ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 216, № 2
август, 2023

А. С. Сорин[*†‡], **Ю. Б. Черняков**[§¶‖], **Г. И. Шарыгин**[§¶**]

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ИНВАРИАНТЫ ПОЛНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ТОДЫ

Изучаются геометрические свойства полных симметричных систем Тоды. А именно, описана простая геометрическая конструкция, позволяющая построить коммутативное семейство векторных полей на компактной группе, включающее в себя векторное поле Тоды, т. е. поле, порождающее полную симметричную систему Тоды, связанную с разложением Картана полупростой алгебры Ли. В этой конструкции используются представления полупростой алгебры, и она не зависит от расщепимости пары Картана. Полученный результат тесно связан с семейством инвариантов и полуинвариантов системы Тоды на SL_n.

Ключевые слова: полная симметричная система Тоды, коммутативные семейства векторных полей, представления алгебр Ли.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10480

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы продолжаем изучение геометрических свойств полных симметричных систем Тоды, начатое в работах [1]–[3]. В настоящей работе рассматривается полная симметричная система Тоды, которая является обобщением непериодической трехдиагональной системы Тоды. Напомним основные сведения об этих системах.

Работа Г. Шарыгина была частично поддержана грантом РНФ 22-11-00272.

[*]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: sorin@theor.jinr.ru

[†]Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ” (Московский инженерно-физический институт), Москва, Россия

[‡]Государственный университет “Дубна”, Дубна, Московская обл., Россия

[§]Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия. E-mail: chernyakov@itep.ru, sharygin@itep.ru

[¶]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‖]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия

[**]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Непериодическая цепочка Тоды – это система из n взаимодействующих частиц на прямой, причем взаимодействуют между собой только соседние частицы. Гамильтониан системы задается как

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp(q_i - q_{i+1}), \tag{1}$$

где p_i – импульс частицы, а q_i – ее координата. Пуассонова структура на фазовом пространстве (p_i, q_i) имеет стандартный вид

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{q_i, q_j\} = 0. \tag{2}$$

Переходя к переменным (см. работу [4])

$$b_i = p_i, \qquad a_i = \exp \frac{q_i - q_{i+1}}{2}, \tag{3}$$

получаем гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} b_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2. \tag{4}$$

Пуассонова структура (2) переменных (b_i, a_i) принимает следующий вид:

$$\{b_i, a_{i-1}\} = -a_{i-1}, \qquad \{b_i, a_i\} = a_i; \tag{5}$$

остальные скобки равны нулю.

Отметим важный факт: цепочка Тоды допускает представление Лакса. Уравнение движения относительно гамильтониана (4)

$$L' = [M(L), L] \tag{6}$$

с трехдиагональной матрицей оператора Лакса

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

и M-оператором

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_2 & \ddots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \equiv L_{>0} - L_{<0} \tag{8}$$

является условием совместности системы уравнений

$$
\begin{aligned}
L\Psi &= \Psi\Lambda, \\
\frac{\partial}{\partial t}\Psi &= B\Psi,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где Ψ – матрица собственных векторов оператора Лакса, Λ – матрица собственных значений оператора Лакса.

Цепочка Тоды впервые была рассмотрена в работах [5], в работе [6] были найдены n функционально независимых интегралов движения, а в работах [4], [7], [8] была доказана инволютивность этих интегралов.

Систему Тоды можно рассматривать как динамическую систему на орбите коприсоединенного представления подгруппы верхнетреугольных матриц B_+ [9]–[11]. Тогда, отождествляя алгебру с двойственной алгеброй с помощью формы Киллинга, фазовое пространство динамической системы можно реализовать двумя способами. Первый способ отвечает разложению

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{sl}_n = \beta_+ + \eta_-, \qquad \mathfrak{sl}_n^* = \beta_+^* + \eta_-^* \cong \beta_- + \eta_+, \\
\beta_+^* \cong \eta_-^\perp = \beta_-, \qquad \eta_-^* \cong \beta_+^\perp = \eta_+,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где β_+ и β_- – верхнетреугольная и нижнетреугольная матрицы соответственно, а η_+ и η_- – строго верхнетреугольная и строго нижнетреугольная матрицы соответственно. Это разложение приводит к аффиному пространству $\beta_- + \epsilon$ (где ϵ – сумма простых корней), что соответствует гейзенберговской форме матриц оператора Лакса. Второй способ отвечает разложению

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{sl}_n = \beta_+ + \mathfrak{so}_n, \qquad \mathfrak{sl}_n^* = \beta_+^* + \mathfrak{so}_n^* \cong \mathrm{Symm}_n + \eta_+, \\
\beta_+^* \cong \mathfrak{so}_n^\perp = \mathrm{Symm}_n, \qquad \mathfrak{so}_n^* \cong \beta_+^\perp = \eta_+,
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где $\mathfrak{so}_n$ и Symm_n – кососимметричная и симметричная матрицы соответственно, и приводит к симметричной форме матриц оператора Лакса.

Заметим, что можно перейти от одной формы Лакса к другой с помощью сопряжения диагональной матрицей:

$$
\begin{gathered}
L_{\mathrm{H}} = 2D \cdot L_{\mathrm{Symm}_n} \cdot D^{-1}, \\
D = \mathrm{diag}(1, a_1, a_1 \cdot a_2, \dots, a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}).
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Исходя из двух способов реализации фазового пространства цепочку Тоды можно обобщить в двух направлениях и также получить интегрируемые системы. Эти два способа обобщения заключаются в рассмотрении в первом случае фазового пространства, реализованного полностью нижнетреугольными матрицами плюс сумма простых корней; эта система называется *полной системой Костанта–Тоды* (по-английски full Kostant–Toda system). Во втором случае фазовое пространство реализуется как пространство полностью симметричных матриц; в этом случае система называется *полной симметричной системой Тоды* (full symmetric Toda system). Эти системы несложно перенести на произвольную вещественную полупростую алгебру Ли. При этом удобно рассматривать получающуюся динамическую систему как систему на максимальной компактной подгруппе соответствующей группы Ли (см. раздел 2, где мы делаем это в случае симметричной системы Тоды).

В настоящей статье мы предлагаем геометрическую конструкцию векторных полей на максимальной компактной подгруппе K в группе Ли G (соответствующей алгебре $\mathfrak{g}$), сохраняющих поле полной симметричной системы Тоды. Эта конструкция основана на двух идеях. Первая из них состоит в систематическом использовании свойств оператора M проецирования на максимальную компактную подалгебру Ли $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$ в разложении

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}_-,$$

где $\mathfrak{b}_-$ – отрицательная подалгебра Бореля. Вторая идея – использование свойств представлений алгебры $\mathfrak{g}$. Пока мы не знаем, какова максимальная размерность получающейся коммутативной алгебры векторных полей в общем случае; однако, судя по всему, она должна быть больше, чем максимальное число первых интегралов в инволюции. В случае алгебры $\mathfrak{sl}_4$ оказывается, что таких полей шесть (см. пример 2), хотя в этом случае известно лишь четыре коммутирующих первых интеграла – три изоспектральных и один, полученный, например, с помощью процедуры отсечения (чоппинга). Мы надеемся, что построенные поля будут полезны как при изучении самой системы Тоды, так и при изучении геометрии максимальных компактных подгрупп и пространств флагов.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе мы напоминаем основные конструкции и определения из теории групп Ли, которые нам понадобятся в остальной части статьи. В частности, мы определяем здесь систему Тоды и поле Тоды.

Пусть $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ – комплексная полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{g}$ – ее (некомпактная) вещественная форма[1)]; пусть $\theta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – картановская инволюция алгебры $\mathfrak{g}$ и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

– соответствующее разложение Картана. Тем самым верны следующие включения (далее $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ – скобка Ли алгебры $\mathfrak{g}$):

$$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \qquad [\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \qquad [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}. \tag{13}$$

Здесь $\mathfrak{k}$ – максимальная компактная подалгебра в $\mathfrak{g}$, так что форма Киллинга B алгебры $\mathfrak{g}$ отрицательно определена на $\mathfrak{k}$ и положительно определена на $\mathfrak{p}$. Обозначим через G и $K \subset G$ соответствующие алгебрам $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ (1-связные) группы Ли.

Пусть $\mathfrak{a}$ – максимальная подалгебра в $\mathfrak{p}$; вследствие включений (13) алгебра $\mathfrak{a}$ всегда коммутативна. В случае, когда $\mathfrak{a}$ является максимальной коммутативной подалгеброй в $\mathfrak{g}$ (относительно включений), вещественная форма $\mathfrak{g}$ называется *нормальной* или *расщепленной*. Зафиксировав $\mathfrak{a}$, мы можем рассмотреть систему корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{a}$. Напомним, что элемент $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ называется *корнем*, если пространство

$$\mathfrak{g}_\alpha = \bigl\{X \in \mathfrak{g} \,\big|\, [H,X] = \alpha(H)X,\ H \in \mathfrak{a}\bigr\} \subseteq \mathfrak{g}$$

[1)] С этого момента все алгебры Ли, группы Ли и т. д. в нашей статье будут вещественными, если не оговорено иное, и мы будем опускать основное поле в наших обозначениях, т. е. $SL_n = SL_n(\mathbb{R})$, $SO_n = SO_n(\mathbb{R})$ и т. д.

не является нулевым. Зафиксируем положительный базис в $\mathfrak{a}^*$; пусть Δ_+ – множество положительных корней относительно этого базиса. Тогда можно показать, что $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ для всех (положительных или отрицательных) корней алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, выбрав базис $\{e^1_\alpha, \dots, e^k_\alpha\}$ в подпространствах $\mathfrak{g}_\alpha$ для всех положительных корней $\alpha \in \Delta_+$, мы автоматически получим базис в $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, положив $e^i_{-\alpha} = \theta(e^i_\alpha)$. Заметим, что в расщепленнном случае $k = 1$ для любого $\alpha \in \Delta_+$, и у нас нет необходимости использовать второй индекс. В этих обозначениях

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+, i} \mathbb{R}(e^i_\alpha + e^i_{-\alpha}) \right), \qquad \mathfrak{k} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+, i} \mathbb{R}(e^i_\alpha - e^i_{-\alpha}).$$

Таким же образом определяются *верхняя и нижняя борелевские подалгебры* в $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{a} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+, i} \mathbb{R}\, e^i_\alpha \right), \qquad \mathfrak{b}_- = \theta(\mathfrak{b}_+) = \mathfrak{a} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+, i} \mathbb{R}\, e^i_{-\alpha} \right).$$

Используя эти обозначения, определим *проекцию Тоды* $M\colon \mathfrak{p} \to \mathfrak{k}$ по формуле [12]

$$M\left(H + \sum_{\alpha\in\Delta_+, i} a^i_\alpha (e^i_\alpha + e^i_{-\alpha}) \right) = \sum_{\alpha\in\Delta_+, i} a^i_\alpha (e^i_\alpha - e^i_{-\alpha}). \tag{14}$$

Заметим, что это отображение зависит только от выбора положительных корней.

Следующая динамическая система на $\mathfrak{p}$ по определению называется *полной симметричной системой Тоды* на $\mathfrak{g}$:

$$\dot L = [M(L), L], \qquad L \in \mathfrak{p}. \tag{15}$$

Правая часть этого равенства является элементом алгебры $\mathfrak{p}$ из-за вложений (13). Система (15) оказывается гамильтоновой: структура Пуассона на алгебре $\mathfrak{p}$ индуцируется при помощи отождествления этой алгебры с $\mathfrak{b}^*_-$, задающегося формой Киллинга, а функция Гамильтона дается формулой $H(L) = \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}_L)^2)$. Эта система интегрируема в том смысле, что существует достаточное количество инволютивных интегралов этой системы на $\mathfrak{p}$ (пуассонова структура на $\mathfrak{b}^*_-$, а следовательно, и на $\mathfrak{p}$, не является симплектической, поэтому их количество зависит от выбора симплектического листа в алгебре $\mathfrak{p}$). Частью этого семейства интегралов являются известные интегралы Флашки $F_k(L) = \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}_L)^k)$, $k = 1, 2, \dots, \mathrm{rk}\,\mathfrak{g}$, другая часть задается, например, так называемой *процедурой отсечения* или *чоппинга* (chopping), см. статью [13], а также [14], где проведен подробный анализ числа независимых интегралов в случае $G = SL_n$.

Из существования интегралов Флашки следует, что любое решение $L(t)$ уравнения (15) лежит в пределах одной орбиты присоединенного представления группы K на алгебре $\mathfrak{p}$. Действительно, рассмотрим определяемое этим уравнением линейное векторное поле $\tau_L = [M(L), L]$ на $\mathfrak{p}$, тогда для каждого $L \in \mathfrak{p}$ поле τ_L принадлежит подпространству, натянутому на образ присоединенного представления алгебры $\mathfrak{k}$ в L. Таким образом, мы фактически можем ограничить всю систему на произвольную орбиту $\mathrm{Ad}_K(L) \subset \mathfrak{p}$ некоторого фиксированного элемента $L \in \mathfrak{p}$. Например, поскольку каждая орбита Ad_K в $\mathfrak{p}$ содержит элемент $\Lambda \in \mathfrak{a}$, мы можем взять $L = \Lambda$ (заметим, что элемент Λ определен единственным образом с точностью до действия своей стабилизирующей подгруппы; в случае общего элемента и нормальной вещественной формы эта группа дискретна).

Определим теперь *векторные поля Тоды* на компактной группе K.

Определение 1. В установленных ранее обозначениях пусть $\Lambda \in \mathfrak{a}$ – элемент общего положения (в частности, можно считать, что его группа централизаторов в K минимально возможная). Положим

$$\mathcal{T}^{\Lambda} \in \Gamma^{\infty}(K, TK), \qquad \mathcal{T}^{\Lambda}(k) = dR_k(M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda))),$$

где, как обычно, R_k обозначает правый сдвиг в группе K на элемент $k \in K$, а $\mathrm{Ad}_k(\Lambda)$ обозначает присоединенное действие элемента $k \in K$ на $\Lambda \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$.

Связь поля $\mathcal{T}^{\Lambda}$ с уравнением (15) задается следующим предложением (см., например, [11], [15]–[17]).

Предложение 1. *Пусть* $L(0) = L_0 \in \mathfrak{p}$ *есть некоторая точка, и пусть* $k_0 \in K$ *такой элемент, что* $L_0 = \mathrm{Ad}_{k_0}(\Lambda_0)$ *для некоторого* $\Lambda_0 \in \mathfrak{a}$. *Пусть* $k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *– траектория векторного поля* $\mathcal{T}^{\Lambda_0}$ *с начальным условием* $k(0) = k_0$. *Тогда*

$$L(t) = \mathrm{Ad}_{k(t)}(\Lambda_0)$$

является решением уравнения (15) *с начальным условием* $L(0) = L_0$.

Доказательство. Обозначим однопараметрическое семейство $\mathrm{Ad}_{k(t)}(\Lambda_0) \in \mathfrak{p}$ через $\tilde{L}(t)$. Поскольку $\tilde{L}(0) = L_0 = L(0)$, достаточно проверить, что оба семейства удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Для этого вычислим производную: имеем

$$\dot{\tilde{L}}(t) = \frac{d}{dt}(\mathrm{Ad}_{k(t)}(\Lambda_0)) = [M(\mathrm{Ad}_{k(t)}(\Lambda_0)), \mathrm{Ad}_{k(t)}(\Lambda_0)] = [M(\tilde{L}(t)), \tilde{L}(t)].$$

Здесь при получении второго равенства мы использовали связь между присоединенными действиями группы Ли и ее алгебры, а также определение поля $\mathcal{T}^{\Lambda_0}$. ∎

В дальнейшем мы будем использовать свойства групп и алгебр Ли, а также их теорию представлений для построения большого коммутативного семейства векторных полей на K, которое будет содержать поля Тоды $\mathcal{T}^{\Lambda}$ для всех $\Lambda \in \mathfrak{a}$. В частном случае $G = SL_n$, $K = SO_n$ наша конструкция тесно связана с большим семейством инвариантов и полуинвариантов системы, построенным в работе [18]. К сожалению, используемый здесь метод затрудняет понимание того, действительно ли поля, которые мы строим, связаны с некоторым инволютивным семейством функций на $\mathfrak{p}$, поэтому мы отложим обсуждение этого вопроса до следующей статьи (см., однако, работу [19], где обсуждаются аналогичные геометрические конструкции).

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. После обсуждения в настоящем разделе 2 нескольких предварительных вспомогательных результатов в разделе 3 мы переходим к основной части нашей конструкции, используя теорию представлений для модификации коммутационных соотношений. Раздел 4 содержит подробную иллюстрацию нашего метода для случая $G = SL_4$, $K = SO_4$. Последний раздел 5 содержит некоторые предположения и обсуждение связи между нашими результатами и теми, что были известны ранее.

3. СВОЙСТВА ПОЛЕЙ ТОДЫ НА K

Из существования коммутирующих интегралов Флашки следует, что поля Тоды, связанные с разными Λ, должны коммутировать между собой. Как несложно понять, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ гамильтоновы поля интегралов Флашки на орбите, проходящей через симметричную матрицу L_0, соответствуют полям $\mathcal{T}^{\Lambda_0^k}$ на SO_n (где $L_0 = \mathrm{Ad}_k \Lambda_0$), и если Λ_0 – диагональная матрица общего положения, то, беря линейные комбинации ее степеней, можно получить любую диагональную матрицу Λ. В общем случае этот факт также остается верным; приведем его доказательство, так как избранный нами метод дает некоторое представление о геометрии системы.

Предложение 2. *Поля $\mathcal{T}^{\Lambda_1}$, $\mathcal{T}^{\Lambda_2}$ на K коммутируют между собой для всех $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{a}$.*

Доказательство. Чтобы доказать это предложение, начнем с одной полезной леммы.

Напомним, что любая группа Ли G является параллелизуемым многообразием, т. е. ее касательное расслоение можно тривиализовать, используя левые или правые сдвиги на элементы группы для отождествления всех касательных пространств T_gG с касательным пространством в нейтральном (единичном) элементе группы, которое является алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Чтобы зафиксировать обозначения, мы будем для этой цели использовать правые сдвиги, так что каждое векторное поле на G можно записать в следующем виде: $X(g) = dR_g(x(g))$ для подходящей $\mathfrak{g}$-значной функции $x\colon G \to \mathfrak{g}$; при этом будем говорить, что поле $X(g)$ *соответствует* функции $x(g)$. Следующая лемма выглядит совершенно классическим утверждением, однако нам не удалось отыскать ее в стандартных учебниках по группам и алгебрам Ли.

Лемма 1. *Пусть $X(g)$, $Y(g)$ – два векторных поля на G, соответствующие функциям $x(g), y(g)\colon G \to \mathfrak{g}$. Тогда их коммутатор $[X,Y](g)$ соответствует функции $z\colon G \to \mathfrak{g}$, заданной формулой*

$$z(g) = (\mathcal{L}_X(y))(g) - (\mathcal{L}_Y(x))(g) - [x(g), y(g)],$$

где $\mathcal{L}_X(f)$ обозначает производную Ли (векторнозначной) функции f на G вдоль векторного поля X, а $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ – скобку Ли в $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Проще всего доказать эту формулу, проверив свойства выражений в правой и левой частях. Пусть $Z(X,Y)(g) = dR_g(z(g))$; ясно, что это выражение определяет векторное поле на G, которое билинейно зависит от X и Y (над константами). Также очевидно, что

$$\begin{gathered} Z(X,Y)(g) = -Z(Y,X)(g), \qquad Z(X,fY)(g) = (\mathcal{L}_X(f))(g)Y(g) + Z(X,Y)(g), \\ Z(X,Y) = -dR_g([x,y]) = [X,\,Y](g), \end{gathered} \tag{16}$$

если мы рассматриваем $x, y \in \mathfrak{g}$ как постоянные функции из G в $\mathfrak{g}$ (т. е. если X и Y правоинвариантны). С другой стороны, такие же тождества выполнены для коммутатора $[X,Y]$ векторных полей X, Y. Но каждое векторное поле на G можно представить в виде $\sum f_i(g)X_i(g)$, где X_i соответствуют постоянным функциям $x_i\colon G \to \mathfrak{g}$, отсюда можно заключить, что существует единственное билинейное (над скалярами) отображение векторных полей на группе, которое удовлетворяет равенствам (16). ■

Применяя эту лемму к случаю $G = K$ и $X(k) = \mathcal{T}^{\Lambda_1}(k)$, $Y(k) = \mathcal{T}^{\Lambda_2}(k)$, так что $x(k) = M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda_1))$, $y(k) = M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda_2))$, получаем

$$\begin{aligned} z(g) = M([M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda_1)), \mathrm{Ad}_k(\Lambda_2)]) - M([M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda_2)), \mathrm{Ad}_k(\Lambda_1)]) - \\ - [M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda_1)), M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda_2))]. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали наблюдение, что инфинитезимальная часть представления присоединенной группы задается присоединенным представлением алгебры Ли. Теперь утверждение предложения содержится в утверждении следующей леммы.

Лемма 2. *Отображение M для всех $X, Y \in \mathfrak{p}$ удовлетворяет следующему уравнению*:

$$[X, Y] = M([M(X), Y]) + M([X, M(Y)]) - [M(X), M(Y)]. \tag{17}$$

Доказательство. Равенство (17) можно доказать прямым вычислением в базисе $e^i_{\pm\alpha}$, описанном в разделе 2. Например, если вещественная форма нормальная (и тогда нет необходимости писать индексы i), положим $X \in \mathfrak{a}$, $Y = e_\alpha + e_{-\alpha}$. Тогда слева в доказываемом равенстве стоит $-\alpha(X)(e_\alpha - e_{-\alpha})$, а справа

$$\begin{aligned} M([M(X), Y]) + M([X, M(Y)]) - [M(X), M(Y)] = \\ = M([X, e_\alpha - e_{-\alpha}]) = -M(\alpha(X)(e_\alpha + e_{-\alpha})) = \\ = -\alpha(X)(e_\alpha - e_{-\alpha}). \end{aligned}$$

Если наоборот $Y \in \mathfrak{a}$ и $X = e_\alpha + e_{-\alpha}$, то вычисления будут такими же, поскольку формула (анти)симметрична по X, Y. Наконец, если

$$X = e_\alpha - e_{-\alpha}, \qquad Y = e_\beta - e_{-\beta}, \qquad \alpha = \beta,$$

то мы имеем ноль с обеих сторон из-за антисимметричности скобки. Если $\alpha \neq \beta$, то слева в равенстве будет стоять $\lambda_{\alpha\beta}(e_{\alpha+\beta} - e_{-\alpha-\beta})$ (для некоторой структурной константы $\lambda_{\alpha\beta}$), а справа

$$\begin{aligned} M([M(X), Y]) + M([X, M(Y)]) - [M(X), M(Y)] = \\ = 2M(\lambda_{\alpha\beta}(e_{\alpha+\beta} + e_{-\alpha-\beta})) - \lambda_{\alpha\beta}(e_{\alpha+\beta} - e_{-\alpha-\beta}) = \\ = \lambda_{\alpha\beta}(e_{\alpha+\beta} - e_{-\alpha-\beta}). \end{aligned}$$

В общем случае вычисления полностью аналогичны. ■

Теперь, чтобы закончить доказательство предложения 2, достаточно заметить, что Ad_k является гомоморфизмом алгебр Ли, а $[\Lambda_1, \Lambda_2] = 0$, так как алгебра $\mathfrak{a}$ коммутативна. ■

По сути эта конструкция является отражением несколько более общей ситуации: несложно заметить, что отображение M есть ограничение на $\mathfrak{p}$ проекции $\mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$, соответствующей разложению в прямую сумму

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{b}_-. \tag{18}$$

Поскольку оба слагаемых в разложении (18) являются подалгебрами Ли в $\mathfrak{g}$, проектор M удовлетворяет так называемому *уравнению Ниенхейса*:

$$M^2([X,Y]) - M([M(X),Y]) - M([X,M(Y)]) + [M(X),M(Y)] = 0.$$

В предыдущей лемме мы писали $[X,Y]$ вместо $M^2([X,Y])$, так как $M^2 = M$ является проектором, кроме того, в силу уравнения (13) $[X,Y] \in \mathfrak{k}$, где $\mathfrak{k}$ – образ проектора M. Чтобы доказать это равенство (насколько нам известно, впервые указанное Косманн-Шварцбах и Магри [20]), запишем элементы X и Y в виде $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$ в соответствии с разложением (18). После этого можно заметить, что выполняются равенства

$$\begin{gathered}
M^2([X,Y]) = [X_1,Y_1] + M([X_1,Y_2]) + M([X_2,Y_1]),\\
M([M(X),Y]) = [X_1,Y_1] + M([X_1,Y_2]),\\
M([X,M(Y)]) = [X_1,Y_1] + M([X_2,Y_1]),\\
[M(X),M(Y)] = [X_1,Y_1].
\end{gathered}$$

Таким образом, складывая в этой системе первое и четвертое уравнения и вычитая второе и третье, получаем нужный результат.

Теперь мы можем рассмотреть векторные поля $\mathcal{T}^X$ для всех $X \in \mathfrak{g}$, заданные аналогичной формулой

$$\mathcal{T}^X(k) = dR_k(M(\mathrm{Ad}_k(X))). \tag{19}$$

Мы будем называть эти поля *обобщенными полями Тоды*. Для вычисления коммутатора $[\mathcal{T}^X, \mathcal{T}^Y]$ воспользуемся формулой из леммы 1, имеем

$$x(k) = M(\mathrm{Ad}_k(X)), \qquad y(k) = M(\mathrm{Ad}_k(Y)).$$

Поэтому, рассуждая так же, как раньше, получаем

$$[\mathcal{T}^X, \mathcal{T}^Y](k) = dR_k(z(k))$$

для

$$\begin{aligned}
z(k) = M([M(\mathrm{Ad}_k(X)), \mathrm{Ad}_k(Y)]) + M([\mathrm{Ad}_k(X), M(\mathrm{Ad}_k(Y))]) -\\
- [M(\mathrm{Ad}_k(X)), M(\mathrm{Ad}_k(Y))] =\\
= M^2([\mathrm{Ad}_k(X), \mathrm{Ad}_k(Y)]) = M(\mathrm{Ad}_k([X,Y])).
\end{aligned}$$

Итак, $[\mathcal{T}^X, \mathcal{T}^Y] = \mathcal{T}^{[X,Y]}$, и мы получаем *представление алгебры $\mathfrak{g}$ векторными полями на K*.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $G = SL_2$, тогда максимальная компактная подгруппа в G есть $K = SO_2 \cong S^1$. Только что описанная конструкция дает представление алгебры $\mathfrak{sl}_2$ векторными полями на окружности. Для описания этого представления выберем базис $\{E, F, H\}$ в $\mathfrak{sl}_2$ как

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В результате имеем следующие коммутационные соотношения:

$$[H,E]=2E,\qquad [H,F]=-2F,\qquad [E,F]=H.$$

С другой стороны, любое векторное поле на S^1 можно записать в виде $\xi=f(\alpha)\partial_\alpha$, где α – угол поворота, $\partial_\alpha=\partial/\partial\alpha$ и f – 2π-периодическая функция. Теперь непосредственное вычисление дает следующее представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ векторными полями:

$$\mathcal{T}^E=-\cos^2\alpha\,\partial_\alpha,\qquad \mathcal{T}^F=-\sin^2\alpha\,\partial_\alpha,\qquad \mathcal{T}^H=-\sin 2\alpha\,\partial_\alpha.$$

Действительно, коммутационные соотношения для этих полей имеют вид

$$\begin{aligned}
[\mathcal{T}^H,\mathcal{T}^E]&=[\sin 2\alpha\,\partial_\alpha,\cos^2\alpha\,\partial_\alpha]=-2\cos^2\alpha\,\partial_\alpha=2\mathcal{T}^E,\\
[\mathcal{T}^H,\mathcal{T}^F]&=[\sin 2\alpha\,\partial_\alpha,\sin^2\alpha\,\partial_\alpha]=2\sin^2\alpha\,\partial_\alpha=-2\mathcal{T}^F,\\
[\mathcal{T}^E,\mathcal{T}^F]&=[\cos^2\alpha\,\partial_\alpha,\sin^2\alpha\,\partial_\alpha]=-\sin 2\alpha\,\partial_\alpha=\mathcal{T}^H.
\end{aligned}$$

Замечание 1. Несложно понять, что полученное представление алгебры $\mathfrak{g}$ полями на K является точным. В самом деле, элемент $X\in\mathfrak{g}$ лежит в его ядре, если и только если $\mathrm{Ad}_k(X)$ при всех k принадлежит отрицательной борелевской подалгебре, чего не бывает.

Замечание 2. Если вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}$ является расщепленной, существует геометрический способ представить поля $\mathcal{T}^X$. Рассмотрим пространство флагов $Fl(G)=G/B_-$ (здесь B_- – подгруппа Бореля, соответствующая подалгебре $\mathfrak{b}_-$). Как известно, его можно отождествить с факторпространством максимальной компактной подгруппы $K\subset G$ по действию группы $N=K\cap B_-$:

$$Fl(G)=K/(K\cap B_-).$$

Но пересечение $K\cap B_-$ дискретно, если вещественная форма нормальная, следовательно, естественная проекция $K\to Fl(G)$ является локальным диффеоморфизмом. Группа G действует на своем факторпространстве $Fl(G)$ левыми сдвигами, поэтому инфинитезимальная часть этого действия определяет представление алгебры $\mathfrak{g}$ полями $\widetilde{\mathcal{T}}^X$, $X\in\mathfrak{g}$, на $Fl(G)$. Поскольку группа K локально диффеоморфна $Fl(G)$, мы можем поднять поля $\widetilde{\mathcal{T}}^X$ до некоторых векторных полей на K, удовлетворяющих тем же коммутационным соотношениям. Таким образом, мы получаем представление алгебры $\mathfrak{g}$ векторными полями на K. Легко видеть, что при такой конструкции поля $\mathcal{T}^X$ соответствуют полям $\widetilde{\mathcal{T}}^X$.

4. КОММУТАТИВНОЕ СЕМЕЙСТВО

Конструкция представления полей $\mathcal{T}$ весьма полезна. В частности, она дает коммутативное семейство векторных полей на K для каждой коммутативной подалгебры в $\mathfrak{g}$ (а не только для алгебры $\mathfrak{a}$). Однако эти более общие поля не обязательно коммутируют с полями Тоды $\mathcal{T}^\Lambda$, $\Lambda\in\mathfrak{a}$. Чтобы получить коммутативную подалгебру векторных полей, включающую поля Тоды, нам придется слегка модифицировать эту конструкцию.

Замечание 3. Чтобы избежать избыточных индексов, будем писать e_α для корневого вектора в $\mathfrak{g}$, однако вся конструкция, описанная в этом разделе, может быть дословно воспроизведена для любой (не обязательно расщепленной) вещественной формы полупростой алгебры Ли.

Мы собираемся изменить поля $\mathcal{T}^X$, умножив их на подходящую функцию на K, чтобы полученное поле коммутировало с полем Тоды $\mathcal{T}^\Lambda$. С этой целью для алгебры $\mathfrak{g}$ мы выбираем (конечномерное) представление $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ нижнего веса (это понятие двойственно понятию представления верхнего веса). Пусть $v_- = v_1$ – младший (самый нижний вес) вектор этого представления, т. е. для всех отрицательных корневых векторов $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}$ с $\alpha \in \Delta_+$ и для любого $h \in \mathfrak{a}$ (здесь $\omega_1 \in \mathfrak{a}^*$ есть наименьший вес представления) имеем

$$\rho(e_{-\alpha})(v_-) = 0, \qquad \rho(h)(v_-) = \omega_1(h)v_-.$$

Цель выбора представления нижнего веса вместо верхнего состоит в том, что в нашей конструкции мы проецируем вдоль $\mathfrak{b}_-$, а не вдоль $\mathfrak{b}_+$, поэтому нужно убедиться, что элементы из этой алгебры не будут мешать нашим вычислениям (см. уравнение (23)).

Пусть $v_1, \dots, v_N$ с $v_1 = v_-$ есть базис пространства V. Можно считать, что этот базис ортонормирован относительно K-инвариантной евклидовой структуры $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ на V (т. е. евклидовой структуры, инвариантной относительно индуцированного представления $\hat\rho$ максимальной компактной группы K внутри односвязной группы G, ассоциированной с $\mathfrak{g}$), и что действие подалгебры $\mathfrak{a}$ задается в этом базисе диагональными матрицами, т. е.

$$\rho(h)(v_i) = \omega_i(h)v_i, \qquad \omega_i \in \mathfrak{a}^*, \quad i = 1, \dots, N. \tag{20}$$

Инвариантность евклидовой структуры $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ означает, что

$$\langle \rho(X)(v), w\rangle = \langle v, \rho(\theta(X))(w)\rangle \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{g}, \quad v, w \in V. \tag{21}$$

В частности, для всех $L \in \mathfrak{p}$ и для всех $O \in \mathfrak{k}$

$$\langle \rho(L)(v), w\rangle = \langle v, \rho(L)(w)\rangle, \qquad \langle \rho(O)(v), w\rangle = -\langle v, \rho(O)(w)\rangle.$$

Аналогичные уравнения будут выполняться для индуцированных групповых представлений.

Положим теперь для произвольного $k \in K$

$$F_i^\rho(k) = \langle \hat\rho(k)(v_i), v_-\rangle. \tag{22}$$

Иначе говоря, F_i^ρ – элементы нижней строки матрицы $\hat\rho(k)$ в базисе $v_1, \dots, v_N$, где N – размерность векторного пространства V. Тогда, поскольку

$$\mathcal{T}^\Lambda(k) = dR_k(M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda))),$$

получаем следующую формулу:

$$\mathcal{T}^\Lambda(F_i^\rho)(k) = \langle \rho(M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda)))(\hat\rho(k)(v_i)), v_-\rangle = -\langle \hat\rho(k)(v_i), \rho(M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda)))(v_-)\rangle$$

(последнее равенство следует из инвариантности скалярного произведения, см. формулу (21) и формулы после нее). С другой стороны, из определения проектора M следует, что

$$\begin{aligned}\rho(M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda))(v_-) &= \rho(\mathrm{Ad}_k(\Lambda))(v_-) - \rho(\mathrm{Ad}_k(\Lambda)_{\mathfrak{h}})(v_-) = \\ &= \rho(\mathrm{Ad}_k(\Lambda))(v_-) - \omega_0(\mathrm{Ad}_k(\Lambda)_{\mathfrak{h}})v_-,\end{aligned}$$

где $\mathrm{Ad}_k(\Lambda)_{\mathfrak{h}}$ – проекция $\mathrm{Ad}_k(\Lambda)$ на $\mathfrak{a}$ вдоль корневых подпространств. Действительно, поскольку вектор $v_1 = v_-$ уничтожается каждым $e_{-\alpha}$, $\alpha \in \Delta_+$, разность между $\rho(\mathrm{Ad}_k(\Lambda))(v_-)$ и $\rho(M(\mathrm{Ad}_k(\Lambda)))(v_-)$ равна $\rho(\mathrm{Ad}_k(\Lambda)_{\mathfrak{h}})(v_-)$. Обозначим величину $\omega_0(\mathrm{Ad}_k(\Lambda)_{\mathfrak{h}})$ через $g_{\rho,\Lambda}(k)$, тогда $g_{\rho,\Lambda}$ – гладкая функция на компактной группе K, поэтому она ограничена. Заметим, что функция $g_{\rho,\Lambda}$ зависит только от ρ и Λ, но не зависит от $i = 1,\dots,N$. Тогда, используя эти обозначения, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\Lambda}(F_i^{\rho})(k) &= -\langle\hat\rho(k)(v_i), \rho(\mathrm{Ad}_k(\Lambda))(v_-)\rangle + \omega_0(\mathrm{Ad}_k(\Lambda)_{\mathfrak{h}})\langle\hat\rho(k)(v_i), v_-\rangle = \\ &= -\langle\hat\rho(k)(\rho(\Lambda)(v_i)), v_-\rangle + g_{\rho,\Lambda}(k)F_i^{\rho}(k) = \\ &= (-\omega_i(\Lambda) + g_{\rho,\Lambda}(k))F_i^{\rho}(k).\end{aligned} \tag{23}$$

Другими словами, функция F_i^{ρ} имеет всюду ограниченную логарифмическую производную вдоль $\mathcal{T}^{\Lambda}$. В частности, ее нулевые поверхности являются инвариантными поверхностями потока Тоды. Эти поверхности представляют собой прямое обобщение минорных поверхностей, введенных в [18].

С другой стороны, легко видеть, что отношение

$$F^{\rho}_{\omega_j-\omega_i} = \frac{F_i^{\rho}}{F_j^{\rho}} \tag{24}$$

удовлетворяет равенству

$$\mathcal{T}^{\Lambda}(F^{\rho}_{\alpha}) = \alpha(\Lambda)F^{\rho}_{\alpha},$$

где α – корень алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующий разности весов $\omega_j - \omega_i$. Комбинируя эти функции для разных ρ и одного и того же α, можно получить функции, инвариантные относительно векторного поля $\mathcal{T}^{\Lambda}$ (см. примеры, приведенные в разделе 5). Точно так же мы можем рассмотреть произведение $\mathcal{T}^{\rho}_{\alpha} = \frac{1}{F^{\rho}_{\alpha}}\mathcal{T}^{e_\alpha} = F^{\rho}_{-\alpha}\mathcal{T}^{e_\alpha}$, тогда

$$[\mathcal{T}^{\Lambda}, \mathcal{T}^{\rho}_{\alpha}] = 0.$$

Другими словами, для всех ρ и α векторные поля $\mathcal{T}^{\rho}_{\alpha}$ коммутируют с полями Тоды $\mathcal{T}^{\Lambda}$. Однако в общем случае эти поля не будут коммутировать друг с другом. Чтобы изменить это, рассмотрим действие поля $\mathcal{T}^{X}$ на F_i^{ρ} для произвольного $X \in \mathfrak{g}$. Рассуждая так же, как выше, получаем

$$\mathcal{T}^{X}(F_i^{\rho})(k) = g_{\rho,X}(k)F_i^{\rho}(k) - \langle\hat\rho(k)(\rho(\theta(X))(v_i)), v_-\rangle, \tag{25}$$

где $g_{\rho,X}(k)$ определяется аналогично $g_{\rho,\Lambda}(k)$ и не зависит от i; второе слагаемое в правой части имеет указанный вид из-за инвариантности скалярного произведения (см. (21)). В частности, если $\rho(\theta(X))(v_i) = 0$, мы имеем $\mathcal{T}^{X}(F_i^{\rho})(k) = g_{\rho,X}(k)F_i^{\rho}(k)$. Если то же самое верно для v_j, то мы имеем $\mathcal{T}^{X}(F^{\rho}_{\omega_i-\omega_j}) = 0$.

Таким образом, если для корней $\alpha,\beta\in\Delta_+$, таких что $[e_\alpha,e_\beta]=0$, мы найдем представления ρ_α,ρ_β (на пространствах V_α, V_β соответственно) и выберем базисные векторы $v_i,v_j\in V_\alpha$, $v_k,v_l\in V_\beta$ так, чтобы разности соответствующих весов были равны α и β и

$$\rho_\alpha(\theta(e_\beta))(v_i)=\rho_\alpha(\theta(e_\beta))(v_j)=\rho_\beta(\theta(e_\alpha))(v_k)=\rho_\beta(\theta(e_\alpha))(v_l)=0,$$

то $\mathcal{T}^{e_\alpha}(F_\beta^{\rho_\beta})=\mathcal{T}^{e_\beta}(F_\alpha^{\rho_\alpha})=0$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}[\mathcal{T}_\alpha^{\rho_\alpha},\mathcal{T}_\beta^{\rho_\beta}]&=[F_\alpha^{\rho_\alpha}\mathcal{T}^{e_\alpha},F_\beta^{\rho_\beta}\mathcal{T}^{e_\beta}]=\\&=F_\alpha^{\rho_\alpha}\mathcal{T}^{e_\alpha}(F_\beta^{\rho_\beta})\mathcal{T}^{e_\beta}-F_\beta^{\rho_\beta}\mathcal{T}^{e_\beta}(F_\alpha^{\rho_\alpha})\mathcal{T}^{e_\alpha}+F_\alpha^{\rho_\alpha}F_\beta^{\rho_\beta}[\mathcal{T}^{e_\alpha},\mathcal{T}^{e_\beta}]=0.\end{aligned}$$

В то же время в силу ранее сказанного выполняются уравнения

$$[\mathcal{T}^\Lambda,\mathcal{T}_\alpha^{\rho_\alpha}]=0,\qquad[\mathcal{T}^\Lambda,\mathcal{T}_\beta^{\rho_\beta}]=0.$$

В результате мы получаем большую коммутативную алгебру векторных полей, коммутирующих с полями Тоды.

Интересен вопрос: могут ли поля $\mathcal{T}^X$ и, в более общем случае, их комбинации, такие как $\mathcal{T}_\alpha^\rho$, быть связаны с некоторыми гамильтоновыми функциями на $\mathfrak{p}$? Мы отложим этот вопрос, как и вопрос о максимальном количестве векторных полей в описанном выше коммутативном семействе, до следующей статьи.

Приведем пример коммутирующих полей, построенных по указанной схеме.

Пример 2. Рассмотрим тавтологическое представление $\hat\rho$ алгебры $\mathfrak{sl}_4$ (см. приложение). Чтобы построить коммутативную алгебру, рассмотрим корневые векторы

$$E_{12}=E_{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad E_{13}=E_{\alpha_1+\alpha_2}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{14}=E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad E_{23}=E_{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{24}=E_{\alpha_2+\alpha_3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad E_{34}=E_{\alpha_3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Элементы E_{ij} и E_{kl} коммутируют, если $i\neq l$ и $j\neq k$. Фиксировав v_i, получаем

$$F_i^\rho(k)=\langle\hat\rho(k)(v_i),v_-\rangle=\langle\psi_{ki}v_k,v_-\rangle=\psi_{1i},\tag{26}$$

где ψ_{ij} – коэффициенты матрицы $\hat\rho$, представляющей элемент k.

Чтобы построить коммутативную алгебру векторных полей в соответствии с формулой (25), нужно для фиксированного E_{ij} подобрать функции $F_k/F_l=F_{kl}$, соответствующие E_{kl}, так, что $\theta(E_{ij})(v_k)=0$ и $\theta(E_{ij})(v_l)=0$, где $\theta(E_{ij})=-E_{ji}$.

Таблица 1

E_{kl}	E_{12}	E_{13}	E_{14}	E_{23}	E_{24}	E_{34}
$v_i, i \neq k$	v_2, v_3, v_4			v_1, v_3, v_4		v_1, v_2, v_4
$F_{kl} = \dfrac{\psi_{1k}}{\psi_{1l}}$	$\dfrac{\psi_{11}}{\psi_{12}}$	$\dfrac{\psi_{11}}{\psi_{13}}$	$\dfrac{\psi_{11}}{\psi_{14}}$	$\dfrac{\psi_{12}}{\psi_{13}}$	$\dfrac{\psi_{12}}{\psi_{14}}$	$\dfrac{\psi_{13}}{\psi_{14}}$

В табл. 1 приведен список базисных векторов v_i тавтологического представления, для которых выполняется это равенство. Очевидно, для каждой пары i, j имеются три пары векторов v_k и v_l, которые удовлетворяют данному условию. Таким образом, для любых двух коммутирующих полей

$$\mathcal{T}^{\rho}_{\alpha} = F^{\hat\rho}_{-\alpha}\mathcal{T}^{e_\alpha} = F_{ji}\mathcal{T}^{E_{ij}}, \qquad \mathcal{T}^{\rho}_{\beta} = F^{\hat\rho}_{-\beta}\mathcal{T}^{e_\beta} = F_{lk}\mathcal{T}^{E_{kl}},$$

которые мы хотим получить указанным выше способом, надо требовать, чтобы индексы i, j и k, l лежали в соответствующих множествах для векторов E_{kl} и E_{ij} соответственно.

В результате мы можем построить три попарно коммутирующих векторных поля вида $\mathcal{T}^{\rho}_{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{E_{14}}(k) &= \frac{\psi_{13}}{\psi_{11}}(M(\mathrm{Ad}_k(E_{14}))k, \\ \mathcal{T}^{E_{24}}(k) &= \frac{\psi_{14}}{\psi_{12}}(M(\mathrm{Ad}_k(E_{24}))k, \\ \mathcal{T}^{E_{34}}(k) &= \frac{\psi_{14}}{\psi_{13}}(M(\mathrm{Ad}_k(E_{34}))k. \end{aligned} \tag{27}$$

Вместе с тремя полями Тоды, построенными на Λ, размерность коммутативной алгебры векторных полей будет равна шести.

5. ВЫВОДЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

Как мы видели в предыдущих разделах, можно найти большое количество инфинитезимальных симметрий поля Тоды. Действительно, размер коммутативных подалгебр в алгебрах Ли обычно довольно велик [21]; например, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{2k}$ подалгебра, натянутая на верхний правый (или нижний левый) угол соответствующих матриц, коммутативна. Размерность этой подалгебры равна k^2, что обычно намного больше, чем размерность соответствующей подалгебры Картана. Анализ представлений группы G также показывает, что обычно имеются функции F^{ρ}_{α} с необходимыми свойствами (случай $G = SL_n$ изучается методами, аналогичными тем, которые мы использовали в разделе 4).

Каждое векторное поле ξ, коммутирующее с полем Тоды, индуцирует однопараметрическую группу диффеоморфизмов g^s_ξ на K, коммутирующую с потоком Тоды g^t_Λ. Это означает, в частности, что для любого элемента $k \in K$ и всех $t, s \in \mathbb{R}$

$$g^s_\xi(g^t_\Lambda(k)) = g^t_\Lambda(g^s_\xi(k)).$$

С другой стороны, однопараметрическое семейство $k(t)$ из предложения 1 можно записать в виде $k(t) = g_\Lambda^t(k_0)$, поэтому мы видим, что формула

$$L_\xi^s(t) - \mathrm{Ad}_{g_\xi^s(g_\Lambda^t(k_0))}(\Lambda)$$

задает однопараметрическое семейство решений системы Тоды с начальным условием $L_\xi^s(0) = \mathrm{Ad}_{g_\xi^s(k_0)}(\Lambda)$.

Очевидно, что эту конструкцию легко обобщить на случай нескольких коммутирующих потоков. К сожалению, из-за явной зависимости от выбора начального условия k_0 неясно, определяет ли эта конструкция реальные векторные поля на присоединенных орбитах элемента Λ. Чтобы это проверить, нужно доказать, что конструкция инвариантна относительно правого действия на K группы стабилизаторов элемента Λ (что и является причиной неоднозначности выбора k_0). Мы можем сделать это для нормального случая, но, если реальная форма нерасщепляемая, наши методы дают лишь частичные результаты, поэтому мы откладываем обсуждение этого вопроса до следующей статьи.

Другой интересный вопрос – связь нашей конструкции и конструкций Решетихина и Шредера [19]. В своей работе они изучали более геометрический подход к системе Тоды, рассматривая ее как гамильтонову систему на факторпространстве $G/K \cong \mathfrak{p}$ со структурой Пуассона, индуцированной из обычной структуры Пуассона–Ли на группе, построенной по классической r-матрице. В этом контексте наша конструкция состояла бы в том, чтобы найти аналоги полей $\mathcal{T}_\alpha^{\rho_\alpha}$ на этом факторпространстве G/K и доказать их пуассоновость (поскольку пространство G/K 1-связно, это эквивалентно их гамильтоновости). Поля $\mathcal{T}_\alpha^{\rho_\alpha}$ нетрудно продолжить с полей на K до полей на группе G, однако доказать или опровергнуть, что они индуцируют какие-то поля на факторпространстве G/K, не так просто. Мы надеемся ответить на этот вопрос в одной из следующих статей.

Заметим также, что, как известно, поле Тоды $\mathcal{T}^\Lambda$ на K является градиентным (относительно специально построенной римановой структуры на K). С другой стороны, его аналог на $G/K = \mathfrak{p}$ является гамильтоновым. Интересен вопрос о возможности объяснить это явление каким-то аналогом двойственности между различными однородными пространствами, подобной двойственности между сферической и гиперболической геометрией.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представления алгебры $\mathfrak{sl}_4$

В этом разделе мы применяем описанную выше конструкцию к алгебре $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4$ и группе $K = SO_4$, точнее, приводим явные вычисления функций F_α^ρ в терминах стандартных координатных функций на группе SO_4. Оказывается, что эти функции совпадают с определенными ранее в [14] отношениями миноров.

Вещественная форма алгебры $\mathfrak{sl}_4$ расщеплена, ранг алгебры $\mathfrak{sl}_4$ равен 3 (размерность ее подалгебры Картана равна 3), т. е. в этом случае существуют три простых корня α_1, α_2, α_3. Рассмотрим фундаментальное (тавтологическое) четырехмерное представление алгебры $\mathfrak{sl}_4$ на $V = \mathbb{R}^4$, где V обозначает пространство представления. Как известно, другие неприводимые представления алгебры $\mathfrak{sl}_4$ высшего веса – это шестимерное представление в пространстве $\wedge^2 V$ и четырехмерное представление в пространстве $\wedge^3 V \cong V^*$. Также обратим внимание, что в этом случае понятия представлений верхнего и нижнего веса совпадают, и благодаря этому мы можем говорить о верхних векторах, а не о нижних векторах. Кроме того, между V и V^* существует двойственность, поэтому матричные элементы этих двух представлений связаны перестановкой.

Тавтологическое четырехмерное представление на V. Корневые векторы и элементы подалгебры Картана в тавтологическом представлении задаются следующими матрицами:

$$E_{\alpha_1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad E_{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad E_{\alpha_3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad E_{\alpha_2+\alpha_3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$h_{\alpha_1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad h_{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad h_{\alpha_3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем часто опускать верхний индекс ρ в наших обозначениях, если это не вызовет путаницы; с учетом этого замечания об обозначениях мы ищем функции, задающиеся формулами (22) и (24) для приведенных выше корней представления. Для этого мы сначала должны описать соответствие между весами и корнями. Напомним, что веса ω_i и корни α_i принадлежат двойственному пространству $\mathfrak{a}^*$, в нашем случае трехмерному. Веса определяются по формуле (20):

$$\rho_4(h)v_i=h_{\alpha_j}v_i=\omega_i(h_{\alpha_j})v_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&h_{\alpha_1}v_1=v_1, &&h_{\alpha_2}v_1=0, &&h_{\alpha_3}v_1=0,\\
&h_{\alpha_1}v_2=-v_2, &&h_{\alpha_2}v_2=v_2, &&h_{\alpha_3}v_2=0,\\
&h_{\alpha_1}v_3=0, &&h_{\alpha_2}v_3=-v_3, &&h_{\alpha_3}v_3=v_3,\\
&h_{\alpha_1}v_4=0, &&h_{\alpha_2}v_4=0, &&h_{\alpha_3}v_4=-v_4
\end{aligned}$$

и

$$\omega_1(h_{\alpha_i})=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \omega_2(h_{\alpha_i})=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \omega_3(h_{\alpha_i})=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \omega_4(h_{\alpha_i})=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Таблица 2

	F_1	F_2	F_3	F_4
ψ	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}
$\omega_i \in \mathfrak{a}^*$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\omega_i(\Lambda)$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4

Таблица 3

α	$\alpha \in \mathfrak{a}^*$	$\alpha_{ij} = \omega_i - \omega_j$	$F_{\alpha_{ij}} = \dfrac{F^i}{F^j}$
α_1	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\omega_1 - \omega_2$	$\dfrac{\psi_{11}}{\psi_{12}}$
α_2	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\omega_2 - \omega_3$	$\dfrac{\psi_{12}}{\psi_{13}}$
α_3	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\omega_3 - \omega_4$	$\dfrac{\psi_{13}}{\psi_{14}}$
$\alpha_1 + \alpha_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\omega_1 - \omega_3$	$\dfrac{\psi_{11}}{\psi_{13}}$
$\alpha_2 + \alpha_3$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\omega_2 - \omega_4$	$\dfrac{\psi_{12}}{\psi_{14}}$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\omega_1 - \omega_4$	$\dfrac{\psi_{11}}{\psi_{14}}$

Принимая во внимание, что $[h, E_{\alpha_i}] = \alpha_i(h) E_{\alpha_i}$ и

$$v_- = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\rho}(k) = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{pmatrix} \in SO(4),$$

получаем все функции F_j и $F_{\alpha_{ij}}$, определенные по формулам (22) и (24):

$$F_j = \psi_{kl}, \qquad \psi'_{kl} = (-\lambda_l + a_{11}) M_{kl}.$$

Их динамика относительно системы Тоды выражается формулой (23). Запишем полученные результаты в виде табл. 2 и 3.

Четырехмерное представление на $\wedge^3 V$. Выберем следующий базис представления:

$$u_1 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \quad u_2 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, \quad u_3 = e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad u_4 = e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Это представление изоморфно представлению, двойственному тавтологическому, при этом u_1, u_2, u_3 играют роль двойственного базиса. В частности, используя соотношения между минорами ортогональных матриц, получаем следующие равенства:

$$F_j = \psi_{kl}, \qquad \psi'_{kl} = (\lambda_l - a_{44}) \psi_{kl}.$$

Таблица 4

α	$\alpha \in \mathfrak{a}^*$	$\alpha_{ij} = \omega_i - \omega_j$	$F_{\alpha_{ij}} = \dfrac{F^i}{F^j}$
α_1	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\omega_1 - \omega_2$	$\dfrac{\psi_{41}}{\psi_{42}}$
α_2	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\omega_2 - \omega_3$	$\dfrac{\psi_{42}}{\psi_{43}}$
α_3	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\omega_3 - \omega_4$	$\dfrac{\psi_{43}}{\psi_{44}}$
$\alpha_1 + \alpha_2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\omega_1 - \omega_3$	$\dfrac{\psi_{41}}{\psi_{43}}$
$\alpha_2 + \alpha_3$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\omega_2 - \omega_4$	$\dfrac{\psi_{42}}{\psi_{44}}$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\omega_1 - \omega_4$	$\dfrac{\psi_{41}}{\psi_{44}}$

Результаты вычислений представлены в табл. 4.

Мы можем построить инвариантные функции поля Тоды, взяв произведения рациональных функций в последних столбцах из табл. 2 и табл. 3, соответствующих одинаковым корням.

Шестимерное представление на $\wedge^2 V$. В этом случае мы выбираем следующий базис представления:

$$f_1 = e_1 \wedge e_2, \qquad f_2 = e_1 \wedge e_3, \qquad f_3 = e_1 \wedge e_4,$$
$$f_4 = e_2 \wedge e_3, \qquad f_5 = e_2 \wedge e_4, \qquad f_6 = e_3 \wedge e_4,$$

так что $v_- = f_1$. Прямыми вычислениями тогда получаем (для $f_j = e_k \wedge e_l$)

$$\rho_6(h_{\alpha_i}) \circ f_j = \rho_4(h_{\alpha_i}) \circ (e_k \wedge e_l) = (\omega_k(h_{\alpha_i}) + \omega_l(h_{\alpha_i}))(e_k \wedge e_l),$$
$$\omega_j^{\rho_6} = \omega_k(h_{\alpha_i}) + \omega_l(h_{\alpha_i}),$$
$$\rho_6(\Lambda) \circ f_j = \rho_4(\Lambda) \circ (e_k \wedge e_l) = \Lambda \circ (e_k \wedge e_l) = (\lambda_k + \lambda_l)(e_k \wedge e_l),$$
$$\rho_6(\mathrm{Ad}_k(\Lambda)_h) \circ f_1 = (a_{11} + a_{22})(e_1 \wedge e_2).$$

Для функций $F_j^{\rho_6}$ (см. формулы (22)) аналогичным образом получаем следующие выражения:

$$F_j^{\rho_6} = M_{kl}, \qquad M_{kl} = \psi_{1k}\psi_{2l} - \psi_{1l}\psi_{2k}, \qquad M'_{kl} = (-\lambda_k - \lambda_l + a_{11} + a_{22})M_{kl}.$$

Здесь M обозначает соответствующий старший минор, т. е. M_{ij} – определитель подматрицы в матрице $\Psi = \hat{\rho}(k)$ тавтологического представления, натянутой на первые две строки и на i-й и j-й столбцы матрицы Ψ.

Теперь прямые вычисления дают результат, представленный в табл. 5 (в строке M перечислены соответствующие старшие миноры).

В табл. 6 представлены функции, определенные формулой (24), в последнем столбце таблицы дано выражение для инвариантной функции поля Тоды (в данном случае мы можем взять эти функции из одного представления).

Таблица 5

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
M	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{23}	M_{24}	M_{34}
$\omega_i \in \mathfrak{a}^*$	$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$
$\omega_i(\Lambda)$	$\lambda_1+\lambda_2$	$\lambda_1+\lambda_3$	$\lambda_1+\lambda_4$	$\lambda_2+\lambda_3$	$\lambda_2+\lambda_4$	$\lambda_3+\lambda_4$

Таблица 6

α	$\alpha \in \mathfrak{a}^*$	$\alpha_{ij}=\omega_i-\omega_j$	$F_{\alpha_{ij}}=\dfrac{F_i}{F_j}$	$\dfrac{F^a_{\alpha_{ij}}}{F^b_{\alpha_{ij}}}$
α_1	$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$	$\omega_2-\omega_4,\ \omega_3-\omega_5$	$\dfrac{M_{13}}{M_{23}},\ \dfrac{M_{14}}{M_{24}}$	$\dfrac{M_{13}M_{24}}{M_{14}M_{23}}$
α_2	$\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$	$\omega_5-\omega_6,\omega_1-\omega_2$	$\dfrac{M_{24}}{M_{34}},\ \dfrac{M_{12}}{M_{13}}$	$\dfrac{M_{24}M_{13}}{M_{34}M_{12}}$
α_3	$\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$	$\omega_2-\omega_3,\ \omega_4-\omega_5$	$\dfrac{M_{13}}{M_{14}},\ \dfrac{M_{23}}{M_{24}}$	$\dfrac{M_{13}M_{24}}{M_{14}M_{23}}$
$\alpha_1+\alpha_2$	$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$	$\omega_1-\omega_4,\omega_3-\omega_6$	$\dfrac{M_{12}}{M_{23}},\ \dfrac{M_{14}}{M_{34}}$	$\dfrac{M_{12}M_{34}}{M_{23}M_{14}}$
$\alpha_2+\alpha_3$	$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\omega_4-\omega_6,\ \omega_1-\omega_3$	$\dfrac{M_{23}}{M_{34}},\ \dfrac{M_{12}}{M_{14}}$	$\dfrac{M_{23}M_{14}}{M_{34}M_{12}}$
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$	$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	$\omega_1-\omega_5,\ \omega_2-\omega_6$	$\dfrac{M_{12}}{M_{24}},\ \dfrac{M_{13}}{M_{34}}$	$\dfrac{M_{12}M_{34}}{M_{13}M_{24}}$

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Yu. B. Chernyakov, G. I. Sharygin, A. S. Sorin, “Bruhat order in full symmetric Toda system”, *Commun. Math. Phys.*, **330**:1 (2014), 367–399, arXiv: 1212.4803.

[2] А. С. Сорин, Ю. Б. Черняков, Г. И. Шарыгин, “Фазовый портрет полной симметричной системы Тоды на группах ранга 2”, *ТМФ*, **193**:2 (2017), 193–213 1512.05821.

[3] Yu. B. Chernyakov, G. I. Sharygin, A. S. Sorin, “Bruhat order in the Toda system on $\mathfrak{so}(2,4)$: an example of non-split real form”, *J. Geom. Phys.*, **136** (2019), 45–51, arXiv: 1712.0913.

[4] H. Flaschka, “The Toda lattice. II. Existence of integrals”, *Phys. Rev. B*, **9**:4 (1974), 1924–1925.

[5] M. Toda, “Vibration of a chain with nonlinear interaction”, *J. Phys. Soc. Japan*, **22**:2 (1967), 431–436; “Wave propagation in anharmonic lattices”, **23**:3 (1967), 501–506.

[6] M. H’enon, “Integrals of the Toda lattice”, *Phys. Rev. B*, **9**:4 (1974), 1921–1923.

[7] H. Flaschka, “On the Toda lattice. II. Inverse-scattering solution”, *Progr. Theoret. Phys.*, **51**:3 (1974), 703–716.

[8] С. В. Манаков, О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах, *ЖЭТФ*, **67**:2 (1974), 543–555.

[9] А. А. Архангельский, “Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на группе треугольных матриц”, *Матем. сб.*, **108(150)**:1 (1979), 134–142.

[10] B. Kostant, “On Whittaker vectors and representation theory”, *Invent. Math.*, **48**:2 (1978), 101–184.

[11] W. W. Symes, "Systems of Toda type, inverse spectral problems, and representation theory", *Invent. Math.*, **59**:1 (1980), 13–51.

[12] F. De Mari, M. Pedroni, "Toda flows and real Hessenberg manifolds", *J. Geom. Anal.*, **9**:4 (1999), 607–625.

[13] P. Deift, L. C. Li, T. Nanda, C. Tomei, "The Toda flow on a generic orbit is integrable", *Commun. Pure Appl. Math.*, **39**:2 (1986), 183–232.

[14] А. С. Сорин, Ю. Б. Черняков, "Новый метод построения полуинвариантов и интегралов полной симметричной $\mathfrak{sl}_n$ решетки Тоды", *ТМФ*, **183**:2 (2015), 222–253.

[15] B. Kostant, "The solution to a generalized Toda lattice and representation theory", *Adv. Math.*, **34**:3 (1979), 195–338.

[16] А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Наука, М., 1990.

[17] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.

[18] Yu. B. Chernyakov, A. S. Sorin, "Explicit semi-invariants and integrals of the full symmetric $\mathfrak{sl}_n$ Toda lattice", *Lett. Math. Phys.*, **104**:8 (2014), 1045–1052, arXiv: 1306.1647.

[19] N. Reshetikhin, G. Schrader, "Superintegrability of generalized Toda models on symmetric spaces", *Int. Math. Res. Not.*, **2021**:17 (2021), 12993–13010, arXiv: 1802.00356.

[20] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, "Poisson–Nijenhuis structures", *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **53**:1 (1990), 35–81.

[21] А. И. Мальцев, "Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **9**:4 (1945), 291–300.

Поступила в редакцию 14.02.2023,
после доработки 10.04.2023,
принята к публикации 14.04.2023