Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 12

Издание выходит с 2006 года

В. А. Ватутин

Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса

Москва
2009

УДК 519.218.23
ББК (В)22.171
Л43

Л43 **Лекционные курсы НОЦ**/ Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2009. Вып. 12: Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса / Ватутин В. А. – 112 с.

ISBN 5-98419-031-1

Серия "Лекционные курсы НОЦ" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии "Лекционные курсы НОЦ" публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит курс лекций "Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса" В. А. Ватутина, прочитанный в осеннем семестре 2008 года в Научно-образовательном центре МИАН.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00078).

ISBN 5-98419-031-1

Оглавление

1. Введение

Предлагаемый выпуск основан на спецкурсе по теории ветвящихся процессов Беллмана–Харриса, состоявшем из 10 лекций и прочитанном автором в осеннем семестре 2008 года в Научно-образовательном центре МИАН. Этот спецкурс является естественным (хотя и независимым по содержанию) продолжением курса лекций [10], посвященного ветвящимся процессам Гальтона–Ватсона и марковским однородным ветвящимся процессам с непрерывным временем, а также их применениям в биологии и теории массового обслуживания. Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса, будучи обобщением упомянутых выше моделей ветвящихся процессов, обладают рядом существенных отличий, особенно заметных при исследовании так называемых нерегулярных процессов, т.е. процессов, в которых за конечное время с положительной вероятностью рождается бесконечное число частиц, а также при сравнении асимптотического поведения вероятностей невырождения и количества частиц в критических процессах Беллмана–Харриса и Гальтона–Ватсона. Именно этим вопросам и уделено основное внимание в данном выпуске. Заключительные разделы работы содержат краткое обсуждение еще одной популярной вероятностной модели эволюции популяций - общих ветвящихся процессов или, как их часто называют в англоязычной литературе, процессов Крампа–Мода–Ягерса. Общие ветвящиеся процессы являются мощным инструментов исследования вероятностных моделей, возникающих в биологии, демографии, теории алгоритмов и других областях. В курсе лекций богатые возможности теории общих ветвящихся процессов используются для анализа распределения времени обслуживания заявок в системах обслуживания с разделением процессора.

При подготовке лекций я использовал, наряду с собственными результатами, ряд статей и монографий других авторов. Соответствующие ссылки можно найти в конце данного выпуска.

Заинтересованный читатель может найти изложение других разделов теории ветвящихся процессов Беллмана–Харриса и общих ветвящихся процессов, обратившись к монографиям [12], [18], [21], [22], [26] и [27], а также воспользовавшись списком литературы из обзоров [11] и [28].

В работе над рукописью мне помогали ст. научн. сотр. МИАН, к.ф.-м.н. Елена Дьяконова, а также слушатели моих лекций Елена Хиль и Андрей Лосев, за что я им весьма благодарен.

2. Первое знакомство с процессами Беллмана–Харриса

Ветвящийся процесс Беллмана–Харриса является математической моделью эволюции популяции частиц (индивидуумов), в котором частицы имеют случайную продолжительность жизни и, погибая, производят потомство. В данном курсе лекций мы ограничимся лишь неформальным описанием процесса Беллмана–Харриса без подробного построения вероятностного пространства, на котором этот процесс задан. Мы будем лишь предполагать, что это пространство достаточно богато для того, чтобы все встречающиеся в дальнейшем случайные величины были на нем корректно определены. Читатель может найти детальную конструкцию соответствующего вероятностного пространства в главе VI монографии Т. Харриса [21].

2.1. Описание модели. Пусть $Z(t)$ – число частиц в процессе Беллмана–Харриса в момент времени t. Всюду далее, если не указано иное, предполагается, что эволюция процесса начинается в момент $t = 0$ с одной частица нулевого возраста: $Z(0) = 1$. Первоначальная частица процесса имеет случайную продолжительность жизни τ с распределением $G(t)$ и порождает в конце жизни случайное число потомков ξ в соответствии с производящей функцией $f(s)$. Новорожденные частицы образуют первое поколение процесса ($Z(\tau) \stackrel{d}{=} \xi$) и эволюционируют после момента рождения независимо друг от друга, причем в вероятностном смысле так же, как и первоначальная частица, порождая потомков второго поколения, частицы второго поколения эволюционируют после момента рождения независимо друг от друга и остальных частиц, причем в вероятностном смысле так же, как и первоначальная частица, и так далее.

Частными случаями процессов Беллмана–Харриса являются ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона, в которых продолжительность жизни любой частицы равна единице, и марковские однородные ветвящиеся процессы, в которых продолжительность жизни частиц имеет экспоненциальное распределение. Свойства таких процессов подробно рассматривались в курсе лекций [10].

Пусть $F(t;s) = \mathbf{E}[s^{Z(t)}|\, Z(0) = 1]$ - производящая функция числа частиц в процессе Беллмана–Харриса в момент t. Используя свойства условного математического ожидания и независимость эволюций частиц, нетрудно проверить, что

$$
\begin{aligned}
F(t;s) &= \mathbf{E}\left[s^{Z(t)}; \tau > t\right] + \int_0^t \mathbf{E}\left[s^{Z(t)}|\, \tau = u\right]\, dG(u) \\
&= s\mathbf{P}\left(\tau > t\right) + \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\xi = k\right) \mathbf{E}\left[s^{Z(t)}|\, \tau = u; \xi = k\right]\, dG(u) \\
&= s(1 - G(t)) + \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\xi = k\right) \left(\mathbf{E}[s^{Z(t-u)}|\, Z(0) = 1]\right)^k\, dG(u) \\
&= s(1 - G(t)) + \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\xi = k\right) F^k(t-u;s)\, dG(u) \\
&= s(1 - G(t)) + \int_0^t f(F(t-u;s))\, dG(u).
\end{aligned}
$$

Таким образом, функция $F(t;s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$
F(t;s) = s(1 - G(t)) + \int_0^t f(F(t-u;s))\, dG(u). \tag{1}
$$

Здесь точки $t = 0$ и $t = t+$ включены в область интегрирования.

Начиная с этого момента, мы предполагаем, что $G(0+) = 0$, и, таким образом, исключаем возможность гибели частиц сразу после рождения. Это сделано для того, чтобы избежать анализа ряда патологических случаев, требующих в некоторых ситуациях специальных рассуждений.

Наша непосредственная задача – изучить свойства решений уравнения (1).

2.2. Вероятность вырождения процессов Беллмана–Харриса. Ясно, что величина $F(t;0) = \mathbf{P}(Z(t) = 0)$ является вероятностью вырождения процесса Беллмана–Харриса не позднее момента t. Полагая $s = 0$ в (1), получаем

$$F(t;0) = \int_0^t f(F(t-u;0))\,dG(u).$$

Предел $Q := \lim_{t\to\infty} F(t;0)$, существующий в силу очевидной монотонности функции $F(t;0)$ по t, будем называть вероятностью вырождения процесса $Z(t)$, $t \geqslant 0$. Ясно, что

$$Q = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(F(t-u;0))\,dG(u) \leqslant \lim_{t\to\infty} f(F(t;0))G(t) \leqslant f(Q).$$

С другой стороны, при любом фиксированном $T \in (0,t)$

$$Q \geqslant F(t;0) \geqslant \int_0^T f(F(t-u;0))\,dG(u) \geqslant f(F(t-T;0))G(T). \quad (2)$$

Устремляя в последнем соотношении сначала $t \to \infty$, а затем $T \to \infty$, заключаем, что $Q \geqslant f(Q)$. Таким образом, вероятность Q вырождения процесса Беллмана–Харриса удовлетворяет уравнению

$$Q = f(Q). \quad (3)$$

Отсюда, в частности, следует, что $Q = 1$, если $f'(1) \leqslant 1$. Позднее мы покажем, что величина Q является минимальным неотрицательным решением уравнения (3) и, таким образом, совпадает с вероятностью вырождения ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона, имеющего $f(s)$ в качестве производящей функции числа непосредственных потомков частиц.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится последовательность функций $F_0(t;s) :\equiv 1$,

$$F_{n+1}(t;s) := s(1-G(t)) + \int_0^t f(F_n(t-u;s))\,dG(u), \quad n \geqslant 0.$$

Свойства этой последовательности описаны в следующей теореме.

Теорема 1. *Для любого* $n = 0, 1, \ldots$ *и всех* $s \in [0,1]$, $t \geqslant 0$

$$F_{n+1}(t;s) \leqslant F_n(t;s) \tag{4}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t;s) = F(t;s), \tag{5}$$

где, как и раньше, $F(t;s) = \mathbf{E}[s^{Z(t)} |\, Z(0) = 1]$.

Доказательство. Пусть $Z^{(n)}(t)$ – общее число частиц в поколениях $0, 1, \ldots, n-1$, существующих в процессе в момент t. Ясно, что

$$\mathbf{E}s^{Z^{(1)}(t)} = s(1 - G(t)) + G(t) = F_1(t;s).$$

Отталкиваясь от этого представления и использую индукцию, нетрудно проверить, что

$$F_n(t;s) = \mathbf{E}s^{Z^{(n)}(t)}.$$

Отсюда легко следует (4). Замечая, что $Z^{(n)}(t) \uparrow Z(t)$ при $n \to \infty$, и используя теорему о монотонной сходимости, нетрудно убедиться в справедливости соотношения (5).

Теорема 1 доказана. □

Рассмотрим теперь еще одну последовательность функций, определяемую равенствами $F_0^*(t;s) :\equiv 0$,

$$F_{n+1}^*(t;s) := s(1 - G(t)) + \int_0^t f(F_n^*(t-u;s))\, dG(u), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{6}$$

Теорема 2. *Для любого* $n = 0, 1, \ldots$ *и всех* $s \in [0,1]$, $t \geqslant 0$

$$F_{n+1}^*(t;s) \geqslant F_n^*(t;s) \tag{7}$$

и, кроме того, существует функция $F^*(t;s)$*, удовлетворяющая уравнению*

$$F^*(t;s) = s(1 - G(t)) + \int_0^t f(F^*(t-u;s))\, dG(u), \tag{8}$$

такая, что

$$\lim_{n\to\infty} F_n^*(t;s) = F^*(t;s). \tag{9}$$

Доказательство. Ясно, что $F_1^*(t;s) \geqslant F_0^*(t;s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, $t \geqslant 0$. Используя индукцию и определение последовательности $F_n^*(t;s)$, нетрудно убедиться в справедливости (7). Отсюда легко следует существование предела (9) и равенство (8). □

Теорема 3. *Если вероятность вырождения* $Q = 0$, *то* $F(t;0) \equiv 0$ *для любого* $t \geqslant 0$; *если* $Q > 0$, *то* $F(t;0) < Q$ *для любого* $t \geqslant 0$, *причем* $\lim_{t\to\infty} F(t;0) = Q$.

Доказательство. Ясно, что необходимо проверить лишь справедливость неравенства $F(t;0) < Q$ при всех $t \geqslant 0$. Пусть

$$t_0 := \sup\{t : F(t;0) < Q\}.$$

Предположим, что $t_0 < \infty$. Имеем

$$F(t;0) = \int_0^t f(F(t-u;0))\, dG(u), \quad t > t_0.$$

Пусть $t \downarrow t_0$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 < Q &= \lim_{t\downarrow t_0} \int_0^t f(F(t-u;0))\, dG(u) \\ &= \int_0^{t_0+} f(F(t_0-u+;0))\, dG(u) \leqslant QG(t_0+). \end{aligned}$$

Следовательно, $G(t_0+) = 1$. Таким образом, предположение $t_0 < \infty$ влечет соотношение

$$\int_0^{t_0+} [Q - f(F(t_0-u+;0))]\, dG(u) = 0. \tag{10}$$

Однако такое равенство невозможно, поскольку подынтегральное выражение $Q - f(F(t_0-u+;0)) > 0$ при $u > 0$, а величина $G(t_0+) - G(0)$ положительна. Полученное противоречие показывает, что $t_0 = \infty$. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Уравнение*

$$\phi(t;s) = s(1-G(t)) + \int_0^t f(\phi(t-u;s))\, dG(u) \tag{11}$$

имеет единственное измеримое решение, удовлетворяющее соотношению $0 \leqslant \phi(t;s) \leqslant 1$ *при любых значениях* $s \in [0,1]$ *и* $t \geqslant 0$.

Доказательство. Существование у уравнения (11) хотя бы одного решения с желаемыми свойствами следует из теорем 1 и 2. Мы знаем, что при любых $s \in [0,1]$ и $t \geqslant 0$

$$\phi(t;s) \leqslant 1 \equiv F_0(t;s).$$

Отсюда, используя индукцию, нетрудно показать, что

$$\phi(t;s) \leqslant F(t;s).$$

Аналогично,

$$F^*(t;s) \leqslant \phi(t;s)$$

и, таким образом,

$$F^*(t;s) \leqslant \phi(t;s) \leqslant F(t;s).$$

Покажем, что найдется число $s_0 \in (0,1)$ такое, что $F^*(t;s) = F(t;s)$ при всех $t \geqslant 0$ и $0 \leqslant s \leqslant s_0$. Действительно, в силу того, что функция $F(t;s)$ выпукла по $s \in [0,1]$ при любом фиксированном $t \geqslant 0$, справедливы оценки

$$F(t;s) \leqslant F(t;0) + s(F(t;1) - F(t;0)) \leqslant F(t;0) + s(1 - F(t;0)). \tag{12}$$

Рассмотрим теперь отдельно случаи $Q < 1$ и $Q = 1$.

Если $Q < 1$, то, как мы знаем из курса лекций [10], $f'(Q) < 1$. Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ такое, что $f'(Q+\varepsilon) < 1$. Ясно, что в этом случае при $0 \leqslant s \leqslant Q+\varepsilon$ справедливо неравенство $f'(s) \leqslant f'(Q+\varepsilon) < 1$. Пусть $s_0 = \varepsilon/2$. В силу оценок (12) $F(t,s) < Q+\varepsilon$ для $0 \leqslant s \leqslant s_0$ и всех $t \geqslant 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F(t;s) - F^*(t;s) &= \int_0^t \left[f(F(t-u;s)) - f(F^*(t-u;s))\right] dG(u) \\ &\leqslant f'(Q+\varepsilon) \int_0^t \left[F(t-u;s) - F^*(t-u;s)\right] dG(u), \quad 0 \leqslant s \leqslant s_0. \end{aligned}$$

Положим

$$M(s) = \sup_{t \geqslant 0} \left[F(t;s) - F^*(t;s)\right].$$

Тогда

$$M(s) \leqslant f'(Q+\varepsilon) M(s),$$

что при нашем выборе $\varepsilon > 0$ возможно лишь в случае $M(s) = 0$. Следовательно, $F^*(t;s) = F(t;s)$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$. Поскольку функции $F^*(t;s)$ и $F(t;s)$ аналитичны в круге $|s| < 1$ при каждом $t \geqslant 0$, то теорема единственности для аналитических функций влечет $F^*(t;s) = F(t;s)$, $t \geqslant 0$, что доказывает теорему для случая $Q < 1$.

Если $Q = 1$, то из теоремы 3 и оценки (12) следует, что для любого фиксированного $T > 0$ можно найти числа $s_0 \in (0,1)$ и $\delta > 0$ такие, что $F(t;s) < 1-\delta$ при $0 \leqslant s \leqslant s_0$ и $0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда следует, что

$$0 \leqslant F(t;s) - F^*(t;s) = \int_0^t \left[f(F(t-u;s)) - f(F^*(t-u;s))\right] dG(u)$$

$$\leqslant \int_0^t f'(F(t-u;s))\left[F(t-u;s) - F^*(t-u;s)\right] dG(u), \quad 0 \leqslant s \leqslant s_0,$$

и, кроме того, $f'(F(t-u;s)) \leqslant f'(1-\delta) < 1$. Из этих оценок, как и в случае $Q < 1$, можно вывести, что $F^*(t;s) = F(t;s)$ при $0 \leqslant s \leqslant s_0$ и $0 \leqslant t \leqslant T$. Теперь теорема единственности для аналитических функций влечет $F^*(t;s) = F(t;s)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, что доказывает теорему, поскольку величина T может быть выбрана сколь угодно большой. □

Следствие 5. *Вероятность вырождения Q ветвящегося процесса Беллмана–Харриса с производящей функцией $f(s)$ числа непосредственных потомков частиц равна минимальному неотрицательному решению уравнения $f(x) = x$.*

Доказательство. Пусть x – упомянутое минимальное решение. Если $\mathbf{P}(\xi = 0) = f(0) = 0$, то утверждение следствия очевидно. Пусть теперь $f(0) > 0$. Легко понять, что в этом случае $f(s) < x$ при любом $s \in [0, x)$. Согласно теоремам 2 и 4

$$\lim_{k\to\infty} F_k^*(t;0) = F(t;0) = \mathbf{P}(Z(t) = 0).$$

Ясно, что $F_0^*(t;s) = 0 < x$, и, по индукции,

$$F_{k+1}^*(t;0) = \int_0^t f(F_k^*(t-u;0))\, dG(u) \leqslant \int_0^t f(x)\, dG(u) \leqslant x.$$

Таким образом, $F(t;0) \leqslant x$, что влечет $Q \leqslant x$. Отсюда и из равенства (3) следует желаемое утверждение и для случая $f(0) > 0$. □

3. Регулярность и нерегулярность процессов Беллмана–Харриса

3.1. Базовые свойства регулярных и нерегулярных процессов Беллмана–Харриса.

Определение. Ветвящийся процесс Беллмана–Харриса называется нерегулярным или взрывающимся, если существует момент $t < \infty$ такой, что

$$\lim_{s\uparrow 1} F(t;s) = F(t;1) = \mathbf{P}\left(Z(t) < \infty\right) < 1.$$

В противном случае ветвящийся процесс Беллмана–Харриса называется регулярным или невзрывающимся.

Таким образом, нерегулярный процесс Беллмана–Харриса – это процесс, в котором за конечное время с положительной вероятностью рождается бесконечное число частиц.

В дальнейшем ветвящийся процесс Беллмана–Харриса с распределением длительности жизни частиц $G(t)$ и производящей функцией числа непосредственных потомков частиц $f(s)$ будем для краткости называть (G, f)-процессом.

Пусть функция $\varphi(t)$, $t \geqslant 0$, является решением уравнения

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\varphi(t-u))\, dG(u) + 1 - G(t). \tag{13}$$

Теорема 6. *(G, f)-процесс регулярен тогда и только тогда, когда уравнение (13) имеет единственное решение в классе всех измеримых функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$.*

Доказательство. Заметим, что функция $\varphi(t) \equiv 1$ является решением уравнения (13). Пусть теперь $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ - какое-либо решение уравнения (13). Легко проверить по индукции, что для функций $F_n^*(t;s)$, задаваемых рекуррентной формулой (6), при любых $s \in [0,1]$ и $n = 0, 1, \ldots$ справедлива оценка $F_n^*(t;s) \leqslant \varphi(t)$. Следовательно,

$$F(t;s) = \lim_{n\to\infty} F_n^*(t;s) \leqslant \varphi(t),$$

и, в частности, функция $F(t;1)$ является решением уравнения (13). Если уравнение (13) имеет единственное решение, то, очевидно, $F(t;1) = 1$ при любом $t > 0$, и процесс регулярен. Если же уравнение (13) имеет несколько решений, то среди них найдется решение $\phi(t)$ такое, что $\phi(t_0) < 1$ для некоторого $t_0 < \infty$, что влечет неравенство $F(t_0; 1) < 1$. Следовательно, в этом случае процесс будет нерегулярным. □

Определение. Решение уравнения (13), полученное при помощи аппроксимации $\varphi_0(t) :\equiv 0$,

$$\varphi_{n+1}(t) := \int_0^t f(\varphi_n(t-u))\, dG(u) + 1 - G(t),$$

называется минимальным.

Лемма 7. *Минимальное решение $\varphi(t)$ является невозрастающей функцией. Более того, если $\bar{\varphi}(t)$ – любое другое решение уравнения (13), то $\varphi(t) \leqslant \bar{\varphi}(t)$, $t \geqslant 0$.*

Доказательство. Функция $\varphi_0(t) \equiv 0$, очевидно, является невозрастающей. Отсюда по индукции нетрудно вывести, что для $t_1 < t_2$

$$\varphi_{n+1}(t_1) - \varphi_{n+1}(t_2) = \int_0^{t_1} \left[f(\varphi_n(t_1-u)) - f(\varphi_n(t_2-u))\right] dG(u) + \int_{t_1}^{t_2} \left[1 - f(\varphi_n(t_2-u))\right] dG(u) \geqslant 0.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что $\varphi_0(t) \leqslant \bar{\varphi}(t)$ и, по индукции, $\varphi_n(t) \leqslant \bar{\varphi}(t)$. Для завершения доказательства леммы достаточно теперь перейти к пределу при $n \to \infty$. □

Лемма 8. *Если $\varphi(t)$ – минимальное решение, то либо $\varphi(t) = 1$ для всех $t \geqslant 0$, либо $\varphi(t) < 1$ для всех $t > 0$.*

Доказательство. Если $\varphi(t_0) = 1$ для некоторого $t_0 > 0$, то в силу предыдущей леммы $\varphi(t) = 1$ для всех $t \in [0, t_0]$ и, более того, эта функция является единственным решением на указанном интервале. Легко видеть, что функция $\psi(t) = \varphi(t + t_0)$ также является решением уравнения (13) при $t \in [0, t_0]$. Отсюда, в силу единственности решения уравнения (13) на указанном интервале, вытекает, что $\psi(t) = 1$ при $t \in [0, t_0]$. Следовательно, $\varphi(t) = 1$ для всех $t \in [0, 2t_0]$. Повторяя приведенные выше рассуждения необходимое число раз, легко убедиться в том, что $\varphi(t) = 1$ для всех $t > 0$. □

Лемма 9. *Если* L_i *и* K_i – *неубывающие функции при* $t \geqslant 0$ *такие, что* $L_i(0-) = K_i(0-) = 0$ *и, кроме того,* $K_i(t) \geqslant L_i(t)$ *при* $t \in [0, t_0]$, *то* $K_1 * K_2(t) \geqslant L_1 * L_2(t)$ *для всех* $t \in [0, t_0]$.

Доказательство. Необходимое неравенство легко установить при помощи интегрирования по частям. □

Лемма 10. *Пусть* $G(t) \geqslant G^*(t)$ *для всех* $t \in [0, t_0]$ *и* $G(0) = G^*(0) = 0$. *Тогда для минимальных решений соответствующих интегральных уравнений при всех* $t \in [0, t_0]$ *справедливо неравенство* $\varphi(t) \leqslant \varphi^*(t)$.

Доказательство. Пусть $\varphi_n(t)$ и $\varphi_n^*(t)$ – аппроксимирующие последовательности, сходящиеся к соответствующим минимальным решениям. Для $\phi_n(t) := 1 - \varphi_n(t)$ и $\phi_n^*(t) := 1 - \varphi_n^*(t)$ имеем $\phi_0^*(t) = \phi_0(t) = 1$ и

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t [1 - f(1 - \phi_n(t-u))]\, dG(u),$$
$$\phi_{n+1}^*(t) = \int_0^t [1 - f(1 - \phi_n^*(t-u))]\, dG(u).$$

Отсюда, используя монотонность рассматриваемых функций по t при каждом n (см. доказательство леммы 7) и лемму 9, нетрудно заключить, что $\phi_n(t) \geqslant \phi_n^*(t)$ для всех $t \in [0, t_0]$. Для завершения доказательства осталось перейти к пределу при $n \to \infty$. □

Лемма 11. *Если функция* $G(t)$ *непрерывна в нуле,* $G(0) = 0$, *и* $f(s) \geqslant f^*(s)$ *при* $s \in [s_0, 1]$, *то найдется интервал* $0 < t \leqslant t_0$, *на котором соответствующие минимальные решения удовлетворяют неравенству* $\varphi(t) \geqslant \varphi^*(t)$.

Доказательство. Поскольку функция $G(t)$ непрерывна в нуле, то минимальное решение $\varphi(t)$ для рассматриваемого (G, f)– процесса также непрерывно в нуле, и, следовательно, существует число t_0 такое, что $\varphi(t) \geqslant s_0$ при $t \in (0, t_0]$. Отсюда

$$\varphi(t) \geqslant \int_0^t f^*(\varphi(t-u))\, dG(u) + 1 - G(t).$$

Далее, используя аппроксимирующие последовательности $\psi_n(t)$ и $\psi_n^*(t)$, введенные при доказательстве леммы 10, можно показать, что любое решение уравнения

$$\psi(t) = \int_0^t f^*(\psi(t-u))\, dG(u) + 1 - G(t)$$

удовлетворяет неравенству $\psi(t) \leqslant \varphi(t)$ при $t \in (0, t_0]$. Отсюда легко следует утверждение леммы. □

Теорема 12. *Пусть $G_1(t) \leqslant G_2(t)$ при $t \in (0, t_0]$. Если (G_1, f)-процесс нерегулярен, то и (G_2, f)-процесс также нерегулярен. Если (G_2, f)-процесс регулярен, то и (G_1, f)-процесс также регулярен.*

Доказательство очевидно из предыдущих рассуждений. □

Теорема 13. *Пусть $G(0) = 0$ и $f_1(s) \leqslant f_2(s)$ при $s \in [s_0, 1]$. Если (G, f_1)-процесс регулярен, то и (G, f_2)-процесс также регулярен. Если (G, f_2)-процесс нерегулярен, то (G, f_1)-процесс также нерегулярен.*

Доказательство очевидно из предыдущих рассуждений. □

Анализируя результаты данного раздела, легко понять, что регулярность или нерегулярность (G, f)-процесса полностью определяется асимптотическим поведением функции распределения $G(t)$ при $t \to 0+$ и производящей функции $f(s)$ при $s \to 1-$.

3.2. Достаточные условия нерегулярности. Пусть

$$G_{-1}(y) = \sup\{t : G(t-) \leqslant y \leqslant G(t+) = G(t)\}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

и $G_{-1}(y) = \infty$ при $y > 1$. Введем обозначение

$$w(y) := \frac{1 - f(1-y)}{y}.$$

Теорема 14. *Пусть $G(0) = 0$, функция $G(t)$ непрерывна в правой окрестности $[0, \Delta]$, $0 < \Delta < 1$, точки ноль и, кроме того, $f(0) = 0$. Если найдутся $\theta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что*

$$\int_0^{\varepsilon} G_{-1}\left(\frac{1+\theta}{w(y)}\right)\frac{dy}{y} < \infty, \tag{14}$$

то соответствующий (G, f)-процесс нерегулярен.

Доказательство. Положим $a := 1 + \theta$ и $y_n := \varepsilon a^{-n}$, $n = 0, 1, \ldots$. Из равенства

$$\int_0^{\varepsilon} G_{-1}\left(\frac{1+\theta}{w(y)}\right)\frac{dy}{y} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{y_{n+1}}^{y_n} G_{-1}\left(\frac{a}{w(y)}\right)\frac{dy}{y}$$

и монотонности функции $G_{-1}(t)$ следует, что

$$\int_0^\varepsilon G_{-1}\left(\frac{1+\theta}{w(y)}\right)\frac{dy}{y} < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^\infty G_{-1}\left(\frac{a}{w(y_n)}\right) < \infty. \tag{15}$$

Заметим сначала, что при выполнении условий теоремы $w(y) \uparrow \infty$ при $y \to 0+$. Действительно, если это не так, то $w(y) \uparrow f'(1)$ при $y \to 0+$. Следовательно, при всех $n = 1, 2, \dots$

$$G_{-1}\left(\frac{a}{w(y_n)}\right) \geqslant G_{-1}\left(\frac{a}{f'(1)}\right) > 0,$$

что влечет расходимость ряда в (15).

Из сказанного выше следует, что без ограничения общности можно считать, что $a/w(y_0) < \Delta < 1$. Положим

$$t_n := G_{-1}\left(\frac{a}{w(y_n)}\right).$$

Ясно, что $t_0 \geqslant t_1 \geqslant \dots \geqslant t_k \geqslant \dots$. По предположению, при $n \to \infty$

$$T_n := \sum_{k=0}^n t_k \to T < \infty.$$

При помощи набора t_n и рассматриваемого процесса Беллмана–Харриса $Z(t)$, $t \geqslant 0$, мы будем строить вспомогательный процесс $X = \{X_n,\, n = 0, 1, \dots\}$ с дискретным временем путем исключения из первоначального процесса $Z = \{Z(t),\, t \geqslant 0\}$ частиц, имеющих относительно большую продолжительность жизни.

В этом процессе $X_0 := 1$, а дальнейшее построение проводится следующим образом. Если длительность жизни τ_0 первоначальной частицы процесса $Z(t)$ превосходит t_0, то полагаем $X_1 := 0$, и на этом построение процесса заканчивается. Если же $\tau_0 \leqslant t_0$, то потомство первоначальной частицы образует первое поколение процесса X с числом частиц, обозначаемым X_1. Если $X_1 > 0$, то во второе поколение процесса X включаются те частицы второго поколения процесса $Z(t)$, частицы-родители которых были включены в процесс X и, кроме того, имели длительность жизни, не превосходящую величину t_1, и т.д. Таким образом, в $(n+1)$-е поколение процесса X включаются те частицы $(n+1)$-го поколения процесса Z, родители которых имели продолжительность жизни, не превосходящую t_n, и уже были включены в процесс X. Ясно, что при таком построении

$$X_n \leqslant Z(T_n) \leqslant Z(T), \quad n = 0, 1, \dots .$$

Положим

$$p_n := G(t_n) = G\left(G_{-1}\left(\frac{a}{w(y_n)}\right)\right) = \frac{a}{w(y_n)}.$$

Легко проверить, что производящая функция $K_n(s) := \mathbf{E}s^{X_n}$ числа частиц в n-м поколении процесса X имеет вид

$$\begin{aligned} K_n(s) &:= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[s^{X_n} \,|\, X_{n-1}\right]\right] = \mathbf{E}\left[(p_n f(s) + 1 - p_n)^{X_{n-1}}\right] \\ &= K_{n-1}(p_n f(s) + 1 - p_n) = K_{n-1}(1 - p_n(1 - f(s))), \end{aligned}$$

причем

$$K_n(s) \geqslant \mathbf{E}s^{Z(T_n)} \geqslant \mathbf{E}s^{Z(T)}.$$

В силу определения

$$p_n(1 - f(1 - y_n)) = p_n y_n w(y_n) = a y_n = y_{n-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K_n(1 - y_n) &= K_{n-1}(1 - p_n(1 - f(1 - y_n))) \\ &= K_{n-1}(1 - y_{n-1}) = 1 - y_0 < 1. \end{aligned}$$

Кроме того, в силу неравенства $y_m \geqslant y_n$, $n \geqslant m$, имеем

$$K_n(1 - y_m) \leqslant K_n(1 - y_n) = 1 - y_0 < 1.$$

По теореме Хелли о выборе (см. теорему 39 в разделе 7) найдется последовательность $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$ такая, что для всех $s \in [0, 1)$ и некоторой случайной величины Y

$$\lim_{k \to \infty} K_{n_k}(s) = K(s) = \mathbf{E}s^Y.$$

Ясно, что

$$\lim_{k \to \infty} K_{n_k}(1 - y_m) = K(1 - y_m) \leqslant 1 - y_0 < 1,$$

что в свою очередь влечет

$$\lim_{m \to \infty} K(1 - y_m) \leqslant 1 - y_0 < 1.$$

Последнее означает, что $\lim_{s\uparrow 1} K(s) \leqslant 1 - y_0$ и, таким образом, $\mathbf{P}(Y < \infty) < 1$. В частности,

$$1 > \lim_{s\uparrow 1} K(s) = \lim_{s\uparrow 1} \lim_{n_k\to\infty} K_{n_k}(s) = \lim_{s\uparrow 1} \lim_{n_k\to\infty} \mathbf{E} s^{X_{n_k}}$$
$$\geqslant \lim_{s\uparrow 1} \mathbf{E} s^{Z(T)} = F(T,1) = \mathbf{P}(Z(T) < \infty).$$

Следовательно, при выполнении условия (14) процесс Беллмана–Харриса нерегулярен.

Теорема 14 доказана. □

3.3. Достаточные условия регулярности. В данном разделе мы укажем некоторые достаточные условия регулярности (G, f)-процесса. Для этого нам понадобится одно вероятностное неравенство, опирающееся на свойства выпуклых функций.

Пусть $u(x)$ – функция, определенная на открытом интервале (a, b), а $O = (\zeta, u(\zeta))$ – точка на ее графике. Прямая L, проходящая через точку O с тангенсом угла наклона κ, называется опорной прямой функции $u(x)$ в точке O, если $u(x) \geqslant u(\zeta) + \kappa(x - \zeta)$ для всех $x \in (a, b)$. Неформально это означает, что график функции $u(x)$ лежит либо над опорной прямой L, либо частично совпадает с L. Функция $u(x)$ называется выпуклой на (a, b), если в каждой точке $x \in (a, b)$ существует ее опорная прямая. Аналогичным образом определяются и функции, выпуклые на замкнутом интервале $[a, b]$.

Неравенство Иенсена. Если распределение случайной величины X сосредоточено на открытом интервале (a, b), причем математическое ожидание X конечно, то для любой функции $u(x)$, выпуклой на (a, b), справедливо неравенство

$$u(\mathbf{E}X) \leqslant \mathbf{E}u(X).$$

Доказательство. Полагая $\zeta = \mathbf{E}X$, имеем

$$\mathbf{E}u(X) \geqslant u(\mathbf{E}X) + \kappa \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X) = u(\mathbf{E}X),$$

что и требовалось доказать. □

Для (G, f)-процесса положим

$$J(x) = \int_0^{G_{-1}(x)} G(y)\, dy, \quad 0 \leqslant x < 1.$$

Будем предполагать, что функция $G(t)$ непрерывна и строго возрастает при $t \in [0, t_0]$ и $G(0+) = 0$. Ясно, что в этом случае для $t \in [0, t_0]$

$$J(G(t)) = \int_0^t G(y)\, dy$$

и

$$\frac{dJ(G(t))}{dt} = G(t).$$

Кроме того, для любой неубывающей функции $\mu(t), t \geqslant 0$, подчиняющейся условию $\mu(0+) = 0$, справедливо равенство

$$\int_0^t J(G(t-u))\, d\mu(u) = \int_0^t \mu(u) G(t-u)\, du.$$

Теорема 15. *Пусть $G(0+) = 0$, функция $G(t)$ непрерывна и строго возрастает при $t \in [0, t_0]$, и существуют константы $0 < c < C < \infty$ и выпуклая функция $J_1(y)$ такие, что*

$$cJ_1(y) \leqslant J(y) \leqslant CJ_1(y), \quad y \in [0, G(t_0)].$$

Если

$$\int_0^\varepsilon w(y) J\left(\frac{1}{w(y)}\right) \frac{dy}{y} = \infty \tag{16}$$

для любого $\varepsilon > 0$, то соответствующий (G, f)-процесс регулярен.

Замечание 16. Легко проверить, что если $G(t) = t^\alpha$ при $t \in [0, t_0]$ и некотором $\alpha > 0$, то $J(t) = (1+\alpha)^{-1} t^{1+1/\alpha}$ для указанных значений переменной t.

Доказательство. Предположим, что условие (16) выполнено, но соответствующий (G, f)-процесс нерегулярен. В силу лемм 7 и 8 это означает, что уравнение

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\varphi(t-u))\, dG(u) + 1 - G(t) \tag{17}$$

имеет, наряду с решением тождественно равным единице, минимальное невозрастающее решение $\varphi(t) < 1, \quad t > 0$. Ясно, что в этом случае функция $\psi(t) := 1 - \varphi(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\psi(t) = \int_0^t \left[1 - f(1 - \psi(t-u))\right] dG(u)$$

и является строго положительной и неубывающей. Поскольку функция $G(t)$ непрерывна при $t \in [0, t_0]$, то функция $\psi(t)$ также непрерывна в указанном интервале, и, следовательно, функции $\psi(t)$ и $\psi(t)w(\psi(t)) = 1 - f(1 - \psi(t))$ могут трактоваться как функции, порождающие конечные меры на отрезке $t \in [0, t_0]$. В частности,

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_0^t \left[1 - f(1 - \psi(t-u))\right] dG(u) \\ &= \int_0^t G(t-u)\, d\left[1 - f(1 - \psi(u))\right]\end{aligned}$$

при $t \in [0, t_0]$, что после деления на $1 - f(1 - \psi(t))$ дает

$$\frac{1}{w(\psi(t))} = \frac{1}{1 - f(1 - \psi(t))} \int_0^t G(t-u)\, d\left[1 - f(1 - \psi(u))\right].$$

При каждом фиксированном $t \in [0, t_0]$ функцию

$$F_t(u) := \frac{1 - f(1 - \psi(u))}{1 - f(1 - \psi(t))}, \quad u \in [0, t],$$

можно трактовать как функцию распределения некоторой случайной величины, скажем, ζ_t с носителем на интервале $[0, t]$. Пусть $\eta_t = G(t - \zeta_t)$. Ясно, что

$$\frac{1}{w(\psi(t))} = \mathbf{E}\eta_t,$$

и по неравенству Иенсена для выпуклой функции $J_1(x)$ справедливо неравенство

$$J_1\left(\frac{1}{w(\psi(t))}\right) = J_1\left(\mathbf{E}\eta_t\right) \leqslant \mathbf{E}J_1\left(\eta_t\right).$$

Пусть

$$D = \left\{t \geqslant 0 : \max\left(\frac{1}{w(\psi(t))}, G(t)\right) \leqslant G(t_0)\right\}.$$

Тогда при $t \in D$

$$
\begin{aligned}
J\left(\frac{1}{w(\psi(t))}\right) &\leqslant CJ_1\left(\frac{1}{w(\psi(t))}\right) \leqslant C\mathbf{E}J_1(\eta_t) \leqslant c^{-1}C\mathbf{E}J(\eta_t) \\
&= \frac{c^{-1}C}{1-f(1-\psi(t))}\int_0^t J(G(t-u))\,d\,[1-f(1-\psi(u))] \\
&= \frac{c^{-1}C}{1-f(1-\psi(t))}\int_0^t \psi(z)\,dz,
\end{aligned}
$$

поскольку

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t J(G(t-u))\,d\,[1-f(1-\psi(u))] = \\
&\qquad = \int_0^t d\,[1-f(1-\psi(u))]\int_0^{t-u} G(v)\,dv \\
&\qquad = \int_0^t d\,[1-f(1-\psi(u))]\int_u^t G(z-u)\,dz \\
&\qquad = \int_0^t dz\int_0^z G(z-u)\,d\,[1-f(1-\psi(u))] \\
&\qquad = \int_0^t \psi(z)\,dz.
\end{aligned}
$$

Интегрируя полученное соотношение по произвольному промежутку $[0,T]$, получаем

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T w(\psi(t))J\left(\frac{1}{w(\psi(t))}\right)\frac{d\psi(t)}{\psi(t)} \leqslant \\
&\qquad \leqslant c^{-1}C\int_0^T \frac{d\psi(t)}{1-f(1-\psi(t))}\frac{w(\psi(t))}{\psi(t)}\int_0^t \psi(z)\,dz \\
&\qquad = c^{-1}C\int_0^T \frac{d\psi(t)}{\psi^2(t)}\int_0^t \psi(z)\,dz \\
&\qquad = c^{-1}C\int_0^T \psi(z)\,dz\int_z^T \frac{d\psi(t)}{\psi^2(t)} \\
&\qquad = c^{-1}C\int_0^T \psi(z)\left[\frac{1}{\psi(z)}-\frac{1}{\psi(T)}\right]dz \\
&\qquad \leqslant c^{-1}C\int_0^T dz = c^{-1}CT < \infty.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$\int_0^{x(T)} w(y) J\left(\frac{1}{w(y)}\right)\frac{dy}{y} \leqslant c^{-1}CT < \infty,$$

что несовместимо с первоначальным условием (16) при $0 < \varepsilon \leqslant \psi(T)$. Полученное противоречие доказывает регулярность рассматриваемого процесса при выполнении условия (16). Теорема 15 доказана. □

Лемма 17. *Если функция $G_{-1}(t)$ непрерывна, строго возрастает при $t \in [0, t_0]$ и для некоторого числа $\lambda \in (0,1)$*

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{G_{-1}(\lambda t)}{G_{-1}(t)} = c_1 < 1, \tag{18}$$

то найдутся положительные числа c_2 и $t_1 \in (0, t_0]$ такие, что

$$c_2 t G_{-1}(t) \leqslant J(t) \leqslant t G_{-1}(t), \quad t \in [0, t_1].$$

Доказательство. Оценка сверху следует из определения функции $J(t)$. Для доказательства оценки снизу нужно воспользоваться цепочкой оценок

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_0^{G_{-1}(t)} G(u) du \geqslant \int_{G_{-1}(\lambda t)}^{G_{-1}(t)} G(u)\, du \\ &\geqslant G\left(G_{-1}(\lambda t)\right)\left(G_{-1}(t) - G_{-1}(\lambda t)\right) \\ &= \lambda t \left(G_{-1}(t) - G_{-1}(\lambda t)\right) \geqslant \lambda t G_{-1}(t) 2^{-1}(1 - c_1), \end{aligned}$$

справедливой для всех достаточно малых значений t. □

Замечание 18. Зафиксируем число $\alpha > 0$. Условия леммы 17 выполнены, например, если $G_{-1}(t) \sim t^\alpha$ при $t \to 0+$, и не выполнены, если $G_{-1}(t) \sim |\log t|^\alpha$ при $t \to 0+$.

Теорема 19. *Пусть выполнены условия теоремы 15, а функция $G_{-1}(t)$ удовлетворяет условию (18). Если*

$$\int_0^{\varepsilon} G_{-1}\left(\frac{1}{w(y)}\right)\frac{dy}{y} = \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$, то соответствующий (G, f)-процесс регулярен.

Доказательство. Утверждение теоремы легко следует из теоремы 15 и соотношения

$$\int_0^\varepsilon w(y) J\left(\frac{1}{w(y)}\right)\frac{dy}{y} = \infty \Longleftrightarrow \int_0^\varepsilon G_{-1}\left(\frac{1}{w(y)}\right)\frac{dy}{y} = \infty,$$

вытекающего из леммы 17. $\square$

Теорема 20. *Пусть* $G(0) = 0$, *функция* $G(t)$ *непрерывна в правой окрестности* $[0, \Delta]$, $0 < \Delta < 1$, *точки ноль и, кроме того,* $f(0) = 0$, *функция* $tG_{-1}(t)$ *выпукла при* $t \in [0, t_0]$ *и существуют положительные константы* c_1, c_2 *и* θ *такие, что*

$$0 < c_2 \leqslant \liminf_{t\to 0+} \frac{G_{-1}(t)}{G_{-1}((1+\theta)t)} \leqslant \limsup_{t\to 0+} \frac{G_{-1}(t)}{G_{-1}((1+\theta)t)} = c_1 < 1. \tag{19}$$

Условие

$$\int_0^\varepsilon G_{-1}\left(\frac{1}{w(y)}\right)\frac{dy}{y} = \infty \tag{20}$$

для любого $\varepsilon > 0$ *необходимо и достаточно для регулярности соответствующего* (G, f)*-процесса.*

Доказательство. Достаточность этого условия для регулярности процесса была установлена в теореме 19.

Для доказательства необходимости заметим, что если выполнено условие (19), то найдется число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $G_{-1}(t) \geqslant 2^{-1}c_2 G_{-1}((1+\theta)t)$ при $t \in [0, \varepsilon_1]$. Если теперь

$$\int_0^{\varepsilon_2} G_{-1}\left(\frac{1}{w(y)}\right)\frac{dy}{y} < \infty$$

для некоторого $\varepsilon_2 \in (0,1)$, то при $\varepsilon := \min\{1/w(\varepsilon_1), \varepsilon_2\}$

$$\int_0^\varepsilon G_{-1}\left(\frac{1+\theta}{w(y)}\right)\frac{dy}{y} < \infty,$$

что в силу теоремы 14 обеспечивает нерегулярность процесса. $\square$

Теорема 21. *Для любой функции распределения* $G(t)$, *удовлетворяющей условию* $G(0+) = 0$ *и положительной при* $t > 0$, *найдется производящая функция числа непосредственных потомков* $f(s)$ *такая, что соответствующий* (G, f)*-процесс нерегулярен.*

Доказательство. Положим $b_k := G(2^{-k}) > 0$ и зафиксируем число $\lambda_1 \in (0, b_1/2)$. Пусть, далее, последовательность действительных чисел $\lambda_k \in (0,1)$, $k = 1, 2, \ldots$, такова, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k > 0,$$

а набор $\{n_k,\, k \geqslant 1\}$ возрастающих натуральных чисел таков, что

$$1 - \left(1 - \frac{b_k}{2^k}\right)^{n_{k-1}} \geqslant \lambda_k$$

для всех $k \geqslant 2$. Положим теперь

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} s^{n_k}, \quad 1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots$$

и покажем, что процесс Беллмана–Харриса $Z = \{Z(t),\, t \geqslant 0\}$, задаваемый указанными выше функциями $G(t)$ и $f(s)$, нерегулярен.

Заметим, что в силу условия $f(0) = 0$, количество частиц в анализируемом (G, f)-процессе не убывает с ростом t. Наряду с процессом Z рассмотрим процесс $Z^* = \{Z^*(t),\, t \geqslant 0\}$, который строится путем следующей процедуры "прореживания" частиц исходного процесса. Частица k-го поколения процесса Z уничтожается (не включается в процесс Z^*) вместе с ее потомками всех последующих поколений, если длительность ее жизни превосходит 2^{-k}. Если же длительность жизни какой-либо частицы k-го поколения не превосходит 2^{-k}, то ее непосредственные потомки включаются в процесс Z^* лишь в том случае, если рассматриваемая частица породила в момент гибели ровно n_k новых частиц.

Ясно, что при таком прореживании $Z(t) \geqslant Z^*(t)$ при любом $t \geqslant 0$. Кроме того,

$$\mathbf{P}\left(Z^*\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant n_1\right) \geqslant G(2^{-1})/2 = b_1/2 > \lambda_1,$$

что в свою очередь влечет

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(Z^*\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)=n_2\right) &= \mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\geqslant n_2\right)\\
&\geqslant \sum_{j=n_1}^{\infty}\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\geqslant n_2; Z^*\left(1-\frac{1}{2}\right)=j\right)\\
&= \sum_{j=n_1}^{\infty}\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\geqslant n_2 \middle| Z^*\left(1-\frac{1}{2}\right)=j\right)\\
&\qquad\times\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2}\right)=j\right)\\
&\geqslant \sum_{j=n_1}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{G(2^{-2})}{2^2}\right)^j\right)\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2}\right)=j\right)\\
&\geqslant \left(1-\left(1-\frac{b_2}{2^2}\right)^{n_1}\right)\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2}\right)\geqslant n_1\right)\geqslant \lambda_2\lambda_1.
\end{aligned}
$$

Отсюда, используя индукцию, получаем, что для всех $k\geqslant 3$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\geqslant n_k\right)\\
&\quad\geqslant \sum_{j=n_{k-1}}^{\infty}\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\geqslant n_k; Z^*\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)=j\right)\\
&\quad= \sum_{j=n_{k-1}}^{\infty}\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\geqslant n_k \middle| Z^*\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)=j\right)\\
&\qquad\quad\times\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)=j\right)\\
&\quad\geqslant \sum_{j=n_{k-1}}^{\infty}\left(1-\left(1-\frac{G(2^{-k})}{2^k}\right)^j\right)\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)=j\right)\\
&\quad\geqslant \left(1-\left(1-\frac{b_k}{2^k}\right)^{n_{k-1}}\right)\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2^{k-1}}\right)\geqslant n_{k-1}\right)\geqslant \prod_{i=1}^{k}\lambda_i.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(Z(1)=\infty\right) &\geqslant \lim_{k\to\infty}\mathbf{P}\left(Z^*(1)\geqslant n_k\right)\\ &\geqslant \lim_{k\to\infty}\mathbf{P}\left(Z^*\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\geqslant n_k\right)\geqslant\prod_{i=1}^{\infty}\lambda_i>0. \qquad \square\end{aligned}$$

Примеры. 1) Если $G_{-1}(t)$ является правильно меняющейся функцией в окрестности нуля положительного порядка (см. определение в разделе 6), то все условия теоремы 20 выполнены, и, следовательно, условие (20) является необходимым и достаточным для регулярности таких (G,f)-процессов.

2) Пусть $G(t)=e^{-1/t}$, $t>0$. Тогда $G_{-1}(t)=(\ln x^{-1})^{-1}$. Далее, для любой функции $f(s)$

$$w(y)=y^{-1}(1-f(1-y))\leqslant y^{-1},\quad 0<y<1.$$

Поэтому для любого $\varepsilon>0$

$$\int_0^{\varepsilon} G_{-1}\left(\frac{1}{w(y)}\right)\frac{dy}{y}\geqslant-\int_0^{\varepsilon}\frac{dy}{y\ln y}=\infty. \tag{21}$$

Отсюда и из теоремы 21 вытекает, что условие (20) не является, вообще говоря, необходимым и достаточным для регулярности процесса Беллмана–Харриса.

Ответ на вопрос о том, каковы необходимые и достаточные условия регулярности ветвящихся процессов Беллмана–Харриса в общем случае до настоящего времени не известен. Еще более сложной является проблема регулярности для процессов Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц. Автору известна в этой связи лишь работа [13], в которой для частного случая многотипных процессов Беллмана–Харриса указаны условия регулярности.

4. Классификация процессов Беллмана–Харриса и асимптотика математического ожидания числа частиц

Аналогично классификации процессов Гальтона–Ватсона (см., например, курс лекций [10]) классификация ветвящихся процессов Беллмана–Харриса основана на свойствах производящей функции числа непосредственных потомков частиц.

Определение. (G, f)-процесс называется надкритическим, если $m := f'(1) > 1$, критическим, если $m = 1$ и $f''(1) > 0$, и докритическим, если $m < 1$.

Положим $A(t) = \mathbf{E}Z(t)$. Дифференцируя обе части соотношения (1) по s в точке $s = 1$, получаем

$$A(t) = 1 - G(t) + m \int_0^t A(t-u)\, dG(u). \qquad (22)$$

Ясно, что $A(t) \equiv 1$ для критических процессов. Если $m \neq 1$, то для изучения свойств функции $A(t)$ нам потребуются более сложные рассуждения.

Пусть $G^{*k}(t)$ обозначает k-ю свертку функции $G(t) := G^{*1}(t)$ с собой:

$$G^{*0}(t) = I\{t \geqslant 0\}, \quad G^{*k}(t) = \int_0^t G(t-u)\, dG^{*(k-1)}(u),$$

где $I\{A\}$ – индикатор события A. Зафиксируем число $\gamma > 0$ и рассмотрим функцию

$$U_\gamma(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k G^{*k}(t).$$

Лемма 22. *Если $\gamma G(0+) < 1$, то функция $U_\gamma(t)$ конечна при всех $t > 0$ и ограничена на любом конечном интервале.*

Доказательство. Пусть $\{\tau_i,\, i = 1, 2, \dots\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $G(t)$, и пусть $S_k := \tau_1 + \dots + \tau_k$. Тогда при $\theta > 0$

$$\gamma^k G^{*k}(t) = \gamma^k \mathbf{P}\left(S_k \leqslant t\right) = \gamma^k \mathbf{P}\left(e^{-\theta S_k} \geqslant e^{-\theta t}\right) \leqslant e^{\theta t} \gamma^k \left[\mathbf{E} e^{-\theta \tau_1}\right]^k.$$

В силу предположений леммы $\gamma G(0+) < 1$. Поэтому найдется число $\theta > 0$ такое, что $r := \gamma \mathbf{E} e^{-\theta \tau_1} < 1$. Последнее влечет

$$U_\gamma(t) \leqslant \frac{e^{\theta t}}{1 - r} < \infty. \qquad (23)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$H(t) = h(t) + \gamma \int_0^t H(t-u)\, dG(u), \qquad (24)$$

где $h(t)$ – известная ограниченная измеримая функция на $[0,\infty)$, а $H(t)$ – неизвестная функция.

Нетрудно проверить, что функция

$$H(t) := \int_0^t h(t-u)\, dU_\gamma(u)$$

является решением уравнения (24). Оказывается, что других "хороших" решений у уравнения (24) нет.

Лемма 23. *Уравнение (24) имеет единственное решение, ограниченное на конечных интервалах.*

Доказательство. Предположим, что найдутся два решения $H_1(t)$ и $H_2(t)$ уравнения (24). Положим

$$\Delta(t) := |H_1(t) - H_2(t)|\,.$$

Тогда

$$\Delta(t) \leqslant \gamma \int_0^t \Delta(t-u)\, dG(u)$$

и, следовательно,

$$\Delta(t) \leqslant \gamma^k \int_0^t \Delta(t-u) dG^{*k}(u) \leqslant \gamma^k G^{*k}(t) \sup_{0\leqslant u\leqslant t} \Delta(u).$$

Поскольку $\gamma^k G^{*k}(t) \to 0$ при $k\to\infty$ в силу оценки (23), и, кроме того, $\sup_{0\leqslant u\leqslant t}\Delta(u) \leqslant C < \infty$, мы видим, что $\Delta(t) = 0$ для любого $t \geqslant 0$, что и требовалось. $\square$

Для функции $y(t)$, $t\geqslant 0$, и числа $\delta > 0$ положим

$$\bar{s}_n(\delta) = \sup_{n\delta\leqslant t<(n+1)\delta} y(t), \quad \underline{s}_n(\delta) = \inf_{n\delta\leqslant t<(n+1)\delta} y(t).$$

Определение. Функция $y(t)$, $t \geqslant 0$, называется непосредственно интегрируемой по Риману, если для достаточно малых значений $\delta > 0$ ряды $\sum_{n=0}^\infty \bar{s}_n(\delta)$ и $\sum_{n=0}^\infty \underline{s}_n(\delta)$ сходятся и, кроме того,

$$\lim_{\delta\to 0} \delta \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{s}_n(\delta) - \underline{s}_n(\delta)) = 0.$$

Примеры функций, непосредственно интегрируемых по Риману. 1) функция $y(t)$ неотрицательна, ограничена, непрерывна и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{s}_n(1) < \infty;$$

2) функция $y(t)$ неотрицательна, убывает и интегрируема по Риману в обычном смысле;

3) функция $y(t)$ интегрируема по Риману в обычном смысле и ограничена (по модулю) функцией, непосредственно интегрируемой по Риману.

Пример функции, не являющейся непосредственно интегрируемой по Риману, но интегрируемой по Риману в обычном смысле. Пусть график функции $y(t)$ образован отрезками оси X и и треугольниками с высотами $y_n := n$ и основаниями $\mu_n := n^{-3}$, середины которых расположены в точках $n = 2, 3, \dots$. Ясно, что $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ и

$$\int_0^{\infty} y(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} y_n \mu_n = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Очевидно, что в этом случае

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{s}_n(1) \geqslant \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

и, следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{s}_n(\delta) = \infty$ для любого $\delta \in (0, 1]$. Таким образом, указанная функция не является непосредственно интегрируемой по Риману.

Определение. Функция распределения $B(t) = \mathbf{P}(\zeta \leqslant t)$ случайной величины ζ называется решетчатой с шагом a и сдвигом b, если носитель распределения случайной величины ζ содержится во множестве $\{b + ak,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, причем число a является максимальным среди обладающих указанным свойством.

Вернемся теперь к уравнению восстановления (24).

Теорема 24. *Пусть $\gamma = 1$ и $\mu = \mathbf{E}\tau = \int_0^{\infty} t\,dG(t) \leqslant \infty$. Тогда*
1) *если существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = h,$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\frac{h}{\mu};$$

2) *если функция* $h(t)$ *непосредственно интегрируема по Риману и распределение* $G(t)$ *нерешетчато, то*

$$\lim_{t\to\infty}H(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty h(u)\,du.$$

Доказательство теоремы 24, называемой обычно теоремой восстановления, выходит за рамки нашего курса и может быть найдено, например, в главе XI книги [20].

Определение. Мальтусовским параметром для пары (γ, G), где число $\gamma > 0$, а $G(t)$ – функция распределения, называется корень α уравнения

$$\gamma\int_0^\infty e^{-\alpha u}\,dG(u)=1, \tag{25}$$

если таковой существует.

Отметим, что уравнение (25) имеет решение для любого $\gamma \geqslant 1$.

Теорема 25. *Если функция* $G(t)$ *не является решетчатой, пара* (γ, G) *имеет мальтусовский параметр* α*, а функция* $e^{-\alpha t}h(t)$ *непосредственно интегрируема по Риману, то решение уравнения* (24) *имеет следующее представление при* $t\to\infty$:

$$H(t)\sim e^{\alpha t}\frac{\int_0^\infty e^{-\alpha u}h(u)\,du}{\gamma\int_0^\infty ue^{-\alpha u}\,dG(u)}.$$

Доказательство. Положим

$$H_\alpha(t)=e^{-\alpha t}H(t)$$

и

$$G_\alpha(t)=\gamma\int_0^t e^{-\alpha u}\,dG(u).$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_\alpha(t) &= e^{-\alpha t}h(t) + \gamma \int_0^t H(t-u)e^{-\alpha t}\, dG(u) \\ &= e^{-\alpha t}h(t) + \gamma \int_0^t H_\alpha(t-u)e^{-\alpha u}\, dG(u) \\ &= e^{-\alpha t}h(t) + \int_0^t H_\alpha(t-u)\, dG_\alpha(u). \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 24 следует, что

$$\lim_{t\to\infty} H_\alpha(t) = \frac{1}{\mu_\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha u}h(u)\, du,$$

где

$$\mu_\alpha = \gamma \int_0^\infty u e^{-\alpha u}\, dG(u).$$

Теорема доказана. □

Вспоминая теперь, что

$$A(t) = 1 - G(t) + m\int_0^t A(t-u)\, dG(u),$$

заключаем, что если функция распределения $G(t)$ нерешетчата, $m > 1$ и α – мальтусовский параметр для пары (m, G), то

$$A(t) \sim e^{\alpha t}\frac{\int_0^\infty e^{-\alpha u}(1-G(u))\, du}{m\int_0^\infty u e^{-\alpha u}\, dG(u)} = e^{\alpha t}\frac{m-1}{\alpha m^2 \int_0^\infty u e^{-\alpha u}\, dG(u)} \tag{26}$$

(проверьте, что функция $e^{-\alpha t}(1-G(t))$ непосредственно интегрируема по Риману!).

Асимптотическое представление (26) справедливо и в случае $m < 1$, в предположении, что мальтусовский параметр α для пары (m, G) существует, функция распределения G нерешетчата и

$$\int_0^\infty u e^{-\alpha u}\, dG(u) < \infty.$$

Наша следующая цель - доказательство условной предельной теоремы о распределении числа частиц $Z(t)$ в критическом ветвящемся процессе Беллмана–Харриса при условии $Z(t) > 0$ и $t \to \infty$. Для этого нам понадобится аналогичное утверждение о предельном распределении числа частиц Z_n в критическом ветвящемся процессе Гальтона–Ватсона при условии $Z_n > 0$ и $n \to \infty$.

5. Условная предельная теорема для критических процессов Гальтона–Ватсона

5.1. Предельная теорема в дробно-линейном случае. Напомним, что ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона – это частный случай процесса Беллмана–Харриса, в котором продолжительность жизни каждой частицы равна единице. Положим $f_0(s) = s$, и пусть

$$f_n(s) = f(f_{n-1}(s)), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

– последовательность итераций функции $f(s)$.

Рассмотрим сначала критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с дробно-линейной производящей функций числа потомков

$$f(s) = \mathbf{E}s^{\xi} = r + (1-r)\frac{q}{1-ps}, \tag{27}$$

где $p + q = 1$, $r \in [0, 1)$, а

$$\mathbf{E}\xi = f'(1) = (1-r)\frac{p}{q} = 1.$$

Ясно, что в этом случае дисперсия числа потомков $\sigma^2 := \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2$ имеет вид

$$\sigma^2 = \mathbf{E}\xi(\xi - 1) = f''(1) = 2(1-r)\frac{p^2}{q^2} = 2\frac{p}{q}.$$

Замечая, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-f(s)} - \frac{1}{1-s} &= \frac{1-ps}{(1-r)p\,(1-s)} - \frac{1}{1-s} \\ &= \frac{1-ps}{q\,(1-s)} - \frac{1}{1-s} = \frac{p}{q} = \frac{\sigma^2}{2},\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-f_n(s)} &= \frac{1}{1-f(f_{n-1}(s))} - \frac{1}{1-f_{n-1}(s)} + \frac{1}{1-f_{n-1}(s)} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{1-f_{n-1}(s)} = \cdots = \frac{n\sigma^2}{2} + \frac{1}{1-s}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$1 - f_n(s) = \frac{1}{\frac{n\sigma^2}{2} + \frac{1}{1-s}}$$

и, в частности,

$$\mathbf{P}\left(Z_n > 0\right) = 1 - f_n(0) = \frac{1}{\frac{n\sigma^2}{2} + 1}. \tag{28}$$

Теорема 26. *Если производящая функция $f(s)$ числа потомков частиц в критическом процессе Гальтона–Ватсона имеет представление* (27), *то*

$$\mathbf{P}\left(Z_n > 0\right) \sim \frac{2}{n\sigma^2}, \quad n \to \infty, \tag{29}$$

и, кроме того, для любого $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{2Z_n}{n\sigma^2} \leqslant x \middle| \, Z_n > 0\right) = 1 - e^{-x}. \tag{30}$$

Доказательство. Соотношение (29) следует из (28). Для доказательства равенства (30) заметим, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[s^{Z_n} \mid Z_n > 0\right] &= \frac{\mathbf{E}\left[s^{Z_n}; Z_n > 0\right]}{\mathbf{P}\left(Z_n > 0\right)} = \frac{\mathbf{E}\left[s^{Z_n}\right] - \mathbf{E}\left[s^{Z_n}; Z_n = 0\right]}{\mathbf{P}\left(Z_n > 0\right)} \\
&= \frac{f_n(s) - f_n(0)}{1 - f_n(0)} = \left(\frac{n\sigma^2}{2} + 1\right) \frac{s}{(1-s)\left(\frac{n\sigma^2}{2} + 1\right)\left(\frac{n\sigma^2}{2} + \frac{1}{1-s}\right)} \\
&= \frac{s}{\left(\frac{n\sigma^2}{2}(1-s) + 1\right)}.
\end{aligned}$$

Отсюда для $\lambda > 0$ получаем

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left\{-\frac{2\lambda Z_n}{n\sigma^2}\right\} \middle| \, Z_n > 0\right] = \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}}{\left(\frac{n\sigma^2}{2}\left(1 - \exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}\right) + 1\right)} \\
&\quad = \frac{1}{1+\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} d(1 - e^{-x}),
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Лемма 27. *Если $h(s)$ и $g(s)$ – две вероятностные производящие функции такие, что*

$$h'(1) = g'(1) = 1$$

и

$$\sigma_h^2 := h''(1) < \sigma_g^2 := g''(1),$$

то найдутся натуральные числа n_1 и n_2 такие, что

$$h_{n+n_1}(s) \leqslant g_{n+n_2}(s)$$

для всех $0 \leqslant s \leqslant 1$ и $n \geqslant 1$.

Доказательство. Разлагая функции $h(s)$ и $g(s)$ по формуле Тейлора до второго члена, находим, что

$$h(s) = 1 - (1-s) + \frac{h''(\theta)}{2}\,(1-s)^2 = s + \frac{h''(\theta)}{2}\,(1-s)^2$$

и

$$g(s) = s + \frac{g''(\theta_1)}{2}\,(1-s)^2\,,$$

где $\theta, \theta_1 \in (s, 1)$. Отсюда и из условий леммы вытекает существование интервала $0 < s_0 \leqslant s < 1$, в котором

$$h(s) \leqslant g(s).$$

Поскольку $h'(1) = g'(1) = 1$, то $h(s) \geqslant s$ и $g(s) \geqslant s$ при всех $s \in [0,1]$. Следовательно,

$$h_n(s) \leqslant g_n(s)$$

для $s \in [s_0, 1]$. Более того, для таких значений s

$$h_{n+n_1}(s) \leqslant g_{n+n_2}(s)$$

при любых $n_2 > n_1$.

Для получения аналогичной оценки при $s \in [0, s_0)$ обозначим $Z_n(h)$ и $Z_n(g)$ – количество частиц в момент n в ветвящихся процессах с производящими функциями числа потомков $h(s)$ и $g(s)$, соответственно, с условием $Z_0(h) = Z_0(g) = 1$, и выберем натуральное число n_1 таким, чтобы выполнялось неравенство

$$s_0 \leqslant h_{n_1}(0) = \mathbf{P}\left(Z_{n_1}(h) = 0\right),$$

а затем натуральное число $n_2 > n_1$ так, чтобы

$$h_{n_1}(s_0) \leqslant g_{n_2}(0) = \mathbf{P}\left(Z_{n_2}(g) = 0\right).$$

Такой выбор возможен, поскольку в силу критичности рассматриваемых процессов

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} h_n(0) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(Z_n(h) = 0\right)&\\ = \lim_{n\to\infty} g_n(0) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(Z_n(g) = 0\right) = 1.&\end{aligned}$$

Таким образом, для $s \in [0, s_0)$

$$s_0 \leqslant h_{n_1}(s) \leqslant g_{n_2}(0) \leqslant g_{n_2}(s)$$

и, следовательно, для $s \in [0, s_0)$

$$\begin{aligned}h_{n+n_1}(s) = h_n(h_{n_1}(s)) \leqslant g_n(h_{n_1}(s))&\\ \leqslant g_n(h_{n_1}(s_0)) \leqslant g_n(g_{n_2}(0)) \leqslant g_n(g_{n_2}(s)) = g_{n+n_2}(s).&\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

5.2. Предельная теорема для критических процессов Гальтона–Ватсона общего вида. Используя результаты предыдущего раздела, мы докажем теперь важную теорему для критических ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона с производящей функцией числа непосредственных потомков частиц общего вида.

Теорема 28. *Если производящая функция числа потомков частиц в процессе Гальтона–Ватсона удовлетворяет условиям*

$$f'(1) = 1, \qquad f''(1) = \sigma^2 \in (0, \infty), \tag{31}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1 - f_n(s)} - \frac{1}{1 - s}\right) = \frac{\sigma^2}{2} \tag{32}$$

равномерно по $s \in [0, 1)$.

Доказательство. Опираясь на лемму 27, легко проверить, что для любого $\varepsilon \in (0, \sigma^2)$ найдутся дробно-линейные функции $h(s)$ и $g(s)$, удовлетворяющие условиям

$$h'(1) = g'(1) = 1$$

и

$$h''(1) = \sigma^2(1-\varepsilon), \qquad g''(1) = \sigma^2(1+\varepsilon),$$

и натуральные числа $n_1 < n_2 < n_3$ такие, что для всех $n \geqslant 0$

$$1 - h_{n+n_1}(s) \geqslant 1 - f_{n+n_2}(s) \geqslant 1 - g_{n+n_3}(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Отсюда,

$$\frac{1}{n+n_2}\left(\frac{1}{1-f_{n+n_2}(s)} - \frac{1}{1-s}\right) \leqslant \frac{1}{n+n_2}\left(\frac{1}{1-g_{n+n_3}(s)} - \frac{1}{1-s}\right) \\ = \frac{n+n_3}{n+n_2}\frac{\sigma^2(1+\varepsilon)}{2}.$$

Аналогично, используя $h_{n+n_1}(s)$, получаем

$$\frac{1}{n+n_2}\left(\frac{1}{1-f_{n+n_2}(s)} - \frac{1}{1-s}\right) \geqslant \frac{n+n_1}{n+n_2}\frac{\sigma^2(1-\varepsilon)}{2}.$$

Из этих оценок, устремляя сначала $n \to \infty$, а затем $\varepsilon \to 0$, нетрудно вывести (32). $\square$

Теорема 28 является важным этапом доказательства следующей теоремы, описывающей при $n \to \infty$ асимптотическое поведение вероятности невырождения $\mathbf{P}(Z_n > 0)$ критических процессов Гальтона–Ватсона и распределения числа Z_n частиц в таких процессах при условии $Z_n > 0$.

Теорема 29. *Если выполнено условие (31), то при $n \to \infty$*

$$1 - f_n(0) = \mathbf{P}(Z_n > 0) \sim \frac{2}{n\sigma^2}, \tag{33}$$

и для любого $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{2Z_n}{n\sigma^2} \leqslant x \middle| Z_n > 0\right) = 1 - e^{-x}. \tag{34}$$

Доказательство. Полагая $s := 0$ в теореме 28, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-f_n(0)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1-f_n(0)} = \frac{\sigma^2}{2},$$

что доказывает (33).

Для доказательства (34) заметим, что

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{-\frac{2\lambda Z_n}{n\sigma^2}\right\}\Big|\, Z_n>0\right]=\frac{f_n\left(\exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}\right)-f_n(0)}{1-f_n(0)}$$
$$=1-\frac{1-f_n\left(\exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}\right)}{1-f_n(0)}.$$

Полагая $s:=\exp\left\{-2\lambda/(n\sigma^2)\right\}$ в теореме 28, получаем

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n\sigma^2}\left(\frac{1}{1-f_n\left(\exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}\right)}-\frac{1}{1-\exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-f_n(0)}{1-f_n\left(\exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}\right)}-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n\sigma^2}\frac{1}{1-\exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-f_n(0)}{1-f_n\left(\exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}\right)}-\frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-f_n\left(\exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}\right)}{1-f_n(0)}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left[\exp\left\{-\frac{2\lambda Z_n}{n\sigma^2}\right\}\Big|\, Z_n>0\right]=$$
$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1-f_n\left(\exp\left\{-\frac{2\lambda}{n\sigma^2}\right\}\right)}{1-f_n(0)}=\frac{1}{1+\lambda},$$

что доказывает (34). □

6. Правильно меняющиеся функции и их свойства

В данном разделе мы изучим некоторые свойства правильно меняющихся функций. Эти свойства будут необходимы при доказательстве предельных теорем для критических процессов Беллмана–Харриса. При изложении материала мы будем существенно опираться на § 9 главы VIII книги [20].

Определение 1. Положительная функция $L(t)$, $t > T > 0$, называется медленно меняющейся на бесконечности, если для любого $x > 0$
$$\frac{L(tx)}{L(t)} \to 1, \quad t \to \infty.$$

Определение 2. Положительная функция $R(t)$, $t > T > 0$, называется правильно меняющейся на бесконечности порядка $\rho \in (-\infty, +\infty)$, если для любого $x > 0$
$$\frac{R(tx)}{R(t)} \to x^{\rho}, \quad t \to \infty. \tag{35}$$

В дальнейшем для краткости мы будем писать $R(t) \in \mathcal{R}(\rho)$, если для функции $R(t)$ выполнено свойство (35).

Функция $r(z)$ называется правильно меняющейся в нуле порядка $\gamma \in (-\infty, +\infty)$, если функция $R(t) := r(t^{-1})$ является правильно меняющейся на бесконечности порядка $\rho = -\gamma$.

В дальнейшем мы будем изучать лишь свойства функций, правильно меняющихся на бесконечности. Соответствующие утверждения для функций, правильно меняющихся в нуле, легко получить при помощи замены $t \to z^{-1}$.

Примеры медленно и правильно меняющихся функций. Функции $\log t$, $1 + e^{-t}$, $\exp\left\{(\log t)^{\beta}\right\}$, $\beta \in (0,1)$, медленно меняются на бесконечности. Функция
$$t^{\delta}\left(1 + a\sin\left(2\pi\sqrt{\log t}\,\right)\right)$$
правильно меняется на бесконечности для малых значений a и всех $\delta \in (-\infty, +\infty)$.

Простейшие свойства медленно меняющихся функций. Если $L_1(t)$ и $L_2(t)$ – медленно меняющиеся функции на бесконечности, то

1) функция $L_1(t) + L_2(t)$ медленно меняется на бесконечности,

2) функция $L_1(t)L_2(t)$ медленно меняется на бесконечности.

Поскольку второе свойство очевидно, мы докажем лишь первое свойство.

В силу определения медленно меняющихся функций для фиксированного числа $x > 0$ и некоторых функций $\varepsilon_1(x,t)$ и $\varepsilon_2(x,t)$, стремящихся к нулю при $t \to \infty$, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{L_1(xt)+L_2(xt)}{L_1(t)+L_2(t)} &= \frac{L_1(xt)}{L_1(t)}\frac{L_1(t)}{L_1(t)+L_2(t)} + \frac{L_2(xt)}{L_2(t)}\frac{L_2(t)}{L_1(t)+L_2(t)} \\
&= (1+\varepsilon_1(x,t))\frac{L_1(t)}{L_1(t)+L_2(t)} + (1+\varepsilon_2(x,t)\frac{L_2(t)}{L_1(t)+L_2(t)} \\
&= 1+\varepsilon_1(x,t)\frac{L_1(t)}{L_1(t)+L_2(t)} + \varepsilon_2(x,t)\frac{L_2(t)}{L_1(t)+L_2(t)}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L_1(xt)+L_2(xt)}{L_1(t)+L_2(t)} = 1. \qquad \square$$

Перейдем теперь к более тонким свойствам медленно меняющихся функций.

Для медленно меняющейся функции $L(t)$ положим

$$\hat{L}_p(t) := \int_T^t y^p L(y)\,dy, \qquad L_p^*(t) := \int_t^\infty y^p L(y)\,dy. \tag{36}$$

Теорема 30. *Интегралы в (36) сходятся на бесконечности при $p<-1$ и расходятся при $p>-1$. Если $p \geqslant -1$, то функция $\hat{L}_p(t) \in \mathcal{R}(p+1)$. Если $p<-1$, то функция $L_p^*(t) \in \mathcal{R}(p+1)$. Последнее верно и при $p=-1$, если только функция $L_{-1}^*(t)$ корректно определена.*

Доказательство. Для фиксированных $x>0$ и $\varepsilon \in (0,1)$ выберем величину y_0 так, чтобы соотношение

$$(1-\varepsilon)L(y) \leqslant L(xy) \leqslant (1+\varepsilon)L(y)$$

выполнялось при всех $y \geqslant y_0$.

Допустим, что интегралы в (36) сходятся. В этом случае

$$L_p^*(xt) = x^{p+1}\int_t^\infty y^p L(xy)\,dy$$

и, следовательно, при $t \geqslant y_0$

$$(1-\varepsilon)x^{p+1}L_p^*(t) \leqslant L_p^*(xt) \leqslant (1+\varepsilon)x^{p+1}L_p^*(t).$$

Поскольку параметр $\varepsilon>0$ можно выбрать сколь угодно малым, то

$$\frac{L_p^*(xt)}{L_p^*(t)} \to x^{p+1}, \quad t\to\infty,$$

что и доказывает правильное изменение функции $L_p^*(t)$ на бесконечности с параметром $p+1$. Кроме того, $p+1 \leqslant 0$, поскольку функция $L_p^*(tx)$ монотонно убывает по x.

Отсюда следует, что при $p > -1$ второй интеграл в (36) расходится, что, конечно же, влечет расходимость и первого из интегралов в (36) при $p > -1$.

Допустим теперь, что интегралы в (36) расходятся. Тогда для $t \geqslant y_0$

$$\hat{L}_p(xt) = \hat{L}_p(xy_0) + x^{p+1}\int_{y_0}^{t} y^p L(xy)\,dy$$

и, следовательно, при $t \geqslant y_0$

$$(1-\varepsilon)x^{p+1}\hat{L}_p(t) \leqslant \hat{L}_p(xt) - \hat{L}_p(xy_0) \leqslant (1+\varepsilon)x^{p+1}\hat{L}_p(t).$$

Отсюда, разделив все части предыдущего соотношения на $\hat{L}_p(t)$ и учитывая, что по предположению $\hat{L}_p(t) \to \infty$, $t \to \infty$, нетрудно вывести, что

$$\frac{\hat{L}_p(xt)}{\hat{L}_p(t)} \to x^{p+1}, \quad t \to \infty,$$

и, следовательно, $\hat{L}_p(t) \in \mathcal{R}(p+1)$. Поскольку функция $\hat{L}_p(tx)$ монотонно возрастает по x, то $p \geqslant -1$.

Итак, если интегралы в (36) сходятся, то $p+1 \leqslant 0$, если расходятся, то $p+1 \geqslant 0$. Это доказывает утверждение теоремы для $p+1 \neq 0$.

В случае $p+1 = 0$ возможна как сходимость, так и расходимость интеграла

$$\int_T^{\infty} L(y)\,dy. \tag{37}$$

При этом легко проверить, что в случае сходимости верны рассуждения, проводившиеся выше для $p+1 < 0$, а в случае расходимости – для случая $p+1 > 0$. $\square$

Теорема 31. *Если функция $R(t) \in \mathcal{R}(\gamma)$, $\gamma \in (-\infty, +\infty)$, и интеграл*

$$R_p^*(t) := \int_t^{\infty} y^p R(y)\,dy$$

определен, то при $t \to \infty$

$$\frac{t^{p+1}R(t)}{R_p^*(t)} \to \lambda := -(p+\gamma+1) \geqslant 0. \tag{38}$$

Верно и обратное: если для некоторого $\lambda > 0$ выполнено (38), то функции $R(t) \in \mathcal{R}(-\lambda - p - 1)$ и $R_p^*(t) \in \mathcal{R}(-\lambda)$. Если соотношение (38) выполнено с $\lambda = 0$, то $R_p^*(t) \in \mathcal{R}(0)$, при этом функция $R(t)$ не обязана быть правильно меняющейся на бесконечности.

Если $R(t) \in \mathcal{R}(\gamma)$, $\gamma \in (-\infty, +\infty)$, и

$$\widehat{R}_p(t) := \int_T^t y^p R(y)\, dy,$$

то для $p + 1 \geqslant -\gamma$ при $t \to \infty$

$$\frac{t^{p+1}R(t)}{\widehat{R}_p(t)} \to \lambda := (p + \gamma + 1). \tag{39}$$

Верно и обратное: если для некоторого числа $\lambda > 0$ выполнено (39), то $R(t) \in \mathcal{R}(\lambda - p - 1)$ и $\widehat{R}_p(t) \in \mathcal{R}(\lambda)$. Если соотношение (38) выполнено с $\lambda = 0$, то функция $\widehat{R}_p(t) \in \mathcal{R}(0)$, т.е. является медленно меняющейся.

Доказательство. Мы убедимся в справедливости лишь первой части теоремы, поскольку для доказательства второй части нужно использовать аналогичные рассуждения. Зададим функцию $\eta(y)$, $y > 0$, при помощи соотношение

$$\frac{\eta(y)}{y} := \frac{y^p R(y)}{R_p^*(y)} = -\frac{\left(R_p^*(y)\right)'}{R_p^*(y)} = -\left(\log R_p^*(y)\right)'.$$

Для $x > 1$ имеем

$$\log\frac{R_p^*(t)}{R_p^*(xt)} = \int_t^{tx} \eta(y)\frac{dy}{y} = \eta(t)\int_1^x \frac{\eta(ts)}{\eta(t)}\frac{ds}{s}. \tag{40}$$

Допустим, что $R(t) \in \mathcal{R}(\gamma)$, т.е. $R(t) = t^\gamma L(t)$ для некоторой медленно меняющейся функции $L(t)$. В силу теоремы 30

$$R_p^*(t) = \int_t^\infty y^{p+\gamma} L(y)\, dy \in \mathcal{R}(\gamma + p + 1),$$

т.е. $R_p^*(t) = t^{\gamma+p+1}L^*(t)$ для некоторой медленно меняющейся функции $L^*(t)$. Следовательно, отношение

$$\frac{\eta(y)}{y} = \frac{y^p R(y)}{R_p^*(y)} = \frac{y^{\gamma+p}L(y)}{y^{\gamma+p+1}L^*(y)} = \frac{L(y)}{yL^*(y)}$$

является правильно меняющейся функцией с параметром -1. В частности, функция $\eta(t)$ является медленно меняющейся при $t \to \infty$ и, таким образом, при каждом фиксированном значении $s > 0$ подынтегральное выражение в (40) стремится к $1/s$ при $t \to \infty$. Отсюда и из леммы Фату вытекает, что

$$\liminf_{t\to\infty} \int_1^x \frac{\eta(ts)}{\eta(t)} \frac{ds}{s} \geqslant \log x.$$

Поскольку $R_p^*(t) = t^{\gamma+p+1} L^*(t)$, то

$$\log \frac{R_p^*(t)}{R_p^*(xt)} \to \lambda \log x, \quad \lambda := -(\gamma + p + 1). \tag{41}$$

Следовательно,

$$\limsup_{t\to\infty} \eta(t) = \limsup_{t\to\infty} \left(\log \frac{R_p^*(t)}{R_p^*(xt)} \times \left(\int_1^x \frac{\eta(ts)}{\eta(t)} \frac{ds}{s} \right)^{-1} \right) \leqslant \lambda.$$

Значит, функция $\eta(t)$ ограничена. Поэтому найдутся последовательность $t_n \to \infty$, $n \to \infty$, и константа $c \in (0, \infty)$ такие, что $\eta(t_n) \to c$, $n \to \infty$. Поскольку $\eta(t) \in \mathcal{R}(0)$, то при $n \to \infty$ последовательность $\eta(st_n) \to c$ при $n \to \infty$ для любого s и, кроме того, эта последовательность ограничена равномерно по $s \in [1, x]$. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^x \eta(t_n s) \frac{ds}{s} = c \log x.$$

В сочетании с (41) и (40) это означает, что $c = \lambda$. Поскольку величина c не зависит от выбора последовательности t_n, соотношение (38) из первой части теоремы 31 доказано.

Докажем теперь, что если для некоторого $\lambda > 0$ выполнено соотношение (38), то функции $R(t)$ и $R_p^*(t)$ правильно меняются на бесконечности с показателями $\gamma = -\lambda - p - 1$ и $-\lambda$ соответственно.

Действительно, из (38) вытекает, что $\eta(t) \to \lambda > 0$ при $t \to \infty$. Значит, обе части соотношения (40) стремятся к $\lambda \log x$ при $t \to \infty$ и, следовательно,

$$\frac{R_p^*(t)}{R_p^*(xt)} \to x^\lambda, \quad t \to \infty,$$

что означает правильное изменение функции $R^*_p(t)$ на бесконечности с параметром $-\lambda$. Отсюда вытекает, что при $t \to \infty$

$$\frac{R(xt)}{R(t)} = \frac{1}{x^{p+1}} \frac{(xt)^{p+1} R(xt)}{R^*_p(xt)} \times \frac{R^*_p(xt)}{R^*_p(t)} \times \frac{R^*_p(t)}{t^{p+1} R(t)} \to x^{-\lambda-p-1}$$

и, таким образом, при $\lambda > 0$ функция $R(t) \in \mathcal{R}(-\lambda - p - 1)$. □

Следствие 32. *Функция $L(t)$ медленно меняется на бесконечности тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$L(t) = a(t) \exp\left\{ \int_1^t \frac{\varepsilon(y)}{y}\, dy \right\}, \tag{42}$$

где $\varepsilon(t) \to 0$ и $a(t) \to c \in (0, \infty)$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Тот факт, что правая часть (42) является медленно меняющейся функцией на бесконечности, очевиден.

Пусть теперь функция $L(t)$ медленно меняется на бесконечности. Используя вторую часто теоремы 31, заключаем, что

$$\frac{L(t)}{\hat{L}_0(t)} = \frac{1 + \varepsilon(t)}{t},$$

где $\varepsilon(t) \to 0$, $t \to \infty$. Таким образом,

$$\left(\log \hat{L}_0(t)\right)' = \frac{1 + \varepsilon(t)}{t}$$

и

$$\hat{L}_0(t) = \hat{L}_0(1) t \exp\left\{ \int_1^t \frac{\varepsilon(y)}{y}\, dy \right\} = \frac{tL(t)}{1 + \varepsilon(t)} \sim tL(t), \quad t \to \infty,$$

что после деления на t дает

$$L(t) \sim \hat{L}_0(1) \exp\left\{ \int_1^t \frac{\varepsilon(y)}{y}\, dy \right\},$$

что и требовалось. □

Как мы видели, медленно меняющиеся функции обладают рядом “хороших” свойств. Однако следующий пример показывает, что поведение медленно меняющихся функций на бесконечности может иметь весьма экзотический характер.

Пример. Пусть

$$f(t) := (\log t)^{1/2} \left(1 + 2\sin\left(\log^{1/3} t\right)\right), \quad t \geqslant 1.$$

Легко проверить, что

$$f'(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{1 + 2\sin(\ln^{\frac{1}{3}} t)}{2\ln^{1/2} t} + \frac{2\cos(\ln^{\frac{1}{3}} t)}{3\ln^{\frac{1}{6}} t}\right) =: \frac{\varepsilon(t)}{t},$$

где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Поскольку $f(1) = 0$, то

$$f(t) = \int_1^t \frac{\varepsilon(y)}{y}\, dy.$$

Отсюда и из следствия 32 вытекает, что функция

$$L(t) := e^{f(t)} = \exp\left\{\int_1^t \frac{\varepsilon(y)}{y}\, dy\right\}$$

является медленно меняющейся на бесконечности, но при этом

$$\lim_{n\to\infty} L(t_n) = +\infty, \quad t_n := \exp\{\pi^3(1/2 + 2n)^3\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} L(t_n^*) = 0, \quad t_n^* := \exp\{\pi^3(1/2 + 2n + 1)^3\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, медленно меняющиеся функции могут сильно осциллировать. Однако, как показывает следующее утверждение, такого рода осцилляции не могут быть слишком частыми.

Следствие 33. *Если функция $L(t)$ медленно меняется на бесконечности, то*

$$\frac{L(xt)}{L(t)} \to 1, \quad t \to \infty,$$

равномерно по x из любого конечного интервала $[b_1, b_2] \subset (0, \infty)$.

Доказательство. Не ограничивая общности будем предполагать, что $0 < b_1 < 1 < b_2 < \infty$. Пусть $\mathrm{sign}(y) = 1$ при $y > 0$ и $\mathrm{sign}(y) = -1$ при $y \leqslant 0$. Используя представление для медленно меняющихся функций, установленное в следствии 32, имеем

$$\frac{L(xt)}{L(t)} = \frac{a(xt)}{a(t)} \exp\left\{\int_t^{xt} \frac{\varepsilon(y)}{y}\, dy\right\}.$$

Поскольку $\lim_{t\to\infty} a(t) = c \in (0,\infty)$, то при $t \to \infty$

$$\frac{a(xt)}{a(t)} \to 1$$

равномерно по $x \in [b_1, b_2] \subset (0,\infty)$, в то время как для каждого $\delta > 0$ и всех $t \geqslant t_0(\delta)$

$$\left|\int_t^{xt} \frac{\varepsilon(y)}{y}\,dy\right| \leqslant \operatorname{sign}(x-1)\int_t^{xt} \frac{|\varepsilon(y)|}{y}\,dy \leqslant \delta \log\frac{b_2}{b_1}.$$

Отсюда вытекает желаемый результат, поскольку $\delta > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. □

Следствие 34. *Для любого $\gamma > 0$ при $t \to \infty$*

$$t^{\gamma} L(t) \to \infty, \quad t^{-\gamma} L(t) \to 0.$$

Доказательство. Проверим лишь первую часть утверждения. Для любых $\delta \in (0,\gamma)$ и $t \geqslant t_0(\delta)$ имеем

$$\begin{aligned} t^{\gamma} L(t) &= a(t)\exp\left\{\gamma \log t + \int_1^t \frac{\varepsilon(y)}{y}\,dy\right\} \\ &\geqslant a(t)\exp\left\{\gamma \log t - \delta\int_1^t \frac{1}{y}\,dy\right\} \\ &\geqslant a(t)\exp\{(\gamma-\delta)\log t\} = a(t)t^{\gamma-\delta} \to \infty, \quad t \to \infty. \end{aligned}$$

Доказательство закончено. □

Теорема 35. *Для любого $\gamma > 0$ и функции $R_1(t) = t^{\gamma} L_1(t) \in \mathcal{R}(\gamma)$ найдется функция $R_2(t) = t^{1/\gamma} L_2(x) \in \mathcal{R}(1/\gamma)$ такая, что при $t \to \infty$*

$$R_1(R_2(t)) \sim t, \quad R_2(R_1(t)) \sim t,$$

причем функция $R_2(t)$ асимптотически единственна в том смысле, что если одно из перечисленных соотношений выполнено для функции $R_3(t) \to \infty$, то $R_3(t) \sim t^{1/\gamma} L_2(t)$.

Доказательство. Используя следствие 32, запишем функцию $L_1(t)$ в виде

$$L_1(t) = a_1(t)\exp\left\{\int_{C_1}^t \frac{\varepsilon_1(y)}{y}\,dy\right\},$$

где $a_1(t) \to \mathrm{const}$, $t \to \infty$, $\varepsilon_1(t) \to 0$, $t \to \infty$, а константа C_1 выбрана столь большой, чтобы $\gamma + \varepsilon_1(y) > 0$ при $y \geqslant C_1$. Отсюда следует, что функция $R_1(t)$ имеет представление

$$R_1(t) = K_1(t) \exp\left\{ \int_{C_1}^t \frac{\gamma + \varepsilon_1(y)}{y}\, dy \right\}, \quad t \geqslant C_1,$$

где $K_1(t) \to C_0 \in (0, \infty)$, $t \to \infty$. Положим

$$r_1(t) = \exp\left\{ \int_{C_1}^t \frac{\gamma + \varepsilon_1(y)}{y}\, dy \right\}.$$

Ясно, что эта функция строго возрастает при $t \geqslant C_1$, непрерывна и имеет при $t \geqslant C_2 := r_1(C_1) = 1$ обратную функцию $r_2(t)$, обладающую аналогичными свойствами, причем при $t \geqslant C_3 := \max\{C_1, 1\}$

$$r_1(r_2(t)) = t = r_2(r_1(t)).$$

Следовательно, при $t \geqslant C_3$

$$r_1'(r_2(t)) r_2'(t) = 1 = r_2'(r_1(t)) r_1'(t)$$

и

$$r_1'(t) = r_1(t) \frac{\gamma + \varepsilon_1(t)}{t}.$$

Далее, при $t \geqslant C_3$

$$\frac{r_2'(r_1(t)) r_1(t)}{r_2(r_1(t))} = \frac{r_2'(r_1(t)) t r_1'(t)}{t\,(\gamma + \varepsilon_1(t))} = \frac{r_2'(r_1(t)) r_1'(t)}{(\gamma + \varepsilon_1(t))} = \frac{1}{\gamma + \varepsilon_1(t)}.$$

Отсюда, полагая $y = r_1(t)$, получаем

$$\frac{y r_2'(y)}{r_2(y)} = \gamma^{-1} + \varepsilon_2(y),$$

где $\varepsilon_2(y) \to 0$, $y \to \infty$. Следовательно, при $t \geqslant C_3$

$$r_2(t) = \exp\left\{ \int_{C_3}^t \frac{\gamma^{-1} + \varepsilon_2(y)}{y}\, dy \right\} = t^{1/\gamma} \exp\left\{ \int_{C_3}^t \frac{\varepsilon_2(y)}{y}\, dy \right\}.$$

Положим

$$R_2(t) := C_0^{-1/\gamma} r_2(t) = C_0^{-1/\gamma} t^{1/\gamma} \exp\left\{ \int_{C_3}^t \frac{\varepsilon_2(y)}{y}\, dy \right\},$$

и покажем, что функция $R_2(t)$ и является искомой обратной функцией для $R_1(t)$.

Действительно, в силу равенства

$$L_1(C_0^{-1/\gamma} r_2(t)) = L_1(r_2(t))(1 + o(1)),$$

вытекающего при $t \to \infty$ из определения медленно меняющихся функций, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} R_1(R_2(t)) &= K_1(R_2(t)) r_1(R_2(t)) \\ &= K_1(R_2(t)) C_0^{-1} \times (r_2(t))^{\gamma} L_1(C_0^{-1/\gamma} r_2(t)) \\ &\sim (r_2(t))^{\gamma} L_1(C_0^{-1/\gamma} r_2(t)) \\ &\sim (r_2(t))^{\gamma} L_1(r_2(t)) = r_1(r_2(t)) = t. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $R_2(R_1(t)) \sim t$, $t \to \infty$, что доказывает существование функции $R_2(t)$ с заявленными в теореме 35 свойствами.

Установим теперь асимптотическую единственность такой функции. Если положительная функция $R_3(t)$ такова, что

$$R_1(R_3(t)) = t(1 + \varepsilon(t)),$$

где $\varepsilon(t) \to 0$, $t \to \infty$, то в силу свойств функций, правильно меняющихся на бесконечности, имеем

$$R_2(t) \sim R_2\left(t\left(1 + \varepsilon(t)\right)\right) = R_2(R_1(R_3(t))) \sim R_3(t), \quad t \to \infty. \qquad \square$$

7. Свойства преобразований Лапласа и тауберовы теоремы

В данном разделе мы займемся изучением свойств преобразований Лапласа распределений и мер, а также связи асимптотического поведения мер и их плотностей на бесконечности с асимптотическим поведением их преобразований Лапласа в окрестности нуля. Наше изложение во многом опирается на главу XIII книги [20].

Пусть F – собственная или несобственная функция распределения случайной величины X, сконцентрированной на $[0, \infty)$. Преобразованием Лапласа распределения F называется функция $\varphi(\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$, задаваемая равенством

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} F\{dx\} = \mathbf{E} e^{-\lambda X}.$$

В качестве примеров найдем преобразования Лапласа гамма-распределения и распределения Пуассона.

1. Преобразование Лапласа гамма-распределения. Пусть для $\alpha > 0$

$$F'(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-x}, \quad x \geqslant 0,$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(\lambda+1)x} x^{\alpha-1}\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1+\lambda)^\alpha} \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = \frac{1}{(1+\lambda)^\alpha}.\end{aligned}$$

2. Преобразование Лапласа распределения Пуассона. Пусть для $a > 0$

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!}\, e^{-a}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Тогда

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{k!}\, e^{-a} e^{-\lambda k} = e^{a\left(e^{-\lambda}-1\right)}.$$

Перечислим некоторые свойства преобразований Лапласа. Доказательства этих свойств можно найти, например, в главе XIII книги В. Феллера [20].

Теорема 36 (Единственность). *Различным вероятностным распределениям соответствуют различные преобразования Лапласа.*

Теорема 37 (Непрерывность). *Пусть F_n, $n = 1, 2, \ldots,$ – последовательность вероятностных распределений с преобразованиями Лапласа φ_n, а F – вероятностное распределение (может быть, несобственное) с преобразованием Лапласа φ.*

Если при $n \to \infty$ последовательность $F_n(x) \to F(x)$ в каждой точке x, в которой распределение F непрерывно, то $\varphi_n(\lambda) \to \varphi(\lambda)$ для любого $\lambda > 0$.

Если $\varphi_n(\lambda)$ сходится при $n \to \infty$ к некоторой функции $\varphi(\lambda)$ для любого $\lambda > 0$, то $\varphi(\lambda)$ является преобразованием Лапласа распределения F (может быть, несобственного) и $F_n(x) \to F(x)$, $n \to \infty$, в каждой точке x, в которой распределение F непрерывно.

Предел будет собственным тогда и только тогда, когда $\varphi(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to 0+$.

Напомним, что мерой U на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ (т.е. на σ-алгебре, порожденной открытыми интервалами действительной оси) называется неотрицательная счетно-аддитивная числовая функция на элементах σ-алгебры $\mathcal{B}$ такая, что $U\{\emptyset\} = 0$.

Преобразования Лапласа можно определить для мер U, сосредоточенных на полуоси $[0, \infty)$, но не обязательно являющихся вероятностными. Пусть интеграл

$$\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} U\{dx\}$$

сходится при $\lambda > a$. Тогда функция $\omega(\lambda)$ называется преобразованием Лапласа меры U при $\lambda > a$. Если мера U имеет плотность $u(x)$, то

$$\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} u(x)\, dx.$$

Примеры. 1) Для меры $U\{[0, x]\} = x^\rho$, $x \geqslant 0$, $\rho > 0$, имеем $u(x) = \rho x^{\rho-1}$. При этом

$$\frac{1}{\lambda^\rho} = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx^\rho = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{\rho-1}\, dx.$$

2) Преобразование Лапласа вероятностной меры U, имеющей единичный атом в нуле:

$$U\{0\} = 1, \quad U\{(-\infty, \infty) \setminus \{0\}\} = 0.$$

Ясно, что преобразование Лапласа такой меры тождественно равно 1.

3) Для меры U с плотностью $u(x) = e^x$, $x > 0$, функция

$$\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^x\, dx = \frac{1}{\lambda - 1}$$

является преобразованием Лапласа при $\lambda > 1$.

Определение 3. Будем говорить, что открытый интервал $I := (a, b) \subset (-\infty, \infty)$ является интервалом непрерывности для меры U, если в точках a, b нет атомов этой меры.

Определение 4. Будем говорить, что последовательность мер U_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходится при $n \to \infty$ к мере U, и писать $U_n \to U$, если для любого открытого конечного интервала непрерывности $I \subset (-\infty, \infty)$ меры U числовая последовательность $U_n\{I\} \to U\{I\}$ при $n \to \infty$.

Теорема 38 (Обобщенная теорема непрерывности для преобразований Лапласа). *Пусть U_n, $n = 1, 2, \ldots$, – последовательность мер, сосредоточенных на полуоси $[0, \infty)$ и имеющих преобразования Лапласа ω_n. Если существует число $a \geqslant 0$ такое, что для любого $\lambda > a$ последовательность $\omega_n(\lambda)$ сходится к некоторой функции $\omega(\lambda)$ при $n \to \infty$, то ω является преобразованием Лапласа некоторой меры U, причем $U_n\{I\} \to U\{I\}$ при $n \to \infty$ для любого ограниченного интервала непрерывности меры U.*

Если $U_n\{I\} \to U\{I\}$ при $n \to \infty$ для любого ограниченного интервала непрерывности меры U с преобразованием Лапласа ω, а последовательность $\{\omega_n(a)\}$ ограничена для некоторого $a \geqslant 0$, то $\omega_n(\lambda) \to \omega(\lambda)$ для любого $\lambda > a$.

Требование ограниченности необходимо. Действительно, пусть для $n = 1, 2, \ldots$ мера $U_n\{n\} = e^{n \ln n}$ и $U_n\{(-\infty, \infty) \setminus \{n\}\} = 0$. Тогда $U_n \to 0$ при $n \to \infty$, в то время как $\omega_n(\lambda) = e^{n(\ln n - \lambda)} \to \infty$ при $n \to \infty$ для любого $\lambda > 0$.

Сформулируем теперь важную теорему о сходимости произвольных положительных числовых мер (не обязательно вероятностных или даже ограниченных).

Теорема 39 (Теорема Хелли о выборе). *Пусть U_n, $n = 1, 2, \ldots$, – последовательность мер такая, что при каждом $x > 0$ числовая последовательность $U_n\{(-x, x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена. Тогда существует мера U и последовательность $n_k \to \infty$, $k \to \infty$, такие, что $U_{n_k} \to U$, $k \to \infty$.*

Доказательство. Для натурального числа N и $x > -N$ положим $H_{N,n}(x) = U_n\{(-N, x)\}$. Пусть, далее, $\mathcal{A} := \{a_m, m = 1, 2, \ldots,\}$ – произвольная последовательность чисел, всюду плотная на оси $(-\infty, \infty)$. Поскольку последовательность $H_{N,n}(a_m)$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена при каждом фиксированном N, то, используя стандартный диагональный метод, нетрудно показать, что найдется последовательность $n_k(1) \to \infty$, $k \to \infty$, такая, что для каждого $a_m \in \mathcal{A} \cap (-1, \infty)$ существует предел

$$G_1(a_m) := \lim_{k\to\infty} H_{1,n_k(1)}(a_m).$$

Доопределим функцию $G_1(x)$ в точках x, не принадлежащих набору $\mathcal{A} \cap (-1, \infty)$, соотношением

$$G_1(x) := \inf\{G_1(a_m) : a_m > x\}.$$

Ясно, что на множестве $(-1, \infty)$ функция $G_1(x)$ является возрастающей по x. Переопределим $G_1(x)$ в точках разрыва (число таких точек не более, чем счетно) таким образом, чтобы получить в результате функцию $H_1(x)$, непрерывную справа на $(-1, \infty)$ и такую, что $H_1(x)$ совпадает с $G_1(x)$ во всех точках непрерывности $G_1(x)$.

Рассмотрим теперь интервал $(-2, \infty)$ и выберем из последовательности $\{n_k(1),\, k = 1, 2, \dots\}$ подпоследовательность $n_k(2) \to \infty$, $k \to \infty$, такую, что для каждого $a_m \in \mathcal{A} \cap (-2, \infty)$ существует предел

$$G_2(a_m) := \lim_{k\to\infty} H_{2,n_k(2)}(a_m)$$

и, как и ранее, доопределим функцию $G_2(x)$ в точках x, не принадлежащих набору $\mathcal{A} \cap (-2, \infty)$, соотношением

$$G_2(x) := \inf\{G_2(a_m) : a_m > x\}.$$

Переопределим $G_2(x)$ в точках разрыва (число таких точек не более, чем счетно) таким образом, чтобы получить в результате функцию $H_2(x)$, непрерывную справа на $(-2, \infty)$ и такую, что $H_2(x)$ совпадает с $G_2(x)$ во всех точках непрерывности $G_2(x)$. Повторяя эту процедуру для всех $N = 1, 2, \dots$ и проводя процедуру диагонализации еще раз по отношению к последовательностям $\{n_k(N),\, k = 1, 2, \dots\}$, $N = 1, 2, \dots$, мы получим подпоследовательность $\{n_k(\infty),\, k = 1, 2, \dots\}$ и последовательность функций G_N, $N = 1, 2, \dots$, а затем и H_N, $N = 1, 2, \dots$, таких, что

$$G_N(a_m) := \lim_{k\to\infty} H_{N,n_k(\infty)}(a_m), \quad N = 1, 2, \dots,$$

а в точках x, не принадлежащих набору $\mathcal{A} \cap (-N, \infty)$,

$$G_N(x) := \inf\{G_N(a_m) : a_m > x\}.$$

В силу определения функция $H_N(x)$ непрерывна справа на $(-N,\infty)$ и совпадает с $G_N(x)$ во всех точках непрерывности $G_N(x)$. Ясно, что функции H_N, $N=1,2,\dots$, согласованы так, что для любого интервала $(x,y)\subset(-N,\infty)$ и любого $M>N$

$$H_M(y)-H_M(x)=H_N(y)-H_N(x).$$

Определим теперь меру U для интервала $(x,y)\subset(-N,\infty)$ равенством

$$U\{(x,y)\}=H_N(y)-H_N(x)$$

и покажем, что $U\{(x,y)\}=\lim_{k\to\infty}U_{n_k(\infty)}\{(x,y)\}$ для всех конечных интервалов (x,y) непрерывности меры U.

Действительно, если $(x,y)\subset(-N,\infty)$ – конечный интервал непрерывности U, то для любого $\varepsilon>0$ найдутся точки $b_1<b_2<b_3<b_4$, принадлежащие множеству $\mathcal{A}\cap(-N,\infty)$, такие, что $b_1<x<b_2$, $b_3<y<b_4$ и

$$G_N(b_2)-G_N(b_1)<\varepsilon,\quad G_N(b_4)-G_N(b_3)<\varepsilon,$$

и, кроме того, $G_N(b_i)=H_N(b_i)$, $i=1,2,3,4$. В силу монотонности,

$$G_N(b_1)\leqslant H_M(x)\leqslant G_N(b_2),\quad G_N(b_3)\leqslant H_M(y)\leqslant G_N(b_4),$$

а также

$$\begin{aligned}U_{n_k(\infty)}\{(b_2,b_3)\}\leqslant U_{n_k(\infty)}\{(x,y)\}&=H_{N,n_k(\infty)}(y)-H_{N,n_k(\infty)}(x)\\&\leqslant U_{n_k(\infty)}\{(b_1,b_4)\}.\end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем

$$\begin{aligned}G_N(b_3)-G_N(b_2)&\leqslant\liminf_{k\to\infty}U_{n_k(\infty)}\{(x,y)\}\\&\leqslant\limsup_{k\to\infty}U_{n_k(\infty)}\{(x,y)\}\leqslant G_N(b_4)-G_N(b_1).\end{aligned}$$

Устремляя теперь ε к нулю, заключаем, что

$$H_N(y)-H_N(x)=\lim_{k\to\infty}U_{n_k(\infty)}\{(x,y)\},$$

что и требовалось. $\square$

7.1. Тауберовы теоремы. Начиная с данного раздела и всюду в дальнейшем, мы будем рассматривать лишь меры, носители которых сосредоточены на $[0,\infty)$. Поэтому для краткости вместо обозначения $U\{[0,x)\}$ мы будем писать $U(x)$.

Пусть U – мера, сосредоточенная на множестве $[0,\infty)$, а

$$\omega(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}U\left\{dx\right\}$$

– ее преобразование Лапласа. Наша ближайшая цель – показать, что во многих важных случаях асимптотическое поведение меры U на бесконечности тесно связано с асимптотическим поведением ее преобразования Лапласа в окрестности нуля.

Теорема 40. *Пусть $L(t)$, $t\geqslant 0$, – функция, медленно меняющаяся на бесконечности. Положим $z=t^{-1}$. При $\rho\geqslant 0$ каждое из соотношений*

$$\omega\left(z\right)\sim\frac{1}{z^{\rho}}\,L\left(\frac{1}{z}\right),\quad z\to 0+, \tag{43}$$

и

$$U(t)\sim\frac{1}{\Gamma\left(\rho+1\right)}\,t^{\rho}L\left(t\right),\quad t\to\infty, \tag{44}$$

влечет другое. В частности,

$$\omega\left(z\right)\sim U(t)\Gamma\left(\rho+1\right),\quad t\to\infty. \tag{45}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (43). Тогда для $\rho>0$ при $z\to 0+$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{\omega\left(z\lambda\right)}{\omega\left(z\right)}&=\frac{1}{\omega\left(z\right)}\int_0^\infty e^{-\lambda zx}U\left\{dx\right\}=\frac{1}{\omega\left(z\right)}\int_0^\infty e^{-\lambda x}U\left\{z^{-1}dx\right\}\\&\to\frac{1}{\lambda^{\rho}}=\frac{1}{\Gamma\left(\rho+1\right)}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx^{\rho}.\end{aligned}$$

При $\rho=0$ под мерой $U(x)=x^0$ следует понимать вероятностную меру с единичным атомом в нуле. Отсюда и из теоремы непрерывности для преобразований Лапласа следует, что

$$\frac{U(xt)}{\omega(z)}=\frac{U(xz^{-1})}{\omega(z)}\to\frac{x^{\rho}}{\Gamma\left(\rho+1\right)},\quad z\to 0+\,.$$

Полагая $x = 1$, получаем

$$U(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} t^\rho L(t), \quad t \to \infty.$$

Кроме того, при $t \to \infty$

$$\frac{U(xt)}{U(t)} = \frac{U(xt)}{\omega(z)} \frac{\omega(z)}{U(t)} \to \frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)} \frac{\Gamma(\rho+1)}{1} = x^\rho$$

и

$$\omega(z) \sim U(t)\Gamma(\rho+1).$$

Если выполнено соотношение (44), то для любого $x > 0$

$$\frac{U(xt)}{U(t)} \to x^\rho, \quad t \to \infty. \tag{46}$$

В силу (46) найдется число t_0 такое, что $U(2t) \leqslant 2^{\rho+1}U(t)$ при всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, при $t \geqslant t_0$

$$U(2^n t) \leqslant 2^{(\rho+1)n} U(t).$$

Рассмотрим преобразование Лапласа

$$\omega(z) = \int_0^\infty e^{-zx} U\{dx\}$$

и покажем, что при $z = t^{-1}$ отношение

$$\frac{\omega(z)}{U(t)}$$

ограничено. Разбивая область интегрирования $[0, \infty)$ на отрезки точками $t, 2t, 4t, \dots$, получаем

$$\omega(z) = \int_0^t e^{-t^{-1}x} U\{dx\} + \sum_{n=1}^\infty \int_{t2^{n-1}}^{t2^n} e^{-t^{-1}x} U\{dx\}$$
$$\leqslant U(t) + \sum_{n=1}^\infty e^{-2^{n-1}} U(2^n t) \leqslant U(t) \left(1 + \sum_{n=1}^\infty e^{-2^{n-1}} 2^{(\rho+1)n}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\omega(z)}{U(t)} \leqslant \left(1 + \sum_{n=1}^\infty e^{-2^{n-1}} 2^{(\rho+1)n}\right) < \infty. \tag{47}$$

Отсюда и из (46) вытекает, что отношение

$$\frac{\omega(z\lambda)}{U(t)} = \frac{\omega(z\lambda)}{U(t\lambda)} \times \frac{U(t\lambda)}{U(t)}$$

ограничено при любом фиксированном $\lambda > 0$.

В силу (46) последовательность мер $\{U(xt)/U(t),\, t > 0\}$ с преобразованиями Лапласа

$$\begin{aligned}\omega_t(\lambda) &:= \frac{1}{U(t)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} U\{t\,dx\} \\ &= \frac{1}{U(t)} \int_0^\infty e^{-\lambda t^{-1} x} U\{dx\} = \frac{\omega(z\lambda)}{U(t)}\end{aligned} \tag{48}$$

сходится при $t \to \infty$ к мере $U^*(x) = x^\rho$ с преобразованием Лапласа $\omega^*(\lambda) = \Gamma(\rho+1)\lambda^{-\rho}$. Поскольку последовательность $\omega_t(1)$ ограничена, то в силу обобщенной теоремы непрерывности для преобразований Лапласа (теорема 38) при $z \to 0+$

$$\begin{aligned}\frac{1}{U(t)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} U\{t\,dx\} &= \frac{1}{U(t)} \int_0^\infty e^{-\lambda t^{-1} x} U\{dx\} \\ &= \frac{\omega(z\lambda)}{U(t)} \to \frac{\Gamma(\rho+1)}{\lambda^\rho}, \quad \lambda > 0.\end{aligned}$$

Полагая $\lambda = 1$, находим

$$\omega(z) \sim \Gamma(\rho+1) U(t) \sim \frac{1}{z^\rho} L\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \to 0+.$$

Теорема доказана. □

7.2. Асимптотика функции восстановления. Пусть $G(t) = \mathbf{P}(\tau \leqslant t)$ – функция распределения неотрицательной случайной величины τ. Будем предполагать, что либо

$$\mu := \int_0^\infty (1 - G(t))\, dt < \infty, \tag{49}$$

либо $\mu = \infty$ и, кроме того,

$$1 - G(t) \sim \frac{L(t)}{t^\beta}, \quad \beta \in (0, 1], \tag{50}$$

где функция $L(t)$ медленно меняется на бесконечности. В качестве меры U в данном разделе выступает функция восстановления

$$U(t) := \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(t).$$

Легко проверить, что

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} U\{dt\} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dG^{*k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dG(t) \right)^k$$
$$= \frac{1}{1 - \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(t)} = \frac{1}{\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(1 - G(t)\right)\, dt}. \tag{51}$$

Теорема 41. *Если выполнено условие* (49), *то*

$$U(t) \sim \frac{t}{\mu}, \quad t \to \infty.$$

Если выполнено условие (50) *и* $\beta \in (0,1)$, *то*

$$U(t) \sim \frac{\sin \pi\beta}{\pi\beta} \frac{1}{1 - G(t)}, \quad t \to \infty.$$

Если выполнено условие (50) *и* $\beta = 1$, *то*

$$U(t) \sim \frac{t}{L_1(t)}, \quad t \to \infty,$$

где $L_1(t)$ – *некоторая функция, медленно меняющаяся на бесконечности.*

Доказательство. Если выполнено условие (49), то в силу (51)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} U\{dt\} \sim \frac{1}{\lambda\mu}, \quad \lambda \to 0+,$$

и согласно теореме 40

$$U(t) \sim \frac{t}{\mu}, \quad t \to \infty.$$

Если $\mu = \infty$, то в силу соотношения (39) теоремы 31 с $p = 0$ и $\beta = -\gamma < 1$

$$\int_0^t (1 - G(t))\, dt \sim \frac{1}{1-\beta} t^{1-\beta} L(t) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\beta)} t^{1-\beta} L(t), \quad t \to \infty.$$

Отсюда, в силу той же теоремы 40,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,(1-G(t))\;dt \sim \frac{\Gamma\,(1-\beta)}{\lambda^{1-\beta}} L\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda\to 0+,$$

и, ввиду (51),

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} U\{dt\} \sim \frac{1}{\Gamma\,(1-\beta)\,\lambda^\beta L(\frac{1}{\lambda})}, \quad \lambda\to 0+,$$

что в сочетании с теоремой 40 влечет

$$U(t) \sim \frac{t^\beta}{\Gamma\,(1-\beta)\,\Gamma\,(1+\beta)\,L(t)}, \quad t\to\infty.$$

Таким образом,

$$U(t) \sim \frac{1}{\Gamma\,(1-\beta)\,\Gamma\,(1+\beta)}\frac{1}{(1-G(t))} = \frac{\sin\pi\beta}{\pi\beta}\frac{1}{(1-G(t))}, \quad t\to\infty.$$

Если же $\beta=1$, то вторая часть теоремы 31 с $p=0$, $\gamma=-\beta=-1$ и $\lambda=0$ позволяет заключить, что

$$\int_0^t (1-G(t))\;dt \sim L_1(t), \quad t\to\infty,$$

для некоторой функции $L_1(t)$, медленно меняющейся на бесконечности. Отсюда при помощи теоремы 40 несложно вывести, что

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,(1-G(t))\;dt \sim L_1\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda\to 0+\,.$$

Последнее в силу (51) влечет

$$U(t) \sim \frac{t}{L_1(t)}, \quad t\to\infty. \qquad \square$$

7.3. Тауберова теорема для плотностей. Вернемся теперь к общему виду меры U и докажем некоторое уточнение теоремы 40.

Теорема 42. *Пусть $0<\rho<\infty$. Если мера U имеет плотность $u(t)$, монотонную при $t\geqslant t_0$, то преобразование Лапласа ω меры U имеет асимптотическое представление*

$$\omega\,(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^\rho}\,L\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda\to 0+, \tag{52}$$

где $L(t)$ – функция, медленно меняющаяся на бесконечности, тогда и только тогда, когда

$$u(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)}\, t^{\rho-1} L\,(t)\,, \quad t \to \infty. \tag{53}$$

Доказательство. Если выполнено условие (53), то использование соотношения (39) с $p = 0$ и $\gamma = \rho - 1$ дает

$$U(t) = \int_T^t u(y)\, dy \sim \rho^{-1} t u(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}\, t^{\rho} L\,(t)\,, \quad t \to \infty.$$

Для завершения доказательства импликации (53) $\Rightarrow$ (52) осталось воспользоваться теоремой 40.

Докажем теперь, что из (52) следует (53). В силу теоремы 40 условие (52) влечет представление

$$U(t) \sim \frac{1}{\Gamma\,(\rho+1)}\, t^{\rho} L\,(t)\,, \quad t \to \infty. \tag{54}$$

Отсюда вытекает, что для любого фиксированного значения $b > 1$ найдется число $T_0 = T_0(b)$ такое, что

$$U(bt) \leqslant b^{\rho+1} U(t)$$

при всех $t \geqslant T_0$. Далее, если функция $u(t)$ монотонно возрастает при $t \geqslant T_1$, то для всех значений $t \geqslant T_2 := \max\{T_0, T_1\}$

$$tu(t) \leqslant \int_t^{2t} u(x)\, dx \leqslant U(2t) \leqslant 2^{\rho+1} U(t).$$

Если же функция $u(t)$ монотонно убывает при $t \geqslant T_1$, то для всех значений $t \geqslant T_2 := \max\{T_0, 2T_1\}$

$$tu(t) \leqslant 2 \int_{t/2}^{t} u(x)\, dx \leqslant 2U(t).$$

Таким образом, в условиях теоремы найдется константа c такая, что

$$tu(t) \leqslant cU(t), \quad t \geqslant T_2. \tag{55}$$

Отсюда и из (54) вытекает, что для любых чисел $0 < a < b < \infty$ и $t \geqslant T_2$

$$\sup_{a \leqslant y \leqslant b} tu(ty) \leqslant \sup_{a \leqslant y \leqslant b} ca^{-1} U(ty) \leqslant ca^{-1} b^{\rho+1} U(t).$$

Еще раз обращаясь к (54), мы видим, что

$$\frac{U(tb) - U(ta)}{U(t)} \to b^\rho - a^\rho, \quad t \to \infty.$$

Рассмотрим набор мер μ_t, $t \geqslant T_2$, с носителями на $[0, \infty)$ и таких, что

$$\mu_t\{[0, y)\} := \frac{tu(\max\{ty, T_1\})}{U(t)},$$

если функция $u(t)$ возрастает при $t \geqslant T_1$, и

$$\mu_t\{[y, \infty)\} := \frac{tu(\max\{ty, T_1\})}{U(t)},$$

если функция $u(t)$ убывает при $t \geqslant T_1$.

Поскольку при каждом $y > 0$ набор чисел $\mu_t\{-y, y\}$, $t \geqslant T_2$, ограничен, то по теореме Хелли о выборе для мер (теорема 39) существуют последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, элементы которой стремятся к бесконечности при $n \to \infty$, и монотонная функция $\psi(y)$ такие, что

$$\frac{u(t_n y)t_n}{U(t_n)} \to \psi(y), \quad n \to \infty, \tag{56}$$

во всех точках непрерывности функции $\psi(y)$.

Теперь оценка (55) и теорема о мажорируемой сходимости дают для любых $0 < a < b < \infty$:

$$\begin{aligned} b^\rho - a^\rho &= \lim_{n\to\infty} \frac{U(t_n b) - U(t_n a)}{U(t_n)} = \lim_{n\to\infty} \int_{t_n a}^{t_n b} \frac{u(y)}{U(t_n)}\, dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \frac{u(t_n y)t_n}{U(t_n)}\, dy = \int_a^b \psi(y)\, dy. \end{aligned} \tag{57}$$

Следовательно, $\psi(y) = \rho y^{\rho-1}$. Поскольку этот предел не зависит от выбора последовательности $\{t_n\}$ в (56), то

$$\frac{u(ty)t}{U(t)} \to \rho y^{\rho-1}, \quad t \to \infty,$$

что при $y = 1$ доказывает импликацию (52) $\Rightarrow$ (53). $\square$

Следствие 43. *Пусть $u(t)$ – неотрицательная функция, монотонная при всех $t \geqslant t_0$. Если для некоторых чисел $\rho > 0$, $k \geqslant 0$ и медленно меняющейся на бесконечности функции $L(t)$ выполнено соотношение*

$$\omega_k\left(\lambda\right) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^k u(t)\, dt \sim \frac{1}{\lambda^\rho}\, L\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to 0+,$$

то

$$u(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)}\, t^{\rho-k-1} L\left(t\right), \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Положим

$$U_k(t) := \int_0^t t^k u(t)\, dt.$$

Из условий следствия вытекает, что

$$U_k(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}\, t^\rho L\left(t\right), \quad t \to \infty.$$

Следовательно,

$$\frac{U_k(tb) - U_k(ta)}{U_k(t)} \to b^\rho - a^\rho, \quad t \to \infty.$$

Отсюда вытекает, что для любого фиксированного значения $b > 1$ найдется число $T_0 = T_0(b)$ такое, что

$$U_k(bt) \leqslant b^{\rho+1} U_k(t)$$

при всех $t \geqslant T_0$. Далее, если функция $u(t)$ монотонно возрастает при $t \geqslant T_1$, то для всех значений $t \geqslant T_2 := \max\{T_0, T_1\}$

$$t^{k+1} u(t) \leqslant \int_t^{2t} x^k u(x)\, dx \leqslant U_k(2t) \leqslant 2^{\rho+1} U_k(t).$$

Если же функция $u(t)$ монотонно убывает при $t \geqslant T_1$, то для всех значений $t \geqslant T_2 := \max\{T_0, 2T_1\}$

$$t^{k+1} u(t) \leqslant 2^{k+1} \int_{t/2}^{t} x^k u(x)\, dx \leqslant 2^{k+1} U_k(t).$$

Таким образом, в условиях следствия найдется константа c такая, что

$$t^{k+1} u(t) \leqslant c U_k(t), \quad t \geqslant T_2.$$

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 42, следует, что для любого фиксированного $y > 0$ при $t \to \infty$

$$u(ty)t^{k+1} \sim \rho y^{\rho-k-1} U_k(t)$$

или

$$u(t) \sim \rho t^{-k-1} U_k(t) \sim \frac{\rho}{\Gamma(\rho+1)}\, t^{\rho-k-1} L\,(t) = \frac{1}{\Gamma(\rho)}\, t^{\rho-k-1} L(t). \quad \square$$

7.4. Тауберова теорема для производящих функций. Тауберовы теоремы предыдущего раздела нетрудно распространить на случай производящих функций.

Теорема 44. *Пусть* $\{f_n,\, n = 0, 1, \dots\}$ *– последовательность неотрицательных чисел, и пусть неотрицательное число* k *таково, что ряд*

$$F_k(s) := \sum_{n=0}^{\infty} n^k f_n s^n$$

сходится при $0 \leqslant s < 1$. *Для* $0 \leqslant \rho < \infty$ *и функции* $L(t)$, *медленно меняющейся на бесконечности, соотношение*

$$F_0(s) \sim \frac{1}{(1-s)^{\rho}}\, L\left(\frac{1}{1-s}\right), \quad s \to 1-,$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$f_0 + f_1 + \dots + f_n \sim \frac{1}{\Gamma\,(\rho+1)}\, n^{\rho} L\,(n)\,, \quad n \to \infty. \tag{58}$$

Если, кроме того, последовательность f_n *является монотонной при* $n \geqslant n_0$, *то для* $0 < \rho < \infty$ *соотношение*

$$F_k(s) \sim \frac{1}{(1-s)^{\rho}}\, L\left(\frac{1}{1-s}\right), \quad s \to 1-,$$

влечет

$$f_n \sim \frac{1}{\Gamma\,(\rho)} n^{\rho-k-1} L\,(n)\,, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть U – мера с носителем на $[0, \infty)$ и плотностью u такой, что

$$u(t) = f_n, \quad n \leqslant t < n+1.$$

В частности,

$$U(n) = f_0 + f_1 + \cdots + f_n.$$

Преобразование Лапласа ω меры U равно

$$\begin{aligned}\omega(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_n^{n+1} e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-\lambda n} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\, F_0(e^{-\lambda}).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega(\lambda) \sim F_0(e^{-\lambda}) \sim \frac{1}{\lambda^\rho}\, L\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to 0+.$$

В силу теоремы 40 такое асимптотическое представление возможно тогда и только тогда, когда выполнено условие (58). Первое утверждение теоремы 44 доказана.

Второе утверждение этой теоремы доказывается аналогично со ссылкой на следствие 43. □

8. Некоторые свойства последовательностей независимых случайных величин

При исследовании свойств распределений числа частиц в критических процессах Беллмана–Харриса нам будет необходимо следующее утверждение, касающееся асимптотического поведения сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, распределение которых имеет “легкий” хвост.

Теорема 45. *Пусть $X, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $B(t)$ такой, что $\mathbf{E}X = 0$. Если*

$$\mathbf{P}(|X| > t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \to \infty, \tag{59}$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Мы докажем эту теорему в несколько этапов. Для начала напомним определение медианы распределения.

Определение. Медианой распределения случайной величины Y называется любое число $\operatorname{med} Y$ такое, что

$$\mathbf{P}\left(Y \geqslant \operatorname{med} Y\right) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\left(Y \leqslant \operatorname{med} Y\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Для случайной величины Y будем обозначать символом $\widetilde{Y}$ так называемую симметризованную случайную величину, задаваемую равенством $\widetilde{Y} = Y - Z$, где Z – случайная величина, имеющая такое же распределение, как и случайная величина Y, и независимая от Y.

Лемма 46. *Для любой случайной величины Y, любого $\varepsilon > 0$ и произвольного числа a справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}\left(|Y - \operatorname{med} Y| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\big(|\widetilde{Y}| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant 2\mathbf{P}\left(|Y - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(|\widetilde{Y}| \geqslant \varepsilon\right) &= \mathbf{P}\left(|Y - a - (Z - a)| \geqslant \varepsilon\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}\left(|Y - a| + |Z - a| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\mathbf{P}\left(|Y - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right),\end{aligned}$$

что доказывает правое из неравенств леммы.

Для доказательства левого неравенства заметим, что в силу независимости случайных величин Y и Z и равенства $\operatorname{med} Y = \operatorname{med} Z$, которое можно предполагать выполненным без ограничения общности, справедливы оценки

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{P}\left(Y - \operatorname{med} Y \geqslant \varepsilon\right) &\leqslant \mathbf{P}\left(Y - \operatorname{med} Y \geqslant \varepsilon; Z - \operatorname{med} Z \leqslant 0\right)\\ &= \mathbf{P}\left(Y - Z \geqslant \varepsilon - (Z - \operatorname{med} Z); Z - \operatorname{med} Z \leqslant 0\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}\left(Y - Z \geqslant \varepsilon; Z - \operatorname{med} Z \leqslant 0\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}\left(Y - Z \geqslant \varepsilon\right)\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{P}\left(Y - \operatorname{med} Y \leqslant -\varepsilon\right) &\leqslant \mathbf{P}\left(Y - \operatorname{med} Y \leqslant -\varepsilon; Z - \operatorname{med} Z \geqslant 0\right)\\ &= \mathbf{P}\left(Y - Z \leqslant -\varepsilon - (Z - \operatorname{med} Z); Z - \operatorname{med} Z \geqslant 0\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}\left(Y - Z \leqslant -\varepsilon; Z - \operatorname{med} Z \geqslant 0\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}\left(Y - Z \leqslant \varepsilon\right).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}\left(|Y - \operatorname{med} Y| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(|Y - Z| \geqslant \varepsilon\right),$$

что и требовалось показать. $\square$

Положим $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

Лемма 47. *При выполнении условий теоремы 45 для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}\left(\left|\widetilde{S}_n\right| \geqslant n\varepsilon\right) = 0. \tag{60}$$

Доказательство. Для $k \leqslant n$ и $n = 1, 2, \ldots$ положим

$$\widetilde{X}_{nk} := \begin{cases} \widetilde{X}_k, & \text{если} \quad \left|\widetilde{X}_k\right| < n; \\ 0, & \text{если} \quad \left|\widetilde{X}_k\right| \geqslant n; \end{cases}$$

и обозначим

$$\widetilde{S}_{nn} := \sum_{k=1}^{n} \widetilde{X}_{nk}.$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{E}\widetilde{X}_{nk} = 0, \tag{61}$$

в то время как в соответствии с условием (59) при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}\widetilde{X}_{nk}^2 = 2\int_{-n}^{n} |t|\mathbf{P}\left(\left|\widetilde{X}_k\right| \geqslant t\right) dt = o(\log n) \tag{62}$$

и

$$\mathbf{E}\widetilde{X}_{nk}^4 = 4\int_{-n}^{n} |t|^3\mathbf{P}\left(\left|\widetilde{X}_k\right| \geqslant t\right) dt = o(n^2). \tag{63}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left|\widetilde{S}_n\right| \geqslant n\varepsilon\right) &= \mathbf{P}\left(\left|\widetilde{S}_n\right| \geqslant n\varepsilon;\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\widetilde{X}_k\right| \geqslant n\right) \\ &\qquad + \mathbf{P}\left(\left|\widetilde{S}_n\right| \geqslant n\varepsilon;\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\widetilde{X}_k\right| < n\right) \\ &\leqslant \mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\widetilde{X}_k\right| \geqslant n\right) + \mathbf{P}\left(\left|\widetilde{S}_{nn}\right| \geqslant n\varepsilon\right) \\ &\leqslant n\mathbf{P}\left(\left|\widetilde{X}_1\right| \geqslant n\right) + \mathbf{P}\left(\left|\widetilde{S}_{nn}\right| \geqslant n\varepsilon\right). \end{aligned}$$

В силу условий леммы

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \mathbf{P}\big(|\widetilde{X}_1| \geqslant n\big) = 0.$$

Таким образом, для доказательства равенства (60) достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}\big(|\widetilde{S}_{nn}| \geqslant n\varepsilon\big) = 0. \tag{64}$$

С этой целью заметим, что

$$\mathbf{P}\big(|\widetilde{S}_{nn}| \geqslant n\varepsilon\big) \leqslant \frac{1}{(n\varepsilon)^4}\mathbf{E}\big(\widetilde{S}_{nn}\big)^4$$

и, ввиду (61),

$$\mathbf{E}\big(\widetilde{S}_{nn}\big)^4 = \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \widetilde{X}_{nk}\right)^4 = n\mathbf{E}\big(\widetilde{X}_{n1}\big)^4 + 3n(n-1)\big(\mathbf{E}\big(\widetilde{X}_{n1}\big)^2\big)^2.$$

Это соотношение в сочетании с (62) и (63) дает

$$n\mathbf{P}\big(|\widetilde{S}_{nn}| \geqslant n\varepsilon\big) \leqslant \frac{n}{(n\varepsilon)^4} o\left(n^3 + n^2\log^2 n\right) = o(1), \quad n \to \infty.$$

Итак, равенство (64) установлено, чем и завершается доказательство леммы 47. □

Доказательство теоремы 45. Из лемм 46 и 47 вытекает, что

$$n\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{med}\,\frac{S_n}{n}\right| \geqslant 2\varepsilon\right) \leqslant 2n\mathbf{P}\big(|\widetilde{S}_n| \geqslant 2n\varepsilon\big) = o(1), \quad n \to \infty. \tag{65}$$

С другой стороны, в силу закона больших чисел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant 2\varepsilon\right) = 0.$$

Из этого факта и (65) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{med}\,\frac{S_n}{n} = 0.$$

Отсюда, еще раз обращаясь к (65), нетрудно вывести, что

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Теорема доказана. □

Лемма 48. *Если τ – неотрицательная случайная величина с распределением $G(t)$ таким, что*

$$\lim_{t\to\infty} t^2\left(1-G(t)\right)=0,$$

то для $\mu:=\mathbf{E}\tau$ и любого $\varepsilon\in(0,1)$ при $t\to\infty$

$$tG^{*n}(t)\to 0, \quad \text{если} \quad n=\left[\frac{t(1+\varepsilon)}{\mu}\right],$$

и

$$t\left(1-G^{*n}(t)\right)\to 0, \quad \text{если} \quad n=\left[\frac{t(1-\varepsilon)}{\mu}\right].$$

Доказательство. Заметим, что если $n:=\left[\frac{t(1+\varepsilon)}{\mu}\right]$, то

$$t\leqslant\frac{n\mu+1}{1+\varepsilon}$$

и, следовательно,

$$tG^{*n}(t)\leqslant t\mathbf{P}\left((\tau_1-\mu)+\cdots+(\tau_n-\mu)\leqslant -n\frac{\mu\varepsilon}{1+\varepsilon}+\frac{1}{1+\varepsilon}\right),$$

где τ_i, $i=1,2,\ldots,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение $G(t)$. Если же $n:=\left[\frac{t(1-\varepsilon)}{\mu}\right]$, то

$$t\geqslant\frac{n\mu}{1-\varepsilon},$$

что влечет

$$t\left(1-G^{*n}(t)\right)\leqslant t\mathbf{P}\left((\tau_1-\mu)+\cdots+(\tau_n-\mu)\geqslant n\frac{\mu\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

Теперь для завершения доказательства леммы достаточно вспомнить теорему 45. □

9. Предельная теорема для критических процессов Беллмана–Харриса “близких” к марковским

Пусть, как и ранее, $F(t;s)=\mathbf{E}\left[s^{Z(t)}\middle|\, Z(0)=1\right]$ – производящая функция числа частиц в (G,f)-процессе Беллмана–Харриса в момент t. Положим

$$Q(t;s):=1-F(t;s)$$

и

$$Q(t) := \mathbf{P}(Z(t) > 0) = Q(t; 0) = 1 - F(t; 0).$$

Основная цель данного раздела - доказательство следующей теоремы, которая по форме близка к аналогичной теореме 29 для ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона и соответствующему утверждению для марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем (см., например, курс лекций [10]).

Теорема 49. *Если ветвящийся процесс Беллмана–Харриса удовлетворяет условиям*

$$\mathbf{E}\xi = f'(1) = 1, \qquad \sigma^2 = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 \in (0, \infty) \tag{66}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} t^2\,(1 - G(t)) = 0, \tag{67}$$

то

$$Q(t) = \mathbf{P}(Z(t) > 0) \sim 1 - f_{[\frac{t}{\mu}]}(0) \sim \frac{2\mu}{\sigma^2 t}, \quad t \to \infty, \tag{68}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left\{-\lambda\frac{2\mu Z(t)}{\sigma^2 t}\right\} \,\middle|\, Z(t) > 0\right] = \frac{1}{1+\lambda}. \tag{69}$$

Мы знаем, что функция $F(t; s)$ удовлетворяет на полуоси $t \geqslant 0$ уравнению

$$F(t; s) = s(1 - G(t)) + \int_0^t f(F(t-u; s))\,dG(u). \tag{70}$$

Оказывается, что для фиксированного $s \in [0, 1]$ мы можем сказать о свойствах $F(t; s)$ несколько больше.

Лемма 50. *Для критических и докритических процессов Беллмана–Харриса производящая функция $F(t; s)$ является неубывающей функцией по t при любом фиксированном значении $s \in [0, 1)$.*

Доказательство. Пусть $F_0(t; s) = s$ и

$$F_{n+1}(t; s) = s(1 - G(t)) + \int_0^t f(F_n(t-u; s))\,dG(u), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{71}$$

Ясно, что функция $F_0(t;s) = s$ не убывает по t, и если функция $F_n(t;s) \geqslant s$ не убывает по t при каждом фиксированном $s \in [0,1]$, то для любого $\Delta > 0$

$$
\begin{aligned}
&F_{n+1}(t+\Delta;s) - F_{n+1}(t;s) = \\
&\qquad = \int_0^t \left[f(F_n(t+\Delta-u;s)) - f(F_n(t-u;s)) \right] dG(u) \\
&\qquad\qquad + \int_t^{t+\Delta} f(F_n(t+\Delta-u;s))\, dG(u) - s\,(G(t+\Delta) - G(t)) \\
&\qquad \geqslant \int_t^{t+\Delta} (f(F_n(t+\Delta-u;s)) - s)\, dG(u) \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

поскольку для докритических и критических процессов $f(s) \geqslant s$ при всех $s \in [0,1]$. $\square$

В следующей лемме мы получим оценки сверху и снизу для производящей функции $F(t;s)$ в терминах итераций $f_n(s)$ и сверток $G^{*n}(t)$.

Лемма 51. *Если $A = \mathbf{E}\xi = 1$, то для любого $n \geqslant 1$ справедливы оценки*

$$
\begin{aligned}
1 - f_n(s) - (1-s)G^{*n}(t) &\leqslant 1 - F(t;s) \\
&\leqslant 1 - f_n(s) + (1-s)(1 - G^{*n}(t)).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Легко проверить, что функции $F_n(t;s)$, задаваемые соотношением (71), таковы, что при всех $s \in [0,1]$ и $t \geqslant 0$

$$
\begin{aligned}
1 \geqslant F_1(t;s) &= s(1 - G(t)) + f(s)G(t) \\
&\geqslant s(1 - G(t)) + sG(t) = F_0(t;s) = s
\end{aligned}
$$

и, по индукции,

$$F_{n+1}(t;s) \geqslant F_n(t;s).$$

Таким образом, для всех $n \geqslant 1$ и $t \geqslant 0$ справедливы оценки

$$s \leqslant F_n(t;s) \leqslant F(t;s) \leqslant 1,\ 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Покажем, что в условиях леммы

$$0 \leqslant F(t,s) - F_n(t;s) \leqslant (1-s)G^{*n}(t) \tag{72}$$

для всех $n \geqslant 1$. При $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned}0 \leqslant F(t,s) - F_1(t;s) &= \int_0^t \left[f(F(t-u;s)) - f(F_0(t-u;s))\right] dG(u)\\ &\leqslant \int_0^t \left[F(t-u;s) - F_0(t-u;s)\right] dG(u)\\ &\leqslant \int_0^t (1-s)\, dG(u) = (1-s)G(t).\end{aligned}$$

Далее, по индукции, если оценки (72) верны для некоторого $n \geqslant 1$, то

$$\begin{aligned}&0 \leqslant F(t,s) - F_{n+1}(t;s) = \int_0^t \left[f(F(t-u;s)) - f(F_n(t-u;s))\right] dG(u)\\ &\leqslant \int_0^t \left[F(t-u;s) - F_n(t-u;s)\right] dG(u)\\ &\leqslant (1-s) \int_0^t G^{*n}(t-u)\, dG(u) = (1-s)\, G^{*(n+1)}(t),\end{aligned}$$

что доказывает (72). Убедимся теперь в справедливости неравенств

$$0 \leqslant f_n(s) - F_n(t;s) \leqslant (1-s)\,(1 - G^{*n}(t)). \tag{73}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}0 \leqslant f_1(s) - F_1(t;s) &= f(s) - s(1-G(t)) - f(s)G(t)\\ &= (f(s)-s)\,(1-G(t)) \leqslant (1-s)\,(1-G(t))\end{aligned}$$

и, по индукции, если оценки (73) верны для некоторого $n \geqslant 1$, то

$$\begin{aligned}0 \leqslant f_{n+1}(s) - F_{n+1}(t;s) &= (f_{n+1}(s) - s)\,(1-G(t))\\ &\quad + \int_0^t \left[f(f_n(s)) - f(F_n(t-u;s))\right] dG(u)\\ &\leqslant (1-s)\,(1-G(t)) + \int_0^t \left[f_n(s) - F_n(t-u;s)\right] dG(u)\\ &\leqslant (1-s)\,(1-G(t)) + (1-s)\int_0^t (1 - G^{*n}(t-u))\, dG(u)\\ &= (1-s)\,(1 - G^{*(n+1)}(t)).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы осталось записать представление

$$(1 - f_n(s)) - (1 - F(t,s)) = F(t,s) - F_n(t;s) + F_n(t;s) - f_n(s)$$

и, отталкиваясь от левых частей оценок (72) и (73), проверить справедливость неравенств

$$\begin{aligned} F_n(t;s) - f_n(s) &\leqslant F(t,s) - F_n(t;s) + F_n(t;s) - f_n(s) \\ &\leqslant F(t,s) - F_n(t;s), \end{aligned}$$

а затем воспользоваться правыми неравенствами в (72) и (73). □

Теперь у нас все готово для доказательства основного результата данного раздела – теоремы 49.

Доказательство теоремы 49. Согласно теореме 34 при $n \to \infty$

$$1 - f_n(0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n}. \tag{74}$$

Обращаясь к левому из неравенств леммы 51, легко заметить, что

$$1 - \frac{1}{1 - f_n(0)}\, G^{*n}(t) \leqslant \frac{Q(t)}{1 - f_n(0)}.$$

Отсюда, полагая $n := \left[\frac{t(1+\varepsilon)}{\mu}\right]$, получаем в силу леммы 48

$$1 \leqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{\sigma^2 n}{2}\, Q(t) = (1+\varepsilon) \liminf_{t\to\infty} \frac{\sigma^2 t}{2\mu}\, Q(t). \tag{75}$$

Аналогично, используя правое неравенство леммы 51, находим

$$\frac{Q(t)}{1 - f_n(0)} \leqslant 1 + \frac{1 - G^{*n}(t)}{1 - f_n(0)},$$

что для $n := \left[\frac{t(1-\varepsilon)}{\mu}\right]$, $\varepsilon \in (0,1)$, в силу леммы 48 влечет

$$(1-\varepsilon) \limsup_{t\to\infty} \frac{\sigma^2 t}{2\mu}\, Q(t) \leqslant 1. \tag{76}$$

Поскольку величина $\varepsilon > 0$ может быть выбрана в оценках (75) и (76) сколь угодно малой, утверждение (68) доказано.

Для доказательства предельного соотношения (69) заметим сначала, что

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{-\lambda\frac{2\mu Z(t)}{\sigma^2 t}\right\}\,\middle|\, Z(t)>0\right] = 1-\frac{1-F\left(t;\exp\left\{-\lambda\frac{2\mu}{\sigma^2 t}\right\}\right)}{Q(t)}$$
$$= 1-\frac{Q\left(t;\exp\left\{-\lambda\frac{2\mu}{\sigma^2 t}\right\}\right)}{Q(t)}.$$

Далее, в силу леммы 51

$$\frac{1-f_n(s)}{Q(t)}-\frac{(1-s)}{Q(t)}G^{*n}(t)\leqslant\frac{Q\,(t;s)}{Q(t)}.$$

Полагая $n:=\left[t(1+\varepsilon)\mu^{-1}\right]$ и $s:=\exp\left\{-\lambda\frac{2\mu}{\sigma^2 t}\right\}$ и обращаясь к закону больших чисел, мы видим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\exp\left\{-\lambda\frac{2\mu}{\sigma^2 t}\right\}}{Q(t)}G^{*n}(t)=\lambda\lim_{n\to\infty}G^{*n}(t)=0.$$

Кроме того, согласно условной предельной теореме 29 для критических ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-f_n(s)}{Q(t)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-f_n(s)}{1-f_n(0)}\frac{1-f_n(0)}{Q(t)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-f_n\left(\exp\left\{-\lambda\frac{n\mu}{t}\frac{2}{\sigma^2 n}\right\}\right)}{1-f_n(0)}\lim_{n\to\infty}\frac{1-f_n(0)}{Q(t)}$$
$$=\frac{\lambda(1+\varepsilon)}{1+\lambda(1+\varepsilon)}\frac{1}{(1+\varepsilon)}=\frac{\lambda}{1+\lambda(1+\varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{Q\left(t;\exp\left\{-\lambda\frac{2\mu}{\sigma^2 t}\right\}\right)}{Q(t)}\geqslant\frac{\lambda}{1+\lambda(1+\varepsilon)}.$$

При помощи сходных аргументов, полагая $n:=\left[t(1-\varepsilon)\mu^{-1}\right]$ и обращаясь к неравенству

$$\frac{Q\,(t;s)}{Q(t)}\leqslant\frac{1-f_n(s)}{Q(t)}+\frac{(1-s)}{Q(t)}\left(1-G^{*n}(t)\right),$$

можно показать, что

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{Q\left(t;\exp\left\{-\lambda\frac{2\mu}{\sigma^2 t}\right\}\right)}{Q(t)}\leqslant\frac{\lambda}{1+\lambda(1-\varepsilon)}.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то из предыдущих оценок вытекает, что

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left\{-\lambda\frac{2\mu Z(t)}{\sigma^2 t}\right\}\Big|\, Z(t)>0\right] \\ = 1 - \lim_{t\to\infty}\frac{Q\left(t;\exp\left\{-\lambda\frac{2\mu}{\sigma^2 t}\right\}\right)}{Q(t)} \\ = 1-\frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}.\end{aligned}$$

Теорема 49 доказана. □

Замечание. Из (68) и 69 нетрудно вывести, что

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left[e^{-\lambda Q(t)Z(t)}|\, Z(t)>0\right] = \frac{1}{1+\lambda} \qquad (77)$$

для любого $\lambda > 0$.

10. Дискретные предельные распределения в критических процессах Беллмана–Харриса

Теорема 49, доказанная в предыдущем разделе, является естественным аналогом соответствующего утверждения для процессов Гальтона–Ватсона, точнее, обобщает теорему 29. Данный раздел будет посвящен условной предельной теореме для критических ветвящихся процессов Беллмана–Харриса, которая существенно отличается от условной предельной теоремы для критических процессов Гальтона–Ватсона.

Теорема 52. *Если*

$$f'(1)=1, \qquad \sigma^2 = f''(1)\in(0,\infty)$$

и для некоторой медленно меняющейся на бесконечности функции $L(t)$ и числа $\beta\in(0,2)$

$$1-G(t)\sim\frac{L(t)}{t^\beta}, \quad t\to\infty, \qquad (78)$$

то

$$Q(t) := \mathbf{P}(Z(t)>0) \sim \frac{\sqrt{2L(t)}}{\sigma t^{\beta/2}}, \quad t\to\infty,$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[s^{Z(t)}|Z(t)>0\right] = 1-\sqrt{1-s}.$$

Мы начнем доказательство теоремы 52 со следующего утверждения, заимствованного из работы [15].

Лемма 53 (Лемма сравнения). *Если $Z_1(t), Z_2(t)$ – два критических ветвящихся процесса Беллмана–Харриса, имеющих одну и ту же производящую функцию числа непосредственных потомков $f(s)$ и функции распределения длительности жизни частиц такие, что*

$$G_1(t) \geqslant G_2(t), \quad t \geqslant 0, \tag{79}$$

то при всех $s \in [0,1]$ и $t \geqslant 0$

$$F^1(t;s) := \mathbf{E}s^{Z_1(t)} \geqslant F^2(t;s) := \mathbf{E}s^{Z_2(t)}. \tag{80}$$

Доказательство. Мы знаем, что при $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} F^i(t;s) &= s\left(1-G_i(t)\right) + \int_0^t f\left(F^i(t-u;s)\right)\,dG_i(u) \\ &= s + G_i(t)(f(s)-s) + \int_0^t \left(f\left(F^i(t-u;s)\right) - f(s)\right)\,dG_i(u). \end{aligned}$$

Для $s \in [0,1]$ положим $F_0^i(t;s) \equiv s$, и пусть

$$F_{n+1}^i(t;s) = s + G_i(t)(f(s)-s) + \int_0^t \left[f\left(F_n^i(t-u;s)\right) - f(s)\right]\,dG_i(u).$$

Согласно лемме 50 при любом фиксированном значении $s \in [0,1]$ функции $F_n^i(t;s)$, $i = 1, 2$, монотонны по t. Далее,

$$F_0^1(t;s) = s \geqslant F_0^2(t;s) = s.$$

Предполагая, что

$$F_n^1(t;s) \geqslant F_n^2(t;s)$$

для некоторого $n \geqslant 0$, и принимая во внимание неравенство (79), нетрудно проверить по индукции, что

$$\begin{aligned} F_{n+1}^1(t;s) &= \\ &= s + G_1(t)(f(s)-s) + \int_0^t \left[f\left(F_n^1(t-u;s)\right) - f(s)\right] dG_1(u) \\ &\geqslant s + G_2(t)(f(s)-s) + \int_0^t \left[f\left(F_n^2(t-u;s)\right) - f(s)\right] dG_2(u) \\ &= F_{n+1}^2(t;s). \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство (80). □

Доказательство теоремы 52. Пусть, как и ранее, $Q(t;s) = 1 - F(t;s)$ и $Q(t) = Q(t;0)$. Мы знаем, что функция $Q(t;s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$Q(t;s) = (1-s)\,(1-G(t)) + \int_0^t \left[1 - f(1 - Q(t-u;s))\right] dG(u).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 - f(1-Q(t;s)) = (1-s)\,(1-G(t)) - R\,(Q(t;s)) \\ + \int_0^t \left[1 - f(1-Q(t-u;s))\right] dG(u), \end{aligned} \tag{81}$$

где

$$R\,(y) := f(1-y) - (1-y) \sim \frac{\sigma^2}{2} y^2, \quad y \to 0+. \tag{82}$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (81), получаем

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1 - f(1-Q(t;s))\right) dt \\ = (1-s)\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} R\,(Q(t;s))\,dt. \end{aligned} \tag{83}$$

Поскольку $\lim_{t\to\infty} Q(t;s) \leqslant \lim_{t\to\infty} Q(t) = 0$ для любого $s \in [0,1]$, то

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1 - f(1-Q(t;s))\right) dt \leqslant \\ \leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t;s)\,dt = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \to 0+. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(1-s)\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))\,dt \sim \int_0^\infty e^{-\lambda t} R(Q(t;s))\,dt, \quad \lambda\to 0+\,. \tag{84}$$

Рассмотрим сначала случай $\beta<1$. Ввиду теоремы 42 условие (78) дает

$$(1-s)\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))\,dt \sim \frac{(1-s)\,\Gamma(1-\beta)}{\lambda^{1-\beta}} L\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda\to 0+,$$

что в сочетании с (84) приводит к асимптотике

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} R\left(Q(t;s)\right)\,dt \sim \frac{(1-s)\,\Gamma(1-\beta)}{\lambda^{1-\beta}} L\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda\to 0+\,.$$

В силу леммы 50 и определения (82) функция $R(Q(t;s))$ монотонна по t при фиксированном s. Теперь тауберова теорема для плотностей дает

$$R\left(Q(t;s)\right) \sim (1-s)\,(1-G(t)), \quad t\to\infty. \tag{85}$$

Таким образом, при каждом фиксированном $s\in[0,1)$

$$\frac{\sigma^2}{2} Q^2(t;s) \sim (1-s)\,(1-G(t)) \sim (1-s)\frac{L(t)}{t^\beta}, \quad t\to\infty,$$

или

$$Q(t;s) \sim \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}(1-s)\,(1-G(t))} \sim \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}\frac{L(t)}{t^\beta}}\sqrt{1-s}, \quad t\to\infty.$$

В частности,

$$Q(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}\frac{L(t)}{t^\beta}}, \quad t\to\infty.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Q(t;s)}{Q(t)} = \sqrt{1-s}$$

и, следовательно,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left[s^{Z(t)}|Z(t)>0\right] = 1-\lim_{t\to\infty}\frac{Q(t;s)}{Q(t)} = 1-\sqrt{1-s}.$$

Пусть теперь $\beta = 1$. Ясно, что для любого $\gamma \in (0,1)$ найдется функция распределения $G_2(t)$ такая, что

$$1 - G_2(t) \sim \frac{1}{t^{\gamma}}, \quad t \to \infty,$$

и $G(t) \geqslant G_2(t)$, $t \geqslant 0$. В силу леммы 53 это означает, что если $F_2(t;s)$ – производящая функция частиц в момент времени t в (G_2, f)-процессе, то для любых $s \in [0,1]$ и $t \geqslant 0$

$$Q(t;s) \leqslant Q_2(t;s) := 1 - F_2(t;s).$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $s \in [0,1)$

$$Q(t;s) = o\left(t^{-1/2+\varepsilon}\right), \quad t \to \infty. \tag{86}$$

Дифференцируя равенство (83) по λ, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1 - G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1 - f(1 - Q(t;s))\right)\,dt \\
&\qquad - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} t(1 - G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1 - f(1 - Q(t;s))\right)\,dt \\
&\qquad - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}(1 - G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t} t\left(1 - f(1 - Q(t;s))\right)\,dt \\
&= -(1-s)\int_0^\infty e^{-\lambda t} t(1 - G(t))\,dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} t R\left(Q(t;s)\right)\,dt.
\end{aligned} \tag{87}$$

Используя теоремы 31, 40 и 42, нетрудно убедиться в том, что

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1 - G(t))dt \sim L_1\left(\lambda^{-1}\right), \quad \lambda \to 0+, \tag{88}$$

для некоторой функции $L_1(t)$, медленно меняющейся на бесконечности, и что

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t(1 - G(t))\,dt \sim \frac{L\left(\lambda^{-1}\right)}{\lambda}, \quad \lambda \to 0+. \tag{89}$$

Кроме того, в силу оценки (86) и тауберовой теоремы для плотностей найдется константа $C \in (0,\infty)$ такая, что

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1 - f(1 - Q(t;s))\right)\,dt &\leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t;s)\,dt \\
\leqslant C_1 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{(t+1)^{1/2-\varepsilon}}\,dt &\leqslant \frac{C}{\lambda^{1/2+\varepsilon}}
\end{aligned}$$

и
$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t\,(1-f(1-Q(t;s)))\;dt \leqslant \frac{C}{\lambda^{3/2+\varepsilon}}.$$
Отсюда следует, что для любого $\varepsilon \in (0,1/2)$
$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,(1-f(1-Q(t;s)))\;dt \\
&\quad + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} t(1-G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,(1-f(1-Q(t;s)))\;dt \\
&\quad + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t} t\,(1-f(1-Q(t;s)))\;dt \\
&= o\left(L_1\left(\lambda^{-1}\right) \times \frac{1}{\lambda^{1/2+\varepsilon}}\right) + o\left(\lambda \times \frac{L\left(\lambda^{-1}\right)}{\lambda} \times \frac{1}{\lambda^{1/2+\varepsilon}}\right) \\
&\quad + o\left(\lambda \times L_1(\lambda^{-1}) \times \frac{1}{\lambda^{1/2+\varepsilon}}\right) = o\left(\frac{1}{\lambda^{1/2+\varepsilon}}\right) \qquad (90) \\
&= o\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} t(1-G(t))\,dt\right), \quad \lambda \to 0+\,. \qquad (91)
\end{aligned}$$

Комбинируя эту оценку с (87), мы видим, что
$$(1-s)\int_0^\infty e^{-\lambda t} t(1-G(t))\,dt \sim \int_0^\infty e^{-\lambda t} tR\,(Q(t;s))\;dt, \quad \lambda \to 0+\,. \qquad (92)$$
Вспоминая теперь теорему 42 и следствие 43, выводим
$$(1-s)\,t(1-G(t)) \sim tR\,(Q(t;s))\,, \quad t \to \infty, \qquad (93)$$
что доказывает теорему 52 для $\beta = 1$.

Если $\beta \in (1,2)$, то вместо (88) и (89) имеем
$$\mu = \int_0^\infty (1-G(t))\,dt < \infty, \qquad (94)$$
$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t(1-G(t))dt \sim \Gamma(2-\beta)\frac{L\left(\lambda^{-1}\right)}{\lambda^{2-\beta}}, \quad \lambda \to 0+, \qquad (95)$$
в то время как соотношения (90) и (91) по-прежнему верны, если только $\varepsilon > 0$ удовлетворяет неравенству $2-\beta > 1/2+\varepsilon$ или $3/2 > \beta+\varepsilon$. Ясно, что для любого $\beta \in (0,3/2)$ такое значение $\varepsilon > 0$ всегда можно найти. Отсюда, как и в случае $\beta = 1$, легко следует утверждение теоремы для любого $\beta \in (0,3/2)$.

Для доказательства теоремы 52 при $\beta \in (3/2, 2)$ воспользуемся индукцией. Положим

$$\beta_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k}$$

и допустим, что теорема 52 доказана для всех $\beta < \beta_k$. Покажем, что в этом случае теорема верна и для $\beta_k \leqslant \beta < \beta_{k+1}$. Действительно, по предположению индукции условие (78) влечет

$$Q(t;s) \sim \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}\frac{L(t)}{t^\beta}}\sqrt{1-s}$$

при всех $\beta < \beta_k$. Отсюда и из леммы 53 вытекает, что если $\beta_k \leqslant \beta < \beta_{k+1}$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$Q(t;s) = o\left(t^{-\beta_k/2+\varepsilon}\right), \quad t \to \infty.$$

Вспоминая теперь тауберову теорему, заключаем, что

$$\begin{aligned}
0 \leqslant &\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1-f(1-Q(t;s))\right)\,dt \\
&+ \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} t(1-G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1-f(1-Q(t;s))\right)\,dt \\
&+ \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t} t\left(1-f(1-Q(t;s))\right)\,dt \\
= o&\left(\frac{1}{\lambda^{1-\beta_k/2+\varepsilon}}\right) + o\left(\lambda \times \frac{L\left(\lambda^{-1}\right)}{\lambda^{2-\beta}} \times \frac{1}{\lambda^{1-\beta_k/2+\varepsilon}}\right) \\
&+ o\left(\lambda \times \frac{1}{\lambda^{2-\beta_k/2+\varepsilon}}\right) = o\left(\frac{1}{\lambda^{1-\beta_k/2+\varepsilon}}\right) \\
= o&\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} t(1-G(t))\,dt\right), \quad \lambda \to 0+,
\end{aligned}$$

если только

$$1 - \beta_k/2 + \varepsilon < 2 - \beta,$$

т.е. если $\beta + \varepsilon < 1 + \beta_k/2 = \beta_{k+1}$.

Отсюда следуют оценки (92) и (93) для $\beta_k \leqslant \beta < \beta_{k+1}$. Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = 2,$$

то индукционным переходом можно доказать теорему для любого $\beta < 2$, что и требовалось. □

11. Критические процессы Беллмана–Харриса: условные предельные распределения с атомами в нуле или бесконечности

В этом разделе мы покажем, что при определенных ограничениях на распределение длительности жизни частиц и подходящем выборе нормировки условное предельное распределение числа частиц $Z(t)$ в критическом ветвящемся процессе Беллмана–Харриса в момент t (при условии невырождения процесса к этому моменту) может быть как чисто дискретным (с атомом в бесконечности), так и непрерывным (с атомом в нуле).

Всюду далее в этом разделе будем предполагать, что выполнен следующий набор условий:

$$f'(1) = 1, \quad \sigma^2 = f''(1) \in (0, \infty) \tag{96}$$

и для некоторой константы $C \in (0, \infty)$

$$\mathbf{P}(\tau > t) = 1 - G(t) \sim \frac{C}{t^2}, \quad t \to \infty. \tag{97}$$

Ясно, что если выполнено условие (97), то $\mu = \mathbf{E}\tau < \infty$.

Для фиксированного $s \in [0, 1)$ обозначим

$$h(s) := \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C(1 - s)}}{\sigma^2}$$

– единственное положительное решение уравнения

$$\frac{\sigma^2}{2} h^2(s) = C(1 - s) + h(s)\mu.$$

Теорема 54. *Если выполнены условия* (96) *и* (97), *то*

(*i*) *при* $t \to \infty$

$$\mathbf{P}(Z(t) > 0) \sim \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}}{\sigma^2 t} = \frac{h(0)}{t} \sim 1 - f_{\left[\frac{2t}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}}\right]}(0);$$

(*ii*) *для любого* $s \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} H(s) &:= \lim_{t \to \infty} \mathbf{E}\left[s^{Z(t)} | Z(t) > 0\right] \\ &= 1 - \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C(1 - s)}}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}} = 1 - \frac{h(s)}{h(0)}; \end{aligned}$$

(*iii*) *для любого* $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{2\mu Z(t)}{\sigma^2 t} \leqslant x \,|\, Z(t) > 0\right) = 1 - r + r(1 - e^{-x}),$$

где

$$r = \frac{2\mu}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}}.$$

Замечание. Легко проверить, что

$$\lim_{s\uparrow 1} H(s) = 1 - \frac{2\mu}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}} = 1 - r < 1.$$

Таким образом, предельное распределение из пункта ii) имеет атом величины r на бесконечности, в то время как предельное распределение пункта iii) имеет атом величины $1 - r$ в нуле!

Мы начнем доказательство теоремы 54 с формулировки следующей леммы, справедливость которой можно проверить при помощи рассуждений, использовавшихся при доказательстве теоремы 45.

Лемма 55. *Пусть* ζ_i, $i = 1, 2, \ldots,$ *– последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и таких, что при* $t \to \infty$

$$\mathbf{P}(\zeta_i \geqslant t) \sim Ct^{-2}, \quad C > 0.$$

Тогда для $S_n := \zeta_1 + \cdots + \zeta_n$ *и для любого* $x > 0$ *при* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant xn) = O\left(n^{-1}\right).$$

Лемма 56. *Пусть выполнены условия теоремы* 54. *Тогда найдутся положительные константы* c_1 *и* c_2 *такие, что*

$$\frac{c_1}{t+1} \leqslant Q(t; 0) \leqslant \frac{c_2}{t+1} \tag{98}$$

при всех $t \geqslant 0$.

Доказательство. Мы знаем из леммы 53, что если $Z_1(t)$ и $Z(t)$ – два критических процесса Беллмана–Харриса, имеющих одну и ту же производящую функцию $f(s)$ числа непосредственных потомков частиц и распределения времени жизни частиц $G_1(t)$ и $G(t)$ такие, что

$$1 - G_1(t) \leqslant 1 - G(t), \quad t \geqslant 0, \tag{99}$$

то для всех $s \in [0,1]$ и всех $t \geqslant 0$

$$Q_1(t;s) := 1 - \mathbf{E}s^{Z_1(t)} \leqslant 1 - \mathbf{E}s^{Z(t)} =: Q(t;s). \qquad (100)$$

Ясно, что для любой функции $G(t)$, удовлетворяющей условию (97), всегда можно подобрать функцию распределения $G_1(t)$ с носителем на полуоси $[0,\infty)$ такую, что

$$1 - G_1(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \to \infty, \qquad (101)$$

и для которой выполнено условие (99). Как было показано в теореме 49, вероятность невырождения $Q_1(t,0)$ вспомогательного (G_1, f)-процесса ведет себя как $C_1 t^{-1}$ при $t \to \infty$. Отсюда и из (100) следует оценка снизу в (98).

Для получения оценки сверху напомним, что согласно лемме 51 для любых $n = 0, 1, \ldots$ и $t \geqslant 0$

$$Q(t;0) \leqslant 1 - f_n(0) + 1 - G^{*n}(t).$$

Пусть теперь $\zeta_i := \tau_i - \mu$, где τ_i, $i = 1, 2, \ldots,$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $G(t)$, а $S_n = \zeta_1 + \cdots + \zeta_n$. Выбирая $n := \left[t(1-\varepsilon)\mu^{-1}\right]$, $\varepsilon \in (0,1)$, и вспоминая лемму 55, заключаем, что

$$1 - G^{*n}(t) = \mathbf{P}\left(S_n \geqslant t - n\mu\right) \leqslant \mathbf{P}\left(S_n - n\mu \geqslant t\varepsilon\right) = O\left(t^{-1}\right)$$

при $t \to \infty$. Следовательно,

$$Q(t;0) \leqslant 1 - f_n(0) + 1 - G^{*n}(t) \leqslant ct^{-1},$$

что доказывает справедливость правого неравенства в (98). □

Лемма 57. *Если выполнено условие* (97), *то для любого* $\rho \in (0,1)$

$$\int_0^{t\rho} \left(\frac{1}{t-u} - \frac{1}{t}\right) dG(u) = \frac{\mu}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\int_0^{t\rho} \left(\frac{1}{t-u} - \frac{1}{t}\right) dG(u) &= \frac{1}{t^2} \int_0^{t\rho} \frac{u}{(1-u/t)}\, dG(u) \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^{t\rho} u\, dG(u) + \Delta(t),\end{aligned}$$

где

$$0 \leqslant \Delta(t) := \frac{1}{t^2}\int_0^{t\rho} \frac{u^2}{t-u}\,dG(u) \leqslant \frac{1}{t^3(1-\rho)}\int_0^{t\rho} u^2\,dG(u).$$

При помощи интегрирования по частям нетрудно проверить, что

$$-\int_0^{t\rho} u^2 d(1-G(u)) = -\left(\rho t\right)^2\left(1-G(\rho t)\right) + 2\int_0^{t\rho} u(1-G(u))\,du$$
$$= O\left(\ln t\right), \quad t\to\infty.$$

Отсюда и из предыдущих оценок легко следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 54. Исходя из интегрального уравнения для $Q(t;s)$, нетрудно проверить, что

$$1-f(1-Q(t;s)) = (1-s)\left(1-G(t)\right) - R\left(Q(t;s)\right)$$
$$+\int_0^t \left[1-f(1-Q(t-u;s))\right]\,dG(u),$$

где, как и ранее, $R(y)=f(1-y)-(1-y)$. Отсюда легко вывести соотношение

$$R\left(Q(t;s)\right) + (1-f(1-Q(t;s)))(1-G(t)) = (1-s)\left(1-G(t)\right)$$
$$+\int_0^t \left[f(1-Q(t;s)) - f(1-Q(t-u;s))\right]\,dG(u). \tag{102}$$

Для фиксированных $0<\rho<1-\varepsilon<1$ справедливы неравенства

$$\int_{t\rho}^t \left[f(1-Q(t;s)) - f(1-Q(t-u;s))\right]\,dG(u) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t\rho}^t \left[Q(t-u;s) - Q(t;s)\right]\,dG(u)$$
$$= \int_{t\rho}^{t(1-\varepsilon)} \left[Q(t-u;s) - Q(t;s)\right]\,dG(u)$$
$$+\int_{t(1-\varepsilon)}^{t} \left[Q(t-u;s) - Q(t;s)\right]\,dG(u)$$
$$\leqslant Q(t\varepsilon;0)(1-G(t\rho)) + (1-G(t(1-\varepsilon))) - (1-G(t)). \tag{103}$$

В силу условий теоремы для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Q(t\varepsilon;0)(1-G(t\rho))}{1-G(t)} = 0$$

и, кроме того,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0+} \lim_{t\to\infty} \frac{(1-G(t(1-\varepsilon))) - (1-G(t))}{1-G(t)} = \\ = \limsup_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)^2} - 1\right) = 0.$$

В сочетании с (103) эти соотношения приводят к оценке

$$\int_{t\rho}^{t} [f(1-Q(t;s)) - f(1-Q(t-u;s))] = o((1-G(t)), \quad t\to\infty. \tag{104}$$

Далее,

$$\int_0^{t\rho} [f(1-Q(t;s)) - f(1-Q(t-u;s))]\, dG(u) \leqslant \\ \leqslant \int_0^{t\rho} [Q(t-u;s) - Q(t;s)]\, dG(u),$$

и поскольку $Q(t;s) \to 0$ при $t\to\infty$, а $f'(1) = 1$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и $t \geqslant t_0(\varepsilon)$ справедливы неравенства

$$\int_0^{t\rho} [f(1-Q(t;s)) - f(1-Q(t-u;s))]\, dG(u) \\ \geqslant f'(1-Q(t(1-\rho);s)) \int_0^{t\rho} [Q(t-u;s) - Q(t;s)]\, dG(u) \\ \geqslant \int_0^{t\rho} [Q(t-u;s) - Q(t;s)]\, dG(u) \\ - \varepsilon \int_0^{t\rho} [Q(t-u;s) - Q(t;s)]\, dG(u).$$

Вспоминая, что $R(y) = f(1-y) - (1-y) \sim \sigma^2 y^2/2$ при $y\to 0+$ в силу условия (96), и обращаясь к (102), мы видим, что

$$(1-\varepsilon)\frac{\sigma^2}{2} Q^2(t;s) \leqslant (1+\varepsilon)\,(1-s)\,(1-G(t)) + \\ + \int_0^{t\rho} [Q(t-u;s) - Q(t;s)]\, dG(u) \tag{105}$$

для всех достаточно больших значений t.

Из неравенства

$$Q(t;0) \geqslant Q(t;s) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(Z(t)=k\right)\left(1-s^k\right)$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(Z(t)=k\right)(1-s) = (1-s)\,Q(t;0)$$

и леммы 56 нетрудно вывести, что для любого фиксированного значения $s \in [0,1)$ найдутся константы $c_1 = c_1(s)$ и $c_2 = c_2(s)$ такие, что

$$0 < \frac{c_1}{t+1} \leqslant Q(t;s) \leqslant \frac{c_2}{t+1}$$

для всех $t \geqslant 0$. Покажем, что при каждом $s \in [0,1)$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} tQ(t;s) =: g(s). \tag{106}$$

Предположим, что при каком-либо $s \in [0,1)$ предел в (106) не существует и, следовательно, для этого s

$$\liminf_{t\to\infty} tQ(t;s) = g_1(s), \qquad \limsup_{t\to\infty} tQ(t;s) = g_2(s), \tag{107}$$

причем найдутся числа $g_1 < g_2$ такие, что

$$0 < g_1(s) < g_1 < g_2 < g_2(s) < \infty.$$

Положим $t_1 = 1$, и пусть для $n = 1, 2, \ldots$

$$t_{2n} := \inf\left\{t \geqslant t_{2n-1} : tQ(t;s) \geqslant g_2\right\}, \tag{108}$$
$$t_{2n+1} := \inf\left\{t \geqslant t_{2n} : tQ(t;s) \leqslant g_1\right\}. \tag{109}$$

Ясно, что мы можем выбрать $\delta \in (0,1)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$g_2 t^{-1} > (\delta t)^{-1} g_1, \quad \text{т.е.} \quad \delta g_2 > g_1.$$

Покажем, что

$$tQ(t;s) \leqslant g_2, \quad t \in [t_{2n}\delta, t_{2n}),$$

и

$$tQ(t;s) \geqslant g_1,\ t \in [t_{2n+1}\delta, t_{2n+1}).$$

Действительно, в силу монотонного убывания функции $Q(t;s)$ по t при каждом фиксированном $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned} g_1 &\geqslant t_{2n-1}Q(t_{2n-1};s) \\ &\geqslant t_{2n-1}Q(t_{2n};s) = \frac{t_{2n-1}}{t_{2n}} t_{2n}Q(t_{2n};s) \geqslant g_2 \frac{t_{2n-1}}{t_{2n}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{g_1}{g_2} t_{2n} \geqslant t_{2n-1}.$$

Таким образом, для $\delta \in (g_1 g_2^{-1}, 1)$ справедлива оценка

$$tQ(t;s) \leqslant g_2, \quad t \in [\delta t_{2n}, t_{2n}).$$

С другой стороны, для любого $u \in (\delta, 1)$

$$ut_{2n}Q(ut_{2n};s) \geqslant ut_{2n}Q(t_{2n};s) \geqslant ug_2 \geqslant ug_1\delta^{-1} \geqslant g_1.$$

Отсюда

$$tQ(t;s) \geqslant g_1,\ t \in [\delta t_{2n}, t_{2n}),$$

и, кроме того,

$$tQ(t;s) \geqslant g_1,\ t \in [t_{2n}, t_{2n+1}).$$

Объединение этих соотношений приводит к неравенству

$$tQ(t;s) \geqslant g_1,\ t \in [\delta t_{2n}, t_{2n+1}) \supseteq [\delta t_{2n+1}, t_{2n+1}).$$

Используя оценку (108) в (105) при $t = t_{2n}$ и $\rho = 1-\delta$ и вспоминая лемму 57 и условия теоремы 54, нетрудно убедиться в справедливости следующей цепочки неравенств для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и всех $t \geqslant t_0 = t_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} &(1-\varepsilon)\,\frac{\sigma^2}{2} g_2^2 \frac{1}{t^2} \leqslant \\ &\quad\leqslant (1+\varepsilon)\,\frac{C(1-s)}{t^2} + \int_0^{t\rho} \left[Q(t-u;s) - Q(t;s)\right] dG(u) \\ &\quad\leqslant (1+\varepsilon)\,\frac{C(1-s)}{t^2} + \int_0^{t\rho} \left[Q(t-u;s) - \frac{g_2}{t}\right] dG(u) \\ &\quad\leqslant (1+\varepsilon)\,\frac{C(1-s)}{t^2} + \int_0^{t\rho} \left[\frac{g_2}{t-u} - \frac{g_2}{t}\right] dG(u) \\ &\quad\leqslant (1+\varepsilon)\,\frac{C(1-s)}{t^2} + \frac{g_2\mu}{t^2}\,(1+\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Поскольку значение величины $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, из приведенных оценок вытекает, что

$$\frac{\sigma^2}{2} g_2^2 \leqslant C(1-s) + g_2\mu. \tag{110}$$

При помощи сходных рассуждений и неравенства (109) можно проверить, что при $t = t_{2n-1}$, $\rho = 1-\delta$, любом $\varepsilon > 0$ и всех $t \geqslant t_0 = t_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
&(1+\varepsilon)\,\frac{\sigma^2}{2} g_1^2 \frac{1}{t^2} \geqslant \\
&\qquad \geqslant (1-\varepsilon)\,\frac{C(1-s)}{t^2} + \int_0^{t\rho} \left[Q(t-u;s) - Q(t;s)\right] dG(u) \\
&\qquad \geqslant (1-\varepsilon)\,\frac{C(1-s)}{t^2} + \int_0^{t\rho} \left[Q(t-u;s) - \frac{g_1}{t}\right] dG(u) \\
&\qquad \geqslant (1-\varepsilon)\,\frac{C(1-s)}{t^2} + \int_0^{t\rho} \left[\frac{g_1}{t-u} - \frac{g_1}{t}\right] dG(u) \\
&\qquad \geqslant (1-\varepsilon)\,\frac{C(1-s)}{t^2} + \frac{g_1\mu}{t^2}\,(1-\varepsilon)\,,
\end{aligned}$$

что приводит к неравенству

$$\frac{\sigma^2}{2} g_1^2 \geqslant C(1-s) + g_1\mu. \tag{111}$$

Поскольку мы выбрали произвольные значения $g_1 < g_2$ внутри интервала $(g_1(s), g_2(s))$, то оценки (110) и (111) означают, что *для любого числа* $g \in (g_1(s), g_2(s))$ справедливо соотношение

$$\frac{\sigma^2}{2} g^2 = C(1-s) + g\mu.$$

Единственное положительное решение этого уравнения вычисляется по формуле

$$g = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C\,(1-s)}}{\sigma^2}$$

и является постоянным при фиксированном s. Следовательно, множество $[g_1(s), g_2(s)]$ не имеет внутренних точек и, таким образом, предположение о том, что $g_1(s) < g_2(s)$ в соотношении (107) ошибочно.

Итак, мы доказали существование предела в (106). Займемся теперь вычислением предельного значения. Для удобства изложения запишем еще раз соотношение (87), выведенное при доказательстве теоремы 52:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1-f(1-Q(t;s))\right)\,dt \\
&\qquad\qquad - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}t(1-G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1-f(1-Q(t;s))\right)\,dt \\
&\qquad\qquad - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-G(t))\,dt \int_0^\infty e^{-\lambda t}t\left(1-f(1-Q(t;s))\right)\,dt \\
&\qquad = -(1-s)\int_0^\infty e^{-\lambda t}t(1-G(t))\,dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t}tR\left(Q(t;s)\right)\,dt.
\end{aligned} \tag{112}$$

В силу условия (97) и тауберовой теоремы

$$\mu = \int_0^\infty (1-G(t))\,dt < \infty, \tag{113}$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}t(1-G(t))\,dt \sim C\log\frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \to 0+. \tag{114}$$

Далее, из (106), соотношения $1-f(1-y) \sim y$, $y \to 0+$, и тауберовой теоремы вытекает, что

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(1-f(1-Q(t;s))\right)\,dt \sim g(s)\log\frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \to 0+, \tag{115}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}t\left(1-f(1-Q(t;s))\right)\,dt \sim \frac{g(s)}{\lambda}, \quad \lambda \to 0+. \tag{116}$$

И, наконец, в силу представления $R(y) \sim \sigma^2 y^2/2$, $y \to 0+$,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}tR\left(Q(t;s)\right)\,dt \sim \frac{\sigma^2 g^2(s)}{2}\log\frac{1}{\lambda}, \quad \lambda \to 0+. \tag{117}$$

Подставляя оценки (113)–(117) в (112), мы видим, что при $\lambda \to 0+$

$$\begin{aligned}
\mu g(s)\log\frac{1}{\lambda} - \lambda C g(s)\log^2\frac{1}{\lambda} - \lambda\mu\frac{g(s)}{\lambda} \sim \\
\sim -(1-s)C\log\frac{1}{\lambda} + \frac{\sigma^2 g^2(s)}{2}\log\frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что последнее возможно лишь в случае

$$\frac{\sigma^2}{2}g^2(s) = C(1-s) + \mu g(s).$$

Таким образом,

$$g(s) = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C\,(1-s)}}{\sigma^2} = h(s).$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} tQ(t;s) = h(s). \tag{118}$$

Отсюда при $s=0$ следует утверждение i) теоремы 54, поскольку

$$1 - f_n(0) \sim \frac{2}{n\sigma^2}, \quad n\to\infty, \tag{119}$$

согласно теореме 29.

Для доказательства утверждения ii) теоремы 54 достаточно воспользоваться (118) и равенствами

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[s^{Z(t)} \middle|\, Z(t)>0\right] = 1 - \lim_{t\to\infty}\frac{Q(t;s)}{Q(t;0)} = 1 - \frac{h(s)}{h(0)} =: H(s). \tag{120}$$

Как уже отмечалось,

$$\lim_{s\to 1-} H(s) = 1 - \frac{2\mu}{\mu + \sqrt{\mu^2+2\sigma^2 C}}$$

и, таким образом, предельное распределение в (120) имеет атом величины

$$\frac{2\mu}{\mu + \sqrt{\mu^2+2\sigma^2 C}}$$

в бесконечности.

Перейдем к доказательству утверждения iii). Для фиксированного $\lambda > 0$ положим $s = s(t;\lambda) := \exp\left\{-2\lambda\mu\left(\sigma^2 t\right)^{-1}\right\}$ и найдем при $t\to\infty$ асимптотику функции $N = N(t) = N(t,\lambda)$, удовлетворяющей неравенствам

$$f_{N(t)}(0) \leqslant \exp\left\{-2\lambda\mu\left(\sigma^2 t\right)^{-1}\right\} \leqslant f_{N(t)+1}(0).$$

Отталкиваясь от асимптотического представления (119), легко проверить, что при $t \to \infty$

$$2/\left(\sigma^2 N(t,\lambda)\right) \sim 2\lambda\mu \left(\sigma^2 t\right)^{-1}$$

и, следовательно, $N(t,\lambda) \sim t(\mu\lambda)^{-1}$ при $t \to \infty$. Согласно лемме 51 для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ и любого $t > 0$

$$\frac{1 - f_n(s)}{Q(t)} - \frac{1-s}{Q(t)} G^{*n}(t) \leqslant \frac{Q(t;s)}{Q(t)}.$$

Взяв в этом неравенстве $n := \left[t(1+\varepsilon)\mu^{-1}\right]$ и устремив сначала t к бесконечности, а затем ε к нулю, получим

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{t\to\infty} \frac{1 - f_n(s)}{Q(t)} &= \lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{t\to\infty} \frac{1 - f_{[t(1+\varepsilon)\mu^{-1}]}(f_{N+1}(0))}{Q(t)} \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0} \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma^2 t}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}} \frac{2}{\sigma^2 \left(t(1+\varepsilon)\mu^{-1} + t(\lambda\mu)^{-1}\right)} \\
&= \frac{2\lambda\mu}{\left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}\right)(\lambda+1)},
\end{aligned}$$

в то время как в силу уже доказанного утверждения i) и леммы 55,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{1-s}{Q(t)} G^{*n}(t) &= \frac{2\lambda\mu}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}} \lim_{t\to\infty} G^{*n}(t) \\
&= \frac{2\lambda\mu}{\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}} \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\tau_1 + \cdots + \tau_{[t(1+\varepsilon)\mu^{-1}]} \leqslant t\right) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{Q(t;s)}{Q(t)} \geqslant \frac{2\lambda\mu}{\left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}\right)(\lambda+1)}.$$

Аналогично, полагая $n := \left[t(1-\varepsilon)\mu^{-1}\right]$, $\varepsilon \in (0,1)$, и $s := s(t;\lambda)$, можно показать, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{Q(t;s)}{Q(t)} \leqslant \frac{2\lambda\mu}{\left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 C}\right)(\lambda+1)}.$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Q(t;s)}{Q(t)}=\frac{2\lambda\mu}{\left(\mu+\sqrt{\mu^2+2\sigma^2C}\right)(\lambda+1)},$$

что в свою очередь влечет

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left[\exp\left\{-2\mu\lambda Z(t)/t\sigma^2\right\}\mid Z(t)>0\right]=$$

$$=1-\frac{2\lambda\mu}{\left(\mu+\sqrt{\mu^2+2\sigma^2C}\right)(\lambda+1)}$$

$$=1-\frac{2\mu}{\mu+\sqrt{\mu^2+2\sigma^2C}}+\frac{2\mu}{\mu+\sqrt{\mu^2+2\sigma^2C}}\frac{1}{\lambda+1}.$$

Последнее выражение является преобразованием Лапласа функции распределения

$$T(x)=1-\frac{2\mu}{\mu+\sqrt{\mu^2+2\sigma^2C}}+\frac{2\mu}{\mu+\sqrt{\mu^2+2\sigma^2C}}\left(1-e^{-x}\right),\quad x\geqslant 0,$$

которое имеет в нуле атом величины

$$1-\frac{2\mu}{\mu+\sqrt{\mu^2+2\sigma^2C}}.$$

Утверждение iii) теоремы 54 доказано. □

12. Распределение расстояния до ближайшего общего предка в критических процессах Беллмана–Харриса

Пусть $\mathcal{N}$ – множество наборов натуральных чисел, имеющих вид $\mathbf{d}=(d_0,d_1,\ldots,d_j)$, $j=1,2,\ldots$. Паре наборов

$$\mathbf{d}'=(1,d_1',\ldots,d_{k'}')\in\mathcal{N}\quad\text{и}\quad\mathbf{d}''=(1,d_1'',\ldots,d_{k''}'')\in\mathcal{N}$$

сопоставим набор

$$\mathbf{p}:=\mathbf{d}'\cap\mathbf{d}''=(1,p_1,\ldots,p_n),$$

где $n=\min\{i:d_{i+1}'\neq d_{i+1}''\}$, а $p_i=d_i'=d_i''$, $i=1,2,\ldots,n$.

Пусть $Z(t)$, $t \geqslant 0$, – регулярный ветвящийся процесс Беллмана–Харриса, начинающийся в момент $t = 0$ с одной частицы нулевого возраста ($Z(0) = 1$). Свяжем с каждой частицей этого процесса последовательность $\mathbf{d} \in \mathcal{N}$ следующим образом. Первоначальной частице сопоставим набор $\mathbf{d} = (1)$. Пусть теперь некоторой частице уже сопоставлен набор $\mathbf{d} = (1, d_1, \ldots, d_k) \in \mathcal{N}$, и пусть M – количество ее непосредственных потомков (если таковые есть). Занумеруем потомков произвольным образом числами от 1 до M, а затем сопоставим потомку с номером m набор $\mathbf{d}^* = (1, d_1, \ldots, d_k, m)$.

В дальнейшем мы часто будем отождествлять частицу с соответствующим ей набором, полученным при помощи описанной выше процедуры.

Пусть имеются две частицы $\mathbf{d}' = (1, d'_1, \ldots, d'_{k'})$ и $\mathbf{d}'' = (1, d''_1, \ldots, d''_{k''})$.

Определение 5. Частица $\mathbf{p} := \mathbf{d}' \cap \mathbf{d}''$ называется ближайшим общим предком частиц $\mathbf{d}'$ и $\mathbf{d}''$.

Предположим, что $Z(t) > 0$, и пусть $\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{d}^{(2)}, \ldots, \mathbf{d}^{(Z(t))}$ – множество частиц, существующих в процессе в момент t.

Определение 6. Частица $\mathbf{p}(t) := \bigcap_{i=1}^{Z(t)} \mathbf{d}^{(i)}$ называется ближайшим общим предком всех частиц, существующих в процессе Беллмана–Харриса в момент t.

Пусть $T(t)$ – момент деления частицы $\mathbf{p}(t)$. Нас будет интересовать распределение случайной величины $\eta(t) := t - T(t)$ – расстояния до момента гибели ближайшего общего предка всех частиц, существующих в процессе момент t, при условии $Z(t) > 0$. А именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема 58. *Если (G, f)-процесс удовлетворяет условиям*

$$f'(1) = 1, \quad \sigma^2 = f''(1) \in (0, \infty) \tag{121}$$

и

$$1 - G(t) = o(t^{-2}), \quad t \to \infty, \tag{122}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\eta(t)}{t} < y \,\middle|\, Z(t) > 0\right) = y, \quad y \in [0, 1]. \tag{123}$$

При доказательстве теоремы 58 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Обозначим $Z(t,x)$ – количество частиц в процессе Беллмана–Харриса в момент t, возраст каждой из которых не превосходит величины x. Положим

$$F(t,x;s) := \mathbf{E}s^{Z(t,\,x)}.$$

Используя формулу полной вероятности, легко показать, что функция $F(t,x;s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} F(t,x;s) = (1-G(t))\,[sJ(x-t)+1-J(x-t)] \\ + \int_0^t f(F(t-u,x;s))\,dG(u), \end{aligned}$$

где для удобства мы полагаем $J(y)=1$ при $y \geqslant 0$ и $J(y)=0$ при $y<0$.

Отсюда следует, что для критического процесса Беллмана–Харриса математическое ожидание $A(t,x) := \mathbf{E}Z(t,x)$, удовлетворяет следующему уравнению восстановления

$$A(t,x) = (1-G(t))J(x-t) + \int_0^t A(t-u,x)\,dG(u).$$

Решая это уравнение, получаем:

$$A(t,x) = \int_0^t (1-G(t-y))J(x-(t-y))\,dU(y), \tag{124}$$

где $U(t)=\sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(t)$.

Пусть $Z^*(t,x)$ – количество частиц в процессе в момент t, которые будут существовать в момент $t+x$.

Лемма 59. *Если выполнены условия теоремы 58, то для любого $\varepsilon>0$*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(Z^*(t,t\varepsilon)>0|\,Z(t)>0)=0. \tag{125}$$

Доказательство. В силу равенства

$$Z^*(t,t\varepsilon) = Z(t(1+\varepsilon)) - Z(t(1+\varepsilon),t\varepsilon),$$

имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(Z^*(t,t\varepsilon)>0\middle|\, Z(t)>0\right) &\leqslant \mathbf{E}\left[Z^*(t,t\varepsilon)\middle|\, Z(t)>0\right] \\ &\leqslant \frac{\mathbf{E}\left[Z(t(1+\varepsilon))-Z(t(1+\varepsilon),t\varepsilon)\right]}{\mathbf{P}\left(Z(t)>0\right)}.\end{aligned} \tag{126}$$

Используя (124), мы видим, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Z(t(1+\varepsilon),t\varepsilon) &= \int_0^{t(1+\varepsilon)} (1-G(t(1+\varepsilon)-y))J\,(y-t)\;dU(y) \\ &= \int_t^{t(1+\varepsilon)} (1-G(t(1+\varepsilon)-y))\,dU(y) \\ &= 1-\int_0^t (1-G(t(1+\varepsilon)-y))\,dU(y).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Z^*(t,t\varepsilon) &= \int_0^t (1-G(t(1+\varepsilon)-y))\,dU(y) \\ &\leqslant U(t)\,(1-G(t\varepsilon)) = o(t^{-1}), \quad t\to\infty.\end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в (126) и вспоминая, что $\mathbf{P}\left(Z(t)>0\right)\sim 2\mu(\sigma^2 t)^{-1}$ при $t\to\infty$ согласно теореме 49, нетрудно завершить доказательство леммы. □

Лемма 60. *Если выполнены условия теоремы 58, то для любых положительных q и λ*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left[Z(t)e^{-\lambda q Z(t)Q(t)}\right]=\frac{1}{(1+q\lambda)^2}.$$

Доказательство. Вспоминая равенство (77), получаем

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left[e^{-\lambda q Z(t)Q(t)}\middle|\, Z(t)>0\right]=\frac{1}{1+q\lambda}. \tag{127}$$

В силу аналитичности по λ предельной и допредельных функций в (127) в области $\operatorname{Re}\lambda>0$, частные производные допредельных функций по λ сходятся в указанной области к производной предельной функции по λ, что влечет

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left[Z(t)e^{-\lambda qZ(t)Q(t)}\right] &= \lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left[Z(t)e^{-\lambda qZ(t)Q(t)}; Z(t)>0\right]\\ &= \lim_{t\to\infty}Q(t)\mathbf{E}\left[Z(t)e^{-\lambda qZ(t)Q(t)}\middle| Z(t)>0\right]\\ &= -\lim_{t\to\infty}\frac{\partial\mathbf{E}\left[e^{-\lambda qZ(t)Q(t)}\middle| Z(t)>0\right]}{q\partial\lambda}\\ &= -\frac{\partial}{q\partial\lambda}\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\left[e^{-\lambda qZ(t)Q(t)}\middle| Z(t)>0\right] = \frac{1}{(1+q\lambda)^2}.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 58. Выберем $y\in(0,1)$ и для фиксированного значения $\varepsilon\in(0,y)$ введем событие

$$C(t,y,\varepsilon) := \{Z(t(1-y))>0,\ Z^*(t(1-y),t\varepsilon)=0\},$$

состоящее в том, что в момент $t(1-y)$ в популяции нет частиц, которые доживут до момента $t(1-y)+t\varepsilon$. Пусть, далее, событие $\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)$ имеет вид

$$\widetilde{C}(t,y,\varepsilon) := \{Z(t(1-y))>0,\ Z^*(t(1-y),t\varepsilon)>0\}.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\eta(t)<ty; Z(t)>0, C(t,y,\varepsilon)\right) &\leqslant \mathbf{P}\left(\eta(t)<ty; Z(t)>0\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}\left(\eta(t)<ty; Z(t)>0, C(t,y,\varepsilon)\right)+\mathbf{P}(\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\mathbf{P}\left(\eta(t)<ty; Z(t)>0, C(t,y,\varepsilon)\right)}{\mathbf{P}\left(Z(t)>0\right)} \leqslant \mathbf{P}\left(\eta(t)<ty\middle| Z(t)>0\right) \qquad (128)$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\eta(t)<ty\middle| Z(t)>0\right) \leqslant &\frac{\mathbf{P}\left(\eta(t)<ty; Z(t)>0, C(t,y,\varepsilon)\right)}{\mathbf{P}\left(Z(t)>0\right)}\\ &+\frac{\mathbf{P}\left(\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)\right)}{\mathbf{P}\left(Z(t)>0\right)}. \qquad (129)\end{aligned}$$

В силу леммы 59 и соотношения $\mathbf{P}\left(Z(t)>0\right) \sim 2\mu(\sigma^2 t)^{-1}$ при $t \to \infty$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}\big(\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)\big)}{\mathbf{P}\left(Z(t)>0\right)} &= \\ &= \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(Z^*(t(1-y),t\varepsilon)>0 \middle|\, Z(t(1-y))>0\right) \\ &\quad \times \frac{\mathbf{P}\left(Z(t(1-y))>0\right)}{\mathbf{P}\left(Z(t)>0\right)} = 0. \end{aligned} \tag{130}$$

Следовательно, при $t \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\eta(t)<ty \middle|\, Z(t)>0\right) = \frac{\mathbf{P}\left(\eta(t)<ty; Z(t)>0, C(t,y,\varepsilon)\right)}{\mathbf{P}\left(Z(t)>0\right)} \\ + o_t(1) + o_\varepsilon(1). \end{aligned} \tag{131}$$

Обозначим ζ_i, $i=1,2,\ldots,Z(t(1-y))$, – оставшиеся времена жизни частиц, существующих в процессе в момент $t(1-y)$, и пусть $\mathcal{B}(t(1-y))$ – σ-алгебра, порожденная случайной величиной $Z(t(1-y))$ и набором времен ζ_i, $i=1,2,\ldots,Z(t(1-y))$. Поскольку $C(t,y,\varepsilon) \in \mathcal{B}(t(1-y))$, то

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\eta(t)<ty; Z(t)>0, C(t,y,\varepsilon)\right) \\ &\quad = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[I\left\{\eta(t)<ty; Z(t)>0\right\} \middle| \mathcal{B}(t(1-y))\right] I\{C(t,y,\varepsilon)\}\right] \\ &\quad = \mathbf{E}\Bigg[\sum_{i=1}^{Z(t(1-y))} \left(1-f(F(ty-\zeta_i;0))\right) \\ &\qquad\qquad \times \prod_{j\neq i} f(F(ty-\zeta_j;0)) I\{C(t,y,\varepsilon)\}\Bigg]. \end{aligned}$$

При выводе последнего равенства мы пользовались тем, что момент гибели ближайшего общего предка всех частиц, существующих в процессе в момент t, находится в диапазоне $(t(1-y),t]$ тогда и только тогда, когда все частицы, существующие в процессе в момент $t(1-y)$, погибнут к моменту t, причем ровно одна из этих частиц будет иметь непустое потомство в момент t.

Далее для краткости вместо $F(t;0)$ будем писать $F(t)$. Используя монотонность функции $f(s)$ по s и функции $F(u)$ по u, получаем

$$\begin{aligned}(1 - f(F(ty)))\mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))-1}(F(t(y-\varepsilon)))I\{C(t,y,\varepsilon)\}\right]&\\ \leqslant \mathbf{P}\left(\eta(t) < ty; Z(t) > 0, C(t,y,\varepsilon)\right)&\\ \leqslant (1 - f(F(t(y-\varepsilon))))&\\ \times \mathbf{E}[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))-1}(F(ty))I\{C(t,y,\varepsilon)\}].& \qquad (132)\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}(1 - f(F(t(y-\varepsilon))))\mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))-1}(F(ty))I\{C(t,y,\varepsilon)\}\right]&\\ \leqslant \frac{1 - f(F(t(y-\varepsilon)))}{f(F(ty))}\mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))}(F(ty))\right].&\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\log f(F(ty)) &\sim -(1 - f(F(ty))) \sim -(1 - F(ty))\\ &= -Q(ty) \sim -\frac{2\mu}{\sigma^2 ty} \sim -\frac{1-y}{y}Q(t(1-y))\end{aligned}$$

при $t \to \infty$, то лемма 60 с $\lambda = 1$ и $q = (1-y)y^{-1}$ дает

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))}(F(ty))\right] = \frac{1}{(1 + (1-y)y^{-1})^2} = y^2.$$

Опираясь на это равенство и устремляя $t \to \infty$, легко убедиться в справедливости следующей цепочки асимптотических соотношений:

$$\begin{aligned}\frac{1 - f(F(t(y-\varepsilon)))}{f(F(ty))}\mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))}(F(ty))\right]&\\ \sim y^2\frac{1 - f(F(t(y-\varepsilon)))}{f(F(ty))} \sim \frac{2\mu y^2}{t\sigma^2(y-\varepsilon)} \sim \mathbf{P}(Z(t) > 0)\frac{y^2}{y-\varepsilon}.& \qquad (133)\end{aligned}$$

Используя ограниченность функции xe^{-x} при $x \geqslant 0$ и соотношение $\log(1-x) \sim -x$, $x \to 0$, нетрудно понять, что найдется константа $K \in (0, \infty)$ такая, что

$$\begin{aligned}
&\frac{1 - f(F(t(y-\varepsilon)))}{f(F(ty))}\mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))}(F(ty))I\{\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)\}\right] \\
&\quad = \frac{1 - f(F(t(y-\varepsilon)))}{f(F(ty))} \\
&\qquad\quad \times \mathbf{E}\left[Z(t(1-y))e^{Z(t(1-y))\log f(F(ty))}I\{\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)\}\right] \\
&\quad \leqslant K\mathbf{E}[I\{\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)\}] = K\mathbf{P}(\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (130) вытекает, что при $t \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\frac{1 - f(F(t(y-\varepsilon)))}{f(F(ty))}\mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))}(F(ty))I\{\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)\}\right] \\
&\qquad = o(\mathbf{P}(Z(t) > 0)).
\end{aligned}$$

Это соотношение и рассуждения, сходные с использованными при доказательстве соотношений (133), позволяют сделать вывод о том, что для любого $\varepsilon \in (0, y)$ при $t \to \infty$

$$\begin{aligned}
&(1 - f(F(ty)))\mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))-1}(F(t(y-\varepsilon)))I\{C(t,y,\varepsilon)\}\right] \\
&\quad = \frac{1 - f(F(ty))}{f(F(t(y-\varepsilon)))} \\
&\qquad \times \mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))}(F(t(y-\varepsilon)));\ Z(t(1-y)) > 0\right] \\
&\qquad - \frac{1 - f(F(ty))}{f(F(t(y-\varepsilon)))} \\
&\qquad\quad \times \mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))}(F(t(y-\varepsilon)))I\{\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)\}\right] \\
&\quad = \frac{1 - f(F(ty))}{f(F(t(y-\varepsilon)))}\mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))}(F(t(y-\varepsilon)))\right] \\
&\qquad - \frac{1 - f(F(ty))}{f(F(t(y-\varepsilon)))} \\
&\qquad\quad \times \mathbf{E}\left[Z(t(1-y))f^{Z(t(1-y))}(F(t(y-\varepsilon)))I\{\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)\}\right] \\
&\quad \geqslant \frac{2\mu(1-\varepsilon)(y-\varepsilon)^2}{\sigma^2 ty} - K\mathbf{P}(\widetilde{C}(t,y,\varepsilon)) \\
&\quad \geqslant \frac{2\mu(1-\varepsilon)^2(y-\varepsilon)^2}{\sigma^2 ty} \sim \mathbf{P}(Z(t) > 0)\frac{(1-\varepsilon)^2(y-\varepsilon)^2}{y}.
\end{aligned}$$

Используя полученные соотношения в (132), мы видим, что

$$\frac{(1-\varepsilon)^2(y-\varepsilon)^2}{y} \leqslant \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left(\eta(t) < ty; Z(t) > 0, C(t,y,\varepsilon)\right)}{\mathbf{P}\left(Z(t) > 0\right)}$$
$$\leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left(\eta(t) < ty; Z(t) > 0, C(t,y,\varepsilon)\right)}{\mathbf{P}\left(Z(t) > 0\right)} \leqslant \frac{y^2}{y-\varepsilon}.$$

Объединяя эти оценки с (131) и устремляя сначала t к бесконечности, а затем ε к нулю, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\eta(t) < ty | Z(t) > 0\right) = y,$$

что и требовалось доказать. $\square$

13. Общие ветвящиеся процессы со случайными характеристиками

Одной из важных и богатых моделей ветвящихся процессов являются общие ветвящиеся процессы, нашедшие последнее время широкие применения в теории массового обслуживания, теории алгоритмов, биологии, демографии и других областях (см., например, [14], [25], [27], [26]). Мы приведем здесь лишь неформальное описание общих ветвящиеся процессов со случайными характеристиками. В создание теории этих процессов существенный вклад внесли К. Крамп, К. Мод [23], [24] и П. Ягерс [27]. Поэтому общие ветвящиеся процессы иногда называют процессами Крампа–Мода–Ягерса.

В процессе Крампа–Мода–Ягерса каждый индивидуум, скажем, частица x, характеризуется тремя случайными параметрами

$$(\lambda_x, \xi_x(\cdot), \chi_x(\cdot)),$$

которые являются независимыми одинаково распределенными копиями трехмерного набора $(\lambda, \xi(\cdot), \chi(\cdot))$ с компонентами, имеющими следующий смысл: если частица x родилась в момент σ_x, то

λ_x – длительность жизни частицы x;

$\xi_x(t-\sigma_x)$ – количество потомков, произведенных частицей в интервале времени $[\sigma_x, t)$; $\xi_x(t-\sigma_x) = 0$, если $t - \sigma_x < 0$;

$\chi_x(t-\sigma_x) \geqslant 0$ – случайный процесс, который может менять значения только внутри интервала времени $[\sigma_x, \sigma_x+\lambda_x)$, а вне этого интервала имеет вид

$$\chi_x(t-\sigma_x) := \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t-\sigma_x < 0; \\ \chi_x(\lambda_x), & \text{если} \quad t-\sigma_x \geqslant \lambda_x. \end{cases}$$

Отметим, что процесс $\chi_x(t)$ не обязан быть монотонной функцией по t.

Случайный процесс

$$Z^{\chi}(t) := \sum_x \chi_x(t-\sigma_x),$$

где суммирование ведется по всем частицам x, рожденным в процессе вплоть до момента t (включая частицы, существовавшие в процессе в момент $t=0$ начала эволюции процесса), называется общим ветвящимся процессом со случайной характеристикой χ или просто общим ветвящимся процессом со случайной характеристикой.

Символом $Z(t)$ обозначается обычно количество частиц в процессе в момент t. Если не оговорено противное, то считается, что процесс начинается в момент $t=0$ с одной частицы нулевого возраста.

13.1. Примеры общих ветвящихся процессов. Приведем несколько примеров общих ветвящихся процессов со случайными характеристиками.

Примеры. 1) если $\chi(t) := I\{t \in [0,\lambda)\}$, то $Z^{\chi}(t) = Z(t)$ – число частиц, существующих в процессе в момент t;

2) если

$$\chi(t) := tI\{t \in [0,\lambda)\} + \lambda I\{\lambda < t\},$$

то

$$Z^{\chi}(t) = \int_0^t Z(u)\,du;$$

3) если $\chi(t) := I\{t \geqslant 0\}$, то $Z^{\chi}(t)$ – общее число частиц, родившихся в процессе к моменту t.

13.2. Классификация общих ветвящихся процессов. Пусть $A := \mathbf{E}\xi(\infty)$. Общий ветвящийся процесс называется докритическим, если $A < 1$, критическим, если $A = 1$, и надкритическим, если $A > 1$. При этом из числа критических процессов исключается процесс, в котором $\xi(\infty) \equiv 1$.

Рассмотрим общий ветвящийся процесс, начинающийся в момент $t = 0$ с одной частицы нулевого возраста (в дальнейшем мы будем обозначать эту частицу символом 0), и пусть

$$0 \leqslant v\,(1) \leqslant v\,(2) \leqslant \cdots \leqslant v\,(n) \leqslant \cdots$$

– моменты рождения непосредственных потомков первоначальной частицы процесса. Тогда

$$\xi_0(t) := \#\,\{n : v\,(n) \leqslant t\}$$

есть количество частиц, рожденных первоначальной частицей за промежуток времени $[0, t]$. Ясно, что

$$Z^{\chi}(t) = \chi_0(t) + \sum_{x \neq 0} \chi_x(t - \sigma_x) = \chi_0(t) + \sum_{v(n) \leqslant t} Z_n^{\chi}\,(t - v\,(n))\,,$$

где процессы $Z_n^{\chi}\,(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$, являются независимыми вероятностными копиями процесса $Z^{\chi}(\cdot)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Z^{\chi}(t) &= \mathbf{E}\chi(t) + \mathbf{E}\left[\sum_{v(n) \leqslant t} Z_n^{\chi}\,(t - v\,(n))\right] \\
&= \mathbf{E}\chi(t) + \mathbf{E}\left[\sum_{v(n) \leqslant t} \mathbf{E}\left[Z_n^{\chi}\,(t - v\,(n))\,|\, v\,(1)\,, v\,(2)\,, \ldots, v\,(n)\,, \ldots\right]\right] \\
&= \mathbf{E}\chi(t) + \mathbf{E}\left[\sum_{v(n) \leqslant t} \mathbf{E}\left[Z_n^{\chi}\,(t - v\,(n))\,|\, v\,(n)\right]\right] \\
&= \mathbf{E}\chi(t) + \mathbf{E}\left[\sum_{u \leqslant t} \mathbf{E}\left[Z^{\chi}\,(t - u)\right](\xi_0(u) - \xi_0(u-))\right] \\
&= \mathbf{E}\chi(t) + \int_0^t \mathbf{E}Z^{\chi}\,(t - u)\,\mathbf{E}\xi(du).
\end{aligned}$$

Таким образом, математическое ожидание $A^{\chi}(t) := \mathbf{E}Z^{\chi}\,(t)$ удовлетворяет следующему уравнению восстановления в терминах меры $m(t) := \mathbf{E}\xi(t)$:

$$A^{\chi}(t) = \mathbf{E}\chi(t) + \int_0^t A^{\chi}(t-u)\, m(du). \tag{134}$$

Мальтусовский параметр. Если уравнение

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\, m(dt) = 1 \tag{135}$$

имеет решение α, то число α называется мальтусовским параметром общего ветвящегося процесса $Z(t)$, $t \geqslant 0$.

Для критических общих ветвящихся процессов $\alpha = 0$, для надкритических процессов $\alpha > 0$, для докритических процессов $\alpha < 0$ (если он существует).

Если мальтусовский параметр существует, то, полагая $C^{\chi}(t) := e^{-\alpha t} A^{\chi}(t)$, соотношение (134) можно переписать в виде

$$C^{\chi}(t) = e^{-\alpha t}\mathbf{E}\chi(t) + \int_0^t C^{\chi}(t-u) d_u \left(\int_0^u e^{-\alpha y}\, m(dy) \right), \tag{136}$$

Предположим, что функция $e^{-\alpha t}\mathbf{E}\chi(t)$ непосредственно интегрируема по Риману, и кроме того,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\mathbf{E}\chi(t) dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} t e^{-\alpha t}\, m(dt) < \infty,$$

а мера

$$M(t) = \int_0^t e^{-\alpha y}\, m(dy)$$

нерешетчата. В этих условиях к уравнению (136) можно применить теорему восстановления и заключить, что

$$\lim_{t\to\infty} C^{\chi}(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} A^{\chi}(t) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\mathbf{E}\chi(t)\, dt}{\int_0^{\infty} t e^{-\alpha t}\, m(dt)}.$$

В частности, если $G(t)$ – распределение времени жизни частиц в процессе, а $\chi(t) := I\{t \in [0, \lambda)\}$, то

$$\mathbf{E}\chi(t) = \mathbf{P}(\lambda > t) = 1 - G(t)$$

и

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}\mathbf{E}Z(t) = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}(1 - G(t))\, dt}{\int_0^{\infty} t e^{-\alpha t}\, m(dt)},$$

если соответствующие интегралы сходятся.

14. Система массового обслуживания с разделением процессора

14.1. Описание модели. В этом разделе мы рассмотрим систему массового обслуживания с разделением процессора, обозначаемую символом $M|G|1|S$. Однако прежде, чем переходить к подробному описанию такой системы, напомним определение обычной системы массового обслуживания $M|G|1$.

В системе $M|G|1$ имеется один прибор с единичной интенсивностью обслуживания заявок. Поток обслуживания заявок – ординарный пуассоновский с интенсивностью Λ, т.е. является случайным процессом $\mathrm{Poi}_\Lambda(u)$, $u \geqslant 0$, с независимыми приращениями и таким, что для любых $u_1 \geqslant 0$, $u > 0$

$$\mathbf{P}(\mathrm{Poi}_\Lambda(u_1+u) - \mathrm{Poi}_\Lambda(u_1) = k) = \frac{(\Lambda u)^k}{k!} e^{-\Lambda u}, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Распределение времени обслуживания l одной заявки задается функцией $G(u) = \mathbf{P}(l \leqslant u)$. Заявки обслуживаются в порядке их поступления в систему.

Таким образом, производящая функция $f(u, s)$ количества заявок, пришедших в систему за промежуток времени $[0, u]$, имеет вид

$$f(u, s) := \mathbf{E} s^{\mathrm{Poi}_\Lambda(u)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mathrm{Poi}_\Lambda(u) = k) s^k = e^{\Lambda u(s-1)},$$

а производящая функция $f(s)$ количества заявок ξ, пришедших в систему за время обслуживания одной заявки, задается соотношением

$$f(s) := \mathbf{E} s^\xi = \int_0^\infty \mathbf{E}\left[s^\xi | l = u\right] dG(u) = \int_0^\infty \mathbf{E}\left[s^{\mathrm{Poi}_\Lambda(u)}\right] dG(u)$$
$$= \int_0^\infty e^{\Lambda u(s-1)}\, dG(u) = \beta(\Lambda(1-s)),$$

где

$$\beta(y) := \int_0^\infty e^{-yu}\, dG(u).$$

В частности, если время обслуживания любой заявки постоянно, скажем, равно 1, то

$$\beta(y) = \int_0^\infty e^{-yu}\, dG(u) = e^{-y}$$

и

$$f(s) = e^{\Lambda(s-1)}.$$

Система массового обслуживания $M|G|1|S$ отличается от стандартной системы $M|G|1$ лишь характером обслуживания заявок. Как и в системе $M|G|1$, в системе $M|G|1|S$ имеется один прибор с единичной интенсивностью обслуживания заявок, на который поступает ординарный пуассоновский поток заявок с интенсивностью Λ. Распределение времени обслуживания l одной заявки (при условии, что других заявок в системе нет) задается функцией $G(u) = \mathbf{P}(l \leqslant u)$. Если в какой-либо момент T в системе имеется M заявок, то каждая из них обслуживается с интенсивностью M^{-1}.

Пусть

$$W_{l_1,\ldots,l_{N-1}}(l_N)$$

– время, проведенное в системе до момента окончания обслуживания заявкой, пришедшей в систему в тот момент, когда в ней находилось $N-1$ заявок с остаточными временами обслуживания $l_1, \ldots, l_{N-1}$ (не ограничивая общности будем предполагать, что среди чисел $l_1, \ldots, l_{N-1}$ нет одинаковых). Задача состоит в исследовании свойств $W_{l_1,\ldots,l_{N-1}}(l_N)$ при $l_N \to \infty$.

Следующий раздел посвящен исследованию свойств этой случайной величины при помощи вспомогательного общего ветвящегося процесса.

14.2. Построение вспомогательного ветвящегося процесса. Рассмотрим общий ветвящийся процесс, в котором в момент времени $t = 0$ имеется N частиц с остаточными временами жизней $l_1, \ldots, l_{N-1}, l_N$. Эти частицы образуют нулевое поколение нашего процесса. Частицы нулевого поколения производят потомков. Причем длительность жизни λ_x новорожденной частицы имеет распределение $G(u) := \mathbf{P}(\lambda_x \leqslant u)$, количество непосредственных потомков $\xi_x(t)$, произведенных частицей x за время t с момента рождения, описывается производящей функцией

$$\mathbf{E}s^{\xi_x(t)} = \int_0^t e^{\Lambda(s-1)u}\, dG(u) + e^{\Lambda(s-1)t}\left(1 - G(t)\right),$$

т.е. является ординарным пуассоновским потоком $\mathrm{Poi}_\Lambda(u)$, $u \geqslant 0$, интенсивности Λ, остановленным в момент гибели частицы:

$$\mathbf{E}s^{\xi_x(t)} = \mathbf{E}s^{\mathrm{Poi}_\Lambda(t\wedge\lambda_x)}.$$

Пусть $Z(t; l_1, \ldots, l_N)$ обозначает число частиц в процессе в момент t в предположении, что выполнены упомянутые выше начальные условия. Как и прежде, мы сохраним обозначение $Z(t)$ за общим ветвящимся процессом, начавшимся в момент $t = 0$ с одной частицы нулевого возраста.

Введем также общий ветвящийся процесс с иммиграцией $X(t; l_1, \ldots, l_N)$, который имеет те же самые начальные условия, что и процесс $Z(t; l_1, \ldots, l_N)$, но, кроме этого, характеризуется следующим свойством: если $X(t; l_1, \ldots, l_N) = 0$ в какой-либо момент t, причем такое событие случилось в i-й раз, то после случайного времени r_i, имеющего распределение $\mathbf{P}\,(r_i \leqslant u) = 1 - e^{-\Lambda u}$, процесс стартует вновь с *одной* частицы нулевого возраста.

Пусть теперь $\sigma_{x_1} \leqslant \sigma_{x_2} \leqslant \cdots$ – последовательные моменты скачков процесса $X(t; l_1, \ldots, l_N)$. При помощи этого общего ветвящегося процесса с иммиграцией мы построим следующую систему обслуживания, в которой через $S(T)$ будет обозначаться количество заявок в системе в момент T:

1) в момент $T = 0$ в системе имеется N заявок с остаточными временами обслуживания $l_1, \ldots, l_{N-1}, l_N$ (т.е. l_i – остаточное время обслуживания i-й заявки при условии отсутствия в системе других заявок);

2) момент Θ_i $i-$го скачка числа заявок $S(\cdot)$ определяется равенством

$$\Theta_i = \int_0^{\sigma_{x_i}} X(y; l_1, \ldots, l_N) dy + \int_0^{\sigma_{x_i}} I\left\{X(y; l_1, \ldots, l_N) = 0\right\} dy. \tag{137}$$

3) система обслуживания заявок такова, что в каждый момент T число заявок в системе и их остаточные времена обслуживания совпадают с количеством частиц и их остаточными временами жизни в ветвящемся процессе $X(\cdot; l_1, \ldots, l_{N-1}, l_N)$ в момент $t(T)$, где

$$T = \int_0^{t(T)} X(y; l_1, \ldots, l_N) dy + \int_0^{t(T)} I\left\{X(y; l_1, \ldots, l_N) = 0\right\} dy. \tag{138}$$

Таким образом, соотношение $t \leftrightarrow T$ задает случайную замену времени.

Теорема 61. *Описанная система обслуживания является $M|G|1|S$ системой с разделением процессора с ординарным пуассоновским потоком интенсивности заявок Λ и распределением длительности обслуживания индивидуальной заявки $G(u)$.*

Доказательство. Пусть $S(T)$ – количество заявок в системе в момент T, и пусть $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ – моменты изменения количества заявок. Покажем, что эволюция построенной системы массового обслуживания совпадает с эволюцией системы обслуживания с разделением процессора с заявленными в теореме параметрами. Ясно, что для этого достаточно проверить, что это так при $T \in [0, \Theta_1)$, а затем, используя свойство "отсутствия последействия" у пуассоновского потока, показать при помощи таких же рассуждений, что эволюции указанных систем совпадают при $T \in [\Theta_1, \Theta_2]$ и так далее.

Пусть η – случайная величина имеющая экспоненциальное распределение с параметром Λ, и пусть $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k := \min_{1 \leqslant i \leqslant k} x_i$.

Для того, чтобы убедиться в справедливости теоремы, нам необходимо проверить выполнение следующего комплекса условий:

1) $\Theta_1 = Nl_1 \wedge \cdots \wedge Nl_N \wedge \eta$;

2) если $\Theta_1 = Nl_i$, то в этот момент i-я заявка покидает систему; если $\Theta_1 = \eta$, то *одна* новая заявка поступает на обслуживание;

3) в любой момент времени $T \in [0, \Theta_1]$ оставшиеся времена обслуживания первоначальных N заявок равны $l_1 - N^{-1}T, \ldots, l_N - N^{-1}T$.

Пусть η_i – момент рождения первого потомка у первоначальной частицы, помеченной символом i. Предполагается, что $\eta_i = \infty$, если частица i не оставила потомства. Ясно, что

$$\mathbf{P}(\eta_i > u |\, \eta_i < \infty, l_i > u) = e^{-\Lambda u}.$$

Обозначим θ_1 момент первого скачка процесса $X(t; l_1, \ldots, l_N)$. Очевидно, что

$$\theta_1 = l_1 \wedge \cdots \wedge l_N \wedge \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_N.$$

В силу определения (138) на интервале $u \in [0, \theta_1]$ общее время работы прибора T и время t, прошедшее с начала эволюции построенного выше общего ветвящегося процесса, связаны соотношением $T = Nt$. Таким образом, на этом временно́м промежутке условие 3) выполнено.

Далее, в силу (137) момент изменения Θ_1 состояния построенной системы обслуживания и момент первого изменения состава популяции вспомогательного ветвящегося процесса связаны равенством

$$\begin{aligned}\Theta_1 = N\theta_1 &= N\left(l_1 \wedge \dots \wedge l_N \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_N\right)\\ &= Nl_1 \wedge \dots \wedge Nl_N \wedge \left(N(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_N)\right).\end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}\left(N(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_N) \geqslant y\right) = \left(e^{-\Lambda y/N}\right)^N = e^{-\Lambda y} = \mathbf{P}(\eta > y).$$

Следовательно, $\Theta_1 \overset{d}{=} Nl_1 \wedge \dots \wedge Nl_N \wedge \eta$, таким образом, условие 1) также выполнено.

Справедливость условия 2) очевидна. □

Из теоремы 61 следует, что количество заявок в системе в момент времени $T > 0$ вычисляется по формуле

$$S(T) = X(t(T); l_1, \dots, l_N),$$

и, кроме того, длительность времени обслуживания заявки длины l_N, пришедшей в систему в момент $t = 0$, когда в ней находились заявки с остаточными временами обслуживания $l_1, \dots, l_{N-1}$ вычисляется по формуле

$$W_{l_1,\dots,l_{N-1}}(l_N) = \int_0^{l_N} Z(y; l_1, \dots, l_N)\, dy. \tag{139}$$

14.3. Детальное описание вероятностной конструкции для времени пребывания заявки в системе. Пусть l – длительность жизни какой-либо частицы, а $0 \leqslant \delta(1) \leqslant \delta(2) \leqslant \cdots$ – моменты рождения ее непосредственных потомков. Обозначим

$$\xi(t, l) := \#\left\{n : \delta(n) \leqslant t\right\}$$

количество непосредственных потомков частицы, родившихся в интервале времени $[0, t]$. Общий ветвящийся процесс, порожденный рассматриваемой частицей, можно трактовать как процесс с иммиграцией, остановленный в момент l, где

$$\mathbf{E}s^{\xi(t,l)} = \mathbf{E}e^{\Lambda(s-1)\min(t,\,l)}.$$

Поскольку каждая новорожденная частица порождает *стандартный* общий ветвящийся процесс без иммиграции, мы видим, что количество частиц в процессе в момент t (без учета первоначальной частицы) равно

$$\int_0^t Z_{\xi(u,l)}(t-u)\xi(du,l),$$

где $Z_i(y)$ являются независимыми ветвящимися процессами, порожденными одной частицей нулевого возраста. Таким образом,

$$Z(y;l_1,\ldots,l_N) = I\{l_1 \geqslant y\} + \int_0^y Z_{\xi(u,l_1)}(y-u)\xi(du,l_1) + \cdots \\ + I\{l_N \geqslant y\} + \int_0^y Z_{\xi(u,l_N)}(y-u)\xi(du,l_N).$$

Отсюда, используя представление (139), получаем, что

$$W_{l_1,\ldots,l_{N-1}}(l_N) = \int_0^{l_N} Z(y;l_1,\ldots,l_N)\,dy \\ = \sum_{k=1}^N (l_N \wedge l_k) + \sum_{k=1}^N \int_0^{l_N} dy \int_0^y Z_{\xi(u,l_k)}(y-u)\xi(du,l_k).$$

Поскольку моменты рождения новых частиц образуют ординарный пуассоновский поток, интенсивности Λ, то $\mathbf{E}\,[\xi(u,l)|l] = \Lambda(u\wedge l)$. Следовательно,

$$\mathbf{E}\Big[\int_0^{l_N} dy \int_0^y Z_{\xi(u,l_k)}(y-u)\xi(du,l_k)\Big] \\ = \mathbf{E}\Big[\int_0^{l_N} dy\mathbf{E}\Big[\int_0^y Z_{\xi(u,l_k)}(y-u)\xi(du,l_k)\,|\,\xi(u,l_k), 0\leqslant u\leqslant l_k\Big]\Big] \\ = \mathbf{E}\Big[\int_0^{l_N} dy \int_0^y \mathbf{E}\left[Z_{\xi(u,l_k)}(y-u)\,|\,\xi(u,l_k), 0\leqslant u\leqslant l_k\right]\xi(du,l_k)\Big] \\ = \mathbf{E}\Big[\int_0^{l_N} dy \int_0^y \mathbf{E}\left[Z(y-u)\right]\xi(du,l_k)\Big] \\ = \mathbf{E}\Big[\int_0^{l_N} dy \int_0^y \mathbf{E}\left[Z(y-u)\right]\mathbf{E}\left[\xi(du,l_k)|\,l_k\right]\Big] =$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{E}\bigg[\int_0^{l_N} dy \int_0^{y\wedge l_k} \mathbf{E}\,[Z(y-u)]\,\Lambda\,du\bigg] \\
&= \Lambda\mathbf{E}\bigg[\int_0^{l_N} dy \int_{0\vee(y-l_k)}^{y} \mathbf{E}\,[Z(u)]\;du\bigg].
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}W_{l_1,\dots,l_{N-1}}(l_N) = \mathbf{E}\bigg[&\sum_{k=1}^{N}(l_N \wedge l_k) \\
&+ \Lambda\sum_{k=1}^{N}\int_0^{l_N} dy \int_{0\vee(y-l_k)}^{y} \mathbf{E}\,[Z(u)]\;du\bigg].
\end{aligned}
$$

Можно показать (см. работу [14]), что если

$$
\beta := \mathbf{E}l_N = \int_0^\infty u\,dG(u) < \infty
$$

и $\Lambda\beta < 1$, то для *фиксированных* $l_1, \dots, l_{N-1}$ остаточных времен обслуживания заявок, находившихся в системе $M|G|1|S$ в момент времени $t = 0$,

$$
\lim_{l_N\to\infty} \frac{1}{l_N} W_{l_1,\dots,l_{N-1}}(l_N) = \frac{1}{1-\Lambda\beta}
$$

почти наверное.

Литературные указания

При подготовке курса лекций были использованы следующие материалы

- Разделы 2 и 4 написаны под влиянием соответствующих разделов монографий [21] и [22].
- Раздел 3 написан на основе § 5 главы VIII книги [18] и статей автора [1] и [9].
- В разделе 5 отражены идеи § 9 главы I монографии [22].
- В разделе 6 использованы материалы § 9 главы VIII книги [20] и глава 1 монографии [19].
- Раздел 7 основан на материалах § 5 главы XIII книги [20].
- Раздел 8 опирается на идеи § 4 главы IX монографии [16].
- Раздел 9 основан на работе автора [2].
- Раздел 10 основан на работе автора [3].
- В разделе 11 использованы работа автора [6] и статья [17].
- Раздел 12 основан на работе автора [5].
- В разделе 13 использованы материалы монографии [27].
- Раздел 14 основан на статье [14].

Список литературы

[1] Ватутин В. А., “Условие регулярности ветвящегося процесса Беллмана–Харриса”, *Докл. АН СССР*, **230**:1 (1976), 15–18 MR 420897, Zbl 0365.60078.

[2] Ватутин В. А., “Предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана–Харриса с бесконечной дисперсией”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **21**:4 (1976), 861–863 MR 426190, Zbl 0383.60079.

[3] Ватутин В. А., “Дискретные предельные распределения числа частиц в критических ветвящихся процессах Беллмана–Харриса”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **22**:1 (1977), 150–155 MR 436362, Zbl 0391.60082.

[4] Ватутин В. А., “Предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц и бесконечными вторыми моментами”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **23**:4 (1978), 807–818 MR 516277, Zbl 0404.60087.

[5] Ватутин В. А., “О расстоянии до ближайшего общего предка в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса”, *Матем. заметки*, **25**:5 (1979), 733–741 Mi mzm8335, MR 539582, Zbl 0431.60081.

[6] Ватутин В. А., “Новая предельная теорема для критического ветвящегося процесса Беллмана–Харриса”, *Матем. сб.*, **109**:3 (1979), 440–452 Mi sm2394, MR 542812, Zbl 0413.60072.

[7] Ватутин В. А., “Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса с несколькими типами частиц”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **24**:3 (1979), 503–514 MR 541363, Zbl 0408.60081.

[8] Ватутин В. А., “Об одном классе критических ветвящихся процессов с несколькими типами частиц”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **25**:4 (1980), 771–781 MR 595138, Zbl 0452.60085.

[9] Ватутин В. А., “Достаточное условие регулярности ветвящихся процессов Беллмана–Харриса”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **31**:1 (1986), 59–66 MR 836952, Zbl 0603.60078.

[10] Ватутин В. А., *Ветвящиеся процессы и их применения*, НОЦ МИАН, М., 2008 Mi lkn8.

[11] Ватутин В. А., Зубков А. М., “Ветвящиеся процессы I”, Итоги науки и техники: Теория вероятностей. Математическая статистика. Кибернетика, **28**, ВИНИТИ, М., 1985, 3–67.

[12] Ватутин В. А., Телевинова Т. М., Чистяков В. П., *Вероятностные методы в физических исследованиях*, Наука, М., 1984.

[13] Гришечкин С. А., “О регулярности ветвящихся процессов с несколькими типами частиц”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **31**:2 (1986), 278–289 MR 850988, Zbl 0605.60073.

[14] Гришечкин С. А., “Ветвящиеся процесса Крампа–Мода–Ягерса как метод исследования системы $M|G|1$ с разделением процессора”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **36**:1 (1991), 16–33 MR 1109013.

[15] Нагаев С. В., “Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем. II”, *Сиб. матем. журн.*, **15**:3 (1974), 570–579 MR 362535, Zbl 0294.60065.

[16] Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*, Наука, М., 1972 MR 0322927.

[17] Сагитов С. М., “Три предельные теоремы для редуцированных критических ветвящихся процессов”, *УМН*, **50**:5 (1995), 183–202 Mi rm1112, MR 1365055, Zbl 0859.60079.

[18] Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971 MR 0345229.

[19] Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985 MR 0815924, Zbl 0563.26002.

[20] Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее применения*, т. 2, Мир, М., 1984.

[21] Харрис Т., *Теория ветвящихся случайных процессов*, Мир, М., 1966.

[22] Athreya K. B., Ney P., *Branching Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1972 MR 0373040, Zbl 0259.60002.

[23] Crump K. S., Mode C. J., “A general age-dependent branching process. I”, *J. Math. Anal. Appl.*, **24** (1968), 494–508 doi 10.1016/0022-247X(68)90005-X, Zbl 0192.54301.

[24] Crump K. S., Mode C. J., “A general age-dependent branching process. II”, *J. Math. Anal. Appl.*, **25** (1969), 8–17 doi 10.1016/0022-247X(69)90210-8, MR 237005, Zbl 0201.19202.

[25] Devroy L., “Branching processes and their applications in the analysis of tree structures and tree algorithms”, *Probabilistic methods for algorithmic discrete mathematics*, eds. Habib M. et al., Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1998 MR 1678582.

[26] Haccou P., Jagers P., Vatutin V., *Branching Processes in Biology: Variation, Growth and Extinction*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005 Zbl 1118.92001.

[27] Jagers P., *Branching Processes with Biological Applications*, John Wiley and Sons, London, 1975 MR 0488341, Zbl 0356.60039.

[28] Vatutin V. A., Zubkov A. M., “Branching Processes II”, *J. Sov. Math.*, **67** (1993), 3407–3485 doi 10.1007/BF01096272, MR 1260986, Zbl 0846.60083.

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 12

Владимир Алексеевич Ватутин

Ветвящиеся процессы Беллмана–Харриса

Сдано в набор 20.02.2009. Подписано в печать 02.07.2009.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 7. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mi.ras.ru/noc/` e-mail: `pavlov@mi.ras.ru`