А. А. Абросимова, Д. А. Блинов, Т. В. Полякова, Оптимизация границ отклонений для множеств ограниченного остатка на двумерном торе, *Чебышевский сб.*, 2013, том 14, выпуск 1, 9–17

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 1 (2013)

УДК 511.2

ОПТИМИЗАЦИЯ ГРАНИЦ ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ МНОЖЕСТВ ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

А. А. Абросимова, Д. А. Блинов, Т. В. Полякова
(г. Владимир)

Аннотация

В работе рассмотрены разбиения двумерного тора на множества ограниченного остатка, построенные на основе шестиугольных разверток тора. Получена оптимизация оценок остаточных членов для этих множеств.

Ключевые слова: Развертка тора, множества ограниченного остатка, границы отклонений, метрики трехмерного пространства, оптимизация границ.

OPTIMIZATION OF BOUNDARIES OF REMAINS FOR BOUNDED REMAINDER SETS ON TWO-DIMENSIONAL TORUS

A.A. Abrosimova, D.A. Blinov, T. V. Polyakova
(Vladimir)

Abstract

We consider two-dimensional bounded remainder sets, which are constructed by a hexagonal developmant of the torus. Also, we find optimization of boundaries for these sets.

Key words: bounded remainder sets, distribution of fractional parts, toric development, exchanged domains, three-dimensional metric.

1. Введение

Впервые одномерные множества ограниченного остатка или BR – множества (*bounded remainder set*) были построены в работе E. Hecke [1], который доказал, что интервалы I длины $a + b\alpha$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, являются интервалами ограниченного остатка и для них справедлива следующая оценка остаточного члена

$$|\delta(\alpha, i, I)| \leqslant |b|.$$

Полное описание всех одномерных BR – множеств было получено в [2] H. Kesten, а в [3] были получены неулучшаемые по порядку оценки остаточного члена.

В двумерном случае первые попыки построения множеств ограниченного остатка были рассмотрены в работах P. Liardet [4], G. Rauzy [5], но получить явные оценки остаточного члена так и не удалось. Первый частный случай для двумерных торов был рассмотрен R. Szüsz в работе [6]. Ему удалось построить множества ограниченного остатка на основе параметрически заданных параллелограмов. В. Г. Журавлев в работе [7] рассмотрел множества ограниченного остатка для фрактальных разбиений Рози, для произвольной размерности это было сделано в работе [8], где была доказана многомерная теорема Гекке для разбиения тора.

В работе [9] построены три класса двумерных BR – множеств, на основе шестиугольных разверток, заданных двумя параметрами c_1 и c_2. Получены явные оценки остаточных членов или отклонении на этих множествах, а также высчитаны средние значения отклонений для данных множеств.

Возникает естественный вопрос: как подобрать параметры c_1 и c_2 таким образом, чтобы границы отклонений были оптимальны. В настоящей работе на основе некоторой трехмерной метрики найдена оптимизация границ отклонений считающих функций для двумерных множеств ограниченного остатка, построенных на основе шестиугольной развертки тора.

Авторы выражают благодарность своему научному руководителю В. Г. Журавлеву за внимание к работе.

2. Шестиугольная развертка двумерного тора

Рассмотрим шестиугольную развертку $T^2(c)$ единичного тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, построенную в ортонормированном базисе (e_1, e_2). Шестиугольник $T^2(c)$ задается с помощью вектора (см. рисунок 1)

$$c = (c_1, c_2) \in C = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; c_i \geq 0,\ \mathtt{min}(c_1, c_2) \leqslant 1\}. \tag{1}$$

У шестиугольника $T^2(c)$ противоположные стороны попарно параллельны и равны.

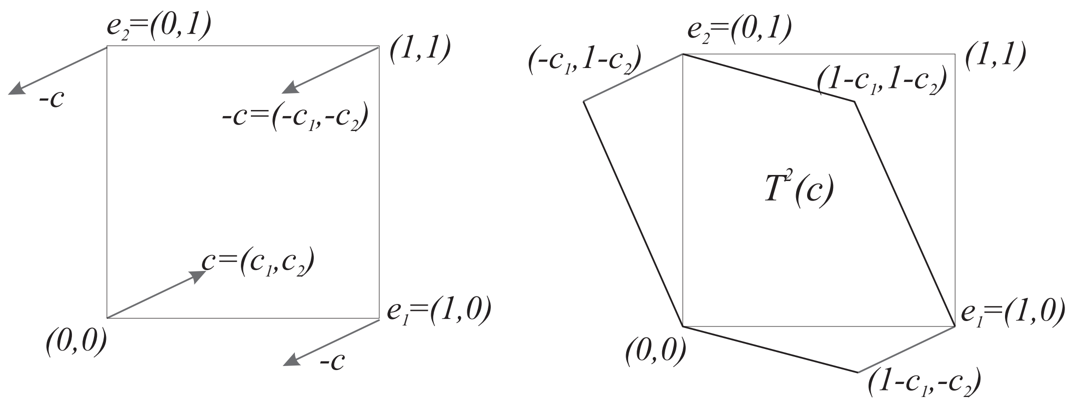

Рисунок 1.

Введем функцию $\sigma(x)$, которая определяется формулой $\sigma(x) = x_1 + x_2$, где x_1 и x_2 координаты точки x в ортонормированном базисе (e_1, e_2). Если $\sigma(c) > 1$, то $T^2(c)$ – невыпуклый, и выпуклый, если $\sigma(c) \leqslant 1$ (рис. 2).

Шестиугольник $T^2(c)$ является фундаментальной областью для квадратной решетки $\mathbb{Z}^2$, так как параллельными переносами на векторы $l \in \mathbb{Z}^2$ шестиугольником $T^2(c)$ можно замостить $\mathcal{T} = \coprod_{l\in\mathbb{Z}^2} T^2[l]$ плоскость $\mathbb{R}^2$. Таким образом его можно рассматривать как развертку тора $\mathbb{T}^2$.

Построим теперь вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ такой, что $\alpha = tc$, где $0 < t \leqslant 1$ — для выпуклого шестиугольника.

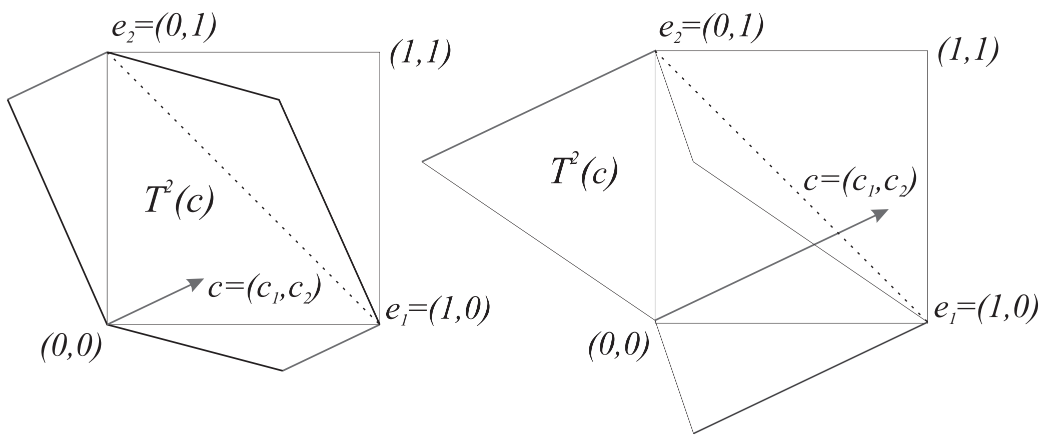

Рисунок 2.

Для невыпуклого шестиугольника — $0 < t < \frac{1}{\sigma(c)}$.

Сдвинем разбиение $\mathcal{T}$ на вектор $-\alpha = (-\alpha_1, -\alpha_2)$, при этом оставив саму область $T^2(c)$ неподвижной. Получим разбиение области $T^2(c)$ на три фигуры $T^2_k, k = 0, 1, 2$, площади которых соответственно равны

$$s_0 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_0, s_1 = \alpha_1, s_2 = \alpha_2. \tag{2}$$

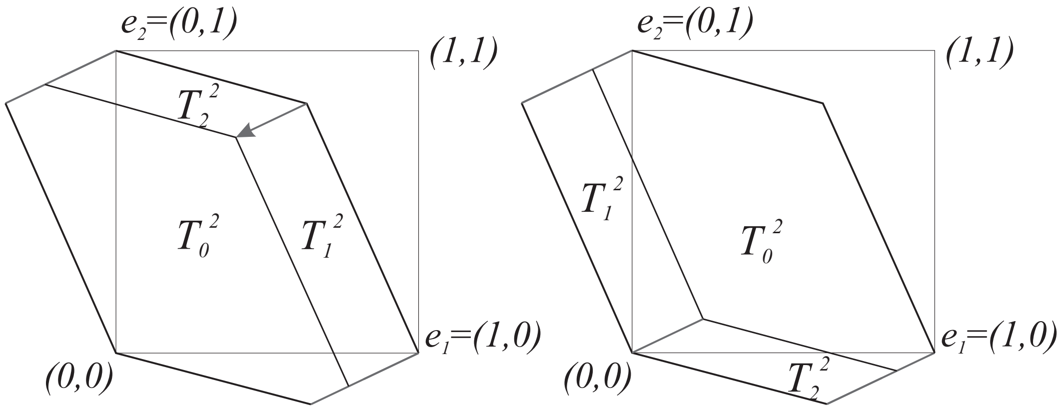

Рисунок 3.

Фигура $T^2(c)$ будет являться перекладывающейся разверткой тора (рис.3), т.е. существует преобразование

$$S_v : T^2(c) \to T^2(c) : x \to S_v(x) = x + v_k,$$

где v_k — вектора перекладывания для областей T_k^2, k=0, 1, 2 и они соответственно равны

$$v_0 = (\alpha_1, \alpha_2), v_1 = (\alpha_1 - 1, \alpha_2), v_2 = (\alpha_1, \alpha_2 - 1). \tag{3}$$

3. Отклонения считающих функций

Рассмотрим распределение точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\alpha}(0) = \{S_\alpha^i(0) \equiv i\alpha \bmod \mathbb{Z}^2, i = 0, 1, 2, \ldots\}$ движения точки на торе. Так как тору $\mathbb{T}^2$ соответствует его развертка $T^2(c)$, определим для каждой ее области $T_k^2, k = 0, 1, 2$ колличество попаданий в нее точек орбиты или считающие функции

$$r_k(i) = \sharp\{j : S_\alpha^j(0) \in T_k^2, 0 \le j < i\}.$$

Также определим отклонения $\delta_k(i)$ считающих функций $r_k(i)$ от ожидаемой величины is_k

$$\delta_k(i) = r_k(i) - is_k, \tag{4}$$

где s_k — площадь области $T_k^2, k = 0, 1, 2$, определенные в (2).

Введем понятия векторной дробной части $Fr(x)$ и сумарного векторного отклонения $\delta(i)$ необходимые для дальнейших рассуждений.

Для любого $x \in \mathbb{R}^2$ можно определить векторную дробную часть $Fr(x)$, полагая $Fr(x) = x'$, где $x' \equiv x \bmod \mathbb{Z}^2$ и $x' \in T^2$ [8]. Корректность этого определения вытекает из факта существования разбиения $\mathcal{T} = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^2} T^2[l]$.

Предложение 1. *Пусть*

$$\triangle Fr(x) = Fr(x + \alpha) - Fr(x)$$

— векторно-значная разностная функция с шагом α, где α вектор сдвига тора $\mathbb{T}^2$. Тогда выполняется равенство

$$\triangle Fr(x) = v(x) \tag{5}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^2$, где вектор

$$v(x) = \alpha + l(x), \tag{6}$$

при этом $l(x) = l_k$, если $x \in T_k^2$, для $k = 0, 1, 2$. Здесь $l_k = v_k - v_0, l_0 = -l_1 - l_2$.

Доказательство. Для любого x из развертки $T^2(c)$ имеем представление

$$S_\alpha(x) = x + v(x), \tag{7}$$

при этом $v(x) = v_k$ для $x \in T_k^2$ и $k = 0, 1, 2$, где v_k определены в (3). Так как $v_k \equiv \alpha \,\mathtt{mod}\, \mathbb{Z}^2$ выполняется равенство (6), где $l(x) = l_k$ для $x \in T_k^2$ и $k = 0, 1, 2$, то из (7) вытекает формула

$$S_\alpha(x) = x + \alpha + l(x),$$

причем для любого x из $T^2(c)$ его образ $x + \alpha + l(x)$ принадлежит торической развертке $T^2(c)$.

Отсюда получаем следующие равенства

$$Fr(x + \alpha) = x + \alpha + l(x) = x + v(x), \tag{8}$$

справедливые при любом $x \in T^2(c)$.

Для доказательства (5) заметим, что

$$x + \alpha \equiv x + \alpha + l(x) \,\mathtt{mod}\, \mathbb{Z}^2, \tag{9}$$

где $l(x) \in \mathbb{Z}^2$ и в силу (7) выполняется включение

$$x + \alpha + l(x) \in T^2(c). \tag{10}$$

Из (8) следует

$$\triangle Fr(x) = Fr(x + \alpha) - Fr(x) = x + \alpha + l(x) - x = \alpha + l(x) = v(x)$$

для любого $x \in T^2(c)$.

Рассмотрим теперь общий случай $x \in \mathbb{R}^2$.

Согласно разбиению $\mathcal{T} = \coprod_{l \in \mathbb{Z}^2} T^2[l]$ любое x можно представить в виде $x = x' + l$ для некоторых $x' \in T^2(c)$ и $l \in \mathbb{Z}^2$, и тогда

$$Fr(x) = x'. \tag{11}$$

По (9) и (10) имеем

$$\triangle Fr(x) = Fr(x+\alpha) - Fr(x) = x' + \alpha + l(x) - x' = \alpha + l(x) = v(x),$$

то есть снова получили равенство (5).□

Теперь определим суммарное векторное отклонение, как векторно-значную функцию

$$\delta(i) = \sum_{0\leqslant j<i} \triangle Fr(j\alpha) \tag{12}$$

для $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Из равенств (5) и (6) можем функцию (12) записать

$$\delta(i) = \sum_{0\leqslant j<i} (\alpha + l(j\alpha)) = i\alpha + \sum_{0\leqslant j<i} l(j\alpha) = i\alpha + \sum_{\substack{0\leqslant j<i \\ Fr(j\alpha)}} 1,$$

или в другой форме

$$\delta(i) = i\alpha + r_1(i)l_1 + r_2(i)l_2. \tag{13}$$

Спроектировав выражение (13) на направления векторов $e_0 = (-1, -1)$, $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$ получим

$$\delta_0(i) = -\delta(i)_{e_0}, \tag{14}$$

где $\delta(i)_{e_0}$ проекции вектора $\delta(i)$ на направление задаваемое вектором e_0, и

$$\delta_k(i) = -\delta(i)_{e_k}, \tag{15}$$

где $\delta(i)_{e_k}$ проекции вектора $\delta(i)$ на направления задаваемые векторами e_k, в случае $k = 1, 2$.

Для отклонений считающих функций $\delta_k(i), k = 0, 1, 2$ (4) в двумерном случае доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть дан сдвиг тора S_α на вектор α, и α - иррациональный, т. е. числа $\alpha_1, \alpha_2, 1$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$, пусть тор $\mathbb{T}^2$ разбит на области*

$$\mathbb{T}^2_k : \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2_0 \sqcup \mathbb{T}^2_1 \sqcup \mathbb{T}^2_2. \tag{16}$$

Тогда для отклонений выполняются неравенства:

$$\begin{gathered} -\sigma(c) \leqslant \delta_0(i) \leqslant 2 \text{ для } \sigma(c) \leqslant 1, \\ 1-\sigma(c) \leqslant \delta_0(i) \leqslant 1 \text{ для } \sigma(c) > 1, \\ -1 \leqslant \delta_1(i) \leqslant c_1, \\ -1 \leqslant \delta_2(i) \leqslant c_2. \end{gathered} \tag{17}$$

Доказательство. Из определения (12) сумарного векторного отклонения $\delta(i)$, следует соотношение

$$\delta(i) \in T^2(c). \tag{18}$$

Так как отклонения $\delta_k(i), k = 0, 1, 2$ являются проекциями сумарного векторного отклонения $\delta(i)$ и могут быть записаны в форме (14) и (15), тогда чтобы найти границы отклонений δ_k для каждой области $\mathbb{T}_k, k = 0, 1, 2$ разбиения тора (16), спроектируем выражение (18) на направления задаваемые векторами $e_0 = (-1, -1)$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ и определим крайние значения проекций. Неравенства (17) доказаны. □

Таким образом, границы отклонений зависят только от формы развертки и не зависят от выбора вектора сдвига α, то есть полностью определяются параметром $c = (c_1, c_2)$. Возникает естественный вопрос о минимизации границ отклонений.

4. Минимизация границ отклонений

Для того чтобы минимизировать границы отклонений будем рассматривать отклонения $\delta_k, k = 0, 1, 2$ в качестве координат трехмерного вектора

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (\delta_1(i), \delta_2(i), \delta_0(i)). \tag{19}$$

Из (14) и (15) следует что $\delta_0(i)$ может быть записано в форме $\delta_0 = -\delta_1 - \delta_2$, то есть $x_3 = -x_1 - x_2$, таким образом вектор (19) может быть переписан в форме

$$x = (x_1, x_2, -x_1 - x_2) = (\delta_1(i), \delta_2(i), -\delta_1(i) - \delta_2(i)). \tag{20}$$

Для оптимизации отклонений (19) необходимо выбрать метрику трехмерного пространства. Выберем трехмерную метрику

$$d(x) = |x_1| + |x_2| + |x_3|, \tag{21}$$

где $|\ |$ – обозначает абсолютную величину.

Учитывая равенство (20) выражение для метрики (21) перепишем в виде

$$d(x) = |x_1| + |x_2| + | - x_1 - x_2|. \tag{22}$$

Теорема 2. *Пусть отклонения $\delta_k, k = 0, 1, 2$ задают трехмерный вектор x, определенный формулой (19), и пусть его длина $d(x)$ определена в (21). Тогда выполняется равенство*

$$\inf_c (\sup_{x \in T^2(c)} d(x)) = 2, \tag{23}$$

где c определено в (1).

Доказательство. Разобьем область $T^2(c)$ на три непересекающиеся области (см. рисунок 4)

$$T^2(c) = T^2_{++} \cup T^2_{+-} \cup T^2_{-+}. \tag{24}$$

Для доказательства (23), найдем для каждой области $T^2_{++}, T^2_{+-}, T^2_{-+}$ разбиения (24) максимальное значение для $d(x)$.

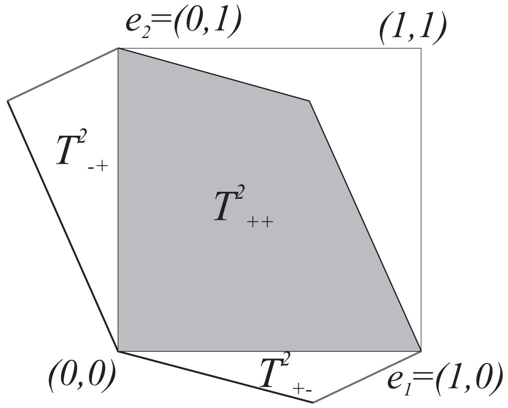

Рисунок 4.

Учитывая (22), в области T^2_{++} выражение $d(x)$ примет вид

$$d(x) = 2x_1 + 2x_2 = (2,2) \cdot (x_1, x_2), \tag{25}$$

в областях T^2_{+-} и T^2_{-+} соответственно —

$$d(x) = 2x_1 \text{ и } d(x) = 2x_2, \tag{26}$$

где $\cdot$ – обозначает скалярное произведение. Из (25) и (26) получим

$$\sup_{x\in T^2_{++}} d(x) = (2,2)\cdot(1-c_1, 1-c_2) = 4 - 2\sigma(c),$$
$$\sup_{x\in T^2_{+-}} d(x) = 2,$$
$$\sup_{x\in T^2_{-+}} d(x) = 2.$$

Тогда $\inf_c(\sup_{x\in T^2_{++}} d(x), \sup_{x\in T^2_{+-}} d(x), \sup_{x\in T^2_{-+}} d(x)) = 2$.
Формула (23) доказана. □

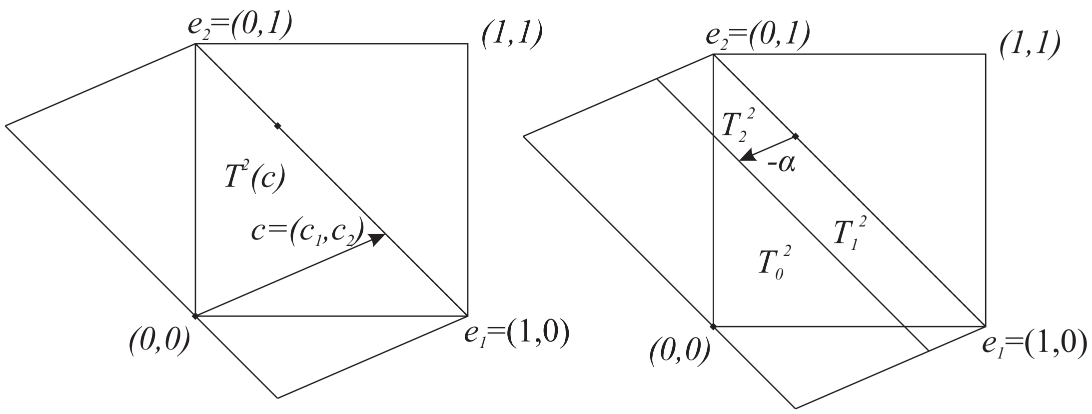

Рисунок 5.

Таким образом в метрике $d(x)$, определенной в (21) оптимальные границы отклонений $\delta_k, k = 0, 1, 2$ достигаются при $\sigma(c) = c_1 + c_2 = 1$. Что соответствует случаю, изображенному на рисунке 5.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins. Math. Sem. Hamburg. Univ. 1921. Bd. 1 P. 54—76.
2. Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. 1966. V. 12. P. 193—212.
3. Шутов А. В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. Т. 5. Вып. 3. С. 112—121.
4. Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. 1987. V. 61. P. 267—293.
5. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. V. 110. P. 147—178.
6. Szüsz R. Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1954. V. 5. P. 35—39.
7. Журавлев В. Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83—106.
8. Журавлев В. Г. Многомерное обобщение теоремы Гекке. // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24. Вып. 1. С. 1—33.
9. Абросимова А. А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе. // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 4(40). С. 15—23.

Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых.
Поступило 11.03.2013