В.В.Ишханов

# ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ ПОГРУЖЕНИЯ С РАЗРЕШИМЫМ ЯДРОМ

Пусть $k$ – поле алгебраических чисел, $K/k$ – конечное нормальное расширение с группой Галуа $F$, $G$ – расширение конечной разрешимой группы $A$ с помощью $F$. Целью предлагаемой статьи является задача погружения $(K/k, G, A)$; точную ее постановку см. [I,2].

ТЕОРЕМА. Если порядки групп $A$ и $F$ взаимно просты, то в качестве решения задачи $(K/k, G, A)$ можно выбрать поле.

Случай, когда $A$ – нильпотентная группа, был рассмотрен в работах [I,2]. Предлагаемое доказательство использует теоретико-групповые рассуждения и существование решения для нильпотентной группы.

Пусть $A$ – конечная разрешимая группа с образующими $a_1,\dots,a_m$; $N=(n_1,\dots,n_c)$ – набор натуральных чисел. Рассмотрим убывающий ряд подгрупп группы $A$

$$A_1=A,\ A_2=A_1^{n_1}(A_1,A_1),\dots,\ A_{i+1}=A_i^{n_i}(A_i,A_i),\dots,$$

где скобки обозначают коммутант соответствующей группы. Если $A_c\neq 1$, а $A_{c+1}=1$, то будем говорить, что $A$ – группа класса $c$ относительно $N$.

Пусть $n_i=p_{i1}^{b_{i1}}\cdots p_{it}^{b_{it}}$ – разложение числа $n_i$ на множители, $p$ – некоторое простое число и $q_i$ – максимальная степень $p$, входящая в разложение $n_i$. Для произвольного натурального $j$, не превосходящего $c$, обозначим через $N_{j,p}$ набор чисел $(n_1,\dots,n_{j-1}, q_j,\dots,q_c)$. Для произвольной группы можно рассматривать ряд подгрупп, соответствующий $N_{j,p}$. Члены этого ряда для группы $A$ будем обозначать через $A_{j,p,i}$. Рассмотрим еще один убывающий ряд подгрупп произвольной группы $A$, определенный для $N$ и натурального $j$, не превосходящего $c$, следующим образом:

$$A_{j,i}=\bigcap_p A_{j,p,i}$$

Будем говорить, что группа $A$ является группой класса $c$ относительно $N_j$, если $A_{j,c}\neq 1$, а $A_{j,c+1}=1$.

Пусть $U$ – *свободная группа с образующими* $u_{f,\sigma}$, где $f=1,\dots,m$; $\sigma$ пробегает все элементы группы $F$. $U$ становится $F$-операторной группой, если положить

$$u_{f,\sigma}^{\tau} = u_{f,\sigma\tau} \qquad \text{при } \sigma \in F.$$

Для группы $U$ можно построить ряды подгрупп относительно $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_{j,p}$ и $\mathcal{N}_j$. Фактор-группы $U/U_{c+1}$, $U/U_{j,p,c+1}$ и $U/U_{j,c+1}$ будем обозначать соответственно через $B, B_{j,p}$ и $B_j$. Это – конечные группы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. $F$ –операторная группа $A$ класса $c$ относительно $\mathcal{N}$ с $m$ образующими является операторно-гомоморфным образом группы $B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi$ группы $U$ на группу $A$, положив

$$\varphi(u_{f,\sigma}) = a_f^{\sigma}.$$

Достаточно показать, что ядро $R_{c+1}$ отображения $\varphi$ содержит подгруппу $U_{c+1}$. Доказательство проведем индукцией по $c$. При $c=1$ утверждение тривиально. Пусть оно доказано при $c=i$ и $R_{i+1}$, $R_{i+2}$ – ядра отображений группы $U$ соответственно на группы $A/A_{i+1}$ и $A/A_{i+2}$. По предположению группа $U_{i+1}$ содержится в группе $R_{i+1}$. Так как $A_{i+1}/A_{i+2}$ – абелева группа периода, делящего $n_{i+1}$, то

$$R_{i+1}^{n_{i+1}}(R_{i+1}, R_{i+1}) \subset R_{i+2},$$

следовательно,

$$U_{i+2} = U_{i+1}^{n_{i+1}}(U_{i+1}, U_{i+1}) \subset R_{i+2}.$$

Напомним определение одной теоретико-групповой конструкции. Пусть $\{G_i\}$ – семейство групп и для каждого $i$ существует гомоморфизм $\varphi_i$ группы $G_i$ на фиксированную группу $H$. Прямым произведением групп $G_i$ с объединенной фактор-группой $H$ называется подгруппа прямого произведения $\prod G_i$, состоящая из всех элементов $\prod_i g_i$ со свойством $\varphi_i g_i = h$ для всех $i$, где $g_i \in G_i$ и $h \in H$.

ЛЕММА I. Группа $B_j$ изоморфна группе $\overline{B}_j$ – прямому произведению групп $B_{j,p}$ с объединенной фактор-группой $U/U_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассматривать простые числа $p$, делящие хотя бы одно из чисел $n_j, \dots, n_c$, так как в противном случае группа $B_{j,p}$ изоморфна группе $U/U_j$. Рассмотрим отображение $\psi$ группы $B_j$ в группу $\prod_p B_{j,p}$, определенное следующим образом:

$$\Psi\left(u \bmod \bigcap_p U_{j,p,c+1}\right) = \prod_p u \bmod U_{j,p,c+1}.$$

Проверяется, что $\Psi$ – мономорфизм и его образ содержится в подгруппе $\overline{B}_j$. Заметим, что при различных $p$ порядки групп $U_{j,p,j}/U_{j,p,c+1}$ взаимно просты. Кроме того, при любом $p$ $\Psi$ индуцирует эпиморфизм группы $U_{j,j}/U_{j,c+1}$ на группу $U_{j,p,j}/U_{j,p,c+1}$, следовательно, $\Psi$ отображает группу $U_{j,j}/U_{j,c+1}$ на группу $\prod_p U_{j,p,j}/U_{j,p,c+1}$.

ЛЕММА 2. Ядро естественного гомоморфизма группы $B_{j+1}$ на группу $B_j$ является нильпотентной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое ядро содержится в ядре естественного отображения группы $B_{j+1}$ на группу $U/U_{j+1}$, которое в силу леммы I является прямым произведением групп $U_{j+1}/U_{j+1,p,c+1}$.

Отметим два утверждения, которые легко проверяются.

ЛЕММА 3. Если $\mathcal{A}$ – группа класса $c$ относительно $\mathcal{N}$ $(\mathcal{N}_j, \mathcal{N}_{j,p})$, то класс ее подгрупп и фактор-групп относительно $\mathcal{N}(\mathcal{N}_j, \mathcal{N}_{j,p})$ не превосходит $c$.

ЛЕММА 4. Пусть

$$1 \to F_1 \to F_2 \xrightarrow{\Psi} F_3 \to 1 \text{ –}$$

расширение конечных групп и $F_4$ – подгруппа группы $F_2$, причем $\Psi F_4 = F_3$, тогда если расширение

$$1 \to F_1 \cap F_4 \to F_4 \xrightarrow{\Psi} F_3 \to 1$$

полупрямое, то исходное расширение также полупрямое.

ЛЕММА 5. Группа $B_{j,p}$ обладает свойством максимальности среди групп класса $c$ относительно $\mathcal{N}_{j,p}$, точнее, пусть

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\Psi_1"] \arrow[dr, "\Psi_3"'] & X \arrow[d, "\Psi_2"] \\ & B_{j,p} \end{tikzcd}$$

коммутативный треугольник, где $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ – эпиморфизмы, а $X$ – группа класса $c$ относительно $\mathcal{N}_{j,p}$, тогда $\Psi_2$ – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $c$. При $c = 1$ утверждение тривиально. Пусть оно верно при $c = l$; тогда группы $X/X_{j,p,l+1}$ и $U/U_{j,p,l+1}$ изоморфны. Из коммутативного треугольника

$$\begin{tikzcd} U_{j,p,i+1} \arrow[r, "\psi_4"] \arrow[dr, "\psi_6"'] & X_{j,p,i+1}/X_{j,p,i+2} \arrow[d, "\psi_5"] \\ & U_{j,p,i+1}/U_{j,p,i+2} \end{tikzcd}$$

следует, что $\psi_5$ – изоморфизм, что доказывает утверждение для $i+1$.

ЛЕММА 6. Пусть $\overline{B}$ – группа класса $c$ относительно $\mathcal{N}_{j+1}$ и $\overline{B}$ является расширением группы $C$ с помощью $B_j$, тогда $\overline{B}$ – полупрямое расширение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по порядку группы $C$. Пусть $C_0$ – абелева подгруппа группы $C$, являющаяся нормальным делителем в группе $\overline{B}$. $B_j$ – группа класса $c$ относительно $\mathcal{N}_{j+1}$. Следовательно, по лемме 3 $\overline{B}/C_0$ – группа класса $c$ относительно $\mathcal{N}_{j+1}$. По индукционному предположению группа $\overline{B}/C_0$ – полупрямое расширение группы $C/C_0$ с помощью группы $B_j$. Пусть $\overline{B}_0$ – полный прообраз подгруппы $B_j$ в группе $\overline{B}$ относительно отображения $\overline{B}$ на группу $\overline{B}/C_0$. Имеем групповое расширение

$$1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow \overline{B}_0 \longrightarrow B_j \longrightarrow 1.$$

По лемме 3 $\overline{B}_0$ – группа класса $c$ относительно $\mathcal{N}_{j+1}$. Можно считать, что $C_0$ – минимальный нормальный делитель группы $\overline{B}_0$, так как в противном случае этого можно добиться, как это было сделано выше. Пусть $C_0$ – элементарная абелева $p$-группа и $E$ – ядро естественного отображения группы $B_j$ на группу $B_{j,p}$. Заметим, что порядок группы $E$ взаимно прост с $p$. Можно говорить о действии операторов из группы $E$ на модуль $C_0$. Если $C_0^E = 1$, то, так как $H^i(E, C_0) = 0$, из точной последовательности Хохшильда – Серра

$$0 = H^2(B_{j,p}, C_0^E) \longrightarrow H^2(B_j, C_0) \longrightarrow H^2(E, C_0) = 0$$

следует, что $H^2(B_j, C_0) = 0$, т.е. $\overline{B}_0$ – полупрямое расширение. Так как $C_0$ – минимальный нормальный делитель, то остается случай $C_0^E = C_0$. Тогда группа $E$ – нормальный делитель в группе $\overline{B}_0$. Заметим, что $\overline{B}_0/E$ – группа класса $c$ относительно $\mathcal{N}_{j,p}$. Пусть $\{b_{f,\sigma}\}$ – образующие группы $B_{j,p}$, где $f = 1,\dots,m$; $\sigma \in F$, и $\{\overline{b}_{f,\sigma}\}$ – прообразы элементов $b_{f,\sigma}$ в группе $\overline{B}_0/E$. Рассмотрим подгруппу $\overline{B}_{j,p}$ группы

$\overline{B}_0/E$, порожденную элементами $\overline{b}_{f,\sigma}$. По лемме 3 $\overline{B}_{j,p}$ – группа класса $c$ относительно $N_{j,p}$. Кроме того, группа $B_{j,p}$ – гомоморфный образ группы $\overline{B}_{j,p}$. Из леммы 5 следует, что группы $\overline{B}_{j,p}$ и $B_{j,p}$ изоморфны, т.е. $\overline{B}_0/E$ – полупрямое расширение. Из рассмотрения последовательности Хохшильда – – Серра следует, что гомоморфизм подъема

$$H^2(B_{j,p}, C_0) \longrightarrow H^2(B_j, C_0)$$

является изоморфизмом, следовательно, и $\overline{B}_0$ – полупрямое расширение, так как по лемме 2 [2] расширение $\overline{B}_0$ соответствует подъему класса когомологий, соответствующего расширению $\overline{B}_0/E$. Из леммы 4 следует, что $\overline{B}$ – также полупрямое расширение.

Обозначим полупрямое расширение группы $B_j$ с помощью $F$ через $G_j$. Существует естественный эпиморфизм группы $G_{j+1}$ на группу $G_j$. По лемме 2 ядро $D$ этого отображения является нильпотентной группой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Группа $G_{j+1}$ – полупрямое расширение группы $D$ с помощью $G_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{D}$ – произвольная подгруппа группы $D$, являющаяся нормальным делителем в $G_{j+1}$. Обозначим через $C$ и $S$ соответственно фактор-группы $D/\overline{D}$ и $G_{j+1}/\overline{D}$. Достаточно доказать индукцией по порядку группы $C$, что расширение

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow S \longrightarrow G_j \longrightarrow 1$$

является полупрямым. Пусть $\overline{C}$ – абелева подгруппа группы $C$, являющаяся нормальным делителем в $S$. Тогда по предположению расширение

$$1 \longrightarrow C/\overline{C} \longrightarrow S/\overline{C} \longrightarrow G_j \longrightarrow 1$$

является полупрямым. Пусть $\overline{G}_j$ – подгруппа в группе $S/\overline{C}$, изоморфная $G_j$, и $\overline{S}$ – полный прообраз $\overline{G}_j$ в группе $S$ относительно отображения $S$ на $S/\overline{C}$. Имеем групповое расширение

$$1 \longrightarrow \overline{C} \longrightarrow \overline{S} \longrightarrow G_j \longrightarrow 1.$$

Пусть $T$ – ядро естественного отображения группы $\overline{S}$ на группу $F$. $T$ – подгруппа группы $B_j/\overline{D}$, следовательно, по лемме 3 $T$ – группа класса $c$ относительно $N_{j+1}$. Расширению $\overline{S}$ соответствует некоторый элемент $g$ из группы $H^2(G_j, \overline{C})$. Заметим, что ограничение $g$ на подгруппу $B_j$ соответствует группе $T$. По лемме 6 $T$ – полупрямое расширение группы $\overline{C}$

с помощью $B_j$. Так как порядки групп $F$ и $G$ взаимно просты, то $g=0$, т.е. $\bar{S}$ – полупрямое расширение. Из леммы 4 следует, что и $S$ – полупрямое расширение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Так как $G$ – полупрямое расширение группы $A$ с помощью $F$, то можно считать, что $A$ – $F$ -операторная группа. Пусть $A$ имеет класс разрешимости $c$. Рассмотрим убывающий ряд подгрупп группы $A$ $A_1=A$, $A_2=(A_1,A_1)$, ..., $A_{i+1}=(A_i,A_i)$, ..., $A_{c+1}=1$. Если $n_i$ – показатели групп $A_i/A_{i+1}$, то $A$ – группа класса $c$ относительно $\mathcal{N}=(n_1,\ldots,n_c)$. Из предложения I следует, что достаточно решить задачу $(K/k,\ B\cdot F,\ F)$ с соответствующей группой $B$. Действительно, пусть $L$ – решение последней задачи и $H$ – ядро гомоморфизма группы $B$ на $A$, тогда подполе $L^H$ является решением исходной задачи.

Рассмотрим последовательность групп и гомоморфизмов, индуцированных тождественным отображением свободной группы $U$,

$$B_c=B\longrightarrow B_{c-1}\longrightarrow\ldots\longrightarrow B_1.$$

Из леммы I следует, что $B_1$ – нильпотентная группа. Из леммы 2 следует, что ядра $D_{j+1}$ отображений $B_{j+1}$ на $B_j$ – нильпотентные группы. Рассмотрим для каждого $j$, не превосходящего $c$, задачу погружения $(K/k,G_j,B_j)$ и докажем индукцией по $j$, что она имеет решение. При $j=1$ задача погружения имеет нильпотентное ядро, поэтому в качестве решения можно выбрать поле $L_1$. Пусть $L_j$ – поле, являющееся решением задачи $(K/k,G_j,B_j)$. Рассмотрим задачу погружения $(L_j/k,G_{j+1},D_{j+1})$. Из предложения 2 следует, что последняя задача является полупрямой с нильпотентным ядром. Следовательно, существует поле $L_{j+1}$, которое является решением этой задачи.

## Литература


1. Ш а ф а р е в и ч И.Р. Задача погружения для распадающихся расширений. – Докл.АН СССР, 1958, т.120, № 6, с.1217-1219.
2. И ш х а н о в В.В. О полупрямой задаче погружения с нильпотентным ядром. – Изв.АН СССР. Сер.матем., 1976, т.40, № 1, с.3-25.