УДК 512.732+512.72

ЭЛЕМЕНТЫ СУПЕРГЕОМЕТРИИ

А. А. Воронов, Ю. И. Манин, И. Б. Пенков

Эта статья посвящена некоторым вопросам супергеометрии, которые еще не вошли в стандартные учебники (см., например, [1], [3], [5]) или недостаточно подробно там изложены. Некоторые из этих вопросов мы излагаем с доказательствами, для других ограничиваемся ссылками. Основные темы: двойственность Серра на супермногообразиях, структурная теория супермногообразий и расслоений на них, обратимые пучки, характеристические классы и теорема Гротендика—Римана—Роха для супермногообразий.

Мы глубоко признательны И. А. Скорнякову за разрешение изложить его исследование 1|1-мерных расслоений (добавление к § 4). Изложение в § 3 также основано на его записях. Мы выражаем благодарность А. Ю. Вайнтробу за полезные замечания.

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОГЛАШЕНИЯ

Используемые обозначения в основном совпадают с обозначениями гл. 3, 4 книги [5]. При этом четность однородного элемента a $\mathbf{Z}_2$-градуированной абелевой группы $A_0 \oplus A_1$ мы будем обозначать через $\bar{a} \in \mathbf{Z}_2$ (а не через $\tilde{a} \in \mathbf{Z}_2$, как в [5]).

В отличие от [5] для модулей M, N над суперкольцом, у нас через $\mathrm{Hom}(M, N)$ обозначена группа четных гомоморфизмов, то есть сохраняющих $\mathbf{Z}_2$-градуировку, и через $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$ обозначен внутренний Hom, то есть ($\mathbf{Z}_2$-градуированный) модуль всех гомоморфизмов.

Пусть $X = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_X)$ — *суперпространство*, то есть локально окольцованное пространство, такое что структурный пучок $\mathcal{O}_X$ является пучком суперкоммутативных колец. Для идеала $\mathcal{N}_X := (\mathcal{O}_X)_1^2 \oplus (\mathcal{O}_X)_1$ в $\mathcal{O}_X$ положим $\mathrm{gr}_i \mathcal{O}_X := \mathcal{N}_X^i / \mathcal{N}_X^{i+1}$, $\mathrm{gr}\, X := (\mathfrak{X}, \mathrm{gr}\, \mathcal{O}_X := \bigoplus_i \mathrm{gr}_i \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{O}_{\mathrm{red}} := \mathrm{gr}_0 \mathcal{O}_X$, $X_{\mathrm{red}} := (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{red}})$, $N_X^* := \mathrm{gr}_1 \mathcal{O}_X$ — *конормальный пучок естественного вложения* $X_{\mathrm{red}} \to X$. Мы называем X *расщепимым*, если существует изоморфизм суперпространств $X \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\, X$.

Мы работаем в одной из трех геометрических категорий: 1) категория гладких супермногообразий, 2) категория аналитических суперпространств, 3) категория суперсхем. В послед-

них двух случаях нас будут интересовать также суперпространства с условиями гладкости локальных колец — аналитические и алгебраические супермногообразия.

§ 2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ СЕРРА

1. Относительный березиниан (дуализирующий пучок). Пусть $f: X \to \mathcal{M}$ — собственный (на подложках) гладкий морфизм комплексных суперпространств или суперсхем конечного типа над $\mathbf{C}$ относительной размерности $M|N$. Определим *березиниан* Ber_f *морфизма* f равенством

$$\mathrm{Ber}_f := \mathrm{Ber}\, \Omega^1_{X/\mathcal{M},ev},$$

где $\Omega^1_{X/\mathcal{M},ev}$ — пучок относительных четных дифференциалов, Ber в правой части — простое обобщение понятия березиниана свободного модуля (супераналога максимальной внешней степени) на случай локально свободного пучка.

2. Теоремы двойственности. Естественно предположить, что в ситуации пункта 1 Ber_f является *дуализирующим пучком* в смысле Гротендика. Это значит, что для любого ограниченного комплекса $\mathcal{O}_X$-модулей $\mathcal{F}^\cdot$ с когерентными когомологиями, рассматриваемого как объект производной категории $D^b_X(Coh)$ ограниченных комплексов $\mathcal{O}_X$-модулей с когерентными когомологиями, имеет место канонический изоморфизм в $D^b_{\mathcal{M}}(Coh)$

$$\theta^{\mathcal{F}}_f : \mathrm{R}f_* \mathrm{R}\underline{Hom}_X(\mathcal{F}^\cdot, \mathrm{Ber}_f[-M]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\underline{Hom}_{\mathcal{M}}(\mathrm{R}f_*\mathcal{F}^\cdot, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}), \qquad (1)$$

где $\mathrm{Ber}_f[-M]$ — комплекс, у которого M-ый член есть пучок Ber_f, а остальные члены равны нулю.

По-видимому, это утверждение можно доказать, следуя в целом доказательству в обычном случае. Как сообщил нам А. Ю. Вайнтроб (см. также его статью [2] в настоящем сборнике), существование *дуализирующего комплекса* $K^\cdot$, т. е. объекта $K^\cdot$ категории $D^b_X(Coh)$, такого, что (1) выполнено, если вместо $\mathrm{Ber}_f[-M]$ подставить $K^\cdot$, нетрудно доказать даже для любого собственного (на подложках) морфизма комплексных суперпространств или суперсхем. Единственность $K^\cdot$ проверяется стандартно. Таким образом, остается только показать, что для гладкого f $K^\cdot \simeq \mathrm{Ber}_f[-M]$. Тем не менее, на данный момент в литературе рассмотрены лишь некоторые специальные случаи. Первый важный специальный случай — когда $\mathcal{M}$ — точка, а $\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль. По поводу этого случая см. [15], где доказано более общее утверждение, касающееся также несобственных аналитических супермногообразий. В статье [8] настоящего сборника будет использоваться также другой частный случай двойственности, когда $\mathcal{M}$ произвольно, а морфизм f гладок и проективен.

Последнее означает, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & P_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) \arrow[d] \\ & \mathcal{M} \end{tikzcd},$$

в которой $P_{\mathcal{M}}(\mathcal{E}) \to \mathcal{M}$ — проективизация локально свободного $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модуля $\mathcal{E}$ и j — замкнутое вложение. В такой ситуации методы [13] допускают прямое суперобобщение, что приводит к теореме двойственности (см. [6]). Подытожим в следующем предложении те факты, которые будут использоваться в настоящем сборнике.

3. Предложение. Пусть $f: X \to \mathcal{M}$ — собственный морфизм комплексных суперпространств или суперсхем конечного типа над $\mathbf{C}$. Тогда

а) дуализирующий комплекс $K^{\cdot}$ существует;

б) если $\mathcal{M} = \operatorname{Spec} \mathbf{C}$, f гладок относительной размерности $M|N$ (т. е. X — аналитическое или алгебраическое супермногообразие размерности $M|N$), и $\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль, то дуализирующий комплекс из пункта а) совпадает с $\operatorname{Ber}_f[-M]$. В частности, имеет место канонический изоморфизм $\mathbf{Z}_2$-градуированных векторных пространств над $\mathbf{C}$

$$\underline{\operatorname{Ext}}_X^{M-i}(\mathcal{F}, \operatorname{Ber}_f = \operatorname{Ber}_X) = H^i(\mathcal{F})^*$$

для всех $i \in \mathbf{Z}_+$.

в) Если f гладок и проективен и $\mathcal{F}$ — когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль, то дуализирующий комплекс из а) совпадает с $\operatorname{Ber}_f[-M]$. В частности, например, если $\mathcal{F}$ и все $R^k f_* \mathcal{F}$, $k \in \mathbf{Z}_+$, локально свободны, то имеет место канонический изоморфизм $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$-модулей

$$R^{M-i} f_* (\mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \operatorname{Ber}_f) \simeq (R^i f_* \mathcal{F})^*$$

для всех $i \in \mathbf{Z}_+$. □

§ 3. СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ И ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫХ $\mathcal{O}$-МОДУЛЕЙ (КОМПОНЕНТНЫЙ АНАЛИЗ)

1. Компонентный анализ супермногообразий. Пусть $\mathfrak{X}$ — многообразие и E — локально свободный $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-модуль ранга $0|N$, $N \in \mathbf{Z}_+$. Каждой такой паре $(\mathfrak{X}, E)$ поставим в соответствие супермногообразие $X^0 := (\mathfrak{X}, S^{\cdot}(E))$. Очевидно, $X^0_{\mathrm{red}} = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, $N^*_{X^0} = E$ и $\operatorname{gr} X^0 = X^0$. Естественно возникает вопрос: сколько существует супермногообразий X, таких что $\operatorname{gr} X = X^0$? По существу это вопрос о некоторых некоммутативных когомологиях, структуру которых мы изучаем ниже.

Введем пунктированное множество

$$\sigma_{X^0}:=\left\{(X,\varphi)\left|\begin{matrix}X\text{—супермногообразие и}\\ \varphi:\mathrm{gr}\,X\xrightarrow{\sim}X^0\text{—изоморфизм}\end{matrix}\right.\right\}\Big/\left\{\begin{matrix}\text{изоморфизмы}\\ \text{пар}\end{matrix}\right\}$$

с отмеченной точкой (X^0, id). По определению, две пары (X_1, φ_1), (X_2, φ_2) изоморфны, если существует изоморфизм $\eta: X_1 \to X_2$, такой что $\varphi_2 \circ \mathrm{gr}\,\eta = \varphi_1$.

Пусть $\mathscr{H}$ — пучок (унипотентных) групп на $\mathfrak{X}$, ассоциированный с предпучком

$$U \mapsto \mathscr{H}(U):=\{g\in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{X^0}|_U) \mid \mathrm{gr}\,(g)=\mathrm{id}\},$$

где $U\subset\mathfrak{X}$ — открытое множество. Тогда стандартная конструкция приводит к отождествлению пунктированных множеств

$$\sigma_{X^0}=H^1(\mathfrak{X}, \mathscr{H}).$$

Заметим, что $\mathbf{Z}$-градуировка на $\mathcal{O}_{X^0}$ индуцирует естественную фильтрацию на $\mathscr{H}$. Действительно, равенство $\mathrm{gr}\,(g)=\mathrm{id}$ для всех U и всех $g\in\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{X^0}|_U)$ эквивалентно включению

$$(g-\mathrm{id})\,(S^i(E))\subset S^{>i}(E):=\bigoplus_{k=i+1}^{N} S^k(E) \text{ при всех } i,\quad 0\leqslant i\leqslant N.$$

Таким образом, определим $\mathscr{H}^{2j}\subset\mathscr{H}$ как пучок, ассоциированный с предпучком

$$U\mapsto\mathscr{H}^{2j}(U):=\{g\in\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{X^0}|_U) \mid (g-\mathrm{id})\ (S^i(E))\subset S^{>i+2j}(E)$$
$$\text{для } i\in\mathbf{Z}_+\}.$$

Легко видеть, что $\mathscr{H}^2=\mathscr{H}$, $\mathscr{H}^{2j}=1$ при $2j>N$ и

$$[\mathscr{H}^{2k}, \mathscr{H}^{2l}]\subset\mathscr{H}^{2(k+l)}.$$

Фильтрация на $\mathscr{H}$ индуцирует также фильтрацию на пучке алгебр Ли $\mathrm{Lie}(\mathscr{H})$ пучка групп $\mathscr{H}$.

Далее, нетрудно установить изоморфизм пучков $\mathbf{Z}$-градуированных алгебр Ли

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{Lie}(\mathscr{H})\xrightarrow{\sim}\mathcal{T}_n,$$

где $\mathrm{gr}\,\mathrm{Lie}(\mathscr{H})$ — пучок $\mathbf{Z}$-градуированных алгебр Ли, ассоциированный с описанной выше фильтрацией на $\mathrm{Lie}(\mathscr{H})$, и $\mathcal{T}_n$ — *пучок алгебр Ли нильпотентных векторных полей* на X^0, определяемый как

$$\mathcal{T}_n:=\bigoplus_{j\geqslant 1}\mathcal{T}_n^{2j},$$

$$\mathcal{T}_n^{2j}:=\{\psi\in\mathcal{T}_{X^0} \mid \psi(S^i(E))\subset S^{i+2j}(E) \text{ для } i\in\mathbf{Z}_+\},$$

$$\mathcal{T}_{X^0}\text{—касательный пучок к } X^0.$$

Наконец, имеют место два очевидных взаимно обратных изоморфизма пучков множеств

$$\mathscr{H}\underset{\exp}{\overset{\log}{\rightleftarrows}}\mathcal{T}_n.$$

В частности, $H^0(\mathscr{H})=H^0(\mathscr{T}_n)=\bigoplus_{j\geqslant 1} H^0(\mathscr{T}_n^{2j})$. Отсюда следует, что для любого $j\geqslant 1$ отображение ограничения

$$H^0(\mathscr{H})\to H^0(\mathscr{H}/\mathscr{H}^{2j})$$

сюръективно, и, значит, точны следующие последовательности пунктированных множеств:

$$\begin{pmatrix}\text{отмеченная}\\ \text{точка}\end{pmatrix}\to H^1(\mathscr{H}^{2j})\to H^1(\mathscr{H})\to H^1(\mathscr{H}/\mathscr{H}^{2j}), \qquad (1)_j$$

$$\begin{pmatrix}\text{отмеченная}\\ \text{точка}\end{pmatrix}\to H^1(\mathscr{H}^{2j+2})\to H^1(\mathscr{H}^{2j})\to H^1(\mathscr{H}^{2j}/\mathscr{H}^{2j+2}), \qquad (2)_j$$

$j\geqslant 1$.

Последовательности $(1)_j$ означают, что множества $H^1(\mathscr{H}^{2j})$, $j\geqslant 1$, задают (пунктированную) фильтрацию на $\sigma_{X^0}=H^1(\mathscr{H})$. Последовательности $(2)_j$ доставляют характеристические отображения $c_{2j}: H^1(\mathscr{H}^{2j})\to H^1(\mathscr{H}^{2j}/\mathscr{H}^{2j+2})$, измеряющие отклонение членов этой фильтрации друг от друга.

Эти рассуждения составляют набросок доказательства следующей теоремы.

2. Теорема. Существует каноническая пунктированная фильтрация на σ_{X^0}:

$$\sigma_{X^0}=\sigma_2\supset\sigma_4\supset\ldots\supset\sigma_{2r}=\begin{pmatrix}\text{отмеченная}\\ \text{точка}\end{pmatrix}=(X^0, \mathrm{id})$$

и набор отображений $c_{2j}:\sigma_{2j}\to H^1(\mathscr{T}_n^{2j})$, таких что для любого $j\in\mathbf{N}$, $(X,\varphi)\in\sigma_{2j+2}$ тогда и только тогда, когда $(X,\varphi)\in\sigma_{2j}$ и $c_{2j}(X,\varphi)=0$. □

Теорема имеет несколько важных следствий.

3. Следствие. Супермногообразие X с $\mathrm{gr}\,X=X^0$ расщепимо в том и только в том случае, когда для некоторого (равносильно, для любого) изоморфизма $\varphi:\mathrm{gr}\,X\xrightarrow{\sim}X^0$ $c_{2j}(X,\varphi)=0$ для всех $j\in\mathbf{N}$.

Доказательство. Утверждение следствия — переформулировка теоремы 2. □

4. Следствие. а) Если $H^1(\mathscr{T}_n^{2j})=0$ для всех $j\in\mathbf{N}$, то всякое X с $\mathrm{gr}\,X\simeq X^0$ расщепимо.

б) Если $H^1(E^*\otimes S^{2j+1}(E))=0$ и $H^1(\mathscr{T}_{X^0_{\mathrm{red}}}\otimes S^{2j}(E))=0$ для всех $j\in\mathbf{N}$, то всякое X с $\mathrm{gr}\,X\simeq X^0$ расщепимо.

Доказательство. а) $H^1(\mathscr{T}_n^{2j})=0$ влечет $c_{2j}(X,\varphi)=0$ для всех φ и всех $j\in\mathbf{N}$.

б) Ограничение $\eta\mapsto\eta|_{X^0_{\mathrm{red}}}$, где $\eta\in\mathscr{T}_n^{2j}$, определяет точную последовательность $\mathcal{O}_{X^0_{\mathrm{red}}}$-модулей

$$0\to E^*\otimes S^{2j+1}(E)\to\mathscr{T}_n^{2j}\to\mathscr{T}_{X^0_{\mathrm{red}}}\otimes S^{2j}(E)\to 0.$$

Следовательно, обращение всех $H^1(E^*\otimes S^{2j+1}(E))$ и $H^1(\mathcal{T}_{X^0_{\mathrm{red}}}\otimes S^{2j}(E))$, $j\in\mathbf{N}$, в нуль влечет обращение в нуль $H^1(\mathcal{T}^{2j}_n)$, $j\in\mathbf{N}$, и наше утверждение сводится к а). □

5. Следствие. а) Каждое C^∞-гладкое супермногообразие расщепимо.

б) Если Y — комплексное аналитическое супермногообразие и Y_{red} штейново, то Y расщепимо.

в) Если Y — алгебраическое супермногообразие и Y_{red} аффинно, то Y расщепимо.

Доказательство. На C^∞-гладком, штейновом или аффинном многообразии Y_{red} все высшие группы когомологий с коэффициентами в локально свободных $\mathcal{O}_{Y_{\mathrm{red}}}$-модулях равны нулю. □

6. Покажем теперь, что существуют нерасщепимые аналитические и алгебраические супермногообразия. Поскольку все супермногообразия размерности $M|1$ расщепимы по определению, нерасщепимые супермногообразия нужно искать в размерности $M|N$, $N\geqslant 2$. На самом деле, такое многообразие существует уже в размерности $1|2$. Действительно, полагая $\mathfrak{X}=X_{\mathrm{red}}:=:=\mathbf{C}P^1$, $E:=\Pi\mathcal{O}_{\mathrm{red}}(-2)\oplus\Pi\mathcal{O}_{\mathrm{red}}(-2)$, где через $\mathcal{O}_{\mathrm{red}}(k)$ обозначена $-k$-я степень тавтологического расслоения на $\mathbf{C}P^1$, прямым вычислением можно показать, что для $X^0=(\mathfrak{X},\ S^\cdot(E))$, рассматриваемого как аналитическое супермногообразие, каноническая фильтрация на σ_{X^0} имеет длину 2. В частности, $\sigma_{X^0}\neq\begin{pmatrix}\text{отмеченная}\\ \text{точка}\end{pmatrix}$. Следовательно, $c_2\neq 0$ и, по следствию 3, существует нерасщепимое аналитическое супермногообразие X, такое что $\mathrm{gr}\,X\simeq X^0$. Более того, ясно, что в этом случае все X с $\mathrm{gr}\,X\simeq X^0$ автоматически алгебраичны, и условие алгебраической расщепимости эквивалентно условию аналитической расщепимости.

Далее, хотелось бы подчеркнуть, что случай нерасщепимого аналитического или алгебраического супермногообразия является не патологией, а случаем общего положения. Так, нерасщепимыми являются суперграссманианы $\mathrm{Gr}(a|b,\ S^{m|n})$ с $a, b\neq 0$, $a\neq m$, $b\neq n$ — см. [9].

7. Если супермногообразие $X=(\mathfrak{X},\mathcal{O}_X)$ расщепимо, то существует проекция $X\to X_{\mathrm{red}}$. Обратное неверно, однако можно дать критерий существования этой проекции, аналогичный теореме 2.

Сначала заметим, что поскольку всякая проекция $X\to X_{\mathrm{red}}$ проводится через естественную проекцию $X\to X_0:=(\mathfrak{X},\ (\mathcal{O}_X)_0)$, достаточно рассмотреть вопрос существования проекции $X_0\to\to X_{\mathrm{red}}$. Теперь опять фиксируем $\mathfrak{X}=X^0_{\mathrm{red}}$ и E и через $\mathcal{H}^0$ обозначим пучок (унипотентных) групп на $\mathfrak{X}$, ассоциированный с предпучком

$$U \mapsto \mathscr{H}^0(U) := \left\{ g_0 \in \mathrm{Aut}\left(\mathcal{O}_{X_0^0}\big|_U\right) \,\middle|\, \mathrm{gr}\,(g_0) = \mathrm{id} \right\},$$

где $X_0^0 := (\mathfrak{X}, S^{\cdot}(E)_0)$ и $\mathrm{gr}\,(g_0)$ рассматривается относительно стандартной фильтрации $\mathcal{O}_{X_0^0}$ степенями $\mathcal{N}^2_{X_0}$. Пусть $\sigma_{X_0^0} := H^1(\mathscr{H}^0)$. Существует каноническое отождествление пунктированных множеств

$$H^1(\mathfrak{X}^0) = \left\{ (X_0, \psi_0) \,\middle|\, \begin{array}{l} X_0 - \text{коммутативное} \\ \text{локально окольцованное} \\ \text{пространство с фильтрацией} \\ \text{структурного пучка и} \\ \psi : \mathrm{gr}\, X_0 \xrightarrow{\sim} X_0^0 - \text{изоморфизм} \end{array} \right\} \Big/ \left\{ \begin{array}{c} \text{изомор-} \\ \text{физмы} \\ \text{пар} \end{array} \right\}$$

с отмеченной точкой (X_0^0, id).

8. Теорема. Существует каноническая пунктированная фильтрация на $\sigma_{X_0^0}$

$$\sigma_{X_0^0} = \sigma_2^0 \supset \sigma_4^0 \supset \ldots \supset \begin{pmatrix} \text{отмеченная} \\ \text{точка} \end{pmatrix} = (X_0^0, \mathrm{id})$$

и набор отображений

$$c_{2j}^0 : \sigma_{2j}^0 \to H^1\left(\mathcal{T}_{X_{\mathrm{red}}} \otimes S^{2j}(E)\right),$$

таких что для любого $j \in \mathbf{N}$ $(X_0, \varphi_0) \in \sigma_{2j+2}^0$ тогда и только тогда, когда $(X_0, \varphi_0) \in \sigma_{2j}^0$ и $c_{2j}^0(X_0, \varphi_0) = 0$. □

Таким образом, если $\mathrm{gr}\, X_0 \simeq X_0^0$, то существование проекции $X \to X_{\mathrm{red}}$ эквивалентно обращению в нуль всех классов $c_{2j}^0(X_0, \varphi_0)$ для некоторого (равносильно, для любого) изоморфизма $\varphi_0 : \mathrm{gr}\, X_0 \xrightarrow{\sim} X_0^0$.

9. Замечание. Имеет место канонический морфизм ограничения

$$\mathrm{Res} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}^0,$$

и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{2j} & \xrightarrow{H^1(\mathrm{Res})} & \sigma_{2j}^0 \\ {\scriptstyle c_{2j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_{2j}^0} \\ H^1\left(\mathcal{T}_n^{2j}\right) & \xrightarrow{H^1(\mathrm{res}_j)} & H^1\left(\mathcal{T}_{X_{\mathrm{red}}} \otimes S^{2j}(E)\right), \end{array}$$

в которой res_j — канонический морфизм ограничения $\mathcal{T}_n^{2j} \to \mathcal{T}_{X_{\mathrm{red}}} \otimes S^{2j}(E)$, коммутативна для любого $j \in \mathbf{N}$.

10. Компонентный анализ локально свободных $\mathcal{O}$-модулей. Пусть X — произвольное супермногообразие, $\mathscr{E}'$ — локально свободный $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}$-модуль. Естествен вопрос: при каких условиях $\mathscr{E}'$

можно продолжить до локально свободного $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{E}$ с $\mathcal{E}_{\text{red}}:=\mathcal{E}/\mathcal{N}_X\mathcal{E}=\mathcal{E}'$? Если такое продолжение существует, то как описать все неизоморфные продолжения? Ответ на оба вопроса дается супераналогом известной теоремы Гриффитса [11] об инфинитезимальных продолжениях векторных расслоений на многообразиях.

Предположим, что X фиксировано, через $X^{(i)}:=(\mathfrak{X}, \mathcal{O}^{(i)}:=\mathcal{O}_X/\mathcal{N}_X^{i+1})$ обозначим i-ую «инфинитезимальную окрестность» подмногообразия X_{red} в X. $X^{(i)}$ не является супермногообразием (для $i\neq 0$, N, $N+1$, где $M|N=\dim X$), но если X алгебраично (комплексно-аналитично), то $X^{(i)}$ — суперсхема (аналитическое суперпространство). Пусть $\mathcal{E}'$ — локально свободный $\mathcal{O}_{\text{red}}$-модуль и $\mathcal{E}^{(i)}$ — такой локально свободный $\mathcal{O}^{(i)}$-модуль, что $\mathcal{E}^{(i)}/\mathcal{N}_X\mathcal{E}^{(i)}=\mathcal{E}'$.

11. Теорема. а) Существует единственный класс когомологий

$$c(\mathcal{E}^{(i)})\in H^2((End\,\mathcal{E}'\underset{\mathcal{O}_{\text{red}}}{\otimes}\mathcal{N}_X^{i+1}/\mathcal{N}_X^{i+2})_0),$$

такой что локально свободный $\mathcal{O}^{(i+1)}$-модуль $\mathcal{E}^{(i+1)}$ с $\mathcal{E}^{(i+1)}/(\mathcal{N}_X^{i+1}/\mathcal{N}_X^{i+2})\mathcal{E}^{(i+1)}=\mathcal{E}^{(i)}$ существует тогда и только тогда, когда $c(\mathcal{E}^{(i)})=0$.

б) Если $c(\mathcal{E}^{(i)})=0$, то группа $H^1((End\,\mathcal{E}'\underset{\mathcal{O}_{\text{red}}}{\otimes}\mathcal{N}_X^{i+1}/\mathcal{N}_X^{i+2})_0)$ действует транзитивно на множестве классов изоморфизма локально свободных $\mathcal{O}^{(i+1)}$-модулей $\mathcal{E}^{(i+1)}$ с $\mathcal{E}^{(i+1)}/(\mathcal{N}_X^{i+1}/\mathcal{N}_X^{i+2})\times\mathcal{E}^{(i+1)}=\mathcal{E}^{(i)}$. Если существует продолжение $\tilde{\mathcal{E}}^{(i+1)}$ модуля $\mathcal{E}^{(i)}$, такое что естественное отображение ограничения $H^0(End(\tilde{\mathcal{E}}^{(i+1)}))\to H^0(End(\mathcal{E}^{(i)}))$ сюръективно, то действие $H^1((End\,\mathcal{E}'\otimes\mathcal{N}_X^{i+1}/\mathcal{N}_X^{i+2})_0)$ эффективно.

Доказательство практически то же, что и в случае обычных инфинитезимальных продолжений векторных расслоений — см. [5, гл. 2, § 6], или оригинальную статью Гриффитса [11]. □

12. Следствие. а) Для заданного локально свободного $\mathcal{O}_{\text{red}}$-модуля $\mathcal{E}'$ локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{E}$ с $\mathcal{E}_{\text{red}}=\mathcal{E}'$ существует тогда и только тогда, когда существует последовательность $\mathcal{E}^{(0)}=\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}^{(1)},\ldots,\mathcal{E}^{(N-1)}$ продолжений $\mathcal{E}'$, такая что $c(\mathcal{E}^{(i)})=0$ при $0\leqslant i\leqslant N-1$. В частности, $\mathcal{E}$ существует, если $H^2(End\,\mathcal{E}\otimes\mathcal{N}_X^k/\mathcal{N}_X^{k+1})=0$ для всех $k\in\mathbf{Z}_+$.

б) Если $H^1(End\,\mathcal{E}'\otimes\mathcal{N}_X^k/\mathcal{N}_X^{k+1})=0$ для всех $k\in\mathbf{Z}_+$ и локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{E}$ с $\mathcal{E}/\mathcal{N}_X\mathcal{E}=\mathcal{E}'$ существует, то $\mathcal{E}$ единствен с точностью до изоморфизма. □

13. Следствие. Если X — C^∞-гладкое, комплексное аналитическое со штейновым X_{red} или алгебраическое с аффин-

ным X_{red}, то всякий локально свободный $\mathcal{O}_{\mathrm{red}}$-модуль $\mathcal{E}'$ однозначно (с точностью до изоморфизма) продолжается до локально свободного $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{E}$. Более того, существует изоморфизм $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{red}}} \mathcal{O}_X$, где структура $\mathcal{O}_{\mathrm{red}}$-модуля на $\mathcal{O}_X$ задана с помощью любой проекции $X \to X_{\mathrm{red}}$. □

14. Любой локально свободный $\mathcal{O}_{\mathrm{red}}$-модуль $\mathcal{E}'$ продолжим до локально свободного $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{E}$ и при более слабых предположениях относительно X: достаточно потребовать существование проекции $p: X \to X_{\mathrm{red}}$ — тогда $\mathcal{E} = p^*(\mathcal{E}')$. Важно при этом отметить, что даже из расщепимости супермногообразия X не следует, что всякий локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{E}$ изоморфен $p^*(\mathcal{E}_{\mathrm{red}})$, где $p: X \to X_{\mathrm{red}}$ — естественная проекция. В самом деле, достаточно взять такое расщепимое X, что пучок $\mathcal{O}_{\mathrm{red}}$ обладает нетривиальным расширением с помощью $\mathcal{O}_{\mathrm{red}}$-модуля $S^2(N_X^*) = \mathrm{gr}_2\mathcal{O}_X$. Добавив к этому расширению $\mathrm{gr}_i\mathcal{O}_X$, $i \neq 0, 2$, в качестве прямых слагаемых, мы получим $\mathcal{O}_X$-модуль $\mathcal{E}$ такой, что $\mathcal{E}_{\mathrm{red}} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{red}}$. Но $\mathcal{E} \not\simeq \mathcal{O} \simeq p^*(\mathcal{E}_{\mathrm{red}})$, поскольку $\dim \Gamma(X, \mathcal{E}) < \dim \Gamma(X, \mathcal{O})$.

Ввиду того, что не существует «послойного» функтора gr, рассмотрения настоящего параграфа не имеют прямого обобщения на относительный случай.

15. Замечание. Ясно, что пространство супермногообразий X с фиксированной подложкой является подпространством пространства версальных деформаций супермногообразия $\mathrm{gr}\, X$. Таким образом, некоммутативные когомологии п. 1 дают некоторый подход к теории деформаций. С другой стороны, теория деформаций является в каком-то смысле обобщением структурной теории супермногообразий. Эти же замечания относятся и к структурной теории когерентных пучков на супермногообразии. По поводу общей теории деформаций на супермногообразии мы отсылаем читателя к статье А. Ю. Вайнтроба [2] в настоящем сборнике.

16. Замечание. Структурная теория супермногообразий и расслоений на них многократно переоткрывалась и переписывалась. Мы назовем две работы, в которых описывается препятствие к продолжению расщепления (или расслоения) с одной инфинитезимальной окрестности подложки на следующую: В. П. Паламодов [7] и Ю. И. Манин [5, гл. 4, § 2], и две работы, в которых излагается подход, близкий к нашему: Молотков [14] и Ротштейн [18].

§ 4. ОБРАТИМЫЕ ПУЧКИ

1. Пучки ранга 1|0 и 0|1. Для алгебраического супермногообразия X аналогом группы Пикара можно считать группу $[\mathrm{Pic}_0 X]$ локально свободных пучков ранга 1|0, группу $[\mathrm{Pic}\, X]$ локально свободных пучков ранга 1|0 или 0|1 (обе относительно тензорного умножения) и, наконец, множество $[\mathrm{Pic}^{\mathrm{II}} X]$ ло-

кально свободных пучков ранга $1|1$ с Π-симметрией. Очевидно, естественное вложение $[\mathrm{Pic}_0 X] \hookrightarrow [\mathrm{Pic}\, X]$ достраивается до короткой точной последовательности

$$1 \to [\mathrm{Pic}_0 X] \to [\mathrm{Pic}\, X] \to \mathbf{Z}_2 \to 0,$$

которая канонически расщепляется гомоморфизмом $\mathbf{Z}_2 \to [\mathrm{Pic}\, X]$, $0 \mapsto \mathcal{O}_X$, $1 \mapsto \Pi\mathcal{O}_X$. В этом смысле рассмотрение группы $[\mathrm{Pic}\, X]$ неинтересно, за исключением тех случаев, когда она появляется естественно.

Группа $[\mathrm{Pic}_0 X]$ вполне аналогична классической, но устроена менеее тривиально в привычных для нас случаях (проективные суперпространства, суперпространства флагов, $SUSY$-кривые и т. д. — см. [8], [9], [16]), множество $[\mathrm{Pic}^n X]$ является новым инвариантом супермногообразия (см. [4, стр. 311]).

Начнем с изучения четных (соответственно, нечетных) обратимых пучков на суперпространстве X, которые, по определению, суть локально свободные $\mathcal{O}_X$-модули ранга $1|0$ (соответственно, $0|1$). Ясно, что множество всех обратимых пучков на фиксированном X имеет естественную структуру строго коммутативной категории Пикара или категорной абелевой группы (по поводу формализма категорий Пикара см., например, [10]) с операцией тензорного умножения. Заметим, что четность обратимого пучка определяет канонический функтор из этой категории в категорию $\mathbf{Z}_2$ (рассматриваемую как группоид из двух объектов). Обозначим через $\mathrm{Pic}_0 X$ ядро этого функтора (то есть категорию Пикара всех четных обратимых пучков на X), тогда $[\mathrm{Pic}_0 X]$ — группа классов изоморфизма объектов $\mathrm{Pic}_0 X$. Как и в обычном случае, имеет место изоморфизм групп

$$[\mathrm{Pic}_0 X] \simeq H^1(\mathcal{O}_0^*),$$

где $\mathcal{O}_0^*$ — подпучок обратимых сечений $\mathcal{O}_X$, рассматриваемый как пучок мультипликативных групп.

Теперь определим относительный функтор Пикара. Рассматривая стандартным образом категорию $\mathbf{Ssch}_{\mathcal{M}}$ суперсхем (категорию $\mathbf{San}_{\mathcal{M}}$ аналитических суперпространств) над $\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — соответственно, суперсхема (аналитическое суперпространство), зададим для фиксированного $Y \to \mathcal{M} \in \mathrm{Ob}\,(\mathbf{Ssch}_{\mathcal{M}})$ (соответственно, $\mathrm{Ob}\,(\mathbf{San}_{\mathcal{M}})$) функтор

$$\mathbf{Pic}_0(Y/\mathcal{M}) : \mathbf{Ssch}_{\mathcal{M}}\,(\mathbf{San}_{\mathcal{M}}) \to \mathbf{Ab}$$

равенством

$$\mathbf{Pic}_0(Y/\mathcal{M})\,(Z/\mathcal{M}) := [\mathrm{Pic}_0\,(Y \times_{\mathcal{M}} Z)]/p_2^*\,[\mathrm{Pic}_0\, Z],$$

где $\mathbf{Ab}$ — категория абелевых групп, $Z \to \mathcal{M}$ — объект соответствующей категории и $p_2 : Y \times_{\mathcal{M}} Z \to Z$ — естественная проекция.

В частности, мы определим группу Пикара для Y над $\mathscr{M}$, полагая

$$[\mathrm{Pic}_0(Y/\mathscr{M})] := \mathbf{Pic}_0(Y/\mathscr{M})(\mathscr{M}/\mathscr{M}).$$

Отметим, что важный вопрос представимости функтора $\mathbf{Pic}_0$ нетривиален даже в абсолютном случае (т. е. когда $\mathscr{M}$ — точка) и требует дальнейшего изучения.

2. Пучки ранга 1|1 с П-симметрией. Пусть X — суперпространство. Определим $\mathrm{Pic}^{\Pi}X$ как категорию, объектами которой являются пары (S, p), где S — локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль ранга 1|1, $p: S \xrightarrow{\sim} S$ — П-симметрия на S (т. е. нечетный морфизм с условием $p^2 = -\mathrm{id}_S$), а морфизмами — элементы группы $\underline{\mathrm{Hom}}(S_1, S_2)$, задающие изоморфизм $\mathcal{O}_X$-модулей и коммутирующие с П-симметрией. Определен естественный вполне унивалентный функтор

$$\alpha: \mathrm{Pic}_0 X \to \mathrm{Pic}^{\Pi} X,$$
$$\alpha(\mathscr{L}) := \mathscr{L} \oplus \Pi\mathscr{L},$$

но, в отличие от $\mathrm{Pic}_0 X$, $\mathrm{Pic}^{\Pi} X$ не имеет естественной структуры категории Пикара. В этом случае $[\mathrm{Pic}^{\Pi} X]$ является пунктированным множеством классов изоморфизма объектов категории $\mathrm{Pic}^{\Pi}X$ (с базисной точкой $\mathcal{O}_X \oplus \Pi\mathcal{O}_X$). Стандартная конструкция позволяет отождествить пунктированные множества

$$\alpha_1: [\mathrm{Pic}^{\Pi} X] \xrightarrow{\sim} H^1({}^{\Pi}\underline{Aut}(\mathcal{O}_x \oplus \mathcal{O}_x)),$$

где ${}^{\Pi}\underline{Aut}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X)$ — пучок групп локальных автоморфизмов объекта $\mathcal{O}_X \oplus \Pi\mathcal{O}_X$ категории $\mathrm{Pic}^{\Pi}X$. Как пучок групп, ${}^{\Pi}\underline{Aut}(\mathcal{O}_X \oplus \Pi\mathcal{O}_X)$ канонически изоморфен мультипликативной группе $\mathcal{O}_X^*$ обратимых сечений $\mathcal{O}_X$. Таким образом, имеется изоморфизм пунктированных множеств

$$\alpha_2: [\mathrm{Pic}^{\Pi} X] \xrightarrow{\sim} H_1(\mathcal{O}_X^*).$$

Более того, легко устанавливается коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} [\mathrm{Pic}^{\Pi}X] & \xrightarrow[\sim]{\alpha_2} & H^1(\mathcal{O}_X^*) \\ {\scriptstyle [\alpha]}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle H^1(\beta)} \\ [\mathrm{Pic}_0 X] & \xrightarrow{\sim} & H^1(\mathcal{O}_0^*), \end{array}$$

где $[\alpha]$ — вложение, индуцированное α, и β — вложение $\mathcal{O}_0^* \hookrightarrow \mathcal{O}_X^*$.

Более подробному изучению взаимоотношений $\mathrm{Pic}_0 X$, $\mathrm{Pic}^{\Pi} X$ и множества пучков ранга 1|1 посвящено добавление к этому параграфу.

ДОБАВЛЕНИЕ К § 4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА 1|1-ПУЧКОВ

0. Основные объекты. Пусть X — комплексное супермногообразие. Кроме введенных для него в § 4 группы $[\mathrm{Pic}_0 X]$ и пунктированного множества $[\mathrm{Pic}^{\Pi} X]$, при изучении 1|1-пучков (т. е. локально свободных $\mathcal{O}_X$-модулей ранга 1|1) нам потребуются пунктированные множества

$$F^{1|1}X := \{\text{классы изоморфизма } 1|1\text{-пучков}\},$$

$$SF^{1|1}X := \left\{\begin{array}{l}\text{классы изоморфизма } 1|1\text{-пучков, снабженных} \\ \text{тривиализацией } t: \mathrm{Ber}\, S \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X,\ t \text{ четна,} \\ \text{если } \mathrm{rk}\,\mathrm{Ber}\, S = 1|0, \text{ и нечетна, если } \mathrm{rk}\,\mathrm{Ber}\, S = 0|1\end{array}\right\}.$$

В этом добавлении мы обозначим через $\mathrm{Pic}_0 X$ группу $[\mathrm{Pic}_0 X]$ и через $\mathrm{Pic}^{\Pi} X$ пунктированное множество $[\mathrm{Pic}^{\Pi} X]$.

1. Два эндоморфизма $F^{1|1}X$. Для каждого $S \in F^{1|1}X$ рассмотрим два относительных суперпространства флагов относительной размерности $0|1$: $X_+ := \mathrm{Fl}_X(1|0; S) \xrightarrow{\pi_+} X$ и $X_- := \mathrm{Fl}_X(0|1; S) \xrightarrow{\pi_-} X$. Положим $u^+(S) := (\pi_+)_* \mathcal{O}_{X_+}$ и $u^-(S) := (\pi_-)_* \mathcal{O}_{X_-}$. Ясно, что $u^{\pm}$ — эндоморфизмы пунктированного множества $F^{1|1}X$, $u^{\pm}(\Pi S) = u^{\mp}(S)$.

Лемма. Имеют место следующие две канонические точные последовательности:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to u^{\pm}(S) \to (\mathrm{Ber}\, S)^{\pm 1} \to 0.$$

Доказательство состоит в непосредственном вычислении коциклов Чеха для $u^{\pm}(S)$ по коциклу, определяющему S. □

2. Когомологическая интерпретация. Пусть G — комплексная групповая суперсхема. Определим пучок групп G_X на X как пучок, ассоциированный с предпучком

$$U \mapsto G(\Gamma(U, \mathcal{O}_X)),$$

$U \subset X$ — открытое подмножество.

Определим также следующие групповые схемы: для произвольной комплексной алгебры A

$$\mathbb{G}_m^{1|0}(A) := A_0^* \text{ по умножению},$$

$$\mathbb{G}_m(A) := A^* \text{ по умножению},$$

$$\mathbb{G}_a^{0|1}(A) := A_1 \text{ по сложению}.$$

Предложение. Имеют место канонические изоморфизмы групп

$$\mathrm{Pic}_0 X = H^1(X, \mathbb{G}_{mX}^{1|0})$$

и пунктированных множеств

$$\mathrm{Pic}^{\Pi} X = H^1(X, \mathbb{G}_{mX}),$$

$$F^{1|1}X = H^1(X, \mathrm{GL}(1|1)_X),$$

$$SF^{1|1}X = H^1(X, \mathrm{SL}(1|1)_X).$$

Доказательство стандартное. □

Далее в этом добавлении мы будем для простоты писать $H_1(G)$ вместо $H^1(X, G_X)$.

Следующий класс можно считать, в каком-то смысле, чисто нечетным аналогом класса Чжэня $1|1$-пучка с П-симметрией.

Определение. Для морфизма групповых суперсхем $c: \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_a^{0|1}$, заданного формулой

$$c(a_0 + a_1) := a_1/a_0,$$

зададим соответствующий морфизм пунктированных множеств

$$\mathrm{Pic}^{\Pi} X \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{c} H^1(\mathbb{G}_a^{0|1}) = H^1(\mathcal{O}_1).$$

Отметим, что морфизмы $u^{\pm}: F^{1|1}X \to F^{1|1}X$, определенные в п. 1, индуцированы идемпотентными эндоморфизмами $\mathrm{GL}(1|1)$:

$$u^{+}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Ber}\, H & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$u^{-}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/a & (\mathrm{Ber}\, H)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $(u^{\pm})^2 = u^{\pm}$.

Заметим, что если $H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(1|1)(A)$, то $b/a = b/d$, $c/a = c/d$, а эндоморфизмы $u^{\pm}|_{\mathrm{SL}(1|1)}$ можно рассматривать как гомоморфизмы

$$u^{\pm}: \mathrm{SL}(1|1) \to \mathbb{G}_a^{0|1},$$

$$u^{+}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto b/d,$$

$$u^{-}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto c/d.$$

Определим гомоморфизм

$$u: \mathrm{SL}(1|1) \to \mathbb{G}_a^{0|1}$$

формулой

$$u := u^{+} - u^{-}.$$

Тогда легко увидеть, что точна следующая последовательность

$$1 \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{\alpha} \mathrm{SL}(1|1) \xrightarrow{u} \mathbb{G}_a^{0|1} \to 0, \qquad (1)$$

где $\alpha(a_0 + a_1) := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.

3. Композиция элементов $\mathrm{Pic}^{\Pi}X$. Пусть (S, p), (S', p') — два $1|1$-пучка с П-симметрией. Продолжим p и p' до пары суперкоммутирующих симметрий $\tilde{p} := p\otimes\mathrm{id}$ и $\tilde{p}' := \mathrm{id}\otimes p'$ на $S\otimes S'$.

Теорема. Во введенных обозначениях

а) $S\otimes S' = (S\otimes S')_+\oplus(S\otimes S')_-$, где $(S\otimes S')_\pm$ — $1|1$-пучки, являющиеся собственными подпространствами эндоморфизма $\tilde{p}\circ\tilde{p}'$ с собственными значениямм $\pm i$,

б) $\mathrm{Ber}\,(S\otimes S')_\pm$ тривиальны и

$$u^{\varkappa}((S\otimes S')_{\varkappa'}) = c(S') - i\varkappa\varkappa' c(S)\in H^1(\mathcal{O}_1),\ \varkappa,\ \varkappa'\in\{+,\ -\}.$$

Доказательство. а) следует из того, что $\tilde{p}\circ\tilde{p}'$ есть четный эндоморфизм с квадратом $-\mathrm{id}_{S\otimes S'}$.

б) доказывается прямым вычислением коциклов Чеха. □

4. Возможность введения П-симметрии на $1|1$-пучках. Используя теорему 3, мы можем поставить в соответствие паре $1|1$-пучков с П-симметрией пару $1|1$-пучков, на которых можно ввести П-симметрию при некоторых когомологических ограничениях — см. следствие 4 ниже.

Поскольку П-симметрия определяет тривиализацию березиниана (см. предложение 2 и формулу (1)), необходимым условием существования П-симметрии на $1|1$-пучке S является тривиальность его березиниана: $\mathrm{Ber}\,S \xrightarrow{\sim} \Pi\mathcal{O}$.

Свобода в выборе тривиализации измеряется группой $H^0(\mathcal{O}_0^*)$, так как орбиты действия последней на $H^1(\mathrm{SL}(1|1))$ суть слои отображения $H^1(\mathrm{SL}(1|1))\to H^1(\mathrm{GL}(1|1))$, индуцированного короткой точной последовательностью $1\to\mathrm{SL}(1|1)\to\mathrm{GL}(1|1)\xrightarrow{\mathrm{Ber}}\mathbb{G}_m^{1|0}\to 1$.

Препятствием к введению на $1|1$-пучке S П-симметрии, индуцирующей заданную тривиализацию березиниана, ввиду точной последовательности

$$H^1(\mathbb{G}_m)\to H^1(\mathrm{SL}(1|1))\xrightarrow{u} H^1(\mathbb{G}_a^{0|1})$$

(см. (1)) является класс $u(S)\in H^1(\mathbb{G}_a^{0|1})$.

С другой стороны, легко видеть, что имеет место формула

$$u^\pm(\alpha\mu) = \alpha^{\pm 1}u^\pm(\mu),$$

где $\alpha\in H^0(\mathcal{O}_0^*)$, $\mu\in H^1(\mathrm{SL}(1|1))$, а умножение справа — естественное умножение $H^0(\mathcal{O}_0^*)\otimes H^1(\mathcal{O}_1)\to H^1(\mathcal{O}_1)$. Тем самым, доказано

Утверждение. Пусть S — $1|1$-пучок, такой что $\mathrm{Ber}\,S\simeq\simeq\Pi\mathcal{O}$. На S можно ввести П-симметрию тогда и только тогда, когда существует $\alpha\in H^0(\mathcal{O}_0^*)$, такой что $\alpha^2u^+(S) = u^-(S)$. □

Следствие. В условиях теоремы 3 $1|1$-пучки $(S\otimes S')_{\pm}$ могут быть снабжены П-симметрией тогда и только тогда, когда существует $\alpha\in H^0(\mathcal{O}_0^*)$, такой что $(\alpha^2+1)\,c(S)=(\alpha^2-1)\,c(S')$. □

5. Препятствия к разложению $1|1$-расслоения с П-симметрией в прямую сумму двух расслоений, изоморфных относительно П. Пунктированное множество таких препятствий есть образ морфизма c в точной последовательности некоммутативных когомологий

$$\mathrm{Pic}_0 X\to \mathrm{Pic}^{\Pi} X\xrightarrow{c} H^1(\mathcal{O}_1), \tag{2}$$

индуцированной точной последовательностью

$$1\to \mathbf{G}_m^{1|0}\to \mathbf{G}_m\xrightarrow{c}\mathbf{G}_a^{0|1}\to 0$$

(см. п. 2.) Группа $\mathbf{G}_m^{1|0}$ центральна в $\mathbf{G}_m$, поэтому точную последовательность (2) можно продолжить еще на один член вправо ([12, следствие предложения 3.4.2])

$$\mathrm{Pic}_0 X\to \mathrm{Pic}^{\Pi} X\xrightarrow{c} H^1(\mathcal{O}_1)\xrightarrow{\partial} H^2(\mathcal{O}_0^*).$$

При этом интересующее нас множество $\mathrm{Im}\, c$ совпадает с $\mathrm{Ker}\,\partial$. $\mathrm{Ker}\,\partial$ мы вычислим явно.

Утверждение. Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathcal{O}_1) \arrow[r, "\alpha\mapsto\alpha\smile\alpha"] \arrow[dr, "\partial"'] & H^2(\mathcal{O}_0) \arrow[d, "\exp"] \\ & H^2(\mathcal{O}_0^*). \end{tikzcd}$$

Менее формально, $\mathrm{Ker}\,\partial=\{\alpha\in H^1(\mathcal{O}_1)\mid \exp(\alpha^2)=1\}$.

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — достаточно тонкое покрытие X и набор $\varphi_{ij}\in\mathcal{O}_1(U_i\cap U_j)$ задает 1-коцикл Чеха. Явно вычислим кограничный морфизм:

$$\partial(\{\varphi_{ij}\})=\{1-\varphi_{jk}\varphi_{ik}+\varphi_{jk}\varphi_{ij}-\varphi_{ik}\varphi_{ij}\}=$$
$$=\{\exp(-\varphi_{jk}\varphi_{ik}+\varphi_{jk}\varphi_{ij}-\varphi_{ik}\varphi_{ij})\}.$$

Понятно, что набор $-\varphi_{jk}\varphi_{ik}+\varphi_{jk}\varphi_{ij}-\varphi_{ik}\varphi_{ij}\in\mathcal{O}_0(U_i\cup U_j\cap U_k)$ задает 2-коцикл Чеха, являющийся произведением $\{\varphi_{ij}\}\smile\{\varphi_{ij}\}$. □

Заметим, что в случае алгебраического X

$$\mathrm{Ker}\left(H^2(\mathcal{O}_0)\xrightarrow{\exp}H^2(\mathcal{O}_0^*)\right)=\mathrm{Im}\,(H^2(X_{\mathrm{red}},\mathbf{Z})\to H^2(\mathcal{O}_0))=$$

$=\{$группа препятствий к реализации сингулярных 2-циклов на X_{red} дивизорами Картье$\}$.

Таким образом, препятствия к разложению $1|1$-пучков с П-симметрией в прямую сумму двух П-изоморфных локально свободных пучков суть квадратные корни из препятствий, указанных выше.

6. Препятствия к разложению произвольного $1|1$-расслоения в прямую сумму двух расслоений, изоморфных относительно П. Как и в п. 5, пунктированное множество таких препятствий есть $\operatorname{Ker}\partial=\operatorname{Im}\lambda$ в когомологической последовательности

$$\operatorname{Pic}_0 X \to F^{1|1}X \xrightarrow{\lambda} H^1(\mathbf{G}) \xrightarrow{\partial} H^2(\mathbf{G}_m^{1|0}), \tag{3}$$

индуцированной точной последовательностью

$$1 \to \mathbf{G}_m^{1|0} \to \mathrm{GL}(1|1) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{G} \to 1,$$

где $\mathbf{G}=(\mathbf{G}_a^{0|1}\oplus\mathbf{G}_a^{0|1})\rtimes\mathbf{G}_m^{1|0}$ — полупрямое произведение относительно действия $\mathbf{G}_m^{1|0}$ на $\mathbf{G}_a^{0|1}\oplus\mathbf{G}_a^{0|1}$, заданного формулой

$$a(b, b'):=(ab, a^{-1}b'), \quad a\in\mathbf{G}_m^{1|0}, \quad b,\ b'\in\mathbf{G}_a^{0|1},$$

$$\lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}:=\left(-\frac{b}{a}, -\frac{c}{d}; \operatorname{Ber}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right).$$

Для описания $\operatorname{Ker}\partial$ нам понадобится еще одна точная последовательность некоммутативных когомологий:

$$H^0(\mathbf{G}_m^{1|0}) \to H^1(\mathbf{G}_a^{0|1}\oplus\mathbf{G}_a^{0|1}) \xrightarrow{\mu} H^1(\mathbf{G}) \to \operatorname{Pic}_0 X, \tag{4}$$

индуцированная естественной точной тройкой

$$0 \to \mathbf{G}_a^{0|1}\oplus\mathbf{G}_a^{0|1} \to \mathbf{G} \to \mathbf{G}_m^{1|0} \to 1.$$

Через ψ мы обозначим сквозное отображение

$$H^1(\mathbf{G}_a^{0|1})\oplus H^1(\mathbf{G}_a^{0|1}) \xrightarrow{\mu} H^1(\mathbf{G}) \xrightarrow{\partial} H^2(\mathbf{G}_m^{1|0}),$$

скомбинированное из (3) и (4). Таким образом, $\operatorname{Ker}\partial\supset\mu(\operatorname{Ker}\psi)\simeq\operatorname{Ker}\psi/H^0(\mathcal{O}_0^*)$.

Утверждение. Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathcal{O}_1)\oplus H^1(\mathcal{O}_1) \arrow[r, "(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\cup\beta"] \arrow[dr, "\psi"'] & H^2(\mathcal{O}_0) \arrow[d, "exp"] \\
& H^2(\mathcal{O}_0^*).
\end{tikzcd}$$

Менее формально, $\operatorname{Ker}\psi=\{(\alpha,\beta)\in H^1(\mathcal{O}_1)\oplus H^1(\mathcal{O}_1)\mid\exp(\alpha\beta)=1\}$.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 5. □

7. Частный случай: $H^0(\mathcal{O})=\mathbf{C}$, $\operatorname{Pic}_0 X=H^1(\mathcal{O}_0^*)=\{1\}$. Положим $W^1:=H^1(\mathcal{O}_1)$, $W^2:=H^2(\mathcal{O}_0)$, $L:=H^2(\mathbf{Z})$. В силу сделанных предположений и п. 5 $L\subset W^2$ и $L=\{$группа препятствий к реализации 2-циклов на X_{red} дивизорами Картье$\}$. По утверждению 5,

$$\operatorname{Pic}^\pi X=A\{a\in W^1\mid a_2\in L\},$$

по утверждению 6,

$$F^{III}X=\{(a, b)\in W^1\oplus W^1 \mid ab\in L\}/\mathbf{C}^*$$

(действие $\mathbf{C}^*$ на $W^1\oplus W^1$ имеет вид $\alpha(w_1, w_2)=(\alpha w_1, \alpha^{-1}w_2)$). Из п. 4 образ $\mathrm{Pic}^{II} X$ при вложении $\mathrm{Pic}^{II} X \overset{\alpha}{\hookrightarrow} SF^{III}X \overset{\beta}{\hookrightarrow} F^{III}X$, где α определено в п. 2, а β — естественное вложение, равен

$$\mathrm{Pic}^{II} X=\{(a, b)\in W^1\oplus W^1 \mid \exists\alpha\in\mathbf{C}^* : \alpha^2 a=b,\ ab\in L\}.$$

8. Замечание. Разобранный частный случай включает в себя все однородные суперпространства G/P, где G — комплексная алгебраическая супергруппа типа $Q(n)$, $n\geqslant 3$, а P — параболическая подгруппа — см. [8].

§ 5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ И ТЕОРЕМА РИМАНА — РОХА

1. **Группы Гротендика.** В этом параграфе мы рассматриваем алгебраические или аналитические супермногообразия X с условием на X_{red}: естественный гомоморфизм $K^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})\to K_{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$ групп Гротендика локально свободных $\mathcal{O}_{\mathrm{red}}$-модулей $K^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$ и когерентных $\mathcal{O}_{\mathrm{red}}$-модулей $K_{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$ является изоморфизмом (например, X_{red} — неособое алгебраическое многообразие).

Возможно, стоит напомнить определения групп Гротендика в нашем контексте.

Определение. $K_s^{\cdot}(X)$ (соответственно, $K_{\cdot}^s(X)$) — фактор-группа свободной абелевой группы, порожденной всеми когерентными локально свободными (соответственно, просто когерентными) $\mathcal{O}_X$-модулями, по подгруппе, порожденной всеми выражениями вида $\mathcal{E}-\mathcal{E}'-\mathcal{E}''$, где $0\to\mathcal{E}'\to\mathcal{E}\to\mathcal{E}''\to 0$ — короткая точная последовательность локально свободных (соответственно, когерентных) $\mathcal{O}_X$-модулей.

Класс $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{E}$ в подходящей группе Гротендика мы будем обозначать $\mathrm{cl}_s^{\cdot}(\mathcal{E})$, $\mathrm{cl}_{\cdot}^s(\mathcal{E})$ или просто $\mathrm{cl}(\mathcal{E})$, если это не вызовет недоразумений.

2. Замечание. Конечно, под $\mathcal{O}_X$-модулями мы подразумеваем $\mathbf{Z}_2$-градуированные $\mathcal{O}_X$-модули, и $\mathbf{Z}_2$-градуировка расщепляет каждую из групп $K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$, $K_{\cdot}^s(X_{\mathrm{red}})$ и $K_{\cdot}^s(X)$ на два изоморфных прямых слагаемых. Имеем $K_{\cdot}^s(X_{\mathrm{red}})=K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})=K^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})\oplus\Pi K^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$.

3. Замечание. Относительно операции «$\otimes$» $K_s^{\cdot}(X)$ является коммутативным (не в суперсмысле) кольцом с единицей $1=\mathrm{cl}_s^{\cdot}(\mathcal{O}_X)$ и элементом $\Pi=\mathrm{cl}_s^{\cdot}(\Pi\mathcal{O}_X)$, $\Pi^2=1$.

4. Определение. Для собственного морфизма $f: X\to Y$ определим гомоморфизм групп $f_!^s: K_{\cdot}^s(X)\to K_{\cdot}^s(Y)$ формулой

$$f_!^s(\mathrm{cl}\,\mathcal{F}) := \Sigma(-1)^i \mathrm{cl}(R^i f_* \mathcal{F}),$$

где $\mathcal{F}$ — произвольный когерентный $\mathcal{O}_X$ — модуль.

5. Предложение (см. [19]). Гомоморфизм $i_!^s : K_\cdot^s(X_{\mathrm{red}}) \to K_\cdot^s(X)$, где $i : X_{\mathrm{red}} \to X$ — естественное вложение, является изоморфизмом.

Доказательство. Легко проверить, что обратным к $i_!^s$ является гомоморфизм $j : \mathrm{cl}(\mathcal{E}) \mapsto \mathrm{cl}({}_{\mathrm{dr}}\mathcal{E})$. □

Это предложение говорит о том, что группа $K_\cdot^s(X)$ не отражает наличие суперструктуры на X. Группа же $K_s^\cdot(X)$ слишком велика и трудно вычислима, как показывает пример проектного суперпространства (см. пример ниже). Этими недостатками в меньшей степени обладает группа $KS(X)$, которую мы сейчас определим.

6. Определение. Пусть $j : K_s^\cdot(X_{\mathrm{red}}) \to K_s^\cdot(X_{\mathrm{red}})$ — гомоморфизм $\mathrm{cl}(\mathcal{E}) \mapsto \mathrm{cl}(\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{E})$, где $\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{E} := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Pi^i \mathcal{N}^i \mathcal{E} / \mathcal{N}^{i+1}\mathcal{E}$, $\mathcal{N}$ — идеал $(\mathcal{O}_x)_1 \oplus (\mathcal{O}_x)_1^2$. Тогда, по определению, $KS(X) := \mathrm{Im}\, j \subset K_s^\cdot(X_{\mathrm{red}})$. Класс локально свободного $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{E}$ в $KS(X)$ мы будем обозначать $j(\mathrm{cl}\,\mathcal{E})$ или просто $\mathrm{cl}(\mathcal{E})$.

7. Пусть $N^* := \mathrm{cl}(N_X^*) := \mathrm{cl}(\mathcal{N}/\mathcal{N}^2)$ — класс конормального пучка вложения $X_{\mathrm{red}} \to X$, $\sigma_1(N^*) := \sum_{i=0}^{n} \mathrm{cl}(\Pi^i S^i(N_x^*))$, если $\mathrm{rk}\, N_X^* = 0|n$. Тогда $\sigma_1(N^*) = \mathrm{cl}(\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{O}_X)$ и имеет место.

Предложение. а) $KS(X) \subset \sigma_1(N^*) \cdot K_s^\cdot(X_{\mathrm{red}})$.

б) Если существует проекция $p : X \to X_{\mathrm{red}}$, то

$$KS(X) = \sigma_1(N^*) \cdot K_s^\cdot(X_{\mathrm{red}}).$$

Доказательство. а) Для любого локально свободного $\mathcal{O}_X$-модуля $\mathcal{E}$ $j(\mathrm{cl}\,\mathcal{E}) = \mathrm{cl}(\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{E}) = \mathrm{cl}(\mathcal{E}_{\mathrm{red}})\,\mathrm{cl}(\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{O}_X) = \mathrm{cl}(\mathcal{E}_{\mathrm{red}})\sigma_1(N^*)$.

б) Для каждого локально свободного $\mathcal{O}_{\mathrm{red}}$-модуля $\mathcal{E}$ $\mathrm{cl}(\mathcal{E}) \times \sigma_1(N^*) \in KS(X)$, так как $\mathrm{cl}(\mathcal{E}) \cdot \sigma_1(N^*) = \mathrm{cl}(\mathcal{E})\,\mathrm{cl}(\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{O}_x) = \mathrm{cl}\left(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{red}}} \widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{O}_X\right) = j(\mathrm{cl}(p^*\mathcal{E}))$, и $\mathcal{O}_x$-модуль $p^*\mathcal{E}$ локально свободен. □

8. Пример. Пусть $X = \mathbf{C}P^{m|n}$. Тогда $K_\cdot^s(X) \simeq K_\cdot^s(X_{\mathrm{red}}) \simeq K_s^\cdot(X_{\mathrm{red}}) \simeq \mathbf{Z}[t]/(1-t)^{m+1} \oplus \pi(\mathbf{Z}[t]/(1-t)^{m+1})$. Кольцо $K_s^\cdot(X)$, насколько нам известно, не вычислено, но группа $[\mathrm{Pic}\, X]$, которая, как обычно, естественно вкладывается в мультипликативную группу обратимых элементов $K_s^\cdot(X)$, при $m=1$ довольно велика: $[\mathrm{Pic}\, X] \simeq \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z} \oplus S^{n-2}(\mathbf{C}^{2|n})_0$ (см. [8]). X расщепимо (см.

[5, гл. 4, § 3, п. 5]), значит, $KS(X)=\sigma_1(N^*)\cdot K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$, причем $\sigma_1(N^*)=(1+t^{-1})^n$, $t^{-1}=\sum_{i=0}^{m}(1-t)^i$.

9. Группа $KS(X)$ обладает такими привычными свойствами группы $K^{\cdot}$, как существование операций умножения и обратного образа.

Предложение. а) Формула

$$\mathrm{cl}(\mathscr{E}_1)*\mathrm{cl}(\mathscr{E}_2):=\mathrm{cl}(\mathscr{E}_1\otimes\mathscr{E}_2)$$

для локально свободных $\mathcal{O}_x$-модулей $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ корректно задает структуру кольца $KS(X)$ с единицей $1=\mathrm{cl}(\mathcal{O}_x)=\sigma_1(N^*)$.

б) Для любых $x_1, x_2\in KS(X)$

$$x_1*x_2=x_1\cdot x_2/\sigma_1(N^*),$$

б) Положим

$$f_*(x):=(f_{\mathrm{red}})_*(x)$$

где умножение в правой части есть умножение в кольце $K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$.

в) Формула

$$f_s^!(\mathrm{cl}(\mathscr{E})):=\mathrm{cl}(f^*(\mathscr{E}))$$

для произвольного морфизма супермногообразий $f:X\to Y$ и локально свободного $\mathcal{O}_Y$-модуля $\mathscr{E}$ корректно задает гомоморфизм колец $f_s^!:KS(Y)\to KS(X)$

г) Для любого $y\in KS(Y)$

$$f_s^!(y)=f'_{\mathrm{red}}(y/\sigma_1(N_Y^*))\cdot\sigma_1(N_X^*),$$

где $f_{\mathrm{red}}^!$ — обычный обратный образ для морфизма $f_{\mathrm{red}}:X_{\mathrm{red}}\to Y_{\mathrm{red}}$.

Доказательство. Пусть $x_1=\mathrm{cl}(\mathscr{E}_1)$, $x_2=\mathrm{cl}(\mathscr{E}_2)$. Тогда $\mathrm{cl}(\mathscr{E}_1\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{E}_2)=\mathrm{cl}_s^{\cdot}(\widetilde{\mathrm{gr}}(\mathscr{E}_1\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{E}_2))=\mathrm{cl}_s^{\cdot}(\mathscr{E}_{1,\mathrm{red}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{red}}}\mathscr{E}_{2,\mathrm{red}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{red}}}\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{O}_X)=$ $=\mathrm{cl}_s^{\cdot}(\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathscr{E}_1)\cdot\mathrm{cl}_s^{\cdot}(\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathscr{E}_2)/\mathrm{cl}_s^{\cdot}(\widetilde{\mathrm{gr}}\,\mathcal{O}_X)=x_1\cdot x_2/\sigma_1(N^*)$. Отсюда следуют б) и а). Аналогично доказываются г) и в). □

10. Определение. Для собственного морфизма $f:X\to Y$ определим гомоморфизм групп $f_!^s:K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})\to K_s^{\cdot}(Y_{\mathrm{red}})$ формулой

$$f_!^s(x):=(f_{\mathrm{red}})_!(x).$$

11. Замечание. При отождествлении $K_{\cdot}^s(X)$ с $K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$ и $K_!^s(Y)$ с $K_s^{\cdot}(Y_{\mathrm{red}})$ определение 4 равносильно определению 10.

12. Предложение (формула проекции). Для собственного морфизма $f:X\to Y$ и $x\in K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$, $y\in K_s^{\cdot}(Y_{\mathrm{red}})$

$$f_!^s(f_s^!(y)*x)=y*f_!^s(x).$$

Доказательство — простое вычисление. □

13. **Характеристические классы.** Сначала опишем множест-

во значений характеристических классов. Образуем из γ-фильтрации $F^1 \supset F^2 \supset \ldots$ кольца $K^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$ (см. [4]) фильтрацию $\{F_s^i\} = \{F^i \oplus \pi F^i\} \otimes \mathbf{Q}$ кольца $K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}}) \otimes \mathbf{Q}$, которую также назовем *γ-фильтрацией*.

14. Определение. Определим $GK_s(X)$ как $\mathbf{Z}$-градуированное кольцо, ассоциированное с γ-фильтрацией кольца $K_s^{\cdot}(X_{red}) \otimes \mathbf{Q}$.

15. Определение. а) Положим

$$f^*(y) := f_{red}^*(y)$$

для произвольного морфизма супермногообразий $f: X \to Y$ и любого $y \in GK_s(Y)$.

б) Положим

$$f_*(x) = (f_{\mathrm{red}})_*(x)$$

для морфизма $f: X \to Y$, проективного на подложках, и любого $x \in GK_s(X)$.

Легко проверить, что f^* — гомоморфизм колец, f_* — гомоморфизм групп со сдвигом $\mathbf{Z}$-градуировки и имеет место формула проекции

$$f_*(f^*(y) \cdot x) = y \cdot f_*(x).$$

16. Определение. Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль, $\mathscr{E}_{\mathrm{red}} = \mathscr{E}_0 \oplus \mathscr{E}_1$ и $(\Pi) := (\Pi)^{\mathscr{E}} := \Pi^{\mathrm{rk}\Pi\mathscr{E}_1}$. Тогда

а) i-ым классом Чжэня назовем класс $c_i(\mathscr{E}) := (\Pi)\, c_i(\mathscr{E}_0 - \Pi\mathscr{E}_1) = (\Pi)\, \gamma^i(\mathrm{cl}\,\mathscr{E}_0 - \mathrm{cl}\,\Pi\mathscr{E}_1 - \mathrm{rk}\,\mathscr{E}_0 + \mathrm{rk}\,\Pi\mathscr{E}_1) \bmod F_s^{i+1}$, где γ^i — стандартная операция в $K^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})$ (см. [4]), $c_0(\mathscr{E}) := (\Pi)$;

б) многочленом Чжэня назовем многочлен

$$c_t(\mathscr{E}) := (\Pi)\, c_t(\mathscr{E}_0 - \Pi\mathscr{E}_1) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\mathscr{E})\, t;$$

в) экспоненциальным характером Чжэня назовем класс

$$\mathrm{ch}(\mathscr{E}) := \mathrm{ch}(\mathscr{E}_0) - \Pi\,\mathrm{ch}(\Pi\mathscr{E}_1) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rk}\mathscr{E}_0} e^{a_i(\mathscr{E}_0)} - \Pi \sum_{i=1}^{\mathrm{rk}\Pi\mathscr{E}_1} e^{-\Pi a_i(\mathscr{E}_1)},$$

где $a_i(\mathscr{E}_0)$ и $a_i(\mathscr{E}_1)$ находятся из соотношений $c_t(\mathscr{E}_0) = \prod_{i=1}^{\mathrm{rk}\mathscr{E}_0} (1 + a_i(\mathscr{E}_0)\, t)$ и $c_t(\mathscr{E}_1) = \prod_{i=1}^{\mathrm{rk}\Pi\mathscr{E}_1} (\Pi + a_i(\mathscr{E}_1)\, t)$, определенных в силу принципа расщепления (см. [4]) для X_{red}.

Классы $c_i(\mathscr{E})$ и $\mathrm{ch}(\mathscr{E})$ являются элементами $GK_s(X)$, класс $c_t(\mathscr{E})$ — элементом мультипликативной группы $1 + tGK_s(X)[[t]]$.

17. Формула для $c_i(\mathscr{E})$ мотивирована следующей леммой.

Лемма. Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль, $\mathscr{E}_{\mathrm{red}} = \mathscr{E}_0 \oplus \mathscr{E}_1$. Тогда $\mathrm{cl}(\mathrm{Ber}\,\mathscr{E}) - (\Pi) \equiv (\Pi)\, \gamma^1(\mathrm{cl}\,\mathscr{E}_0 - \mathrm{cl}\,\Pi\mathscr{E}_1 - \mathrm{rk}\,\mathscr{E}_0 + \mathrm{rk}\,\Pi\mathscr{E}_1) \equiv (\Pi)\, \gamma^1(\mathrm{cl}\,\mathscr{E}_0 + \mathrm{cl}\,\Pi\mathscr{E}_1^* - \mathrm{rk}\,\mathscr{E}_0 - \mathrm{rk}\,\Pi\mathscr{E}_1) \bmod F_s^2$.

Доказательство. Согласно соответствующему утверждению из четной геометрии, $\mathrm{cl}(\det \mathscr{E}_0) - 1 \equiv \gamma^1(\mathrm{cl}\,\mathscr{E}_0 - \mathrm{rk}\,\mathscr{E}_0) \bmod F^2$ и $\mathrm{cl}(\det(-\Pi\mathscr{E}_1)) - 1 \equiv \gamma^1(\mathrm{cl}(-\Pi\mathscr{E}_1) + \mathrm{rk}\,\Pi\mathscr{E}_1) \bmod F^2$. В то же время, $\mathrm{cl}(\mathrm{Ber}\,\mathscr{E}) - (\Pi) = \mathrm{cl}(\mathrm{Ber}\,\mathscr{E}_{\mathrm{red}}) - (\Pi) = (\Pi)\,\mathrm{cl}(\det\mathscr{E}_0 \det(-\Pi\mathscr{E}_1)) - (\Pi) \equiv (\Pi)(\mathrm{cl}(\det\mathscr{E}_0) + \mathrm{cl}(\det(-\Pi\mathscr{E}_1)) - 2) \bmod F_s^2$, откуда следует первое сравнение. Второе получается аналогично, если заметить, что $\mathrm{cl}(\mathrm{Ber}\,\mathscr{E}) = (\Pi)\,\mathrm{cl}(\det\mathscr{E}_0 \cdot \det \Pi\mathscr{E}_1^*)$. □

18. Замечание. Эта лемма дает еще один способ определения характеристических классов: $c_i(\mathscr{E}) := (\Pi)\, c_i(\mathscr{E}_0 + \Pi\mathscr{E}_1^*)$ и по той же схеме — многочлена Чжэня и экспоненциального характера. Нетрудно установить (используя эту же лемму), что все указанные классы будут совпадать со старыми.

19. Замечание. Наше определение $\mathrm{ch}\,\mathscr{E}$ с точностью до Π совпадает с определением Квиллена [17]: если K — форма кривизны связности на $\mathscr{E}$ (то есть связности на $\mathscr{E}_0 \oplus \Pi\mathscr{E}_1$), то $\mathrm{ch}\,\mathscr{E} = \mathrm{str}\, e^{iK/2\pi} \bmod (1 - \Pi)$.

20. Непосредственно из определений и из соответствующих утверждений классической геометрии вытекает

Предложение. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ — локально свободные $\mathcal{O}_X$-модули, $\mathscr{L}$ — локально свободный $\mathcal{O}_X$-модуль ранга $1|0$ или $0|1$. Тогда их характеристические классы обладают следующими свойствами:

а) $\mathrm{ch}\,1 = 1$, $\mathrm{ch}\,\Pi = -\Pi$;

б) $c_1(\mathscr{L}) = \begin{cases} \mathrm{cl}\,\mathscr{L} - 1, & \text{если } \mathrm{rk}\,\mathscr{L} = 1|0, \\ \Pi - \mathrm{cl}\,\mathscr{L}, & \text{если } \mathrm{rk}\,\mathscr{L} = 0|1; \end{cases}$

в) $c_1(\mathscr{L}^*) = -c_1(\mathscr{L})$,

$c_1(\Pi\mathscr{E}) = -c_1(\mathscr{E})\, \Pi^{\mathrm{rk}\mathscr{E}_0 + \mathrm{rk}\Pi\mathscr{E}_1}$,

$\mathrm{ch}(\Pi\mathscr{E}) = -\Pi\,\mathrm{ch}(\mathscr{E})$;

г) для любого морфизма супермногообразий $f: X \to Y$

$$c_i(f_s^!(\mathscr{E})) = f^*(c_i(\mathscr{E}));$$

д) если $0 \to \mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}_2 \to 0$ точна, то $c_i(\mathscr{E}) = c_i(\mathscr{E}_1) \cdot c_i(\mathscr{E}_2)$, в частности $c_1(\mathscr{E}) = c_1(\mathscr{E}_1)(\Pi)^{\mathscr{E}_2} + c_1(\mathscr{E}_2)(\Pi)^{\mathscr{E}_1}$, $(\Pi)^{\mathscr{E}} = c_0^*(\mathscr{E}) = c_0(\mathscr{E}_1) \cdot c_0(\mathscr{E}_2) = (\Pi)^{\mathscr{E}_1} \cdot (\Pi)^{\mathscr{E}_2}$, $c_1(\mathscr{E}^*) = -c_1(\mathscr{E})$ и, кроме того, $\mathrm{ch}\,\mathscr{E} = \mathrm{ch}\,\mathscr{E}_1 + \mathrm{ch}\,\mathscr{E}_2$;

е) $\mathrm{ch}(\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}_2) = \mathrm{ch}\,\mathscr{E}_1 . \mathrm{ch}\,\mathscr{E}_2$;

ж) $\mathrm{ch}: KS(X) \otimes \mathbf{Q} \to GK_s(X)$ — вложение суперколец, если $F_s^d = 0$ для достаточно больших d — в частности, если X_{red} проективно и неособо. □

21. Замечание. Если продолжить характер ch с $KS(X)$ на $K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}}) \otimes \mathbf{Q}$ по формуле

$$\mathrm{ch}(x) := \mathrm{ch}(x \cdot \sigma_1^{-1}(N^*)) = \mathrm{ch}(i_s^!(x)),$$

где $x \in K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}}) \otimes \mathbf{Q}$, то $\mathrm{ch}: K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}}) \otimes \mathbf{Q} \to GK_s(X)$ в предположениях предложения 20ж) будет изоморфизмом

суперколец относительно (коммутативного) умножения в $K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})\otimes\mathbf{Q}$: $x_1 * x_2 := x_1\cdot x_2\cdot\sigma_1^{-1}(N^*)$ (ср. с предложением 9).

22. Определение. Определим класс Тодда

$$\mathrm{td}: KS(X)\to GK_s(X),$$

потребовав выполнения следующих условий:

а) $\mathrm{td}(l)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{x^{i-1}}{i!}\right)^{-1}$, $x=c_1(\mathscr{L})$, $l=\mathrm{cl}(\mathscr{L})$, $\mathrm{rk}\,\mathscr{L}=1|0$;

б) $\mathrm{td}(l)=\mathrm{ch}\,\sigma_1(\mathscr{L}^*)=1+e^{\Pi x}$, $x=c_1(\mathscr{L})$, $l=\mathrm{cl}(\mathscr{L})$, $\mathrm{rk}\,\mathscr{L}=0|1$, $\sigma_1(\mathscr{L}^*):=1+\mathrm{cl}(\Pi\mathscr{L}^*)$;

в) $\mathrm{td}\circ f_s^!=f^*\circ\mathrm{td}$ для любого морфизма $f:X\to Y$;

г) $\mathrm{td}(x_1+x_2)=\mathrm{td}\,x_1\cdot\mathrm{td}\,x_2$.

(Существование и единственность проверяются стандартным образом.)

23. Замечание. Класс Тодда, очевидно, выбран так, чтобы имела место теорема Гротендика—Римана—Роха для вложения $i: X_{\mathrm{red}}\to X$:

$$\mathrm{ch}(i_!^s x)=i_*(\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{td}(-N))$$

для всех $x\in K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})\otimes\mathbf{Q}$.

24. Замечание. Непосредственно из определения видно, что для локально свободного $\mathcal{O}^X$-модуля $\mathscr{E}$ $\mathrm{td}(\mathrm{cl}\,\mathscr{E})=\mathrm{td}(i_s^!(\mathrm{cl}\,\mathscr{E}))=\mathrm{td}(\mathrm{cl}_s^{\cdot}(\mathscr{E}_{\mathrm{red}}))$.

Класс $\mathrm{td}\,x$ продолжается на $K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})\otimes\mathbf{Q}$ по формуле

$$\mathrm{td}\,x:=\mathrm{td}(x\cdot\sigma_1^{-1}(N^*)),$$

где $x\in K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})\otimes\mathbf{Q}$.

25. Теорема Гротендика — Римана — Роха.

Теорема. Пусть $f:X\to Y$ — гладкий морфизм неособых алгебраических супермногообразий, пусть также морфизм f_{red} и многообразия X_{red} и Y_{red} проективны. Тогда для любого $x\in K_s^{\cdot}(X_{\mathrm{red}})\otimes\mathbf{Q}$, в том числе для $x\in KS(X)$, имеет место равенство элементов $GK_s(X)$

$$\mathrm{ch}(f_!^s(x))=f_*(\mathrm{ch}(x)\cdot\mathrm{td}(\mathscr{T}_f)), \tag{1}$$

где $\mathscr{T}_f:=\mathrm{cl}\,\mathscr{T}_X-\mathrm{cl}\,f^*(\mathscr{T}_Y)$ — *виртуальный касательный пучок морфизма* f.

Доказательство. Прямая проверка с использованием определений и результатов настоящего параграфа показывает, что равенство (1) сводится к теореме Гротендика—Римана—Роха для морфизма f_{red}. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березин Ф. А.*, Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983, 208 с. (РЖМат, 1983, 8Б1059К)
2. *Вайнтроб А. Ю.*, Деформации комплексных суперпространств и когерентных пучков на них. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат. Новейшие дост., в наст. томе
3. *Лейтес Д. А.*, Теория супермногообразий. Петрозаводск: КФ АН СССР, 1983, 200 с.
4. *Манин Ю. И.*, Лекции о *K*-функторе в алгебраической геометрии. Успехи мат. наук, 1969, *24*, № 5, 3—86 (РЖМат, 1970, 2А362)
5. —, Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984, 336 с. 1984, 336 с. (РЖМат, 1985, 10А407К)
6. *Огиевецкий О. В., Пенков И. Б.*, Двойственность Серра для проективных суперногообразий. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, № 1, 78—79
7. *Паламодов В. П.*, Инварианты аналитических Z_2-многообразий. Функц. анализ и его прил., 1983, *17*, № 1, 83—84 (РЖМат, 1983, 8А654)
8. *Пенков И. Б.*, Теория Бореля—Вейля—Ботта для классических супергрупп Ли. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. мат. Новейшие дост., в наст. томе
9. —, *Скорняков И. А.*, Проективность и $\mathcal{D}$-афинность флаговых супермногообразий. Успехи мат. наук, 1985, *40*, № 1, 211—212 (РЖМат, 1985, 6А353)
10. *Deligne P.*, La formule de dualité global. Lect. Notes Math., 1973, *305*, 481—587 (РЖМат, 1973, 7А428)
11. *Griffiths P. A.*, The extension problem in complex analysis. II. Amer. J. Math., 1966, *88*, 366—446 (РЖМат, 1967, 11А408)
12. *Grothendieck A.*, Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J., 1957, *9*, № 2, 119—183; № 3, 185—221 (РЖМат, 1959, 9867); Пер. на рус. яз.: *Гротендик А.*, О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961, 175 с. (РЖМат, 1962, 3А251К)
13. *Hartshorne R.*, Residues and duality. Lect. Notes Math., 1966, *20*, 426 pp. (РЖМат, 1969, 4А347)
14. *Molotkov V.*, Sheaves of automorphisms and invariants of Banach supermanifolds. Математика и математическо образование. Сборник докл. XV пролет. конф. съюза матем. България, Слънчев Бряг, 6—9/IV—1986 г. София, 1986, 281—283 (РЖМат, 1986, 12А774)
15. *Penkov I. B.*, $\mathcal{D}$-modules on supermanifolds. Invent. math., 1983, *71*, № 3, 501—512 (РЖМат, 1983, 9А585)
16. —, *Skornyakov I. A.*, Cohomologie des $\mathcal{D}$-modules tordus typiques sur les supervariétés de drapeaux. C. r. Acad. Sci., 1985, sér. I, *299*, № 20, 1005— (РЖМат, 1985, 10А407К)
17. *Quillen D.*, Superconnections and the Chern character. Topology, 1985, *24*, № 1, 89—95 (РЖМат, 1986, 1А786)
18. *Rothstein M.*, Deformations of complex supermanifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 1985, *92*, № 2, 255—260 (РЖМат, 1986, 7А724)
19. *Schmitt T.*, Coherent sheaves on analytic supermanifolds. Seminar Analysis. 1983/84. Acad. Wiss. DDR. Inst. Math., 1984, 94—112 (РЖМат, 1985, 10А582)