pmatrix}\in\widetilde{SL_2},$$

где $a_1,a_4\in\Delta_2, a_2,a_{31},a_{32}\in P_2, k\in K$.

Учитывая, что $\mathrm{char}\,K\neq 2$, возьмем автоморфизм

$$\sigma=(x_1+[x_1,x_3]^{k/2}-[x_2,x_3]^{k/2},x_2+[x_1,x_3]^{k/2}-[x_2,x_3]^{k/2},x_3).$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\det J(\sigma)=1$, так что это действительно автоморфизм. Используя формулы (5)–(8), получаем

$$\rho(\sigma)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \delta_\sigma & 1\end{pmatrix}=t_{21}(\delta_\sigma),$$

где $\delta_\sigma=\bigl(b_1^2-2b_1b_2+b_2^2\bigr)k/2$.

Домножив матрицу A на трансвекцию $t_{21}(\delta_\sigma)$, мы избавимся от элемента $b_1 b_2 k$ и получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 + a_1' & a_2 \\ b_1^2 a_{31}' + b_2^2 a_{32}' & 1 + a_4 \end{pmatrix} \in \widetilde{SL_2},$$

где $a_1' \in \Delta_2, a_{31}', a_{32}' \in P_2$.

Матрицу B можно представить в виде

$$B = E + B_1 + b_2 B_2,$$

где B_1 не зависит от b_2. Поскольку $B \in \widetilde{SL_2}$, то и $E + B_1 \in \widetilde{SL_2}$. Действительно, $\det B = \det(E + B_1) + d = 1$, где $d = b_2 d'$, $d' \in P_2$. Но $\det(E + B_1)$ зависит только от b_1, следовательно, $d = 0$ и $\det B_1 = 1$. Значит, $B(E + B_1)^{-1} = E + b_2 B_3$, где $B_3 = B_2 (E + B_1)^{-1}$. Матрица $E + B_1$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + b_1 c_1 & c_2 \\ b_1^2 c_3 & 1 + b_1 c_4 \end{pmatrix},$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4 \in P_2$.

Прообразом этой матрицы является автоморфизм

$$\varphi_1 = (x_1, x_2 + [x_1, x_2]^{c_4} + [x_1, x_3]^{c_3}, x_3 + [x_1, x_2]^{c_2} + [x_1, x_3]^{c_1}).$$

Это автоморфизм, так как $\det J(\varphi_1) = 1$. То, что $\rho(\varphi_1) = E + B_1$, проверяется прямыми вычислениями по формулам (5)–(8).

Достаточно доказать, что у матрицы $E + b_2 B_3$ тоже есть прообраз в $\mathrm{IAut}\, M_3$. Матрица $E + b_2 B_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + b_2 d_1 & b_2 d_2 \\ b_2^2 d_3 & 1 + b_2 d_4 \end{pmatrix},$$

где $d_1, d_2, d_3, d_4 \in P_2$.

Аналогично случаю с матрицей $(E + B_1)^{-1}$ прообразом матрицы $(E + b_2 B_3)$ является автоморфизм

$$\varphi_2 = (x_1, x_2 + [x_1, x_2]^{d_4} + [x_1, x_3]^{d_3}, x_3 + [x_1, x_2]^{d_2} + [x_1, x_3]^{d_1}).$$

Таким образом, $A = \rho(\varphi_2 \varphi_1 \sigma^{-1})$, что и требовалось доказать.

Лемма 9. *Образ любого ручного IA-автоморфизма при эпиморфизме ρ лежит в группе $\widetilde{SE_2}$.*

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathrm{Aut}\, M_3$ — произвольный элементарный автоморфизм. Он имеет вид

$$\psi = \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sum_{j=1}^{3} \alpha_j x_j + u, x_{i+1}, \ldots, x_3\right),$$

где $\alpha_j \in K$, $\alpha_i \neq 0$ и $u \in M_3^2$ не зависит от x_i. Запишем по-другому: $\psi = \tau\varphi$, где

$$\tau = \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sum_{j=1}^{3} \alpha_j x_j, x_{i+1}, \ldots, x_3\right)$$

и φ — элементарный IA-автоморфизм. Пусть $\xi \in T\, \mathrm{IAut}\, M_3$. Тогда

$$\xi = \prod_{i=1}^{m} \tau_i \varphi_i,$$

где τ_i — линейные автоморфизмы и φ_i — элементарные IA-автоморфизмы. Но

$$\prod_{i=1}^{m}\tau_i\varphi_i=\prod_{i=1}^{m}\tau_i\bigl(\tau_m^{-1}\dots\tau_2^{-1}\varphi_1\tau_2\dots\tau_m\bigr)\dots\bigl(\tau_m^{-1}\varphi_{m-1}\tau_m\bigr)\varphi_m.$$

Таким образом,

$$\xi=\prod_{i=1}^{m}\tau_i\prod_{i=1}^{m}\varphi_i^{\lambda_i},$$

где

$$\varphi_i^{\lambda_i}=\lambda_i^{-1}\varphi_i\lambda_i,\quad \lambda_i=\prod_{j=i+1}^{m}\tau_j\ (i<m),\quad \lambda_m=\mathrm{id}\,.$$

Так как $\xi\in\mathrm{IAut}\,M_3$, имеем

$$\prod_{i=1}^{m}\tau_i=\mathrm{id}\quad\text{и}\quad \xi=\prod_{i=1}^{m}\varphi_i^{\lambda_i}.$$

Достаточно доказать, что $\rho(\varphi^\tau)\in\widetilde{SE_2}$ для произвольного элементарного $\varphi\in\mathrm{IAut}\,M_3$ и произвольного линейного автоморфизма τ.

Пусть τ задается отображением $x\to Ax$, где $x=(x_1,x_2,x_3)^T$, $A=(\alpha_{ij})$, $i,j=1,2,3$. Соответственно $\tau^{-1}:x\to Bx$, где $B=A^{-1}=(\beta_{ij})$, $i,j=1,2,3$. Рассмотрим случай $\varphi=(x_1,x_2,x_3+u)$, где $u\in M_3^2$ не содержит x_3, т. е. $u=[x_1,x_2]^s$, где $s\in P_2$. Далее,

$$x_i^{\varphi^\tau}=x_i+\alpha_{i3}w\quad(i=1,2,3),$$

где $w=[x_1,x_2]^{M_{33}s'}+[x_1,x_3]^{M_{32}s'}+[x_2,x_3]^{M_{31}s'}$, M_{ij} — миноры матрицы B, $s'=\tau^{-1}(s)$. Отсюда

$$\partial w/\partial x_1=-(M_{33}b_2+M_{32}b_3)s',\quad \partial w/\partial x_2=(M_{33}b_1-M_{31}b_3)s'.$$

Учитывая разложение $s'=s_2'b_3^2+s_1'b_3+s_0'$, где $s_1',s_0'\in P_2$, и используя формулы (5)–(8), получаем

$$\alpha=-\alpha_{33}M_{33}s_0',\quad \beta=\alpha_{33}(M_{32}b_1+M_{31}b_2)s_0',$$

$$\gamma=M_{33}(\alpha_{23}b_1-\alpha_{13}b_2)s_0',\quad \delta=-(M_{32}b_1+M_{31}b_2)^2s_0'.$$

Но $B=A^{-1}$, следовательно,

$$M_{31}=\alpha_{13},\quad M_{32}=-\alpha_{23},\quad M_{33}=\alpha_{33}.$$

Если $\alpha_{33}=0$, то $\rho(\varphi^\tau)=t_{21}(\delta)\in\widetilde{SE_2}$. Иначе

$$\rho(\varphi^\tau)=\begin{pmatrix}1+k\alpha & \alpha\\ -k^2\alpha & 1-k\alpha\end{pmatrix}=t_{21}(-k)t_{12}(\alpha)t_{21}(k)\in\widetilde{SE_2},$$

где $k=\alpha_{33}^{-1}(\alpha_{23}b_1-\alpha_{13}b_2)$.

Случаи $\varphi=(x_1,x_2+u,x_3)$ и $\varphi=(x_1+u,x_2,x_3)$ доказываются аналогично.

Лемма 10. *В* $\mathrm{IAut}\, M_3$ *существуют строго неручные автоморфизмы.*

Доказательство. Известно [1], что $SL_2(P_2) \neq SE_2(P_2)$, т. е. в $SL_2(P_2)$ существуют неручные матрицы. Пусть $A \in SL_2(P_2)$ — неручная матрица. Она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} k_1 + a_{11} & k_2 + a_{12} \\ k_3 + a_{21} & k_4 + a_{22} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \Delta_2$. Пусть $k_2 \neq 0$. Домножим A на трансвекцию $t_{21}(\lambda_1)$, где $\lambda_1 = (1 - k_1)/k_2$. Тогда

$$A\ t_{21}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} + \lambda_1 a_{12} & k_2 + a_{12} \\ k_3 + \lambda_1 k_4 + a_{21} + \lambda_1 a_{22} & k_4 + a_{22} \end{pmatrix} = A_1.$$

Далее, домножим на $t_{21}(\lambda_2)$, где $\lambda_2 = -k_3 - \lambda_1 k_4$, на A_1. Получим

$$t_{21}(\lambda_2) A_1 = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} + \lambda_1 a_{12} & k_2 + a_{12} \\ \lambda_2 a_{11} + \lambda_1 \lambda_2 a_{12} + a_{21} + \lambda_1 a_{22} & k_4 + \lambda_2 k_2 + \lambda_2 a_{12} + a_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как $A \in SL_2(P_2)$, имеем $\det A = k_1 k_4 - k_2 k_3 = 1$. Отсюда

$$k_4 + \lambda_2 k_2 = k_4 - k_3 k_2 - k_4(1 - k_1) = 1.$$

Значит, $A_1 \in \widetilde{SL_2}$ и A_1 неручная, поскольку получена из A домножением на трансвекции.

Если $k_2 = 0$, то $k_1 \neq 0$ и $k_4 \neq 0$, иначе $\det A \neq 1$. В этом случае аналогичного результата можно добиться, домножив сперва на $t_{21}(-k_3/k_4)$, а потом — на диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1/k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} = t_{12}(1/k_1) t_{21}(1 - k_1) t_{12}(-1) t_{21}(1 - 1/k_1).$$

Если $\mathrm{char}\, K \neq 2$, то согласно лемме 8 в $\mathrm{IAut}\, M_3$ найдется такой автоморфизм, образ которого при эпиморфизме ρ лежит в $\widetilde{SL_2} \backslash \widetilde{SE_2}$. Поскольку $\mathrm{Inn}\, M_3 \leq \ker \rho$, по лемме 9 этот автоморфизм строго неручной.

Если $\mathrm{char}\, K = 2$, то из доказательства леммы 8 видно, что либо $\mathrm{Im}\, \rho = \widetilde{SL_2}$, либо $\mathrm{Im}\, \rho$ содержит все матрицы из $\widetilde{SL_2}$, кроме матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 + \Delta_2 & P_2 \\ b_1^2 P_2 + b_2^2 P_2 + k b_1 b_2 & 1 + \Delta_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $k \in K^* = K \backslash \{0\}$. Если $\mathrm{Im}\, \rho \neq \widetilde{SL_2}$, то возьмем неручную матрицу из $\widetilde{SL_2} \backslash \mathrm{Im}\, \rho$. Она имеет вид (9). Домножив эту матрицу на $t_{21}(-k b_1 b_2)$, получим неручную матрицу из $\mathrm{Im}\, \rho$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{IAut}\, M_3$ *— неручной автоморфизм. Тогда элемент* $g = \varphi(x_3) \in M_3$ *примитивный строго неручной.*

Доказательство. Допустим, что g примитивный ручной, т. е. существует ручной автоморфизм $\psi = (g_1, g_2, g_3 = g)$. Без ограничения общности можно считать, что множество свободных порождающих $\{g_1, g_2, g\}$ IA-ручное.

Действительно, пусть

$$g_1 = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{1j} x_j + v_1, \quad g_2 = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{2j} x_j + v_2,$$

где $\alpha_{ij} \in K$, $v_1, v_2 \in M_3^2$. Перепишем автоморфизм ψ в виде

$$\psi : X \to DX + V,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ψ — автоморфизм, матрица D обратима, так как обратный автоморфизм должен иметь вид

$$\psi^{-1} : X \to D^{-1}X + W,$$

где $W = (w_1, w_2, w_3)^T$, $w_i \in M_3^2$. Подействовав на $G = (g_1, g_2, g_3)^T$ автоморфизмом $\theta : X \to D^{-1}X$, получим $G^\theta = X + V'$, где $V' = \left(v_1^\theta, v_2^\theta, v_3^\theta\right)^T$. Таким образом, вместо ψ можно рассматривать ручной (в силу линейности θ) IA-автоморфизм $\psi' = \psi\theta = (g_1', g_2', g)$.

Образ ψ' при эпиморфизме ρ будет лежать в $\widetilde{SE_2}$. Из формул (5), (6) следует, что первая строка матрицы $B = \rho(\psi')$ зависит только от u_3. Значит, первые строки матриц B и $A = \rho(\varphi)$ совпадают. Таким образом, если $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$, то

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

где $b_{21} \in \Delta_2^2$, $b_{22} \in 1 + \Delta_2$. Отсюда $B = CA$, где

$$C = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in P_2.$$

Так как $B \in \widetilde{SE_2}$, имеем $c_2 = 1$. Значит, C — трансвекция, и если $A \notin \widetilde{SE_2}$, то и $B \notin \widetilde{SE_2}$. Противоречие доказывает, что элемент $g = \varphi(x_3)$ примитивный неручной. Доказательство того, что g строго неручной, фактически такое же, поскольку $\operatorname{Inn} M_3 \leq \ker \rho$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cohn P. M.* Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 56. P. 618–632.
2. *Jung H. W. E.* Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. Reine Angew. Math. 1942. Bd 184. S. 161–174.
3. *Kulk, W. van der.* On polynomial rings in two variables // Nieuw Arch. Wiscd. (5). 1953. Bd 3. N 1. S. 33–41.
4. *Czerniakiewicz A. G.* Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1971, V. 160. P. 393–401; 1972. V. 171. P. 309–315.
5. *Makar-Limanov L.* The authomorphisms of the free algebra of two generators // Funct. Anal. Appl. 1970. V. 4, N 3. P. 262–263.
6. *Nagata M.* On the automorphism group of $k[x, y]$. Kinokuniya; Tokyo: Kyoto Univ., 1972. (Lect. in Math.).
7. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* The Nagata automorphism is wild // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2003. V. 100, N 22. P. 12561–12563.
8. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* The tame and the wild automorphisms of rings of polynomials in three variables // J. Amer. Math. Soc. 2004. V. 17. P. 197–227.
9. *Умирбаев У. У., Шестаков И. П.* Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 6. С. 745–748.
10. *Umirbaev U. U.* Tame and wild automorphisms of polynomial algebras and free associative algebras. Bonn, 2004. (Preprint / Max-Planck Institute fur Mathematik; N 108).

11. *Artamonov V. A.* The categories of free metabelian groups and Lie algebras // Comment. Math. Univ. Card. 1977. V. 18, N 1. P. 143–159.
12. *Bahturin Y. A., Nabijev S.* Authomorphisms and derivations of Abelian extensions of some Lie algebras // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1992. V. 62. P. 43–57.
13. *Roman'kov V.* On the automorphism group of a free metabelian Lie algebra // Int. J. Algebra Comput. 2008. V. 18, N 2. P. 209–226.
14. *Романьков В. А.* Группы автоморфизмов свободных метабелевых алгебр Ли // Междунар. конф. «Алгебра и ее приложения»: Тез. докл. Красноярск, 12–18 авг. 2007 г. Сиб. фед. ун-т. Новосибирск: ИМ СОРАН, ИВМ СОРАН, 2007. С. 114–115.
15. *Fox R. H.* Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring // Ann. Math. 1953. V. 57, N 2. P. 547–560.
16. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 27 августа 2007 г.

Романьков Виталий Анатольевич, Кабанов Александр Николаевич
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
`m01kab@mail.ru` , `romankov@math.omsu.omskreg.ru`, `romankov48@mail.ru`