2. Л у м и с т е Ю. Г. Однородные расслоения со связностью и их погружения // Тр.геометр. семинара. - ВИНИТИ АН СССР.1966. - Т. I. - С. 191 - 237.

3. В е й л ь Г. Классические группы, их инварианты и представления. - М.: ИЛ, 1947. - 408 с.

4. Ш а п у к о в Б. Н. Структура тензорных расслоений, I // Изв. вузов. Матем. - 1979. - № 5. - С. 63 - 73.

5. Ш а п у к о в Б. Н. Структура тензорных расслоений, II// Изв. вузов. Матем. - 1981. - № 9. - С. 56 - 63.

6. Г у р е в и ч Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.-Л., 1948. - 408 с.

Широков А.П.

К ГЕОМЕТРИИ ОРИСФЕР ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

В статьях [1],[2],[3] Н.Н.Переломова рассматривала геометрию касательных расслоений I-го и 2-го порядков комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P_1$ в связи с геометрией трехмерного пространства Лобачевского. Существенную роль в этих рассмотрениях играли орисферы. Если x^1 - локальная проективная координата на $\mathbb{C}P_1$, а (x^1, x^2) - индуцированные локальные координаты в T ($\mathbb{C}P_1$), то с элементом (x^1, x^2) целесообразно связать орисферу пространства Лобачевского $Л_3$. Если применить модель Пуанкаре пространства $Л_3$ в евклидовом полупространстве, то указанную орисферу можно задать уравнением

$$(\zeta - x^1)(\bar{\zeta} - \bar{x}^1) + \theta^2 - \theta |x^2| = 0 . \qquad (1)$$

Здесь $\zeta = \xi + i\eta$, (ξ , η , θ) - прямоугольные координаты в евклидовом пространстве E_3 , а неравенство $\theta > 0$ выделяет полупространство, моделирующее пространство $Л_3$. Точнее говоря, элемент (x^1, x^2) моделируется не просто орисферой (1), а такой орисферой, на которой задано поле абсолютно параллельных направлений с помощью аргумента комплексного числа x^2 . При этом, естественно, из касательного расслоения $T(\mathbb{C}P_1)$ исключается нулевое сечение, т.е. предполагается, что $x^2 \neq 0$.

Задав комплексные константы p , q , r , положим

$$x^2 = p(x^1)^2 + 2q x^1 + r . \qquad (2)$$

Уравнение (2) задает 2-параметрическое семейство орисфер (I), имеющее, помимо абсолютной плоскости $\theta = 0$, еще одну полость огибающей. Чтобы выяснить вопрос о характере этой огибающей, запишем предварительно формулы преобразования индуцированных координат (x^1, x^2) при переходе к новой локальной проективной координате $\tilde{x}^1$:

$$\tilde{x}^1 = \frac{a x^1 + b}{c x^1 + d}, \quad \tilde{x}^2 = \frac{ad - bc}{(c x^1 + d)^2} x^2 . \tag{3}$$

Используя (2) и замечая, что

$$x^1 = \frac{d\tilde{x}^1 - b}{-c\tilde{x}^1 + a}, \quad c x^1 + d = \frac{\Delta}{-c\tilde{x}^1 + a},$$

где $\Delta = ad - bc$, получим, что в новых локальных координатах ($\tilde{x}^1, \tilde{x}^2$) семейство (2) задается уравнением

$$\tilde{x}^2 = \tilde{p}(\tilde{x}^1)^2 + 2\tilde{q}\,\tilde{x}^1 + \tilde{r}, \tag{4}$$

где

$$\begin{cases} \tilde{p} = \dfrac{pd^2 - 2qcd + rc^2}{\Delta}, \\ \tilde{q} = \dfrac{-pbd + q(ad + bc) - rac}{\Delta}, \\ \tilde{r} = \dfrac{pb^2 - 2qab + ra^2}{\Delta} \end{cases} \tag{5}$$

При этом простой подсчет показывает, что

$$\tilde{p}\tilde{r} - \tilde{q}^2 = pr - q^2 . \tag{6}$$

Таким образом, семейству (2) можно поставить в соответствие вектор $\vec{R}$ (p , q , r) 3-мерного комплексного евклидова векторного пространства R_3 (i) со скалярным квадратом

$$\vec{R}^2 = pr - q^2, \tag{7}$$

и проективные преобразования прямой $\mathbb{CP}_1$, т.е. движения пространства Λ_3 , индуцируют вращения пространства R_3 (i).

Из (5) следует, что в случае $pr - q^2 \neq 0$ уравнение семейства (2) можно за счет преобразования (3) привести к виду

$$x^2 = 2q x^1, \tag{8}$$

а в случае $pr - q^2 = 0$ к виду

$$x^2 = r. \tag{9}$$

Семейство (8) состоит из орисфер, имеющих в качестве огибающей эквидистантный цилиндр радиуса $\rho = \ln\sqrt{q\bar{q}}$, т.е. $\rho = \ln\sqrt[4]{\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}}$, где $\mathcal{D} = pr - q^2$. Семейство (9) состоит из орисфер, имеющих в качестве огибающей тоже орисферу.

Итак, получается следующее

<u>Предложение I</u>. Семейство орисфер (I), задаваемое уравнением (2), существенно зависит от дискриминанта $\mathcal{D} = pr - q^2$ полинома второй степени в правой части. При $\mathcal{D} = 0$ огибающей этого семейства служит орисфера, при $|\mathcal{D}| = 1$ – прямая, а в остальных случаях – эквидистантный цилиндр.

В частности, согласно (7) при $\mathcal{D} = 1$ мы возвращаемся к принципу Котельникова-Штуди отображения прямых пространства Λ_3 на точки единичной сферы трехмерного комплексного евклидова пространства.

Как известно, продолженное преобразование (3) можно записать одной формулой, вводя комплексно-дуальную координату $\mathcal{Z} = z^1 + \varepsilon z^2$. Тогда для $\tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{z}^1 + \varepsilon\tilde{z}^2$ в соответствии с (3) возникает формула

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \frac{a\mathcal{Z} + b}{c\mathcal{Z} + d} \quad . \tag{I0}$$

Заменяя в формуле (I0) константы a, b, c, d дуальными числами $a + \varepsilon a_1$, $b + \varepsilon b_1$, $c + \varepsilon c_1$, $d + \varepsilon d_1$, мы получим обобщения преобразований (3), представляющих движения пространства Λ_3. Эти более общие преобразования, составляющие I2-параметрическую группу преобразований в многообразии орисфер пространства Λ_3, записываются формулами

$$\tilde{z}^1 = \frac{az^1 + b}{cz^2 + d}, \tag{II}$$

$$\tilde{z}^2 = \frac{\Delta}{(cz^1 + d)^2} z^2 + \frac{(cz^1 + d)(a_1 z^1 + b_1) - (az^1 + b)(c_1 z^1 + d_1)}{(cz^1 + d)^2} .$$

Примечательным фактом является то, что эти преобразования переводят семейство орисфер, описываемое уравнением (2), в аналогичное семейство. Действительно, согласно (II),

$$\tilde{z}^2 = \tilde{p}(\tilde{z}^1)^2 + 2\tilde{q}\,\tilde{z}^1 + \tilde{r} \quad ,$$

где теперь в отличие от (5)

$$\tilde{p} = \frac{pd^2 - 2q\,cd + rc^2 + cd_1 - dc_1}{\Delta} \quad ,$$

$$\tilde{q} = \frac{-p\,bd + q(ad+bc) - r\,ac + da_1 - ad_1 + bc_1 - cb_1}{\Delta}\,, \tag{I2}$$

$$\tilde{r} = \frac{pb^2 - 2q\,ab + ra^2 + ab_1 - ba_1}{\Delta}\,.$$

Таким образом, преобразования (II) снова переводят семейства орисфер (2) в аналогичные семейства, но теперь семейство, имеющее огибающей эквидистантный цилиндр, может перейти в семейство, имеющее в качестве огибающей эквидистантный цилиндр другого радиуса, в частности прямую или орисферу. Эти преобразования можно назвать пространственными аналогами "орициклических преобразований Лагерра" в плоскости Лобачевского. Подобные преобразования в многообразии орициклов плоскости Λ_2 отмечались в статье [I] и были подробно изучены в дипломной работе М.А.Микенберга.

Если (x^1, x^2) - индуцированные локальные координаты в $T(\mathbb{C}P_1)$, а (v^1, v^2) - соответствующие координаты касательного вектора к $T(\mathbb{C}P_1)$ в элементе (x^1, x^2), то в предположении $V = \frac{v^2}{v^1} \neq \infty$ можно поставить вопрос об изменении величины V при синектически продолженных голоморфных преобразованиях проективной прямой $\mathbb{C}P_1$ $\tilde{x}^1 = f(x^1)$ в ее касательное расслоение $T(\mathbb{C}P_1)$:

$$\begin{cases} \tilde{x}^1 = f(x^1)\,, \\ \tilde{x}^2 = x^2 \cdot f'(x^1) + g(x^1)\,. \end{cases} \tag{I3}$$

Имеем

$$\begin{cases} \tilde{v}^1 = f' \cdot v^1\,, \\ \tilde{v}^2 = (x^2 f'' + g')v^1 + f'v^2\,, \end{cases}$$

так что

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{v}^1} = V + \frac{f''}{f'}x^2 + \frac{g'}{f'}\,. \tag{I4}$$

Из (I4) следует, что если в элементе (x^1, x^2) заданы 2 вектора (v^1, v^2) и (w^1 , w^2), то при преобразованиях (I3) сохраняется величина

$$W - V = \frac{w^2}{w^1} - \frac{v^2}{v^1}\,. \tag{I5}$$

Этот факт может быть интерпретирован в геометрии орисфер пространства Λ_3. Построим орисферу (I), отвечающую элементу (z^1, z^2), $z^2 \neq 0$. Взяв в элементе (z^1, z^2) касательный вектор (v^1, v^2) и положив $V = \frac{v^2}{v^1}$, рассмотрим 2-струю отображения $\mathbb{R} \to \mathbb{C}P_1$, определяющую элемент расслоения $T^2(\mathbb{C}P_1)$ с индуцированными координатами

$$z^1,\ z^2 = \dot{z}^1,\ z^3 = \frac{\ddot{z}^1}{2} = \frac{\dot{z}^2}{2} = \frac{1}{2} z^2 V .$$

Этому элементу по способу статьи [I] можно поставить в соответствие орторепер в пространстве Λ_3 с начальной точкой M_V:

$$\begin{cases} \zeta = z^1 - \dfrac{z^2 \overline{V}}{2(1 + \frac{1}{4} V\overline{V})}, \\[2ex] \theta = \dfrac{|z^2|}{1 + \frac{1}{4} V\overline{V}} . \end{cases}$$

Точка M_V принадлежит характеристическому орициклу орисферы (2), отвечающему рассматриваемой 2-струе и получающемуся пересечением орисферы с евклидовой плоскостью

$$(\zeta - z^1)\overline{z}^2 + (\overline{\zeta} - \overline{z}^1) z^2 + \theta \frac{\sqrt{z^2 \overline{z}^2}}{2} (V + \overline{V}) = 0 .$$

Заметим, что эта же точка получится, если взять элемент расслоения (z^1, iz^2, $\frac{1}{2} iz^2 V$). Аналогично можно построить точку M_W на той же орисфере. Евклидовы векторы, соединяющие точку A_0 ($z^1; 0$) с точками M_V и M_W, имеют соответственно компоненты

$$\overrightarrow{A_0 M_V} \left(-\frac{z^2 \overline{V}}{2(1 + \frac{1}{4} V\overline{V})} ; \frac{|z^2|}{1 + \frac{1}{4} V\overline{V}} \right)$$

и

$$\overrightarrow{A_0 M_W} \left(-\frac{z^2 \overline{W}}{2(1 + \frac{1}{4} W\overline{W})} ; \frac{|z^2|}{1 + \frac{1}{4} V\overline{V}} \right) .$$

Вводя комплексные числа $U = V + tA$, $A = W - V$, получим радиус-вектор произвольной точки M_U дуги орицикла $M_V M_W$:

$$\overrightarrow{A_0\mathcal{M}_u}\left(-\frac{z^2\bar{u}}{2(1+\frac{1}{4}u\bar{u})};\ \frac{|z^2|}{1+\frac{1}{4}u\bar{u}}\right),\quad 0\le t\le 1 .$$

Элементарный подсчет показывает, что неевклидова длина дуги $\mathcal{M}_V\mathcal{M}_W$ равна $\frac{1}{2}|W-V|=\frac{1}{2}|A|$. Кроме того, орицикл, проходящий через точки A_0, $\mathcal{M}_V$, $\mathcal{M}_W$, имеет в точке A_0 направление, определяемое аргументом комплексного числа $z^2(\overline{W}-\overline{V})$. Таким образом, комплексное число $W-V$, инвариантное относительно преобразований (13), приобретает определенное геометрическое истолкование на орисфере (2). Этот инвариант напоминает "тангенциальное расстояние" в геометрии прямых на евклидовой плоскости и потому преобразования (13) можно рассматривать как пространственный аналог эквилонгальных преобразований.

Теперь ясно, что преобразования (11), являющиеся частным типом "эквилонгальных" преобразований (13), действительно во многом обобщают преобразования Лагерра на плоскости. В итоге имеем

Предложение 2. Преобразования (11) касательного расслоения $T(\mathbb{C}\mathbb{P}_1)$ индуцируют 12-параметрическую группу $\mathcal{G}_{12}$ -преобразований в многообразиии орисфер пространства Λ_3. При этом семейства орисфер, огибающими которых служат эквидистантные цилиндры или орисферы, переходят в аналогичные семейства. Рассматривая орисферы, снабженные абсолютно параллельными полями направлений, можно для каждой такой "ориентированной" орисферы, принадлежащей двум однопараметрическим семействам "ориентированных" орисфер, ввести инвариант относительно рассматриваемой группы, аналогичный "касательному расстоянию" в геометрии Лагерра на плоскости. Поэтому группа $\mathcal{G}_{12}$ служит аналогом группы Лагерра в многообразии орисфер пространства Λ_3.

Литература

1. Переломова Н. Н., Широков А. П. Касательное расслоение второго порядка пр..ктивной прямой и его приложения к геометрии Лобачевского. Казан. ун-т. - Казань, 1988. - 21 с. - Деп. в ВИНИТИ, 12.04.88, № 2746-В88.

2. Переломова Н. Н., Широков А. П. К геометрии комплексной проективной прямой. Казан. ун-т. Казань, 1988. - 18 с. - Деп. в ВИНИТИ 23.05.88, № 3958-В88.

3. П е р е л о м о в а Н. Н. Преобразования ортореперов пространства Лобачевского, индуцированные отображениями $\mathbb{C}P_1 \to \mathbb{C}P_1$. Казан. ун-т. - Казань, 1989. - 23 с. - Деп. в ВИНИТИ 12.04.89, № 2378-В89.

Юльметов Р.Р.

СВЯЗНОСТЬ НЕЙФЕЛЬДА НА ГРАССМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ БАНАХОВА ТИПА

В данной статье обобщается на банахов случай метод Э.Г.Нейфельда построения аффинной связности на конечномерном грассмановом многообразии [2]. Полученные результаты являются бесконечномерными аналогами результатов Э.Г.Нейфельда.

§ 1. Преобразование оператора связности на расслоениях банахова типа

Рассмотрим расслоение $\mathcal{A} = (E, M, \pi, F)$ в категории многообразий класса C^r , где E - тотальное пространство, M - база, π - проекция, F - типовой слой.
$(\mathcal{U}, \psi, B)$ - карта на базе M, $(\mathcal{U}, \varphi, F)$ - карта на расслоении $\mathcal{A}$, где $\varphi = (\pi, \Phi) : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times F$,
(W, Ξ, C) - карта на типовом слое F . Из этих трех карт получаем допустимую карту на E [3]

$$d = (\varphi^{-1}(\mathcal{U} \times W), (\psi \circ \Xi) \circ \varphi, B \times C) .$$

Если обозначить $\Omega = (\psi \cdot \Xi) \cdot \varphi$ и если

$d' = (\varphi'^{-1}(\mathcal{U}' \times W'), \Omega', B' \times C')$ - другая допустимая карта на E , то функция перехода из d в d' :

$$\Omega' \circ \Omega^{-1} : (u, v) \in B \times C \to (f(u), g(u,v)) \in B' \times C' ,$$

где f - функция перехода на базе M , g - функция перехода на слое расслоения $\mathcal{A}$.

<u>Замечание</u>. Так как по определению карты на расслоении (см. [3]) $\Phi_x : \pi^{-1}(x) \to F$ - изоморфизм, то на слое $\pi^{-1}(x)$ вводится структура многообразия и мы можем говорить о карте на слое $\pi^{-1}(x)$ и преобразовании "координат" точек слоя, понимая под этим пере - ход от одной карты на слое к другой.□

Если $b \in \varphi^{-1}(\mathcal{U} \times W)$, то для "координат" касательного