

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Наумова, Ю. Д. Шмыглевский, О линиях тока одного винтового течения, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1985, том 25, номер 2, 312–313

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

15 марта 2025 г., 06:40:59



О ЛИНИЯХ ТОКА ОДНОГО ВИНТОВОГО ТЕЧЕНИЯ

НАУМОВА И. Н., ШМЫГЛЕВСКИЙ Ю. Д.

(Москва)

Приводятся неожиданно сложные картины поведения линий тока одного винтового течения.

Винтовые течения [1]–[3] несжимаемой жидкости подчиняются уравнениям

$$\operatorname{rot} V = \lambda V, \quad p = c - V^2/2,$$

где V – вектор скорости, λ – постоянное число, p – давление, деленное на плотность, c – произвольная постоянная.

Вычисление rot от обеих частей первого уравнения с учетом векторных тождеств приводит к уравнению Гельмгольца $\Delta V + \lambda^2 V = 0$. Разделение переменных в этом уравнении определяет собственные значения λ и собственные периодические по всем декартовым координатам x, y, z функции. Их подстановка в первое уравнение сохраняет собственные значения и несколько суживает класс функций. Этот известный путь приводит к бесчисленному набору винтовых течений в неограниченном пространстве. Из простоты этих решений не вытекает простота поведения их линий тока, но общая теория развивалась до появления ЭВМ, а для построения линий тока ЭВМ необходимы.

Один из примеров винтовых течений при $\lambda = -\sqrt{3}$ дают равенства

$$\begin{aligned} u &= -2 \sin x \cos y \cos z, & v &= \cos x \sin y \cos z - \sqrt{3} \sin x \cos y \sin z, \\ w &= \cos x \cos y \sin z + \sqrt{3} \sin x \sin y \cos z, \end{aligned}$$

где u, v, w – составляющие V по осям x, y, z . Этот пример удобен для рассмотрения, поскольку плоскости $x = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$, являются поверхностями тока и течение можно рассматривать в слое толщины π .

Уравнения линий тока имеют вид

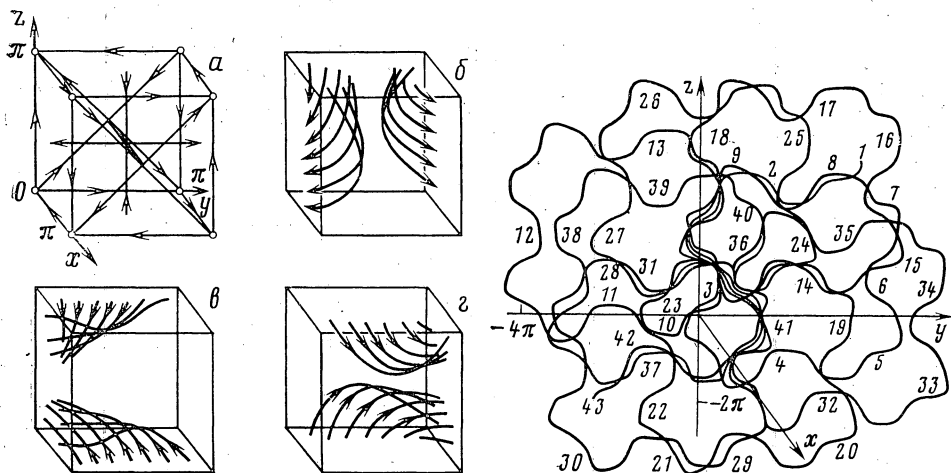
$$dx/dl = u/|V|, \quad dy/dl = v/|V|, \quad dz/dl = w/|V|,$$

где l – длина дуги линий тока.

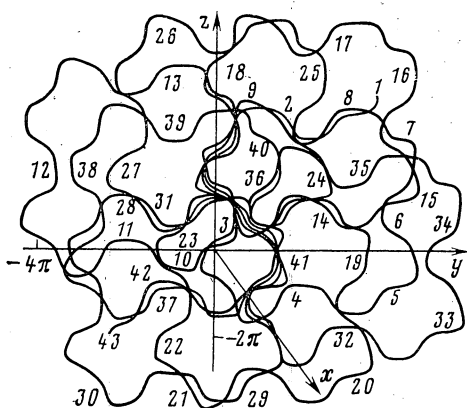
Некоторое представление о картине течения дают фиг. 1–3. На фиг. 1 изображены примеры семейств линий тока в кубе с длиной ребра π . На фиг. 1, *a* показаны прямые линии тока. Стрелками указаны направления движения. Точки и жирная линия отвечают нулевой скорости. Ребра куба при $y=0$ и $y=\pi$, а также при $z=0$ и $z=\pi$ являются замкнутыми линиями тока с точками торможения. В плоскостях $x = \pi/2 + k\pi$ прямые $y = \pi/2 + m\pi$ и $z = \pi/2 + n\pi$, где k, m, n – целые числа, образуют квадратную сетку, а стороны каждого составляющего ее квадрата минимального размера также являются замкнутыми линиями тока. На фиг. 1, *b* изображены линии тока, выходящие из точек плоскости $z=0$ и приходящие на плоскости $y=0$ и $y=\pi$. На фиг. 1, *в, г* линии тока выходят из плоскостей $z=0$ и $z=\pi$ и приходят в первом случае на плоскость $y=0$, а во втором – на плоскость $y=\pi$. Сквозь плоскости $x=0$ и $x=\pi$ протекания нет.

На фиг. 2 показаны части некоторых линий тока в области $0 < x < \pi, -6\pi < y < 7\pi, -6\pi < z < 2\pi$. Во избежание усложнения картины линии изображены следующим образом. Линии с условными номерами 1–4 на фиг. 2, *a* проходят через точки плоскости $z=\pi$ с координатами (x, y) , соответственно равными $(3\pi/4, \pi/2), (\pi/4, \pi/2), (\pi/2, \pi/4), (\pi/2, 3\pi/4)$, и обрываются при выходе за пределы указанного параллелепипеда, хотя они могут и вернуться в его пределы. Линии 5–8 на фиг. 2, *b* проходят через точки плоскости $z=\pi$ с координатами (x, y) , равными $(3\pi/4, \pi/4), (\pi/4, 3\pi/4), (3\pi/4, 3\pi/4), (\pi/4, \pi/4)$, и также обрываются при выходе за пределы параллелепипеда. Все выбранные линии проходят через квадрат $0 < x < \pi, 0 < y < \pi, z=\pi$.

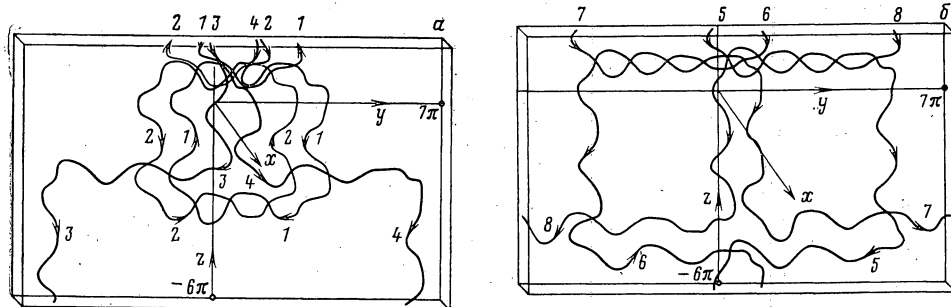
Отрезок линии тока, проходящей через точку с координатами $x=3\pi/4, y=\pi/2, z=\pi$, в той же проекции, что и на фиг. 2, *a*, изображен на фиг. 3 и имеет длину 600, значительно превышающую длину отрезка той же линии 1 на фиг. 2, *a*. Линия



Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

тока на фиг. 3 оборвана на длинах 300 и -300 от указанной точки. Вдоль линии проставлены числа от 1 до 43, возрастающие в направлении скорости и позволяющие проследить ход этой линии. При выбранной длине эта линия тока проходит через квадрат $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, $z = \pi$ девять раз.

Разнообразие линий тока объясняется следующим образом. Прямые $y = \pi/2 + m\pi$, $z = \pi/2 + n\pi$ отвечают $V=0$ и для линий тока являются геометрическими местами плоских седловых точек. Две сколь угодно близкие линии тока при подходе к такой прямой могут резко разойтись в разные стороны. Точки $x = k\pi$, $y = m\pi$, $z = n\pi$ являются пространственными седловыми.

Проиллюстрированное здесь наблюдение может представить интерес в связи с растущим вниманием к упорядоченным течениям сложной микроструктуры.

Для уравнений гидродинамики в эйлеровых переменных какая-либо краевая задача, которую можно сформулировать на основе рассмотренного решения, в объеме, содержащем несколько периодов по y и z , легко разрешима при использовании конечноразностных методов. Этого нельзя сказать о случае использования лагранжевых переменных, поскольку на линиях тока две из них сохраняются.

Литература

1. Громека И. С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. — В кн.: Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952, с. 76–148.
2. Неменьи П. Ф. Современное развитие обратных и полубратных методов в механике сплошной среды. — В кн.: Пробл. механ. М.: Изд-во иностр. лит., 1955, с. 234–257.
3. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.: Госэнергоиздат, 1958.

Поступила в редакцию 24.XI.1983