И. П. Мысовских, Об оценке остатка кубатурной формулы для гипершара, *Матем. заметки*, 1969, том 6, выпуск 5, 627–632

https://www.mathnet.ru/mzm6971

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 5 (1969), 627—632

УДК 518

ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТКА КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГИПЕРШАРА

И. П. Мысовских

Указана оценка остаточного члена кубатурной формулы специального вида для вычисления интеграла по n-мерному шару. Алгебраическая степень точности формулы наивысшая среди формул такого вида и равна $4p-1$. В оценку входит верхняя граница абсолютных величин всех частных производных порядка $4p$ от подинтегральной функции в области интегрирования. Библ. 3 назв.

Пусть D — единичный n-мерный шар:

$$x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1.$$

В [1] были получены кубатурные формулы наивысшей алгебраической степени точности вида

$$\int_D f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{p} A_j\int_{S_j} f(x)\,dS_j+R_p(f), \qquad (1)$$

где в правой части в кубатурную сумму входит поверхностный интеграл по n-мерной сфере S_j с центром в начале координат и радиусом r_j, A_j — коэффициент и $R_p(f)$ — остаточный член.

$$R_p(f)=0,$$

когда $f(x)$ — любой многочлен от переменных $x_1,\ldots,x_n$ степени $\leqslant 4p-1$. Цель настоящей заметки — указать оценку остаточного члена $R_p(f)$.

При этом предполагаем, что f имеет частные производные порядка $4p$ по всем переменным и эти производные непрерывны в D. Здесь и в дальнейшем сохранены обозначения, применявшиеся в [1].

В интегралах из (1) перейдем к сферическим координатам

$$x_1 = r\cos\varphi_1,$$
$$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},$$
$$x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1},$$
$$0 \leqslant \varphi_i \leqslant \pi,\ i = 1, 2, \dots, n-2,\ 0 \leqslant \varphi_{n-1} < 2\pi.$$

Получим

$$R_p(f) = \int_0^1 r^{n-1} F(r)\,dr - \sum_{j=1}^p A_j r_j^{n-1} F(r_j), \tag{2}$$

где

$$F(r) = \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi_1, \dots, r\sin\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-1}) \times$$
$$\times \sin^{n-2}\varphi_1\dots\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_1\dots d\varphi_{n-1}. \tag{3}$$

Правую часть равенства (2) будем рассматривать как значение остаточного члена квадратурной формулы с весом r^{n-1}, узлами r_j и коэффициентами $A_j r_j^{n-1}$:

$$l_p(\varphi) = \int_0^1 r^{n-1}\varphi(r)\,dr - \sum_{j=1}^p A_j r_j^{n-1}\varphi(r_j) \tag{4}$$

на функции $F(r)$, так что

$$R_p(f) = l_p(F). \tag{5}$$

ТЕОРЕМА. *Если $\varphi(r)$ — четная и имеет непрерывную производную порядка $4p$ на $[-1, 1]$, то*

$$l_p(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{\varphi^{(4p)}(\eta)}{(4p)!} I_p, \qquad \eta \in [0, 1], \tag{6}$$

где I_p определяется по-разному в зависимости от того n четно или нет. Если n четное, то

$$I_p = \int_0^1 t^{\frac{(n-2)}{2}} \omega_p^2(t)\,dt, \tag{7}$$

где $\omega_p(t)$ — ортогональный многочлен степени p веса $t^{(n-2)/2}$ и промежутка $[0, 1]$ с коэффициентом 1 при t^p. Если n нечетное, то

$$I_p = \int_{-1}^1 r^{n-1}\sigma_{2p}^2(r)\,dr, \tag{8}$$

где $\sigma_{2p}(r)$ — ортогональный многочлен степени $2p$ веса

r^{n-1} *и промежутка* $[-1, 1]$ *с коэффициентом при* r^{2p}, *равным единице.*

Доказательство. n — четное. Докажем, что

$$l_p(r^{2k}) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1. \tag{9}$$

Имеем

$$l_p(r^{2k}) = \int_0^1 r^{n-1} r^{2k}\, dr - \sum_{j=1}^{p} A_j r_j^{n-1} r_j^{2k} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 t^{\frac{(n-2)}{2}} t^k dt - \sum_{j=1}^{p} D_j t_j^k\right] = 0$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots, 2p-1$, так как при n четном $t_j = r_j^2$ и $D_j = 2A_j r_j^{n-1}$ суть узлы и коэффициенты формулы типа Гаусса для промежутка $[0, 1]$ и веса $t^{(n-2)/2}$ (см. [1]).

Построим интерполяционный многочлен Эрмита $P(r)$ по условиям

$$P(r_j) = \varphi(r_j), \qquad P'(r_j) = \varphi'(r_j),$$

$$P(-r_j) = \varphi(-r_j),\ P'(-r_j) = \varphi'(-r_j),\ j = 1, 2, \ldots, p.$$

Очевидно, $P(r)$ является четным многочленом и его степень $\leqslant 4p-2$. Запишем представление остаточного члена интерполирования:

$$\varphi(r) - P(r) = \frac{1}{(4p)!}(r^2 - r_1^2)^2 \ldots (r^2 - r_p^2)^2 \varphi^{(4p)}(\xi),$$

где $\xi \in (-1, 1)$, а ввиду четности $\varphi^{(4p)}$ можем считать, что $\xi \in [0, 1]$. Умножим обе части последнего равенства на r^{n-1} и проинтегрируем по r от нуля до единицы, при этом примем во внимание (9) и воспользуемся обобщенной теоремой о среднем. Получим

$$l_p(\varphi) = \frac{\varphi^{(4p)}(\eta)}{(4p)!}\int_0^1 r^{n-1}(r^2 - r_1^2)^2 \ldots (r^2 - r_p^2)^2\, dr, \qquad \eta \in [0,1].$$

Остается сделать замену переменной интегрирования $r^2 = t$, чтобы получить (6).

n — нечетное. Так как $\varphi(r)$ — четная функция, то

$$l_p(\varphi) = \int_0^1 r^{n-1} \varphi(r)\, dr - \sum_{j=1}^{p} A_j r_j^{n-1} \varphi(r_j) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^1 r^{n-1} \varphi(r)\, dr - \sum_{j=-p}^{\prime p} E_j \varphi(r_j)\right].$$

В квадратных скобках имеем остаточный член квадратурной формулы типа Гаусса с $2p$ узлами для промежутка $[-1,1]$ и веса r^{n-1}, так как при n нечетном r_j, r_{-j}, $E_j = E_{-j} = A_j r_j^{n-1}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, суть узлы и коэффициенты такой формулы [1]. Чтобы получить формулу (6), достаточно воспользоваться известным представлением остаточного члена квадратурной формулы типа Гаусса. Теорема доказана.

Интеграл I_p при n четном нетрудно вычислить, если воспользоваться представлением $\omega_p(t)$ по формуле Родрига. Получим

$$I_p = \frac{[(q+p)!]^2 (p!)^2}{[(q+2p)!]^2 (q+2p+1)}, \qquad q = \frac{n-2}{2}. \tag{10}$$

При n нечетном вычисление I_p можно осуществить, если записать разложение $r^{n-1}\sigma_{2p}(r)$ по многочленам Лежандра. Например, при $n = 3$ найдем

$$I_p = \frac{2^{4p+3}}{4p+3} \frac{[(2p+1)!]^4}{[(4p+2)!]^2}. \tag{11}$$

Функция $F(r)$, определяемая формулой (3), имеет непрерывную производную порядка $4p$ на $[-1, 1]$, как это следует из предположения о существовании непрерывных частных производных порядка $4p$ у функции $f(x)$. Укажем верхнюю границу для $|F^{(4p)}(r)|$ в предположении, что известна положительная постоянная M такая, что

$$\left| \frac{\partial^{4p} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leqslant M \text{ в } D$$

для всех целых неотрицательных α_i, удовлетворяющих равенству $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 4p$.

Имеем

$$\left| \frac{\partial^{4p} f(r\cos\varphi_1, \ldots, r\sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-1})}{\partial r^{4p}} \right| =$$

$$= \left| \left(\cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{4p} f \right| \leqslant$$

$$\leqslant M (|\cos\varphi_1| + \cdots + |\sin\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-1}|)^{4p},$$

и так как по неравенству Коши — Буняковского

$$|\cos\varphi_1| + \ldots + |\sin\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-1}| \leqslant \sqrt{n},$$

то получаем

$$\left|\frac{\partial^{4p} f(r\cos\varphi_1, \ldots)}{\partial r^{4p}}\right| \leqslant Mn^{2p}. \tag{12}$$

Из равенства

$$F^{(4p)}(r) = \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^{4p} f(r\cos\varphi_1, \ldots)}{\partial r^{4p}} \times$$
$$\times \sin^{n-2}\varphi_1 \ldots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}$$

на основании (12) находим

$$|F^{(4p)}(r)| \leqslant Mn^{2p}\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{13}$$

Функция $F(r)$ четная на $[-1,\ 1]$. Доказательство этого утверждения при $n = 2$ и $n = 3$ имеется в [2]. Такое же доказательство можно провести для любого n.

Так как $F(r)$ удовлетворяет условим теоремы, то из (5), (6) и (13) получаем

$$|R_p(f)| \leqslant \frac{M}{(4p)!} I_p \frac{n^{2p}\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \tag{14}$$

Это и есть то неравенство, которое мы хотели получить.

В частности, при $n = 2$ из (14) и (7) получим

$$|R_p(f)| < \frac{\pi^2 M}{2^{2p+1}(4p)!}. \tag{15}$$

При этом мы воспользовались неравенством

$$\frac{2^{4p}(p!)^4}{[(2p)!]^2(2p+1)} < \frac{\pi}{2}.$$

В [3] рассматривается вопрос об оценке $|R(f)|$ при $n = 2$. Там указано менее точное по сравнению с (15) неравенство

$$|R_p(f)| < \frac{\pi M}{(p!)^2(4p)!!}.$$

Статья В. К. Дзядыка и В. А. Панасовича [3] и послужила поводом к написанию настоящей заметки.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступило
24.I.1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Мысовских И. П., Кубатурные формулы для вычисления интегралов по гипершару, Докл. АН СССР, **147**, № 3 (1962), 552—555.

[2] Канторович Л. В., Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций, Труды Матем. ин-та АН СССР, **28** (1949), 3—25.

[3] Дзядык В. К., Панасович В. А., Оценка остатка для некоторых кубатурных формул, Украинский матем. ж., **20**, № 2 (1968), 147—155.