при любых $r\in[0,+\infty)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *и некоторой* $\psi\in C^{(1,0)}([0,+\infty)\times(0,\varepsilon_0], S_c)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi(t,\varepsilon)=\lambda^*(\varepsilon)$, *то если существует число* $\tau>0$ *такое, что* $\int\limits_0^\tau B(s)B^T(s)ds$ — *невырожденная матрица,* $B(s)=Y^{-1}(s)Q(s)$, *то для любых* x_0, $y_0\in R^n$ *при достаточно малом* ε_0 *и всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0[$ *существует* $u\in K$, *переводящее при* $t\to+\infty$ *точку* εx_0 *в точку* εy_0.

Доказательство. В уравнении (23) сделаем замену: $y=\varepsilon Y(t)z$, где $Y^{-1}(t)\to E$ при $t\to+\infty$ [3] (с. 41). Тогда это уравнение перейдет в уравнение

$$\frac{dz}{dt}=Y^{-1}(t)Q(t)u+Y^{-1}(t)f(t)+\varepsilon Y^{-1}(t)G(t,\varepsilon Y(t)z,u,\varepsilon). \tag{24}$$

Пусть уравнение (6) имеет вид

$$\frac{dy}{dt}=Y^{-1}(t)Q(t)\psi(t,\varepsilon)+Y^{-1}(t)f(t)+\varepsilon Y^{-1}(t)G(t,\varepsilon Y(t)z,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon). \tag{25}$$

Уравнения (4) и (5) имеют вид $dx/dt=0$. Предположим, что $x(t:\tau,y_0,\lambda^*,\varepsilon)\equiv y_0$. Так как $\frac{\partial x}{\partial\gamma}(t:\tau,y_0,\psi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=E$, $\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t:\tau,y_0,\psi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=0$, то выполняются все условия теоремы 1 для этого уравнения. Отсюда и из условий теоремы вытекает, что при достаточно малом ε_0 и всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ существует решение $y(t:\tau,\overline{x_0},\varepsilon)$ такое, что $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t:\tau,\overline{x}_0,\varepsilon)=y_0$.

Так как для уравнения (25) выполняются все условия теоремы из работы [5] (с. 45), то при достаточно малом ε_0 и всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ существует непрерывное управление u_0, переводящее точку x_0 в точку $\overline{x}_0$ за время τ. Тогда управление

$$u(t,\varepsilon)=\begin{cases}u_0(t,\varepsilon), & 0\leqslant t<\tau;\\ \psi(t,\varepsilon), & \tau\leqslant t<+\infty,\end{cases}$$

переводит точку x_0 в точку y_0 при $t\to+\infty$. Это же управление при помощи уравнения движения (23) переводит точку εx_0 в точку εy_0 при $t\to+\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гребенников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах.— М.: Наука, 1986.— 255 с.
2. Воскресенский Е. В. Асимптотическая эквивалентность нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 12.— С. 72—74.
3. Воскресенский Е. В., Артемьева Е. Н., Белоглазов В. А., Мурюмин С. М. Качественные и асимптотические методы интегрирования дифференциальных уравнений.— Саратов, 1987.— 188 с.
4. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М.: Мир, 1980.— 300 с.
5. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1975.— 495 с.

г. Саранск

Поступили
первый вариант 08.08.1988
окончательный вариант 16.05.1990

А. И. Зейфман

УДК 519.217+517.937

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

1. *Введение.* Пусть $X(t)$, $\overline{X}(t)$ — невозмущенная и возмущенная марковские цепи (м. ц.) с матрицами перехода $U(t)$, $\overline{U}(t)$ соответственно. Если $X(t)$, $\overline{X}(t)$ однородны, а Q, $\overline{Q}$ — их стационарные распределения, то обычно понятие устойчивости означает, что из малости $U(1)-\overline{U}(1)$ следует малость

$Q-\overline{Q}$ (или $\sup\limits_{t\geqslant 0}(U(t)-\overline{U}(t))$), см. [1] — [5]; если время t непрерывно, то предположение малости $U(1)-\overline{U}(1)$ заменяется на близость матриц интенсивностей A и $\overline{A}$.

Для неоднородных м. ц. при таком подходе естественно следующее понятие устойчивости: из малости $\sup\limits_{t\geqslant 0}(A(t)-\overline{A}(t))$ следует малость $\sup\limits_{t\geqslant 0}(U(t)-\overline{U}(t))$, см. [6]; отметим, что стационарные распределения в этом случае, вообще говоря, не существуют, и включать их в определение устойчивости нецелесообразно. Отметим, что довольно близкий подход к изучению неоднородных м. ц. приведен в [7].

В данной работе рассматривается более общая для неоднородных м. ц. ситуация, когда $A(t)-\overline{A}(t)$ мало не при всех, а лишь при достаточно больших t.

2. *Определения*. Пусть $X(t)$ — вообще говоря, неоднородная м. ц. с непрерывным временем $t\geqslant 0$ и не более чем счетным пространством состояний; $p_n(t)=\Pr(X(t)=n)$, $\boldsymbol{x}(t)=\operatorname{col}(p_i(t))$; $A(t)$, $U(t,\tau)$ — матрицы интенсивностей и перехода соответственно. Обозначим через $\overline{X}(t)$, $\overline{p}_n(t)$, $\overline{\boldsymbol{x}}(t)$, $\overline{A}(t)$, $\overline{U}(t,\tau)$ возмущенную м. ц. и ее соответствующие характеристики. Далее всюду предполагается, что $A(t)$, $\overline{A}(t)$ локально суммируемы на $[0,\infty)$ как оператор-функции на пространстве последовательностей l_1. Пусть $s=\{\boldsymbol{x}\in l_1^+\,|\,\|\boldsymbol{x}\|=1\}$. Из классических результатов [8] следует, что $U(t,\tau)$, $\overline{U}(t,\tau)$ однозначно определяются при всех t,τ $(0\leqslant\tau\leqslant t)$; если $\boldsymbol{x}(\tau)\in s$, то $U(t,\tau)\boldsymbol{x}(\tau)=\boldsymbol{x}(t)\in s$; если $\overline{\boldsymbol{x}}(\tau)\in s$, то $\overline{U}(t,\tau)\overline{\boldsymbol{x}}(\tau)=\overline{\boldsymbol{x}}(t)\in s$.

Определение 1. Марковская цепь $X(t)$ равномерно финально устойчива, если для любого $t_0\geqslant 0$ при $\varlimsup\limits_{t\to\infty}\|A(t)-\overline{A}(t)\|\to 0$ будет $\varlimsup\limits_{t\to\infty}\|U(t,t_0)-\overline{U}(t,t_0)\|\to 0$.

Определение 2. Марковская цепь $X(t)$ сильно финально устойчива, если для любых $t_0\geqslant 0$, $\boldsymbol{x}\in s$ при $\varlimsup\limits_{t\to\infty}\|A(t)-\overline{A}(t)\|\to 0$ будет $\varlimsup\limits_{t\to\infty}\|U(t,t_0)\boldsymbol{x}-\overline{U}(t,t_0)\boldsymbol{x}\|\to 0$.

В определениях 1, 2 и далее, если явно не оговорено противное, $\|\cdot\|$ есть векторная или операторная норма в l_1. Следуя [9], через $a_{i,j}$ здесь для удобства обозначаем интенсивность перехода $j\to i$.

Замечание 1. Из равномерной (сильной) финальной устойчивости следует обычная равномерная (сильная) устойчивость соответствующей м. ц., рассмотренная в [6]. Если же невозмущенная и возмущенные м. ц. однородны, то финальная и обычная устойчивость эквивалентны.

Рассмотрим прямую систему Колмогорова для $X(t)$ как дифференциальное уравнение

$$d\boldsymbol{x}/dt=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{1}$$

в пространстве последовательностей l_1.

Пусть $\boldsymbol{B}$ — некоторое пространство последовательностей, $\boldsymbol{B}\subset l_1$.

Определение 3. Дифференциальное уравнение (1) имеет отрицательный генеральный показатель (о. г. п.) в s в пространстве $\boldsymbol{B}$, если найдутся N, $\alpha>0$ такие, что при любых t,τ $(0\leqslant\tau\leqslant t)$, $\boldsymbol{x}_1(\tau)\in s$, $\boldsymbol{x}_2(\tau)\in s$ справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{x}_1(t)-\boldsymbol{x}_2(t)\|_B\leqslant N\exp(-\alpha(t-\tau))\|\boldsymbol{x}_1(\tau)-\boldsymbol{x}_2(\tau)\|_B.$$

3. *Равномерная финальная устойчивость.*

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1) *имеет о. г. п. в s в пространстве l_1, а возмущенные м. ц. таковы, что при некотором $M<\infty$*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\geqslant 0}\|A(t)-\overline{A}(t)\|\leqslant M.$$

Тогда $X(t)$ равномерно финально устойчива.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$, положим $\|A(t)-\bar{A}(t)\|=a(t)+b(t)$, где $a(t)\to 0$ при $t\to\infty$, а $b(t)\leqslant\varepsilon$ п. в. Можно считать, что $a(t)\leqslant M$ п. в. Положим $p_0=1-\sum_{i=1}^{\infty}p_i$, $z=\operatorname{col}(p_1, p_2, \ldots)$, тогда $x=\begin{pmatrix}1-\|z\|\\ z\end{pmatrix}$.

Из (1) получаем

$$dz/dt=B(t)z+f(t), \tag{2}$$

где $f=\operatorname{col}(a_{1,0}, a_{2,0}, \ldots)$, $B=(b_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$, $b_{i,j}=a_{i,j}-a_{i,0}$. Пусть, $\bar{z}, \bar{f}, \bar{B}$ — соответствующие выражения для $\bar{X}(t)$. Тогда имеем $\|f-\bar{f}\|\leqslant\|A-\bar{A}\|$, $\|B-\bar{B}\|\leqslant 2\|A-\bar{A}\|$. Отметим, что при всех $t\geqslant 0$

$$\|\bar{z}(t)\|\leqslant\|\bar{x}(t)\|\leqslant 1. \tag{3}$$

Если $V(t, \tau)$ — эволюционный оператор уравнения (2), то при всех t, τ $(0\leqslant\tau\leqslant t)$ $\|z_1(t)-z_2(t)\|\leqslant\|x_1(t)-x_2(t)\|\leqslant N\exp(-\alpha(t-\tau))\cdot 2\|z_1(\tau)-z_2(\tau)\|$, и значит, $\|V(t, \tau)\|\leqslant 2N\exp(-\alpha(t-\tau))$.

Рассмотрим уравнение, соответствующее (2), для м. ц. $\bar{X}(t)$, записав его в виде $d\bar{z}/dt=B(t)\bar{z}+f(t)+(\bar{B}(t)-B(t))\bar{z}+\bar{f}(t)-f(t)$. Положим для удобства, не ограничивая общности, $t_0=0$. Тогда при $\bar{z}(0)=z(0)$

$$\bar{z}(t)=V(t, 0)z(0)+\int_0^t V(t, \tau)f(\tau)d\tau+\int_0^t V(t, \tau)((\bar{B}(\tau)-$$

$$-B(\tau))\bar{z}(\tau)+(\bar{f}(\tau)-f(\tau)))d\tau=$$

$$=z(t)+\int_0^t V(t, \tau)((\bar{B}(\tau)-B(\tau))\bar{z}(\tau)+(\bar{f}(\tau)-f(\tau)))d\tau.$$

Используя имеющиеся оценки, получаем отсюда

$$\|\bar{z}(t)-z(t)\|\leqslant\int_0^t 2N\exp(-\alpha(t-\tau))\|\bar{B}(\tau)-B(\tau)\|\|\bar{z}(\tau)\|d\tau+$$

$$+\int_0^t 2N\exp(-\alpha(t-\tau))\|\bar{f}(\tau)-f(\tau)\|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 6N\exp(-\alpha t)\int_0^t\exp(\alpha\tau)(a(\tau)+b(\tau))d\tau. \tag{4}$$

Будем далее считать t настолько большим, чтобы при $u\geqslant t/2$ было $a(u)\leqslant\varepsilon$. Тогда имеем

$$\int_0^t\exp(\alpha\tau)a(\tau)d\tau=\int_0^{t/2}\exp(\alpha\tau)a(\tau)d\tau+\int_{t/2}^t\exp(\alpha\tau)a(\tau)d\tau\leqslant$$

$$\leqslant M\int_0^{t/2}\exp(\alpha\tau)d\tau+\varepsilon\int_{t/2}^t\exp(\alpha\tau)d\tau\leqslant\frac{M}{\alpha}\exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{\alpha}\exp(\alpha t),$$

$$\int_0^t\exp(\alpha\tau)b(\tau)d\tau\leqslant\varepsilon\int_0^t\exp(\alpha\tau)d\tau\leqslant\frac{\varepsilon}{\alpha}\exp(\alpha t).$$

С учетом (4) получаем

$$\|\bar{z}(t)-z(t)\|\leqslant(6N/\alpha)(2\varepsilon+M\exp(-\alpha t/2)). \tag{5}$$

Значит, $\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leqslant (12N/\alpha)(2\varepsilon + M\exp(-\alpha t/2))$; отсюда с учетом произвольности $\tilde{x}(0) = x(0) \in s$ имеем

$$\|U(t) - \bar{U}(t)\| \leqslant (12N/\alpha)(2\varepsilon + M\exp(-\alpha t/2)) \to 24N\varepsilon/\alpha \tag{6}$$

при $t \to \infty$. Из (6) и вытекает утверждение теоремы.

Замечание 2. Достаточные условия отрицательности генерального показателя уравнения (1) в s в l_1 и оценки для N, α получены в [10].

Замечание 3. При выполнении условий теоремы 1 м. ц. $X(t)$ равномерно квази-эргодична [10], т. е. существует матрица-функция $Q(t) = (q(t), q(t), \ldots)$ с одинаковыми столбцами и единичной нормой (предельный режим распределения вероятностей состояний) такая, что для любого $t_0 \geqslant 0$ $\|U(t, t_0) - Q(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1, *а возмущенная м. ц.* $\bar{X}(t)$ *такова, что* $\lim\limits_{t\to\infty}\|A(t) - \bar{A}(t)\| = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{t\to\infty}\|U(t) - \bar{U}(t)\| = 0$. *В частности*:

1) *если* $A(t)$ T*-периодична, то общий предельный режим* $Q(t)$ *для* $X(t)$, $\bar{X}(t)$ T*-периодичен*;

2) *если* A *постоянна, т. е.* $X(t)$ — *однородная м. ц., то* $X(t)$, $\bar{X}(t)$ *равномерно эргодичны и имеют общий предельный режим* Q (это утверждение другим способом доказано в [11]).

Следствие 2. *Пусть при выполнении условий теоремы* 1 *возмущенная м.ц.* $\bar{X}(t)$ *такова, что* $\|A(t) - \bar{A}(t)\| \leqslant g(t)$, *где* $g(t) \searrow 0$ *при* $i \nearrow \infty$. *Тогда найдется постоянная* c *такая, что*

$$\|\bar{U}(t) - Q(t)\| \leqslant c\max(\exp(-\alpha t/2),\ g(t/2)). \tag{7}$$

Для случая $A(t) \equiv A$ близкая оценка другим путем получена в [11].

Доказательство следствия 2. Прежде всего отметим, что $\|U(t) - Q(t)\| \leqslant 2N\exp(-\alpha t)$, и положим в оценках теоремы $a(t) = g(t)$, $b(t) \equiv 0$. Тогда

$$\|\bar{z}(t) - z(t)\| \leqslant 6N\exp(-\alpha t)\left(\int\limits_0^{t/2}\exp(\alpha\tau)g(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t/2}^{t}\exp(\alpha\tau)g(\tau)\,d\tau\right) \leqslant$$

$$\leqslant 6N\exp(-\alpha t)\left(\frac{g(0)}{\alpha}\exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right) + \frac{g(t/2)}{2}\exp(\alpha t)\right) = \frac{6N}{\alpha}\left(g(0)\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right) + g(t/2)\right),$$

и значит, $\|U(t) - \bar{U}(t)\| \leqslant (12N/\alpha)(g(0)\exp(-\alpha t/2) + g(t/2))$; отсюда и вытекает оценка (7).

4. *Сильная финальная устойчивость процессов рождения и гибели.* Процессы рождения и гибели (п. р. г.) часто используются при описании задач массового обслуживания и биологии [12] — [14]; различные свойства п. р. г. исследовались во многих работах (см., напр., [15], [16]). Для таких процессов матрица A имеет специальную структуру: $a_{i,j}(t) \equiv 0$ при $|i - j| > 1$, $a_{i+1,i}(t) = \lambda_i(t)$, $a_{i,i+1}(t) = \mu_{i+1}(t)$; $\bar{X}(t)$ предполагается также п. р. г. с интенсивностями $\bar{\lambda}_i(t)$, $\bar{\mu}_j(t)$. Рассмотрим, следуя [16], пространство $l_{1D} = \{z = \mathrm{col}(p_1, p_2, \ldots) \mid \|z\|_{l_{1D}} = \|Dz\|_{l_1} < \infty\}$, где матрица D имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_0 & d_0 & d_0 & d_0 & \cdots \\ & d_1 & d_1 & d_1 & \cdots \\ 0 & & d_2 & d_2 & \cdots \\ & & & & \cdots \end{pmatrix},$$

а монотонно неубывающая последовательность $\{d_i\}$ такова, что $d_0 = 1$, $\sup(d_{i+1}/d_i) = d < \infty$.

Будем здесь рассматривать только такие возмущенные и невозмущенные п. р. г., для которых существует $M<\infty$ такое, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\geqslant 0}\|A(t)\|\leqslant M,\quad \operatorname*{ess\,sup}_{t\geqslant 0}\|\bar{A}(t)\|\leqslant M. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *имеет о. г. п. в s в некотором пространстве l_{1D} и выполнено условие* (8). *Тогда п. р. г. $X(t)$ сильно финально устойчив.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и положим $\|A(t)-\bar{A}(t)\|=a(t)+b(t)$, где $b(t)\leqslant\varepsilon$ п. в., $a(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и $a(t)\leqslant M$ п. в. Тогда имеем $\|B(t)-\bar{B}(t)\|_{l_{1D}}\leqslant 2d\|A(t)-\bar{A}(t)\|=2d(a(t)+b(t))$, $\|f(t)-\bar{f}(t)\|_{l_{1D}}\leqslant\|A(t)-\bar{A}(t)\|=a(t)+b(t)$; далее $\|\bar{z}(t)-z(t)\|$ оценивается почти так же, как в доказательстве теоремы 1. Однако оценка (3) для $\|\bar{z}(\tau)\|$ здесь не проходит; поэтому приходится проводить следующие рассуждения. При достаточно малых ε уравнение $d\bar{z}/dt=\bar{B}(t)\bar{z}+\bar{f}(t)$ также имеет о. г. п. в l_{1D} в соответствии с результатами [8] и оценками для $a(t)$, $b(t)$. Значит, для эволюционного оператора $\bar{V}(t,\tau)$ этого уравнения при некоторых $\bar{N},\bar{\alpha}>0$ справедливо неравенство $\|\bar{V}(t,\tau)\|_{l_{1D}}\leqslant\bar{N}\exp(-\bar{\alpha}(t-\tau))$, $0\leqslant\tau\leqslant t$. Тогда, учитывая, что $\|\bar{f}(t)\|\leqslant M$ п. в., $\bar{z}(0)=z(0)$, получаем при $z(0)\in l_{1D}$ по норме пространства l_{1D}

$$\|z(t)\|\leqslant\|\bar{V}(t,0)\|\,\|z(0)\|+\int_0^t\|\bar{V}(t,\tau)\|\,\|\bar{f}(\tau)\|d\tau\leqslant\bar{N}\exp(-\bar{\alpha}t)\,\|z(0)\|+$$

$$+\int_0^t M\bar{N}\exp(-\bar{\alpha}(t-\tau))d\tau\leqslant\bar{N}\exp(-\bar{\alpha}t)\|z(0)\|+\frac{M\bar{N}}{\bar{\alpha}}.$$

Далее проверяем непосредственно, что $\|\cdot\|_{l_1}\leqslant 2\|\cdot\|_{l_{1D}}$; отсюда следует, что достаточно рассмотреть лишь начальные условия из l_{1D} и получить оценки также в норме пространства l_{1D}. Теперь $\|\bar{z}(t)-z(t)\|_{l_{1D}}$ оценивается аналогично (4).

Следствие. *Пусть выполняются условия теоремы* 2, *а возмущенный п. р. г. $\bar{X}(t)$ таков, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|A(t)-\bar{A}(t)\|=0$. Тогда для любого $x\in s$ $\|U(t)x-\bar{U}(t)x\|\to 0$ при $t\to\infty$,* т. е. *$X(t)$ и $\bar{X}(t)$ имеют общий сильный предельный режим $Q(t)$. В частности:*

1) *если $A(t)$ T-периодична, то $Q(t)$ также T-периодичен;*

2) *если A постоянна, то $X(t)$, $\bar{X}(t)$ сильно эргодичны с общим предельным режимом Q.*

5. *Примеры.* Рассмотрим финальную устойчивость некоторых моделей систем обслуживания. При этом в примерах 1—3 $X(t)$ есть число требований в системе в момент t.

Пример 1. $M(t)/M(t)/N/0$. Здесь $X(t)$ — п. р. г. с пространством состояний $\{0,1,\ldots,N\}$ и интенсивностями $\lambda_{n-1}(t)=\lambda(t)$, $\mu_n(t)=n\mu(t)$, $1\leqslant n\leqslant N$.

Положим $h(t)=\mu(t)$. При выполнении условия

$$\varliminf_{t-\tau\to\infty}\,(t-\tau)^{-1}\int_\tau^t h(t_1)\,dt_1=h>0 \tag{9}$$

уравнение (1) имеет о. г. п. в s [17].

Таким образом, при выполнении условия (9) с $h(t)=\mu(t)$ $X(t)$ финально устойчив (т. к. пространство состояний конечно, то сильная и равномерная устойчивости эквивалентны).

В частности, если $\lambda(t)$, $\mu(t)$ асимптотически постоянны при $t\to\infty$, т.е. $\lambda(t)=\lambda+l(t)$, $\mu(t)=\mu+m(t)$, где $|l(t)|+|m(t)|\to 0$ при $t\to\infty$, то условие (9) выполняется при $\mu>0$; при этом $X(t)$ эргодичен, а предельный режим можно вычислять по известным формулам.

Если $\lambda(t)$, $\mu(t)$ периодичны с общим периодом T или асимптотически T-периодичны, то для выполнения условия (9) достаточно, чтобы интеграл по периоду от периодической составляющей $\mu(t)$ был положителен. При этом предельный режим $Q(t)$ T-периодичен.

Пример 2. $M(t)/M(t)/N$. Здесь $X(t)$ — п. р. г. с интенсивностями $\lambda_{n-1}(t)=\lambda(t)$, $\mu_n(t)=\mu(t)\min(n, N)$, $n\geqslant 1$.

Пусть для некоторого $d>1$ при $h(t)=N\mu(t)-d\lambda(t)$ выполнено условие (9). Тогда при $d_n=d^n$ уравнение (1) имеет о. г. п. в s в пространстве l_{1D} [16]. Если, кроме того,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\geqslant 0}(\lambda(t)+\mu(t))<\infty, \tag{10}$$

то $X(t)$ сильно финально устойчив.

В частности, если $\lambda(t)$, $\mu(t)$ асимптотически постоянны, то для выполнения условия (9) достаточно, чтобы было $N\mu>\lambda$. При выполнении этого условия $X(t)$ сильно эргодичен, а предельный режим можно вычислять по известным формулам.

Если $\lambda(t)$, $\mu(t)$ асимптотически T-периодичны, то для выполнения условия (9) достаточно, чтобы для периодических составляющих интенсивностей выполнялось условие $\int\limits_0^T(N\mu(t)-\lambda(t))dt>0$. При этом предельный режим $Q(t)$ T-периодичен.

Пример 3. Система обслуживания с клиентами, боящимися очереди [18]. Здесь $X(t)$ — п. р. г. с интенсивностями $\lambda_{n-1}(t)=\lambda(t)/n$, $\mu_n(t)=\mu(t)$, $n\geqslant 1$.

Пусть для некоторого $a\in(0, 1)$ при $h(t)=\mu(t)-a\lambda(t)$ выполняется (9). Тогда при $d=([a^{-1}]+2)/([a^{-1}]+1)$, $d_n=d^n$ уравнение (1) имеет о. г. п. в s в пространстве l_{1D}. Значит, при выполнении условия (10) $X(t)$ сильно финально устойчив. Если $\lambda(t)$, $\mu(t)$ асимптотически постоянны, то (9) выполняется при $\mu>0$ и $X(t)$ сильно эргодичен; если $\lambda(t)$, $\mu(t)$ асимптотически T-периодичны, то (9) выполняется, если интеграл по периоду от периодической составляющей $\mu(t)$ положителен; при этом $Q(t)$ T-периодичен.

Пример 4. Замкнутая сеть массового обслуживания [19]. Здесь общее число требований в системе фиксировано (N), каждое требование может находиться в одном из K узлов ($K\leqslant\infty$); $X(t)$ есть K-мерный вектор объемов требований в узлах сети. Интенсивность перехода из состояния $\boldsymbol{m}=(m_1, \dots, m_K)$ в состояние $\boldsymbol{n}=(n_1, \dots, n_K)$ есть $\lambda_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}(t)$; при этом $|\boldsymbol{m}|=\Sigma m_i=|\boldsymbol{n}|=\Sigma n_i=N$; а $\lambda_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}(t)\not\equiv 0$ только в случае, если найдутся i, j такие, что при $k\neq i$, j $m_k=n_k$; $n_i=m_i+1$, $n_j=m_j-1$.

Пусть для простоты все $\lambda_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}}(t)$ T-периодичны. Пусть существуют $a>0$, $R<\infty$ и вектор $\boldsymbol{n}$ ($|\boldsymbol{n}|=N$) такие, что при любом $\boldsymbol{m}\neq\boldsymbol{n}$ найдется цепочка $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}^{(1)}$, $\boldsymbol{m}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{m}^{(k)}=\boldsymbol{n}$ длины не больше R такая, что для любого i

$$\int\limits_0^T\lambda_{\boldsymbol{m}^{(i)},\boldsymbol{m}^{(i+1)}}(t)\,dt\geqslant a.$$

Тогда уравнение (1) имеет о. г. п. в s в l_1 [10] и, следовательно, $X(t)$ равномерно финально устойчив. При этом предельный режим $Q(t)$ T-периодичен.

Отметим, что при $K<\infty$ сформулированное условие и необходимо для финальной устойчивости $X(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калашников В. В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций.— М.: Наука, 1976.— 234 с.
2. Штойян Д. Качественные свойства и оценки стохастических моделей: Пер. с нем.— М.: Мир, 1979.— 268 с.
3. Карташов Н. В. Сильно устойчивые цепи Маркова // Тр. 5-го Всес. семин. Пробл. устойчивости стохастич. моделей.— М., 1981.—С. 54—59.
4. Карташов Н. В. Критерии равномерной эргодичности и сильной устойчивости цепей Маркова с общим фазовым пространством // Теория вероятн. и мат. статистика.— Киев, 1984.— Вып. 30.— С. 65—81.
5. Карташов Н. В. Неравенства в теоремах эргодичности и устойчивости цепей Маркова с общим фазовым пространством. I, II // Теория вероятн. и ее примен.— 1985.— Т. 30.— № 2.— С. 230—240; — № 3.— С. 478—485.
6. Zeifman A. I. Stability for continuous-time nonhomogeneous Markov chains // Lect. Notes Math.— 1985.— V. 1155.— P. 401—414.
7. Анисимов В. В. Оценки отклонений переходных характеристик неоднородных марковских процессов // Укр. матем. журн.— 1988.— Т. 40.— № 6.— С. 699—704.
8. Далецкий Ю. Д., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.— 536 с.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— 2-е изд.— М.: Наука, 1976.— 352 с.
10. Zeifman A. I. Quasi-ergodicity for continuous-time nonhomogeneous Markov chains // J. Appl. Probab.— 1989.— V. 26.— № 3.— P. 643—648.
11. Johnson J., Isaacson D. Conditions for strong ergodicity using intensity matrices // J. Appl. Probab.— 1988.— V. 25.— № 1.— P. 34—42.
12. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения: Пер. с англ.— М.: Наука, 1969.— 512 с.
13. Goel N., Richter-Dyn N. Stochastic models in biology.— N. Y., 1974.— 269 p.
14. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания.— 2-е изд.— М.: Наука, 1987.— 336 с.
15. Van Doorn E. Conditions for exponential ergodicity and bounds for the decay parameter of a birth-death process // Adv. Appl. Probab.— 1985.— V. 17.— № 3.— P. 514—530.
16. Зейфман А. И. Качественное исследование неоднородных процессов рождения и гибели // Тр. 5-го Всес. семин. Пробл. устойчивости стохастич. моделей.— М., 1988.—С. 32—40.
17. Зейфман А. И. Некоторые свойства системы с потерями в случае переменных интенсивностей // Автоматика и телемеханика.— 1989.— № 1.— С. 107—113.
18. Natvig B. On the transient state probabilities for a queueing model where potential customers are discouraged by queue length // J. Appl. Probab.— 1974.— V. 11.— № 2.— P. 345—354.
19. Башарин Г. П., Толмачев А. Л. Теория сетей массового обслуживания и ее применения к анализу информационно-вычислительных систем // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. теор. вероятностей, матем. стат., теор. кибернет.— 1983.— Т. 21.— С. 3—119.

г. Вологда

Поступили
первый вариант 29.01.1988
окончательный вариант 20.03.1989