

## ОБЗОР

УДК 532.517.4:533.6

## ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

*Петухов В. С., Поляков А. Ф., Шехтер Ю. Л.*

Представлен обзор теоретических и экспериментальных работ, посвященных исследованию воздействия поля силы тяжести на турбулентное течение и теплообмен в вертикальных и горизонтальных трубах. Рассмотрено влияние термогравитационных сил на осредненные поля скорости и температуры, а также на пульсационные характеристики течения. Проанализированы зависимости, обобщающие опытные данные по местной теплоотдаче.

В последнее время проявляется большой интерес к вопросам гидродинамики и теплообмена при турбулентном течении жидкости в поле силы тяжести. Эти вопросы важны не только для анализа течений воздушных масс в атмосфере и воды в океане, но и для анализа и расчета течений жидкости и газа и процессов теплообмена в различных теплообменных системах, в том числе и теплообменных аппаратах. Последнее становится понятным, если учесть, что с увеличением тепловых нагрузок поверхностей нагрева (охлаждения) и геометрических размеров аппаратов область сильного влияния массовых сил на вынужденное течение и теплообмен значительно расширяется. Вместе с тем растут требования, предъявляемые к точности расчета. Для теплообменных аппаратов характерно течение и теплообмен в каналах. Лишь такие турбулентные течения и рассматриваются в дальнейшем.

В напорных потоках жидкости массовые силы возникают вследствие неоднородного распределения плотности, связанного с неоднородностью поля температуры, и проявляются в форме термогравитационных (архимедовых) сил. Характер и степень влияния термогравитационных сил на течение и теплообмен зависят от режима движения жидкости и ориентации системы в поле силы тяжести. Ламинарное течение при существенном влиянии термогравитационных сил (т. е. вязкостно-гравитационное течение) достаточно хорошо изучено при различных условиях взаимодействия вынужденной и свободной конвекции [1—3]. Что же касается турбулентного течения, то до недавнего времени считалось, что при развитом турбулентном течении в трубах ( $Re > 10^4$ ) влияние термогравитационных сил на гидродинамику и теплообмен незначительно. Однако полученные в последние годы опытные данные показывают, что при определенных условиях это влияние может быть не только существенным, но и доминирующим. Это, в частности, показано в обзорном докладе [4]. Теоретически и экспериментально установлено, что при достаточно больших числах  $Gr$  и не очень больших числах  $Re$  под действием термогравитационных сил наблюдается изменение полей скорости и температуры осредненного течения, характеристик турбулентного переноса, теплоотдачи и сопротивления. В зависимости от ориентации системы относительно поля силы тяжести нужно различать три характерных случая.

1. Направление вынужденного течения коллинеарно с направлением ускорения силы тяжести при устойчивом распределении плотности (течение в вертикальных каналах снизу вверх при нагревании жидкости или сверху вниз при охлаждении).

2. Направление вынужденного течения коллинеарно с ускорением силы тяжести при неустойчивом распределении плотности (течение в вертикальных каналах сверху вниз при нагревании или снизу вверх при охлаждении).

3. Вынужденное течение перпендикулярно направлению ускорения силы тяжести (течение в горизонтальных каналах при нагревании и охлаждении).

Настоящая работа посвящена рассмотрению состояния и перспектив исследования гидродинамики и теплообмена при различных условиях воздействия поля силы тяжести на турбулентное вынужденное течение жидкости в каналах.

## Результаты теоретического анализа

Система уравнений сохранения энергии, количества движения и массы для стационарного турбулентного потока несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами (кроме плотности в выражении для термогравитационной силы) при отсутствии внутренних источников тепла и диссипации энергии имеет вид

$$\rho c_p \bar{U}_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - \rho c_p \overline{U_k' T'} \right), \quad k=1, 2, 3,$$

$$\rho U_k \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + g_i \rho + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - \rho \overline{U_i' U_k'} \right), \quad i=1, 2, 3; \quad \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_k} = 0. \quad (1)$$

Запишем также уравнение баланса энергии пульсационного движения, которое в упрощенной форме имеет вид

$$\overline{\rho U_i' U_k'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} - \overline{\rho' U_i' g_i} + \rho D = 0. \quad (2)$$

Здесь учтена лишь генерация турбулентной энергии (первый член), ее диссипация (третий член) и работа термогравитационных сил (второй член).

Как видно из (2), напряжения Рейнольдса  $\overline{\rho U_i' U_k'}$  зависят как от поля осредненных значений скорости, так и от работы термогравитационных сил. Поэтому влияние термогравитации на турбулентный перенос определяется двумя взаимно связанными эффектами. С одной стороны, термогравитационные силы изменяют поля осредненных значений скорости и температуры, что влечет за собой изменение характеристик турбулентного переноса. С другой стороны, термогравитационные силы оказывают непосредственное влияние на движение турбулентных элементов жидкости, усиливая или ослабляя интенсивность турбулентного переноса.

В случае устойчивого распределения плотности вертикальное перемещение турбулентных элементов сопровождается затратой энергии на работу против архимедовых сил, что ведет к затуханию энергии турбулентности, а следовательно, и турбулентного переноса. В случае неустойчивого распределения плотности архимедовы силы совершают работу над вертикальным перемещением турбулентных элементов, что приводит к росту энергии турбулентности. Первый случай наблюдается, например, при подъемном течении, а второй при опускном течении в вертикальной обогреваемой трубе, или соответственно вблизи верхней и нижней образующих горизонтальной обогреваемой трубы.

Термогравитационные силы оказывают влияние, и при том разное, не только на турбулентный перенос импульса, но и тепла, а следовательно, и на турбулентное число Прандтля [5]. Влияние термогравитационных сил на турбулентный перенос не является малым по сравнению с их влиянием на осредненное течение. В зависимости от условий оба эффекта соизмеримы или доминирует один из них.

Задача о турбулентном течении и теплообмене в трубах в поле силы тяжести анализируется в ряде работ. В первых работах, посвященных решению этой задачи [6—8] влияние термогравитационных сил учитывается только на осредненное течение; что же касается характеристик турбулентного переноса, то они принимаются по данным для чисто вынужденной конвекции. Такой подход не позволяет правильно описать (не только количественно, но даже качественно) характер зависимости числа Nu от числа Gr. Так, например, в случае подъемного течения в вертикальной обогреваемой трубе вычисления показывают, что число Nu монотонно растет с увеличением числа Gr при Re=idem; между тем, опытные данные свидетельствуют о том, что число Nu вначале убывает с увеличением числа Gr и лишь затем растет.

В более поздних работах [9—16] влияние подъемных сил на турбулентный перенос учитывается в той или иной форме. Так, например, в работах [9, 10] предпринята попытка учесть влияние термогравитационных сил на турбулентный перенос импульса при течении в вертикальных трубах. Поправки к коэффициенту турбулентного переноса для чисто вынужденной конвекции, учитывающие влияние термогравитации, подбирались на основе опытных данных по теплоотдаче. Последнее обстоятельство не позволило ввести поправки достаточно обоснованно и корректно. Вычисления, проведенные в [9, 10], носят весьма приближенный характер и, по существу, не доведены до численных результатов.

В работах [11—16] дан приближенный анализ турбулентного течения и теплообмена в вертикальных и горизонтальных трубах вдали от входа для двух предельных случаев — слабого и очень сильного влияния термогравитационных сил на вынужденное течение и теплоотдачу. Влияние поля силы тяжести учитывается как на осредненное течение, так и на турбулентный перенос. Для учета последнего эффекта привлекается уравнение баланса турбулентной энергии.

Анализ, проведенный в [11], показывает, что в случае подъемного течения в вертикальных обогреваемых трубах при значениях  $Pr > 0.5$  и небольших числах Gr доминирует влияние подъемных сил на турбулентный перенос. Поэтому влияние

термогравитация на осредненное течение не учитывается. Вследствие уменьшения интенсивности турбулентного переноса в условиях устойчивого распределения плотности, число  $Nu$  уменьшается по мере роста числа  $Gr$ , что находится в качественном согласии с опытными данными.

В случае опускного течения в обогреваемых вертикальных трубах влияние архимедовой силы на турбулентный перенос значительно превосходит ее влияние на осредненное течение. Интенсивность турбулентного переноса в условиях неустойчивой стратификации усиливается и число  $Nu$  монотонно растет с увеличением числа  $Gr$ . Необходимо подчеркнуть, что анализ, проведенный в [11], справедлив лишь при слабом влиянии термогравитации, когда под действием этого эффекта теплоотдача изменяется не более чем на 20%.

В работах А. Ф. Полякова проанализированы предельные случаи, соответствующие очень сильному влиянию поля силы тяжести на вынужденное течение и теплообмен в вертикальных трубах. При подъемном вынужденном течении в обогреваемой трубе или опускном в охлаждаемой развивается предельный режим, который можно назвать режимом «свободной конвекции». Характеристики течения и теплообмена при этом определяются осредненным свободно-конвективным течением (роль вынужденного течения сводится в основном к поддержанию заданного расхода). Теплоотдача в этом случае значительно выше, чем при вынужденном течении без влияния массовых сил (при одних и тех же значениях  $Re$ ); она описывается зависимостью

$$Nu_{с.к} = \frac{Pr^{0.5} \cdot Gr^{0.4}}{1,33 \lg(Re/8) + 3,3(Pr^{0.5} - 0,7)} \quad (3)$$

При опускном течении в обогреваемой трубе (или подъемном в охлаждаемой) развивается предельный режим, который можно назвать режимом «термогравитационного порождения». При этом характеристики течения и теплообмена определяются в основном интенсивным турбулентным переносом, обусловленным генерацией турбулентности за счет работы архимедовых сил. Теплоотдача в этом случае описывается зависимостью

$$Nu_{п} = \frac{0,5 Pr^{0.5} \cdot Gr^{0.4}}{1 + Pr^{0.5}} \quad (4)$$

Из соотношений (3), (4) видно, что в обоих предельных случаях при  $Pr = idem$ ,  $Re = idem$  характер зависимости числа  $Nu$  от числа  $Gr$  один и тот же. В режиме свободной конвекции по сравнению с режимом термогравитационного порождения наблюдается слабая зависимость числа  $Nu$  от числа  $Re$ . Это можно объяснить тем, что во втором случае теплоотдача определяется в основном турбулентным переносом в пристенной области, в то время как в первом случае определенное влияние на теплоотдачу оказывает течение, охватывающее все поперечное сечение потока.

Одним из авторов этой работы совместно с Н. В. Медвецкой рассмотрена задача о турбулентном течении и теплообмене в вертикальных обогреваемых трубах в более общей постановке. Система осредненных уравнений сохранения, записанная в приближении пограничного слоя с учетом термогравитационных сил, решалась численно. Зависимости для коэффициента турбулентного переноса импульса  $\epsilon_0$  и турбулентного числа Прандтля  $Pr_t$  находились из анализа приближенных уравнений баланса энергии турбулентности и интенсивности пульсаций энthalпии, что позволяло учесть влияние термогравитации на турбулентный перенос импульса и тепла. При отсутствии влияния термогравитации ( $Gr \rightarrow 0$ ) зависимости для  $\epsilon_0$  и  $Pr_t$  переходят в известные зависимости.

Результаты вычислений для случаев подъемного и опускного течения воды ( $Pr \approx 5-7$ ) в обогреваемых вертикальных трубах при постоянной плотности теплового потока на стенке представлены на рис. 1 и 2. Данные относятся к области удаленной от входа ( $x/d = 40$  и  $100$ ).

В случае подъемного течения (рис. 1) при малых числах  $Gr_d$  число  $Nu$  не зависит от  $Gr_d$  и находится в хорошем согласии с известными зависимостями для чисто вынужденной конвекции. Дальнейшее увеличение  $Gr_d$  (при неизменном значении  $Re$ ) ведет к уменьшению числа  $Nu$ , что связано с уменьшением турбулентного переноса в условиях устойчивого распределения плотности. При последующем увеличении  $Gr_d$  свыше некоторого значения (тем большего, чем больше  $Re$ ) характер зависимости изменяется — число  $Nu$  растет с увеличением  $Gr_d$  и практически не зависит от  $Re$ . Этот участок кривой соответствует доминирующей роли свободной конвекции в формировании течения. В случае опускного течения (рис. 2) в обогреваемых трубах число  $Nu$  монотонно растет с увеличением числа  $Gr_d$ , что связано главным образом с усилением турбулентного переноса в условиях неустойчивой стратификации. Приведенные на рис. 1 и 2 опытные данные хорошо подтверждают результаты вычислений.

Анализ течения и теплообмена в горизонтальных обогреваемых трубах [12, 13] показывает, что при небольших значениях числа  $Gr$  термогравитационные силы действуют в первую очередь на осредненное течение, стимулируя возникновение вторичных течений в плоскости перпендикулярной оси трубы. Действие термогравита-

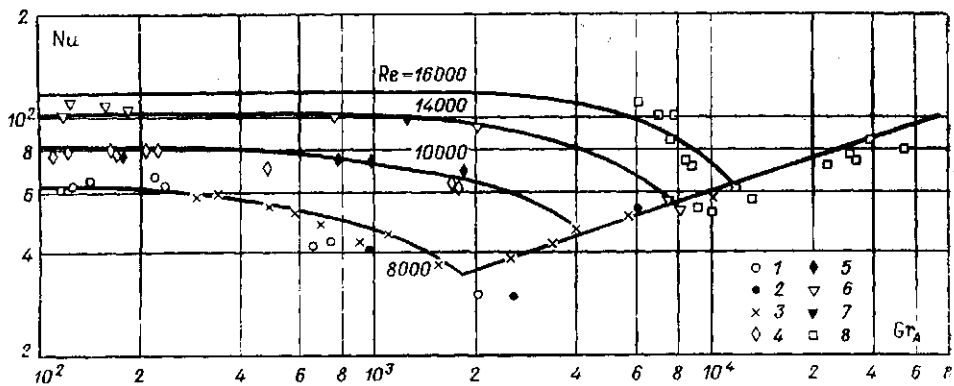


Рис. 1. Результаты теоретического расчета теплоотдачи при подъемном течении воды в вертикальной обогреваемой трубе (кривые) в сопоставлении с опытными данными (точки).  $Re=8 \cdot 10^3$ : 1 — [30]; 2 — [19]; 3 — [34];  $Re=10^4$ : 4 — [30]; 5 — [19];  $Re=1,4 \cdot 10^4$ : 6 — [30]; 7 — [19];  $Re=1,6 \cdot 10^4$ : 8 — [34]

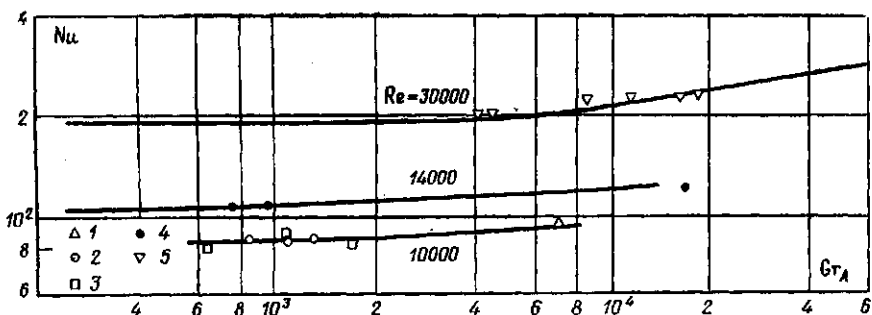


Рис. 2. Результаты теоретического расчета теплоотдачи при опускном течении воды в вертикальной обогреваемой трубе (кривые) в сопоставлении с опытными данными (точки).  $Re=10^4$ : 1 — [39]; 2 — [19]; 3 — [30];  $Re=1,4 \cdot 10^4$ : 4 — [19];  $Re=3 \cdot 10^4$ : 5 — [39]

ционных сил на турбулентный перенос проявляется при несколько более высоких числах Gr. Вторичные течения нарушают осевую симметрию поля скорости и температуры, что ведет к неоднородному распределению теплоотдачи по периметру трубы. С увеличением числа Gr теплоотдача (при нагревании жидкости) вблизи нижней образующей растет, а вблизи верхней — уменьшается.

Приближенный расчет течения и теплообмена при слабом влиянии подъемной силы, проведенный в [11, 13], позволил получить уравнения, описывающие границы начала влияния термогравитационной силы на теплоотдачу. Отклонение числа Nu под действием подъемной силы на 1% от его значения при «чисто» вынужденной конвекции наблюдается при значениях числа Gr, которые можно определить из соотношений:

для вертикальных труб

$$Gr = \frac{1,3 \cdot 10^{-4} Re^{2,75} Pr [Re^{0,125} + 2,4 (Pr^{2/3} - 1)]}{\lg Re + 1,15 \lg (5 Pr + 1) + 0,5 Pr - 1,8} \quad (5)$$

для горизонтальных труб

$$Gr = 3 \cdot 10^{-5} Re^{2,75} Pr^{0,5} [1 + 2,4 Re^{-0,125} (Pr^{2/3} - 1)]. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) справедливы для области вдали от входа, при  $q_c = \text{const}$  и значениях числа  $Pr > 0,5$ . На рис. 3а показаны предельные кривые для вертикальных труб, на рис. 3б — для горизонтальных.

Предельные кривые для вертикальных труб, рассчитанные по уравнению (5), хорошо согласуются с экспериментальными данными [30]. В столь же хорошем согла-

сии с опытными данными [22—24] находятся предельные кривые для горизонтальных труб, рассчитанные по уравнению (6) \*.

Попытки определения границ начала влияния подъемных сил на теплоотдачу были предприняты и в более ранних работах. В работе [21] представлены диаграммы для вертикальных и горизонтальных труб, определяющие границы между вынужденным турбулентным течением и турбулентным течением с влиянием свободной конвекции. Поскольку в [21] указанные границы получены на основании анализа данных по средней (по длине) теплоотдаче, они определяют значительно более позднее

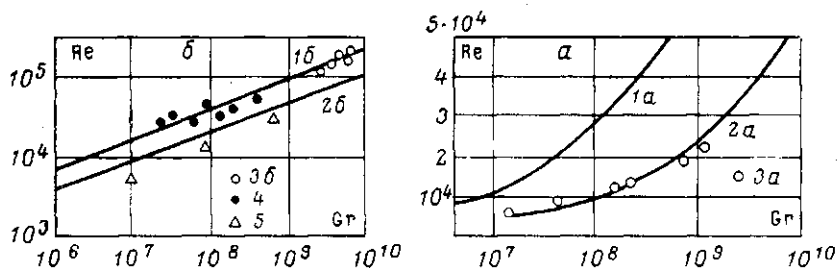


Рис. 3. Границы начала влияния термогравитационных сил на местную теплоотдачу в вертикальных (а) и горизонтальных (б) трубах. Расчет по уравнению (5); 1а — Pr=0,7; 2а — Pr=5; 3а — опытные данные [30]. Расчет по уравнению (6); 1б — Pr=0,7; 2б — Pr=3; 3б — опытные данные [23]; 4 — [22]; 5 — [24]

влияние подъемных сил на теплоотдачу при турбулентном течении, чем зависимости (5) и (6).

Рекомендуя сказанное, следует признать, что для более полного выяснения закономерностей течения и теплообмена в трубах при существенном влиянии термогравитационных сил необходимо располагать экспериментальными данными о структуре течения в рассматриваемых условиях.

#### Экспериментальные данные для вертикальных труб

При движении жидкости в вертикальных трубах в поле силы тяжести подъемное течение при нагревании жидкости и опускное при охлаждении практически эквивалентны; также эквивалентны подъемное течение при охлаждении и опускное при нагревании. В соответствии с имеющимися опытными данными в дальнейшем рассматривается подъемное и опускное течение при нагревании жидкости.

*Подъемное течение при нагревании жидкости.* Как отмечено выше, термогравитационные силы оказывают преобладающее влияние на турбулентный перенос или непосредственно на осредненное течение, или же эти влияния соизмеримы. В соответствии с этим изменяется характер распределений скорости и температуры, а также зависимости для сопротивления трения и теплоотдачи.

На рис. 4 приведены опытные данные по профилям скорости и температуры в универсальных координатах, полученные в работах [25, 28] при течении воздуха в трубе. При относительно небольших значениях числа Gr (или параметра  $E = Gr/Pr \cdot Re^4$ ) опытные данные лежат выше кривых, соответствующих чисто вынужденному течению ( $E \rightarrow 0$ ), что связано с уменьшением турбулентного переноса. По мере увеличения числа Gr и дальнейшего уменьшения турбулентного переноса, профили скорости и температуры постепенно перестраиваются; при этом возрастает влияние термогравитационных сил на осредненное течение. В этих условиях течение характеризуется крупномасштабными пульсациями скорости и температуры. При дальнейшем увеличении числа Gr влияние термогравитационных сил на осредненное течение становится доминирующим и в конечном счете при вынужденном течении развивается режим «свободной конвекции». В профиле скорости при этом наблюдается точка максимума между осью и стенкой и он лежит ниже профиля скорости для чисто вынужденного течения (см. рис. 4а), приближаясь к турбулентному течению вдоль вертикальной поверхности. Можно предположить, что в этом случае распределение температуры также соответствует распределению при свободной турбулентной конвекции, которое совпадает с распределением при чисто вынужденном течении ( $E \rightarrow 0$ ), как это показано на рис. 4б.

\* Точками на рис. 3б обозначены соотношения режимных параметров, при которых комплекс  $(Nu_n - Nu_0)/2Nu_n$  не превышает 5%.

В случае существенного влияния термогравитационных сил непосредственно на осредненное течение с увеличением числа  $Gr$  скорость жидкости вблизи стенки растет, а вблизи оси уменьшается, как это имеет место при вязкостно-гравитационном течении в аналогичных условиях. При некотором значении  $Gr$  на оси трубы возникает минимум скорости, а между осью и стенкой максимум. С ростом числа  $Gr$  максимум скорости приближается к стенке. Такой характер изменения профилей скорости под влиянием термогравитации обнаружен экспериментально в потоках воздуха и ртути [25—28]. В качестве примера на рис. 5 приведены измеренные в работе [27] профили скорости и температуры при подъемном течении ртути в обогреваемой трубе. Аналогичные результаты по профилям скорости при течении воздуха получены в работах [25, 28].

Данных о влиянии термогравитации на турбулентный перенос в вертикальных трубах крайне мало. Систематически этот вопрос не изучался. Некоторые сведения по пульсационным характеристикам при течении воздуха получены в работах [25, 26, 28]. На рис. 6 представлены полученные в [25] результаты экспериментального исследования интенсивности пульсаций осевой компоненты скорости и температуры,

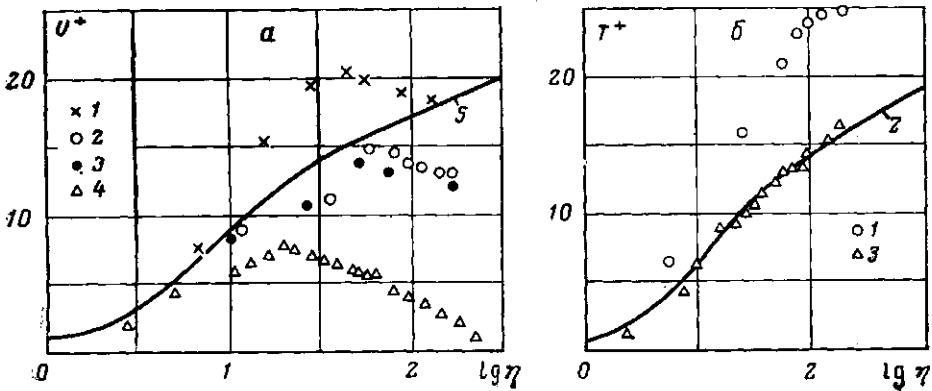


Рис. 4. Распределение скорости (а) и температуры (б) при подъемном течении воздуха. а. Вынужденное течение в трубах при  $Re=5 \cdot 10^3$ : 1 —  $E=5,1 \cdot 10^{-8}$  [25]; 2 —  $E=1,8 \cdot 10^{-7}$  [36]; 3 —  $E=1,8 \cdot 10^{-7}$  [28]; 5 —  $E \rightarrow 0$ ; 4 — свободноконвективное обтекание вертикальной пластины  $Gr_x=2 \cdot 10^{12}$  [29]; б. 1 — вынужденное течение в трубах  $Re=9,8 \cdot 10^3$ ,  $E=1,9 \cdot 10^{-8}$  [28]; 2 —  $E \rightarrow 0$ , 3 — свободноконвективное обтекание вертикальной пластины [29]

а также турбулентных касательных напряжений. Из рисунка видно, что интенсивность пульсаций осевой компоненты скорости (рис. 6а) уменьшается с увеличением  $Gr$  при  $Re=const$ , а интенсивность температурных пульсаций (рис. 6б) сначала уменьшается, а затем увеличивается с одновременным смещением максимума от стенки к оси трубы. Аналогичные результаты по температурным пульсациям получены в работах [26, 28]. Данные [26] свидетельствуют о том, что минимум интенсивности пульсаций температуры соответствует точке минимума на кривой зависимости числа  $Nu$  от числа  $Gr$  при  $Re=const$ . Из рис. 6в видно, что при значении  $Re \approx 5300$  напряжения Рейнольдса уменьшаются с ростом числа  $Gr$  и при значении  $Gr \approx 2,2 \cdot 10^7$  приближаются к нулю по всему сечению трубы.

Коэффициенты турбулентного переноса импульса и тепла, рассчитанные в работе [27] по измеренным профилям скорости и температуры в потоке ртути, зависят как от числа Рейнольдса, так и от числа Грасгофа. Наличие такой зависимости подтверждают и данные по теплоотдаче к ртуть, полученные в той же работе [27] и представленные на рис. 7. При подъемном течении ртути в обогреваемой трубе число  $Nu$  вначале уменьшается с ростом  $Ra_d/Re$ , а затем растет. Уменьшение числа  $Nu$  можно объяснить уменьшением турбулентного переноса под действием термогравитационных сил, а его последующий рост — влиянием поля силы тяжести на осредненное течение (увеличение скорости вблизи стенки). Заметим попутно, что расхождение имеющихся опытных данных по теплоотдаче к жидким металлам, особенно при небольших значениях числа  $Re$ , вероятно, вызвано разной степенью влияния свободной конвекции, что не учитывалось при их анализе.

Влияние термогравитационных сил на теплообмен при подъемном и опускном течении воды и воздуха в обогреваемых трубах (при  $q_c=const$ ) экспериментально исследовалось в работах [19, 28, 30, 32]. Обобщение опытных данных по теплообмену при подъемном течении воды и воздуха в вертикальных обогреваемых трубах представлено на рис. 8. Для области развитого течения и теплообмена ( $x/d > 40$ ) опытные данные во всем диапазоне изменения определяющих параметров от чисто вынужден-

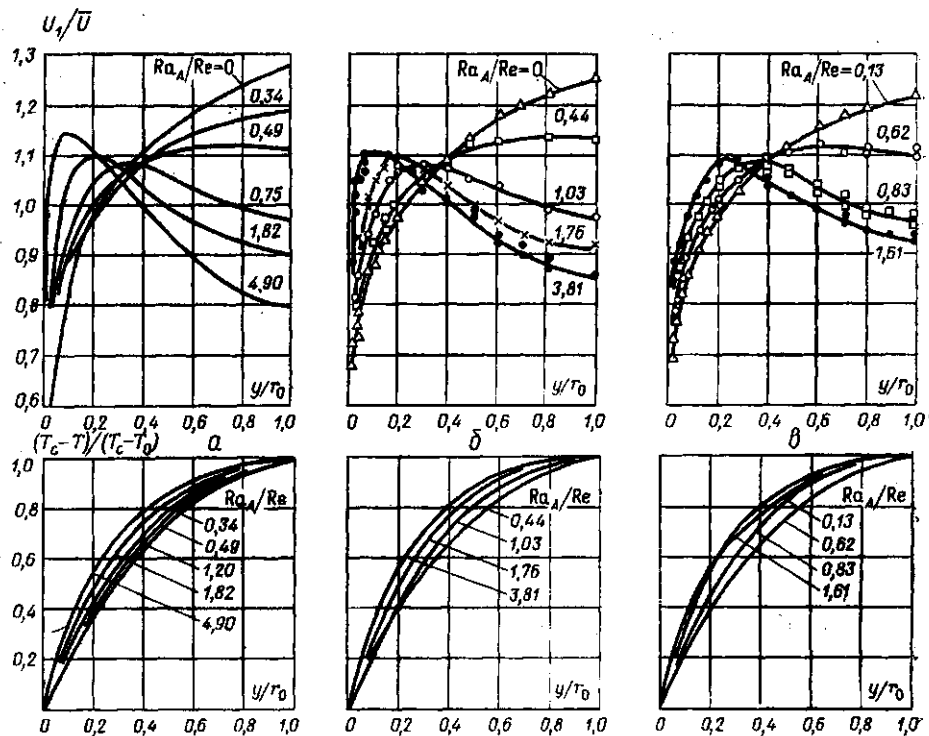


Рис. 5. Профили скорости и температуры при подъемном турбулентном течении ртути в вертикальной трубе [27]; а —  $Ro_A = 2 \cdot 10^4$ , б —  $Re = 3 \cdot 10^4$ , в —  $Re = 6 \cdot 10^4$

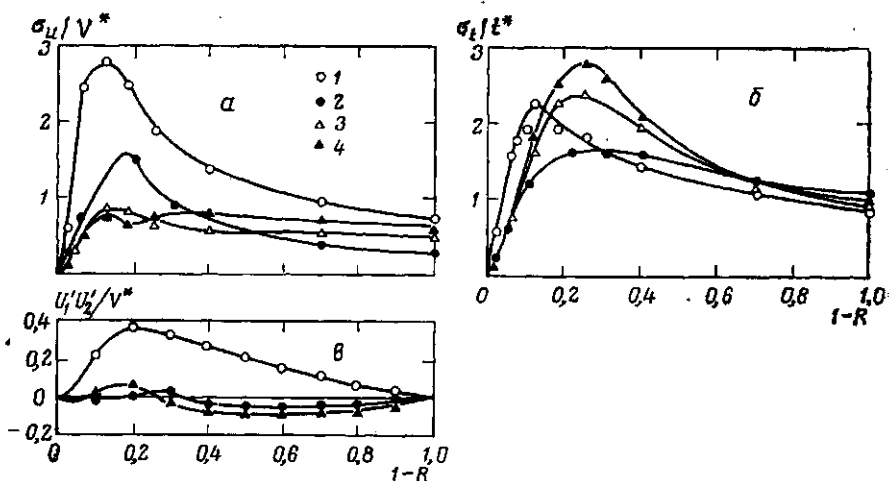


Рис. 6. Распределение характеристик турбулентности по сечению трубы при  $Re \cong 5300$  [25]: а — интенсивность пульсаций осевой компоненты скорости; б — интенсивность пульсаций температуры; в — турбулентные касательные напряжения; 1 —  $Gr = 7 \cdot 10^6$ ; 2 —  $Gr = 1,5 \cdot 10^7$ ; 3 —  $Gr = 1,8 \cdot 10^7$ ; 4 —  $Gr = 2,2 \cdot 10^7$

ного течения (т. е. при отсутствии влияния массовых сил) до режима «свободной конвекции» описываются следующей зависимостью:

$$St = \frac{\xi}{8} \left\{ \frac{1 + 8,3 \cdot 10^5 \cdot e^2}{1 + 4,2 \cdot 10^4 \cdot e^2 / E^{1/4} \lg(Re/8)} + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \left[ Pr^{2/3} \left( 1 + \frac{7,2 \cdot 10^8 \cdot e^3 (1 + 8,8 e^{1/2})}{1 + 4,3 \cdot 10^{11} \cdot e^4} \right) - \frac{1 + 5,8 \cdot 10^5 \cdot e^2}{1 + 8,3 \cdot 10^5 \cdot e^2} \right] \right\}^{-1}, \quad (7)$$

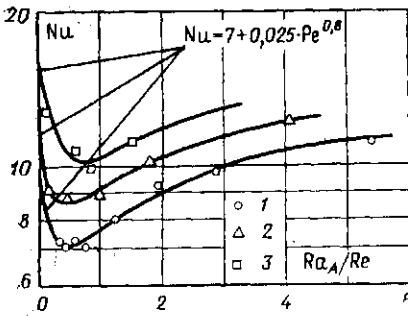


Рис. 7

Рис. 7. Влияние термогравитационных сил на теплоотдачу при турбулентном течении ртути в вертикальной трубе [27]: 1 —  $Re=1,8 \cdot 10^4$ ; 2 —  $Re=3 \cdot 10^4$ ; 3 —  $Re=5,6 \cdot 10^4$

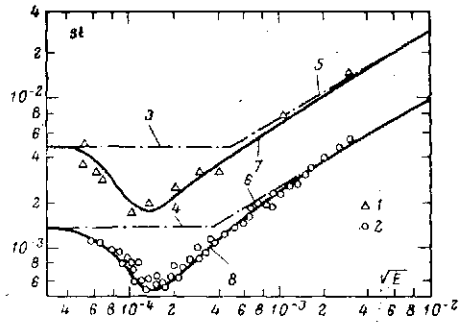


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость числа St от параметра E для  $Re \approx 10^4$ : 1 — опытные данные [28, 36] ( $Pr=0,7$ ); 2 — опытные данные [19] ( $Pr=6$ ); 3, 4 — расчет для течения без влияния массовых сил; 5, 6 — расчет по зависимости (3); 7, 8 — расчет по зависимости (7)

где

$$E = \frac{Gr}{Pr \cdot Re^4}, \quad e = Re^{1,25} \cdot E = \frac{Gr}{Pr \cdot Re^{2,75}}$$

Для коэффициента сопротивления трения в этих условиях получено выражение

$$\xi = \left[ \frac{1 + 8,3 \cdot 10^3 \cdot e^2}{1,82 \lg(Re/8) + 7,6 \cdot 10^4 \cdot e^2 / E^{1/4}} \right]^2 \quad (8)$$

При значениях  $E < 10^{-9}$  зависимость (7) переходит в выражение для расчета числа St при чисто вынужденном течении [17]

$$St = (\xi/8) [1 + 12,7 \sqrt{\xi/8} (Pr^{1/4} - 1)]^{-1}, \quad (9)$$

а выражение (8) — в зависимость [18], описывающую коэффициент сопротивления трения при изотермическом турбулентном течении в трубах

$$\xi = (1,82 \lg(Re/8))^{-2}. \quad (10)$$

При  $E > 10^{-6}$  уравнение (7) преобразуется в соотношение для режима «свободной конвекции» (3).

Зависимости (7), (8) описывают опытные данные, полученные при  $0,6 \leq Pr \leq 8$ ;  $3 \cdot 10^3 \leq Re \leq 5 \cdot 10^4$ ;  $0 \leq Gr \leq 10^{11}$ .

На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что если бы не было влияния подъемных сил на турбулентность, то число St изменялось бы практически по зависимостям, соответствующим пунктирным линиям.

Приведенные выше данные получены при небольших числах Рейнольдса. Конечно, действие термогравитационных сил проявляется тем сильнее, чем меньше Re. Однако, если числа Gr достаточно велики, то влияние поля силы тяжести будет существенным и при больших числах Рейнольдса. Об этом свидетельствуют данные по теплообмену для однофазных теплоносителей при околокритических параметрах состояния. В этом случае числа Gr могут достигать высоких значений вследствие сильной зависимости плотности от температуры вблизи псевдокритической точки. Так, по данным, полученным в работе [33], теплоотдача для двуокиси углерода при околокритических параметрах увеличивается под действием подъемных сил в полтора раза при значении  $Re \approx 2,5 \cdot 10^5$  и в два раза при значении  $Re \approx 10^5$ . При околокритических параметрах состояния существуют специфические режимы течения и теплообмена, для которых характерно резкое уменьшение коэффициентов теплоотдачи (до пяти раз) на некоторых участках трубы. По современным представлениям возникновение таких режимов связано с действием термогравитации и термического ускорения потока.

*Опускное течение при нагревании жидкости.* Как было показано выше, в условиях неустойчивого распределения плотности с ростом числа Gr турбулентный перенос усиливается, что ведет к увеличению заполненности профилей скорости и температуры и соответствующему росту сопротивления и теплоотдачи. Приведенные

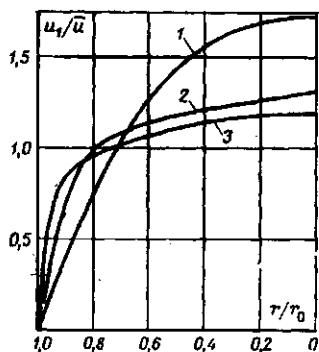


Рис. 9

Рис. 9. Профили скорости при опускном течении воды в обогреваемой трубе [28]: 1 —  $Re=2,65 \cdot 10^3$ ,  $Gr/Re=178$ ; 2 —  $Re=5,78 \cdot 10^3$ ,  $Gr/Re=206$ ; 3 —  $Re=1,68 \cdot 10^4$ ,  $Gr/Re=15\,500$

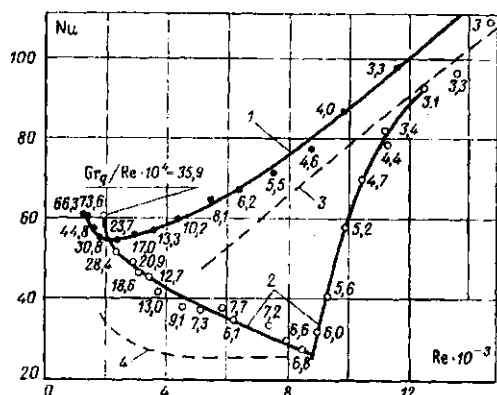


Рис. 10

Рис. 10. Результаты измерения теплоотдачи при подъемном и опускном течении воды в вертикальной обогреваемой трубе [28]: 1 — опускное течение; 2 — подъемное течение; 3 — турбулентное течение без влияния массовых сил; 4 — вязкостно-гравитационное течение

на рис. 3 результаты немногих измерений [36] профилей скорости подтверждают сказанное. Эти данные, полученные вдали от начала обогреваемого участка, не обнаруживают каких-либо немонотонностей в распределении скорости.

В работе [37] методом визуализации было обнаружено опускное течение в пристеночном слое при направлении вынужденного течения горячей воды в охлаждаемой трубе снизу вверх. В той же работе, опираясь на результаты измерения распределения температуры в близлежащих сечениях при опускном течении воздуха в обогреваемых трубах, делается вывод о наличии при определенных условиях обратного подъемного течения в пристеночном слое. Данные о возвратных течениях, полученные в [37], относятся к коротким трубам ( $l_{об}/d=3$ ,  $d=200$  мм). В таких трубах большого диаметра при относительно сильном влиянии термогравитационных сил, по-видимому, возможно развитие вторичных течений, охватывающих весь объем теплообменной части канала. При сравнительно малой высоте теплообменного участка и относительно небольшой скорости вынужденное течение может быть «откато» от стенки противоположно направленными свободноконвективными токами, замыкающимися вне теплообменной части канала. Этому же способствует большая пооднородность поля температуры в начальном участке ( $l_{об}/d < 6$ ). Наличие осредненных вторичных течений, направленных навстречу основному вынужденному потоку в каналах большой длины, вряд ли возможно. Об этом говорят экспериментальные данные, полученные в трубах большой длины как при турбулентном, так и при ламинарном течениях.

На рис. 10 представлены результаты измерений теплоотдачи при подъемном и опускном течении воздуха в обогреваемой трубе [28]. Измерения проведены вдали от входа в обогреваемый участок (при  $x/d > 50$ ). Значения  $Gr/Re$  для каждой экспериментальной точки указаны на рисунке. Обращает внимание существенная разница в характере зависимости числа  $Nu$  от  $Re$  при опускном (верхняя кривая) и подъемном течении (нижняя кривая). Характер зависимости для подъемного течения подтверждает высказанные ранее соображения. В случае опускного течения вследствие термогравитации наблюдается гораздо более интенсивная теплоотдача, а значит и более интенсивный турбулентный перенос не только по сравнению с подъемным течением при наличии гравитации, но и по сравнению с чисто вынужденной турбулентной конвекцией. Интересно также отметить, что интенсивное перемешивание в потоке под действием термогравитации наблюдается уже при значениях  $Re \approx 10^3$ .

На рис. 11 приведены опытные данные по местной теплоотдаче, полученные различными авторами [19, 30, 39] при опускном течении воды ( $Pr=3-7$ ) в вертикальных обогреваемых ( $q_c = \text{const}$ ) трубах, в сопоставлении с результатами расчетов по уравнению, полученному в [16]

$$Nu = Nu_{\tau} \exp(-0,02Gr/Gr_{\text{пр}}) + Nu_{\text{н}}[1 - \exp(-0,04Gr/Gr_{\text{пр}})], \quad (11)$$

где  $Nu_{\tau}$ ,  $\xi$ ,  $Nu_{\text{н}}$  и  $Gr_{\text{пр}}$  рассчитываются по уравнениям (9), (10), (4) и (5).

Уравнение (11) описывает опытные данные, полученные в диапазоне значений  $3 \cdot 10^3 \leq Re \leq 2 \cdot 10^5$ ,  $10^3 \leq Gr \leq 5 \cdot 10^6$ ,  $0,5 \leq Pr \leq 10$ .

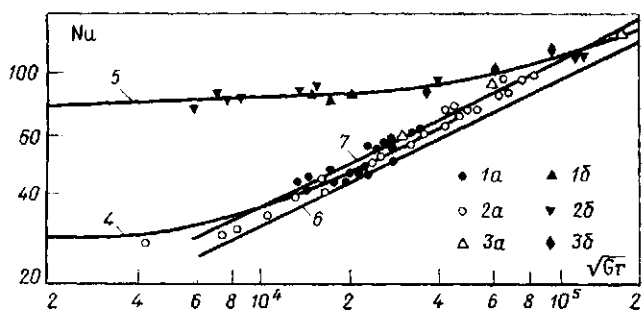


Рис. 11. Зависимость числа Nu от числа Gr при опускном течении воды в вертикальных обогреваемых трубах [16]:

$a - Pr=2-6, Re=(2,2-4,6) \cdot 10^3; b - Pr=5-6,4, Re=(9,4-11,5) \cdot 10^3$

1 — опытные данные [19]; 2 — опытные данные [30]; 3 — опытные данные [39]. Расчет по уравнению (11) для  $Pr=5$ : 4 —  $Re=3 \cdot 10^3$ ; 5 —  $Re=10^4$ . Расчет по уравнению (4): 6 —  $Pr=3$ ; 7 —  $Pr=7$

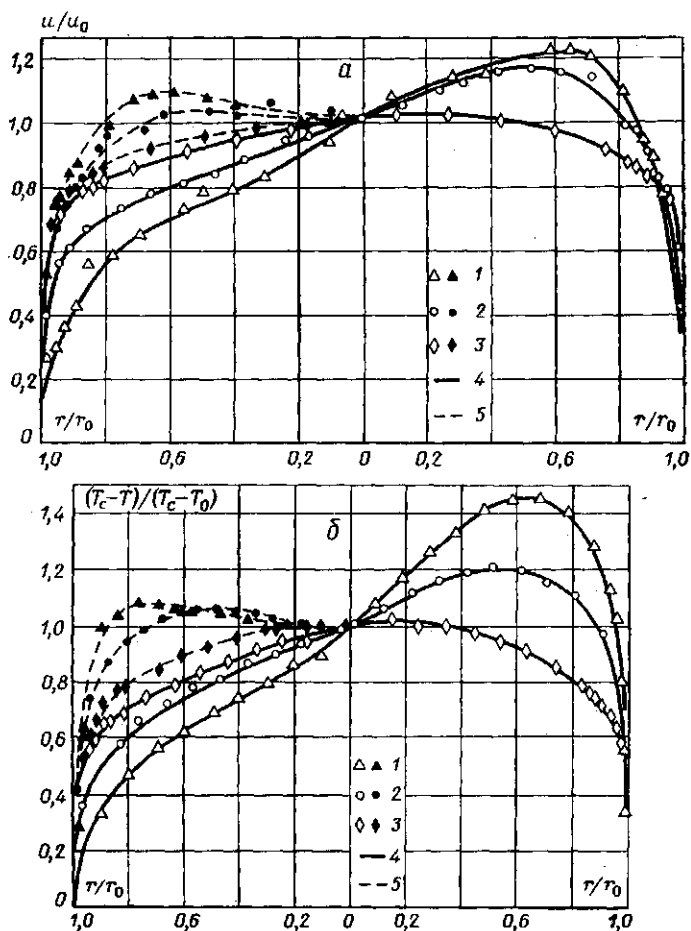


Рис. 12. Профили скорости (а) и температуры (б) в горизонтальной трубе [41]: 1 —  $Re=1,3 \cdot 10^4, Gr=4,2 \cdot 10^8, Gr/Gr_{пр}=100$ ; 2 —  $Re=2,6 \cdot 10^4, Gr=7,7 \cdot 10^8, Gr/Gr_{пр}=24$ ; 3 —  $Re=5,2 \cdot 10^4, Gr=1,03 \cdot 10^9, Gr/Gr_{пр}=5$ ; 4 — измерения в вертикальной диаметральной плоскости; 5 — измерения в горизонтальной диаметральной плоскости

### Экспериментальные данные для горизонтальных труб

Действие термогравитации на осредненное течение в горизонтальных трубах, как уже отмечалось, проявляется в формировании вторичных течений в плоскости, перпендикулярной оси трубы. В результате взаимодействия этих свободно-конвективных течений с вынужденным течением вдоль оси возникает сложное трехмерное течение. О таком характере осредненного течения свидетельствуют результаты исследования структуры турбулентного неизотермического течения воздуха в горизонтальной трубе диаметром 144 мм при  $q_c = \text{const}$ , выполненного в работах [23, 41–45].

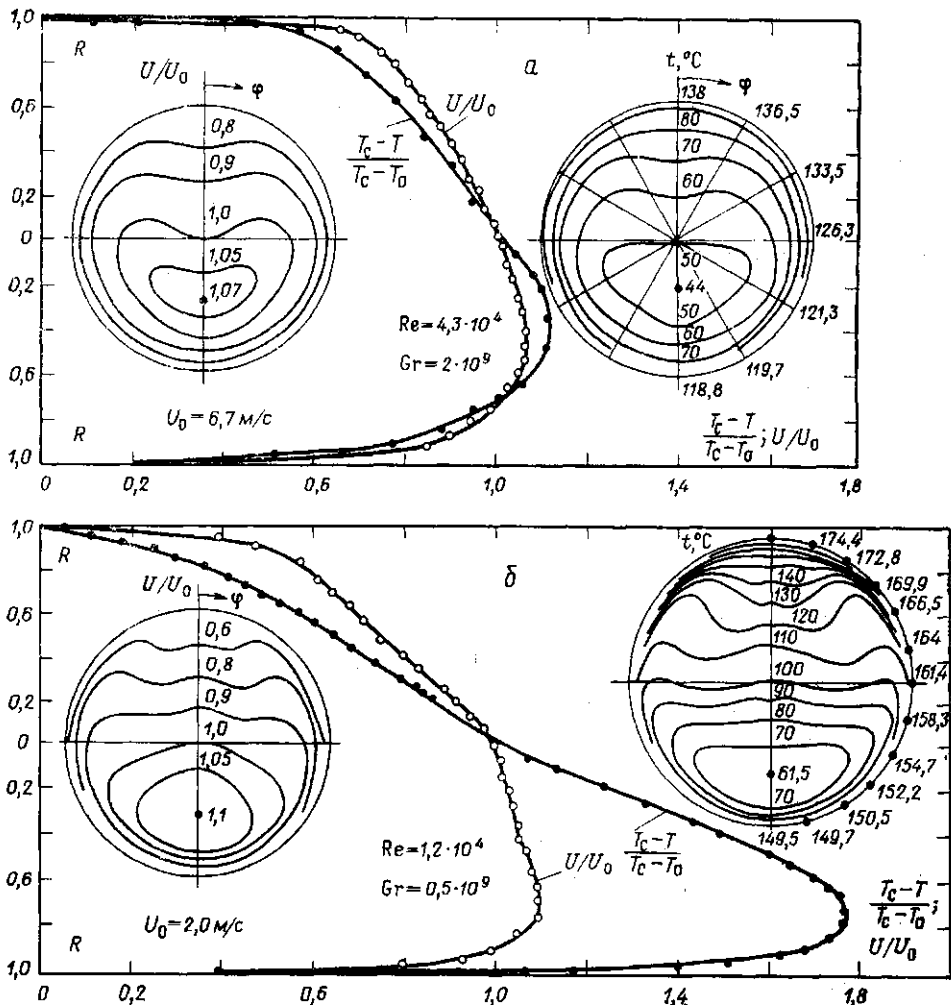


Рис. 13. Профили скорости и температуры в вертикальной диаметальной плоскости, изотермы и изотехи в горизонтальной трубе [45]: а —  $Gr/Gr_{пр} = 12$ ; б —  $Gr/Gr_{пр} = 110$

Результаты измерений профилей скорости и температуры, полученные в работе [41], показаны на рис. 12. Видна существенная асимметрия распределений скорости и температуры в вертикальной диаметальной плоскости. Следует отметить, что деформация профилей наблюдается даже при  $Re \approx 5 \cdot 10^4$ . Это хорошо видно из рис. 13, где представлены изотермы и изотехи в потоке воздуха [45]. Как видно из рисунка, наблюдается весьма сильное нарушение осевой симметрии течения. Поля осевой компоненты скорости и температуры сильно деформированы. Максимумы скорости и минимумы температуры сдвигаются вниз. Отклонения полей скорости и температуры от полей, характерных для чисто вынужденного течения тем значительнее, чем больше число  $Gr$  и меньше  $Re$ . Сказанное также подтверждают данные, полученные в [36].

В работе [23] показано, что масштабом, определяющим степень влияния термогравитационных сил на теплообмен при турбулентном стабилизированном течении

в горизонтальных трубах, является отношение числа  $Gr$ , рассчитанного по параметрам в данном сечении потока, к  $Gr_{пр}$ , определенному по соотношению (6). Как видно из рис. 12, 13, степень деформации полей скорости и температуры тем больше, чем выше значение  $Gr/Gr_{пр}$ . Кроме того, как показали измерения, представленные в [43, 44], структура вторичных течений также зависит от этого параметра. При относительно малом влиянии термогравитации ( $Gr/Gr_{пр} < 30$ ,  $Gr/Re^4 < 8 \cdot 10^{-10}$ ) радиальная компонента скорости в вертикальной диаметральной плоскости направлена вниз вдоль всего диаметра, а тангенциальная компонента в горизонтальной диаметральной плоскости направлена вверх вблизи стенки и вниз в центральной части

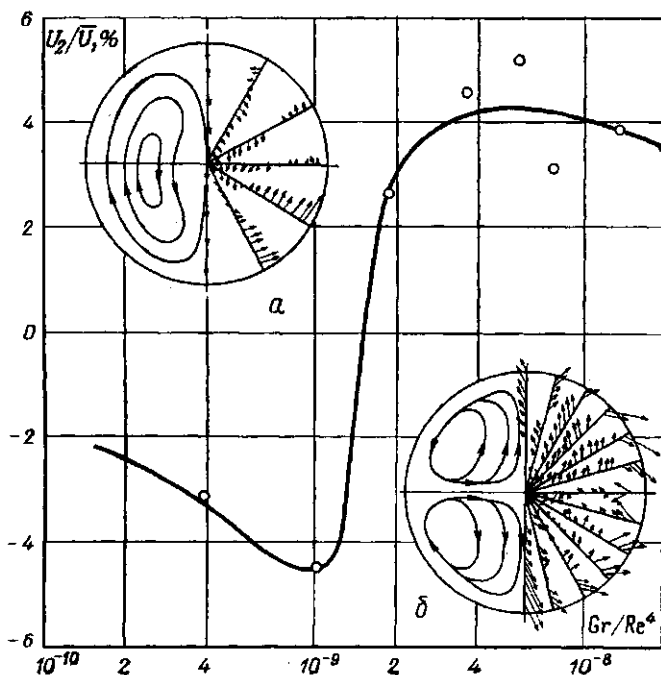


Рис. 14. К определению границы существования различных форм вторичных течений [44]. Вектора скорости и условные схемы вторичных течений:  $a - Re = 4,3 \cdot 10^4$ ,  $Gr/Re^4 = 4 \cdot 10^{-10}$ ,  $b - Re = 1,2 \cdot 10^4$ ,  $Gr/Re^4 = 2 \cdot 10^{-8}$

сечения (рис. 14а). Такой характер компонент вектора скорости соответствует предсказанной в работе [13] двухвихревой структуре вторичных течений, схематически представленной на том же рисунке, аналогичной структуре при вязкостно-гравитационном течении. При сильном влиянии термогравитации ( $Gr/Gr_{пр} > 50$ ,  $Gr/Re^4 > 5 \cdot 10^{-9}$ ), как видно из рис. 14б, радиальная компонента скорости в вертикальной диаметральной плоскости в верхней части трубы направлена вверх, а в нижней, как и в предыдущем случае, — вниз. В тоже время тангенциальная компонента скорости в горизонтальной диаметральной плоскости отсутствует, а радиальная компонента в этой плоскости направлена к центру. Описанное распределение векторов скорости вторичных течений свидетельствует о том, что в каждом квадранте поперечного сечения канала имеются вторичные вихревые токи, попарно симметричные относительно вертикальной диаметральной плоскости. В работе [44] показано, что изменение структуры вторичных течений происходит при  $Gr/Re^4 = (1,5-2) \cdot 10^{-9}$  ( $Gr/Gr_{пр} \approx 35-40$ ).

Действие термогравитационных сил на турбулентность в случае течения в горизонтальных обогреваемых трубах проявляется по-разному в различных областях потока. Вблизи верхней образующей под влиянием гравитации градиенты осредненной скорости снижаются, что ведет к уменьшению генерации энергии пульсационного движения. Кроме того, здесь стратификация плотности устойчива, что также стимулирует уменьшение энергии турбулентности. Поэтому вблизи верхней образующей следует ожидать сильного снижения интенсивности пульсационного движения. Вблизи нижней образующей напротив — градиенты скорости под влиянием гравитации растут, а стратификация плотности неустойчива. Оба эти фактора увеличивают энергию турбулентности, поэтому вблизи нижней образующей интенсивность пульсационного движения должна быть высокой. Представленные на рис. 15

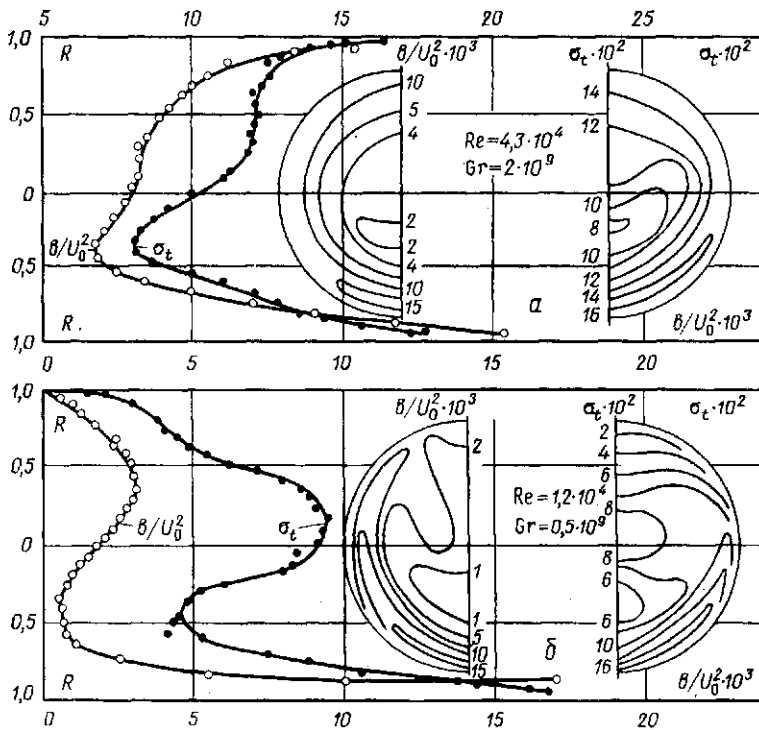


Рис. 15. Профили энергии турбулентности и интенсивности пульсаций температуры в горизонтальной трубе [45]: а —  $Gr/Gr_{пр}=12$ ; б —  $Gr/Gr_{пр}=110$

экспериментальные данные [45] о распределении энергии турбулентности  $b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{(U_i')^2}$  и интенсивности пульсаций температуры  $\sigma_t = \gamma \overline{(T')^2} / (\overline{T_c} - T_{ж})$  в потоке

воздуха при значениях  $Re=1,2 \cdot 10^4$ ,  $Gr/Gr_{пр}=110$  и  $Re=4,3 \cdot 10^4$ ,  $Gr/Gr_{пр}=12$  подтверждают сказанное. Эти характеристики имеют максимальное значение вблизи нижней образующей ( $\varphi=180^\circ$ ,  $R=0,95$ ); с уменьшением угла  $\varphi$  значения  $b$  и  $\sigma_t$  уменьшаются и вблизи верхней образующей ( $\varphi=0$ ,  $R=0,95$ ) составляют  $\sim 1/20$  от значения вблизи нижней (для  $Gr/Gr_{пр} \approx 110$ ).

Рассмотренные выше особенности течения определяют и характер теплообмена. При совместной вынужденной и свободной конвекции в горизонтальных трубах теплоотдача изменяется по периметру трубы тем сильнее, чем больше  $Gr/Gr_{пр}$ . На верхней образующей число  $Nu$  имеет минимальное значение и с увеличением  $Gr/Gr_{пр}$  падает; вблизи нижней образующей число  $Nu$  максимально и с увеличением  $Gr/Gr_{пр}$  растет.

Подробному экспериментальному исследованию местной теплоотдачи по длине и периметру при турбулентной смешанной конвекции в горизонтальной круглой трубе посвящены работы [24, 47–49]. Эксперименты проводились с водой и охватывали область значений  $8,5 \cdot 10^3 \leq Re \leq 4 \cdot 10^4$  и  $5 \cdot 10^7 \leq Ra \leq 1,5 \cdot 10^8$ . Влияние термогравитации на местную теплоотдачу оказалось весьма существенным. При некоторых режимных параметрах число  $Nu$  изменялось по периметру трубы более чем в полтора раза.

В работах [23, 42] представлены результаты аналогичных измерений на воздухе при  $Re=8,5 \cdot 10^3 - 5,2 \cdot 10^4$  и  $Gr/Gr_{пр}=5-270$  в трубе диаметром 144 мм. Здесь получены систематические опытные данные по местной теплоотдаче в различных точках по длине и периметру трубы. На рис. 16а показано изменение теплоотдачи вдоль верхней и нижней образующих трубы по данным [42] для случая относительно слабого влияния термогравитационных сил. Там же приведены результаты расчета [46]. Можно отметить их удовлетворительное согласие с экспериментальными данными.

Как видно из рис. 16а, влияние термогравитационных сил увеличивается по мере удаления от начала обогреваемого участка, что связано с формированием теп-

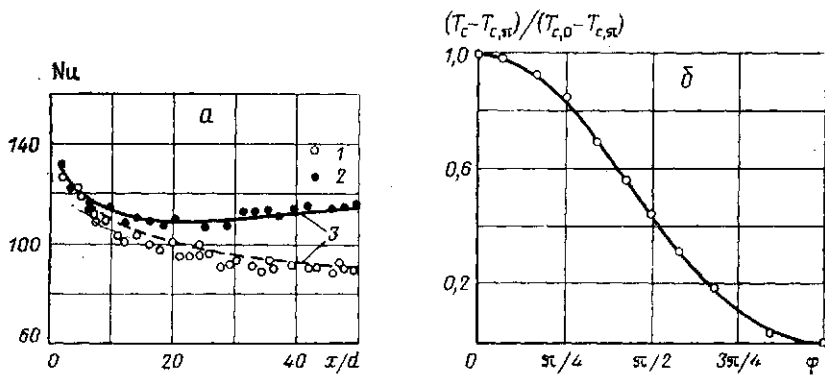


Рис. 16. Распределение числа  $Nu$  по длине (а) и температуры стенки по периметру (б) горизонтальной трубы. Экспериментальные данные [42]: 1 —  $\varphi=0$ ; 2 —  $\varphi=\pi$ ; 3 — расчет [46],  $Re=4,95 \cdot 10^4$ ,  $Gr=1,9 \cdot 10^9$

лового пограничного слоя. Поэтому в начальном тепловом участке влияние термогравитационных сил должно проявляться при значительно больших числах Грасгофа, чем вдали от начала обогрева. Местное число Грасгофа, вычисленное по параметрам в сечении трубы, где выполняется соотношение  $\frac{T_{c0} - T_{c\pi}}{2(T_{c\pi} - T_{ж})} = 0,05$  интер-

претируется как предельное при данном  $x/d$  и описывается зависимостью [23]

$$Gr_{гр} = 5Gr_{гр\infty} [1 + 50 \exp(-0,15x/d)], \quad (12)$$

где  $Gr_{гр\infty}$  определяется уравнением (6).

Измерения распределения температуры стенки по периметру трубы на участке стабилизированного течения и теплообмена (рис. 16б) показали, что относительное изменение температуры стенки следует соотношению [23]

$$\frac{T_c - T_{c\pi}}{T_{c0} - T_{c\pi}} = \cos^k(\varphi/2),$$

где показатель степени  $k$  зависит от параметра  $Gr/Gr_{гр}$ . Как уже отмечалось, число  $Nu$  очень сильно изменяется по периметру трубы. Вместе с тем  $Nu_{\varphi=\pi}$  больше, чем  $Nu_0$ , при турбулентном течении в отсутствие влияния массовых сил, а  $Nu_{\varphi=0}$  существенно меньше.

Полученные экспериментальные данные обобщены эмпирическими уравнениями

$$\cdot Nu_{\pi}/Nu_0 = 1 + 0,035(Gr/Gr_{гр})^{0,43}, \quad (13)$$

$$Nu_{\pi}/Nu_0 = [1 + (Gr/Gr_{гр})^2]^{0,048}, \quad (14)$$

где  $Gr_{гр}$  определяется с помощью соотношения (12). Сравнение зависимостей (13) и (14) с экспериментальными данными представлено на рис. 17 [23], из которого видно, что при больших значениях параметра влияния термогравитации теплоотдача на нижней образующей трубы на 35–40% выше, чем при вынужденном турбулентном течении, в то время как число  $Nu_0$  в 2–2,5 раза меньше, чем  $Nu_{\pi}$ .

Влияние термогравитационных сил на среднюю по периметру теплоотдачу проявляется в меньшей степени, чем на местную и начинает сказываться при существенно больших значениях  $Gr/Gr_{гр}$ , что видно из рис. 17в. Там же показаны результаты расчета [46].

Особенно сильно влияние термогравитационных сил проявляется при движении жидкостей с сильной зависимостью плотности от температуры, например, однофазных жидкостей при околокритических параметрах состояния. Это хорошо показано в опытах с водой [50–53] и двуокисью углерода [54], где отмечалась разница температур между верхней и нижней образующими трубы, достигающая нескольких сотен градусов.

Дальнейший прогресс в изучении турбулентного течения и теплообмена при совместной вынужденной и свободной конвекции требует постановки систематических экспериментальных исследований структуры стратифицированных течений: полей скорости и температуры, турбулентных напряжений, турбулентных плотностей теплового потока и других корреляционных функций. Наряду с исследованиями структуры потока необходимо получение более полных опытных данных по теплообмену и сопротивлению в широком диапазоне чисел  $Gr$ ,  $Re$  и  $Fg$  при различной ориентации системы в поле силы тяжести. Основываясь на экспериментальных дан-

ных и методах, используемых в полуэмпирической теории турбулентности, можно построить достаточно общие методы расчета турбулентных стратифицированных течений и теплообмена в трубах.

**Обозначения:**  $T$  — температура;  $T'$  — пульсации температуры;  $P$  — давление;  $U_i, U_n$  — компоненты вектора скорости;  $\bar{U}$  — средняя по сечению трубы скорость жидкости;  $x_i, x_n$  — декартовы координаты;  $\rho$  — плотность;  $c_p$  — удельная теплоемкость;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $a$  — коэффициент температуропроводности;  $\mu, \nu$  — динамический и кинематический коэффициенты вязкости;  $\beta$  — термический коэффициент объемного расширения;  $g, g_i$  — модуль вектора силы тяжести и

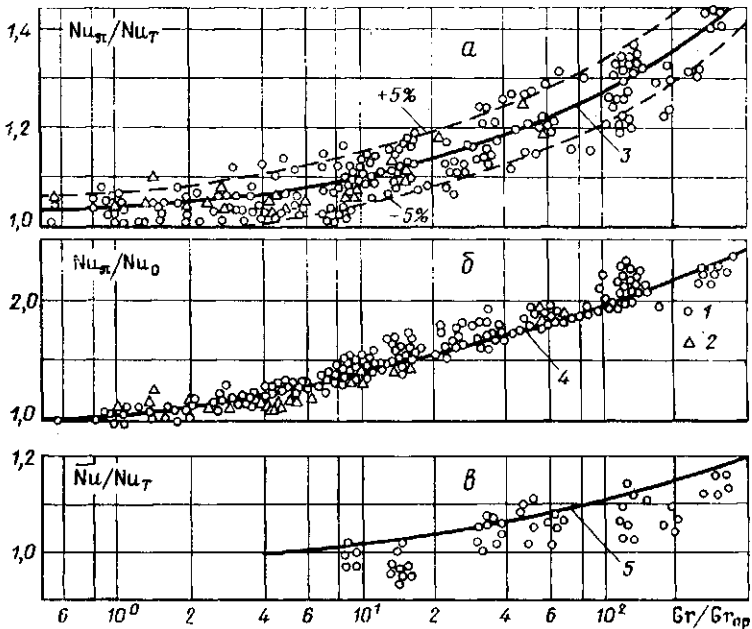


Рис. 17. Результаты измерения теплоотдачи в горизонтальной трубе [23]: 1 —  $Pr=0,7$ ; 2 —  $Pr=3$ . а — Отношение числа  $Nu$  при  $\varphi=\pi$  к числу  $Nu_T$  при турбулентном течении без влияния массовых сил, 3 — расчет по уравнению (13); б — отношение чисел  $Nu$  на нижней и верхней образующих трубы, 4 — расчет по уравнению (14); в — среднее по периметру число  $Nu$ , 5 — расчет, проведенный в [46]

его компоненты;  $d$  — диаметр трубы ( $d=2r_0$ );  $R=r/r_0$  — безразмерный радиус;  $y$  — расстояние от стенки;  $\varphi$  — угол, отсчитываемый от верхней образующей трубы;  $q_c$  — плотность теплового потока на стенке;  $\alpha=q_c/(T_c-T_{ж})$  — коэффициент теплоотдачи;  $A=dT_{ж}/dx_1$  — продольный градиент температуры;  $Nu=\alpha \cdot d/\lambda_{ж}$  — число Нуссельта;  $Pr=\nu/a$  — число Прандтля;  $Gr = \frac{g\beta_{ж}q_c d^3}{\nu_{ж}^2 \lambda_{ж}}$ ;  $Gr_A = \frac{g\beta_{ж} d^3 A}{\nu_{ж}^2}$ ;  $Gr_{\Delta t} = \frac{g\beta_{ж}(T_c - T_{ж}) d^3}{\nu_{ж}^2}$  —

числа Грасгофа;  $Re=\bar{U} \cdot d/a = Re \cdot Pr$  — число Пекле;  $St=Nu/Pe$  — число Стантона;  $\xi$  — коэффициент сопротивления трения;  $U^+=U_1/\nu^*$  — безразмерная скорость;  $T^+= (T_c - T)/(q_c/\rho c_p \nu^*)$  — безразмерная температура;  $\eta=\nu^* \cdot y/\nu$  — безразмерная координата;  $\nu^* = \sqrt{\xi/8}$  — динамическая скорость.

Индексы: 0 — относится к оси трубы или к верхней образующей трубы; с — относится к стенке; т — относится к турбулентному течению без влияния массовых сил; ж — относится к среднemasсовой температуре жидкости; л — относится к нижней образующей трубы; пр — предельное значение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Петухов. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. «Энергия», 1967.
2. А. Е. Бергелес, С. М. Моркос. Теплопередача, № 2, 1975.
3. А. Ф. Поляков. ПМТФ, № 1, 1977.
4. В. S. Petukhov. Proc. of the Intern. Sem. Turbulent Buoyant Convection. Dubrovnik, 1976.
5. А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика, ч. 1. «Наука», 1965.
6. Л. Э. Бэр. Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 1957.
7. Л. Э. Бэр. Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1962.
8. Ожлаво, Ананд, Данбар. Теплопередача, № 4, 1967.
9. Л. Э. Бэр. ПМТФ, № 4, 1967.
10. Л. Э. Бэр. Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, 1974.
11. А. Ф. Поляков. ТВТ, 11, № 1, 1973.
12. А. Ф. Поляков. В сб. Теплообмен и физическая газодинамика. «Наука», 1974.
13. А. Ф. Поляков. ПМТФ, № 5, 1974.
14. А. Ф. Поляков. ТВТ, 15, № 4, 1977.
15. А. Ф. Поляков. ТВТ, 13, № 6, 1975.
16. А. Ф. Поляков. ПМТФ, № 5, 1977.
17. Б. С. Петухов, Л. Г. Генин, С. А. Ковалев. Теплообмен в ядерных энергетических установках. Атомиздат, 1974.
18. Г. К. Филоменко. Теплоэнергетика, № 4, 1954.
19. A. R. Saraby. Thèse de docteur - ingénieur. L'Université de Paris, 1971.
20. A. Watzinger, D. B. Johnson. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 10, № 4, 1939.
21. Мейзэ, Эккерт. Теплопередача, № 2, 1964.
22. Аллен, Эккерт. Теплопередача, № 3, 1964.
23. В. S. Petukhov, A. F. Polyakov, Yu. L. Shekhter, V. A. Kuleshov. Proc. of the Intern. Sem. Turbulent Buoyant Convection. Dubrovnik, 1976.
24. Б. С. Петухов, А. Ф. Поляков. ТВТ, 5, № 2, 1967.
25. Карр, Коннор, Бур. Теплопередача, № 4, 1973.
26. J. E. Burne, E. Eliogu. Heat and Mass Transf. by Combined Forced and Natural Convection, C111/71. London, 1971.
27. Бур, Хорстин, Карр. Теплопередача, № 2, 1974.
28. A. Steiner. Thèse de docteur - ingénieur. L'Université de Paris, 1970.
29. J. Coutanceau. Intern. J. Heat Mass Transf., 12, 753, 1969.
30. Б. С. Петухов, Б. К. Стругин. ТВТ, 6, № 5, 1968.
31. J. E. Sheele, T. J. Hanratty. AIChE. J., 19, № 12, 1963.
32. Б. С. Петухов, А. Ф. Поляков, Б. К. Стругин. В сб. Тепло- и массоперенос, 1. «Энергия», 1968.
33. Н. П. Икрянников, Б. С. Петухов, В. С. Протопопов. ТВТ, 10, № 1, 1972.
34. D. B. R. Kenning, R. A. Shock, J. Y. M. Poou. Proc. 5th Intern. Heat Transf. Conf. Paper NC-4-3. Tokyo, 1974.
35. L. S. Herbert, U. J. Sterns. Chem. Engin. J., 4, № 1, 1972.
36. A. Mreiden. Thèse de docteur - ingénieur, L'Université de Paris, 1969.
37. J. Khosla, T. W. Hoffman, K. G. Pollock. Proc. of the 5th Intern. Heat Transf. Conf., Paper NC-4-4, Tokyo, 1974.
38. W. B. Hall, P. H. Price. Heat and Mass Transfer by Combined Forced and Natural Convection. London, C113/71, 1971.
39. J. D. Jackson, J. Fewster. Proc. of the Intern. Sem. Turbulent Buoyant Convection. Dubrovnik, 1976.
40. E. Ktrschbaum. Neues uber der Warmeaustausch, 28, № 1, 1951.
41. В. А. Кулешов, А. Ф. Поляков, Ю. Л. Шехтер. ИФЖ, 27, № 5, 1974.
42. Б. С. Петухов, А. Ф. Поляков, В. А. Кулешов, Ю. Л. Шехтер В сб. Теплообмен-1974, Советские исследования. «Наука», 1974. В. S. Petukhov, A. F. Polyakov, V. A. Kuleshov, Yu. L. Shekhter. Proc. of the 5th Intern. Heat Transf. Conf., Paper NC-4-8. Tokyo, 1974.
43. Б. С. Петухов, А. Ф. Поляков, В. В. Троицкий, Ю. Л. Шехтер. Препринт № 2-008, ИВТАН, 1977.
44. Б. С. Петухов, А. Ф. Поляков, В. В. Троицкий, Ю. Л. Шехтер. ДАН СССР, 236, № 4, 1977.
45. В. S. Petukhov, A. F. Polyakov, V. V. Troitsky, Yu. L. Shekhter. Proc. of the 6th Intern. Heat Transf. Conf., Toronto, 1978.
46. D. S. Skladaressis, D. B. Spolding. Letters Heat Mass Transf., 4, № 1, 1977.
47. В. S. Petukhov, A. F. Polyakov. Proc. of the 4th Intern. Heat Transf. Conf., Paper NC-3-7. Paris, 1970.
48. Б. С. Петухов, А. Ф. Поляков. Докл. научно-техн. конф. МЭИ. Изд. МЭИ, 1967.
49. A. F. Polyakov. Heat and Mass Transf. in Turbulent Boundary layers. Intern. Summer School. 2. Beograd, 1970.
50. Ю. В. Визрев, В. А. Локшин. Теплоэнергетика, № 12, 1964.
51. М. Е. Шницман. Теплоэнергетика, № 7, 1966.
52. А. В. Жуковский, Л. Ю. Красякова, И. Н. Беляков, Н. Д. Фефелова. Энергомашиностроение, № 2, 1971.
53. В. М. Соломонов, В. А. Локшин. Теплоэнергетика, № 7, 1975.
54. G. A. Adebisi, W. B. Hall. Intern. J. Heat Mass. Transf., 19, 115, 1976.