

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

## Лекционные курсы НОЦ

*Выпуск 18*

Издание выходит с 2006 года

Н. А. Славнов

Введение в теорию квантовых  
интегрируемых систем.  
Квантовое нелинейное уравнение  
Шрёдингера



Москва  
2011

УДК 53  
ББК (В)22.31  
Л43

*Редакционный совет:*

*С. И. Адян, Д. В. Аносов, О. В. Бесов, И. В. Волович,  
А. М. Зубков, А. Д. Изаак (ответственный секретарь),  
В. В. Козлов, С. П. Новиков,  
В. П. Павлов (заместитель главного редактора),  
А. Н. Паршин, Ю. В. Прохоров, А. Г. Сергеев, А. А. Славнов,  
Д. В. Трещев (главный редактор), Е. М. Чирка*

Л43      **Лекционные курсы НОЦ** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2011. Вып. 18: Введение в теорию квантовых интегрируемых систем. Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера / Славнов Н. А. – 120 с.

ISBN 5-98419-043-5

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящий курс лекций был прочитан Н. А. Славновым в 2007 г. в Научно-образовательном центре при Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

ISBN 5-98419-043-5

© Математический институт  
им. В. А. Стеклова РАН, 2011  
© Славнов Н. А., 2011

Настоящий курс лекций был прочитан мною в 2007 г. в Научно-образовательном центре при Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН. Составляя программу курса, я решил вместо поверхностного описания нескольких квантовых интегрируемых моделей рассмотреть одну, но более глубоко. В качестве примера я выбрал модель квантового нелинейного уравнения Шрёдингера. На этом примере я постарался показать, какое большое количество различных задач возникает при исследовании этой сравнительно простой системы, и какие разнообразные математические методы используются для их решения. Мне также хотелось убедить слушателей (а теперь и читателей) в том, что несмотря на то, что интегрируемые системы по определению должны быть решаемы, в этой области остается еще много открытых вопросов.



# Оглавление

<b>Лекция 1. Волновая функция системы одномерных бозонов</b>	<b>7</b>
1.1. Классическое нелинейное уравнение Шрёдингера . . . . .	7
1.2. Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера . . . . .	10
1.3. Решение дифференциального уравнения . . . . .	12
1.3.1. Две переменные . . . . .	13
1.3.2. $N$ переменных . . . . .	14
1.4. Полнота системы собственных функций . . . . .	19
<b>Лекция 2. Основное состояние системы одномерных бозонов</b>	<b>26</b>
2.1. Свойства решений системы уравнений Бете . . . . .	26
2.2. Основное состояние в термодинамическом пределе . . . . .	29
2.3. Свойства интегрального оператора . . . . .	32
2.4. Детерминант Фредгольма . . . . .	34
2.5. Возбужденные состояния . . . . .	38
2.6. Энергия возбужденного состояния . . . . .	39
2.7. Большой канонический ансамбль . . . . .	41
<b>Лекция 3. Система одномерных бозонов при конечной температуре</b>	<b>43</b>
3.1. Состояние термодинамического равновесия . . . . .	43
3.2. Другой вывод уравнения состояния . . . . .	48
3.3. Уравнение Янга–Янга . . . . .	50
3.4. Предельный случай $T = 0$ . . . . .	53
3.5. Предельные случаи для константы связи . . . . .	54
3.6. Возбуждения при ненулевой температуре . . . . .	55
<b>Лекция 4. Корреляционные функции одномерных непроницаемых бозонов</b>	<b>59</b>
4.1. Определения . . . . .	59
4.2. Норма собственной функции . . . . .	60
4.3. Форм-фактор поля . . . . .	63
4.4. Матричный элемент оператора $\Psi(x_1)\Psi^\dagger(x_2)$ . . . . .	65
4.5. Матричный элемент оператора $\Psi(x_1, t_1)\Psi^\dagger(x_2, t_2)$ . . . . .	70
4.6. Пределы сингулярных сумм . . . . .	71

4.7. Разновременной коррелятор в термодинамическом пределе . . . . .	73
4.8. Конечная температура . . . . .	74
<b>Лекция 5. Интегральные операторы и матричная задача Римана</b>	<b>82</b>
5.1. Обозначения . . . . .	82
5.2. Задача Римана . . . . .	85
5.3. Асимптотические разложения . . . . .	90
5.4. Дифференциальные уравнения . . . . .	91
5.5. Производные детерминанта . . . . .	96
<b>Лекция 6. Нелинейный метод наискорейшего спуска</b>	<b>100</b>
6.1. Введение . . . . .	100
6.2. Асимптотика быстро осциллирующих интегралов . . . . .	102
6.2.1. Интеграл по всей оси . . . . .	102
6.2.2. Интеграл по конечному отрезку . . . . .	103
6.2.3. Случай седловой точки . . . . .	105
6.3. Нелинейный метод наискорейшего спуска . . . . .	107
6.4. Улучшенная оценка . . . . .	111
6.5. Комментарии . . . . .	112
Список литературы . . . . .	117

# Лекция 1. Волновая функция системы одномерных бозонов

## 1.1. Классическое нелинейное уравнение Шрёдингера

Мы начинаем наше изложение с того, что вкратце опишем классическое нелинейное уравнение Шрёдингера. На это имеются две причины. Во-первых, квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера, являющееся главной темой этих лекций, получается из классического уравнения путем стандартной процедуры квантования. Во-вторых, как мы увидим в лекции 5, квантовое и классическое уравнения оказываются связанными между собой еще одним, совершенно неожиданным образом, а именно через корреляционные функции. В этой лекции мы ограничимся лишь минимальным набором сведений, необходимым для дальнейшего понимания. Более подробно о классическом нелинейном уравнении Шрёдингера можно прочесть в книге [1].

Классическое нелинейное уравнение Шрёдингера имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2c |\Psi|^2 \Psi, \quad (1.1.1)$$

где  $\Psi = \Psi(x, t)$ , и  $c$  – вещественный параметр, который называют константой связи. По сути, уравнение (1.1.1) представляет собой систему двух уравнений, либо на вещественную и мнимую часть  $\Psi$ , либо на  $\Psi$  и  $\bar{\Psi}$ . Класс решений уравнения (1.1.1), разумеется, зависит от вида граничных условий, накладываемых на функцию  $\Psi$ . Мы ограничимся рассмотрением лишь периодических граничных условий  $\Psi(x + L, t) = \Psi(x, t)$ , как наиболее удобных для квантования. Таким образом, в дальнейшем мы будем считать, что  $\Psi(x, t)$  определена на интервале  $0 \leq x < L$ .

С физической точки зрения функция  $\Psi(x, t)$  представляет собой классическое заряженное поле, а уравнение (1.1.1) является гамильтоновым уравнением движения. Для того, чтобы убедиться в этом, введем стандартную скобку Пуассона функционалов  $F$

и  $G$

$$\{F, G\} = i \int_0^L \left( \frac{\delta F}{\delta \Psi(x)} \frac{\delta G}{\delta \bar{\Psi}(x)} - \frac{\delta F}{\delta \bar{\Psi}(x)} \frac{\delta G}{\delta \Psi(x)} \right) dx. \quad (1.1.2)$$

Определение (1.1.2) является обобщением обычной скобки,

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right), \quad (1.1.3)$$

записанной в комплексных координатах  $z_k = (q_k + ip_k)/\sqrt{2}$ ,  $\bar{z}_k = (q_k - ip_k)/\sqrt{2}$ :

$$\{f, g\} = i \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial z_k} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial g}{\partial z_k} \right), \quad (1.1.4)$$

Из определения (1.1.2) следует, что  $\Psi$  и  $\bar{\Psi}$  имеют каноническую скобку Пуассона

$$\{\Psi(x, t), \bar{\Psi}(y, t)\} = i\delta(x - y). \quad (1.1.5)$$

Легко проверить, что если мы выберем гамильтониан в виде

$$H = \int_0^L (\partial_x \Psi^\dagger \partial_x \Psi + c|\Psi|^4) dx, \quad (1.1.6)$$

то гамильтоновы уравнения движения

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \{H, \Psi\} = -i \frac{\delta H}{\delta \bar{\Psi}}, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = \{H, \bar{\Psi}\} = i \frac{\delta H}{\delta \Psi} \quad (1.1.7)$$

совпадают с уравнением (1.1.1) и сопряженным ему уравнением.

Замечательной особенностью нелинейного уравнения Шрёдингера является то, что оно обладает бесконечным набором интегралов движения  $I_k$ , т.е. величин, сохраняющихся во времени

$$\frac{\partial I_k}{\partial t} = \{H, I_k\} = 0. \quad (1.1.8)$$

Приведем несколько примеров. Первые два интеграла движения имеют вид

$$I_1 = Q = \int_0^L |\Psi|^2 dx \quad (\text{число частиц}), \quad (1.1.9)$$

$$I_2 = P = \frac{1}{2i} \int_0^L (\bar{\Psi} \partial_x \Psi - \Psi \partial_x \bar{\Psi}) dx \quad (\text{импульс}). \quad (1.1.10)$$

Третий интеграл движения  $I_3$  совпадает с гамильтонианом (1.1.6), последующие, старшие интегралы движения не имеют простой физической интерпретации.

Наряду с уравнением (1.1.1) часто рассматривают уравнения более общего вида

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2cq^2 r, \\ -i \frac{\partial r}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2cr^2 q, \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

где  $q = q(x, t)$  и  $r = r(x, t)$  – две комплекснозначные функции, вообще говоря, не связанные между собой никакими дополнительными соотношениями. Несмотря на внешнюю схожесть уравнения (1.1.1) и системы (1.1.11), между ними имеются существенные различия, поскольку, как мы уже отмечали, (1.1.1) представляет собой систему двух уравнений, в то время как (1.1.11) является системой четырех уравнений. В то же время имеется и много общего. В частности, система (1.1.11) обладает бесконечным набором интегралов движения, которые по форме совпадают с интегралами  $I_k$  (см. (1.1.6), (1.1.9), (1.1.10)), если в последних сделать формальную замену  $\Psi \rightarrow q$ ,  $\bar{\Psi} \rightarrow r$ . Старшие интегралы движения порождают бесконечный набор уравнений по формулам

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -i \frac{\delta I_k}{\delta r}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = i \frac{\delta I_k}{\delta q}. \quad (1.1.12)$$

Иными словами в этих уравнениях роль гамильтониана играют интегралы движения  $I_k$ . Бесконечный набор уравнений (1.1.12) принято называть иерархией АКНС<sup>1</sup>. Часто, впрочем, уравнения (1.1.11) называют нелинейным уравнением Шрёдингера, а системы (1.1.12) при  $k > 3$  высшими (или старшими) нелинейными уравнениями Шрёдингера.

С иерархией АКНС связан еще один объект, называющийся  $\tau$ -функцией. Эта функция зависит от бесконечного набора параметров<sup>2</sup>  $\{t_1, t_2, \dots\}$ , которые принято называть временами  $\tau = \tau(t_1, t_2, \dots)$ . Логарифм  $\tau$ -функции является производящим

<sup>1</sup>Аббревиатура по начальным буквам фамилий Ablowitz, Kaup, Newell, Segura.

<sup>2</sup>Реально всегда имеют дело с конечным набором времен  $\tau = \tau(t_1, \dots, t_n)$ , где  $n$  является произвольным целым положительным числом.

функционалом для плотностей интегралов движения, а именно

$$\frac{\partial^2 \log \tau}{\partial t_1 \partial t_k} = J_k, \quad (1.1.13)$$

где

$$\int_0^L J_k dx = I_k. \quad (1.1.14)$$

При этом время  $t_1$  отождествляется с переменной  $x$ . Мы встретимся с  $\tau$ -функцией при анализе корреляционных функций квантового нелинейного уравнения Шрёдингера в лекции 5. Более подробно об этом объекте можно прочитать в монографии [2].

## 1.2. Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера

Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2c \Psi^\dagger \Psi \Psi, \quad (1.2.1)$$

по форме совпадает с классическим, но теперь  $\Psi = \Psi(x, t)$  является оператором, действующим в некотором гильбертовом пространстве. Символом  $\dagger$  обозначено эрмитово сопряжение. В соответствии со стандартной процедурой квантования скобка Пуассона заменяется на коммутатор

$$[\Psi(x, t), \Psi^\dagger(y, t)] = \delta(x - y), \quad (1.2.2)$$

и тогда уравнение (1.2.1) является гамильтоновым, если гамильтониан равен

$$H = \int_0^L (\partial_x \Psi^\dagger \partial_x \Psi + \Psi^\dagger \Psi^\dagger \Psi \Psi) dx. \quad (1.2.3)$$

Здесь и далее мы будем рассматривать квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера на интервале  $[0, L]$ . В этом случае на  $\Psi(x, t)$  обычно налагаются периодические граничные условия  $\Psi(x + L, t) = \Psi(x, t)$ , и собственные функции гамильтониана (1.2.3) оказываются нормируемыми, что позволяет корректно их определить. Такой подход также является наиболее строгим при рассмотрении термодинамического предела, в котором  $L \rightarrow \infty$  (см. лекцию 2).

Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера, как и классическое, имеет бесконечный набор интегралов движения. Например, несложно проверить, что операторы

$$Q = \int_0^L \Psi^\dagger \Psi dx \quad (\text{число частиц}), \quad (1.2.4)$$

$$P = \frac{1}{2i} \int_0^L (\Psi^\dagger \cdot \partial_x \Psi - \partial_x \Psi^\dagger \cdot \Psi) dx, \quad (\text{импульс}) \quad (1.2.5)$$

коммутируют с гамильтонианом, а следовательно, являются интегралами движения.

Эволюция по времени операторов  $\Psi(x, t)$  и  $\Psi^\dagger(x, t)$  задается стандартным образом

$$\Psi(x, t) = e^{iHt} \Psi(x, 0) e^{-iHt}, \quad \Psi^\dagger(x, t) = e^{iHt} \Psi^\dagger(x, 0) e^{-iHt}. \quad (1.2.6)$$

Легко видеть, что при этом уравнение (1.2.1) и сопряженное ему уравнение имеют гамильтонову форму

$$i\partial_t \Psi = [H, \Psi], \quad i\partial_t \Psi^\dagger = [H, \Psi^\dagger]. \quad (1.2.7)$$

Гильбертово пространство  $\mathcal{H}$ , в котором действует оператор  $\Psi(x, t)$ , имеет структуру пространства Фока. При этом вакуум (циклический вектор) характеризуется условием

$$\Psi(x, t)|0\rangle = 0. \quad (1.2.8)$$

Оператор  $\Psi^\dagger(x, t)$  действует в сопряженном пространстве, которое также имеет структуру фоковского пространства

$$\langle 0|\Psi^\dagger(x, t) = 0. \quad (1.2.9)$$

В силу перестановочных соотношений (1.2.2), можно рассматривать операторы  $\Psi(x, t)$  и  $\Psi^\dagger(x, t)$ , как операторы уничтожения и рождения соответственно. Тогда мы можем сказать, что оператор  $\Psi^\dagger(x, t)$  также действует и в пространстве  $\mathcal{H}$ .

Произвольный вектор из пространства состояний представляет собой линейную комбинацию векторов вида

$$|\omega_N\rangle = \frac{1}{N!} \int_0^L \chi_N(x_1, \dots, x_N) \Psi^\dagger(x_1) \cdots \Psi^\dagger(x_N) d^N x |0\rangle, \quad (1.2.10)$$

$$N = 0, 1, \dots$$

Здесь  $d^N x = dx_1 \dots dx_N$ , а  $\chi_N(x_1, \dots, x_N)$  – некоторые функции (числовые коэффициенты), симметричные и периодичные по всем аргументам

$$\chi_N(x_1, \dots, x_k + L, \dots, x_N) = \chi_N(x_1, \dots, x_k, \dots, x_N).$$

Физическими векторами являются собственные функции гамильтониана (1.2.3). Легко проверить, что любой вектор вида (1.2.10) является собственным вектором оператора числа частиц (1.2.4). Поскольку последний коммутирует с гамильтонианом  $H$ , у этих двух операторов должна быть общая система собственных векторов. Следовательно, мы можем искать собственные функции гамильтониана в виде (1.2.10) с произвольным, но фиксированным  $N$ :

$$H|\omega_N\rangle = E|\omega_N\rangle, \quad N = 0, 1, \dots \quad (1.2.11)$$

Подставляя явное выражение для  $H$  в условие (1.2.11), мы приходим к дифференциальному уравнению

$$-\sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \chi_N}{\partial x_k^2} + 2c \sum_{j>k}^N \delta(x_j - x_k) \cdot \chi_N = E\chi_N \quad (1.2.12)$$

Уравнение (1.2.12) по форме совпадает со стационарным уравнением Шрёдингера, описывающим систему из  $N$  частиц, находящихся на отрезке  $[0, L]$ . По этой причине модель, связанную с квантовым нелинейным уравнением Шрёдингера, называют системой одномерных бозонов или квантовым одномерным Бозе-газом. При этом потенциал взаимодействия в этом газе равен  $2c \sum_{j>k}^N \delta(x_j - x_k)$ , т.е. любые две частицы, находящиеся на конечном расстоянии друг от друга, не взаимодействуют.

### 1.3. Решение дифференциального уравнения

В этом разделе мы построим явное решение уравнения (1.2.12). В дальнейшем, для краткости и упрощения обозначений мы будем опускать индекс  $N$  у функции  $\chi_N$

$$-\sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_k^2} + 2c \sum_{j>k}^N \delta(x_j - x_k) \cdot \chi = E\chi. \quad (1.3.1)$$

В случае  $N = 1$  потенциал взаимодействия отсутствует, и решением уравнения (1.3.1) является, очевидно, плоская волна  $e^{i\lambda x}$

с  $\lambda^2 = E$ . Простейшим нетривиальным является случай  $N = 2$ , к рассмотрению которого мы и переходим.

**1.3.1. Две переменные.** При  $N = 2$  уравнение (1.3.1) имеет вид

$$-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2} + 2c\delta(x_1 - x_2) \cdot \chi = E\chi. \quad (1.3.2)$$

Мы ищем симметричные решения  $\chi(x_1, x_2) = \chi(x_2, x_1)$ . Заметим также, что если  $\chi(x_1, x_2)$  – решение, то  $\chi(-x_1, -x_2)$  или  $\chi(L - x_1, L - x_2)$  – тоже решения.

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= v, & \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}, \\ x_1 - x_2 &= u, & \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Тогда

$$-\frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + c\delta(u) \cdot \chi = \frac{E}{2} \chi \quad (1.3.4)$$

Будем искать решение в виде  $\chi(u, v) = U(u)V(v)$ . В силу исходной симметрии должно быть  $U(-u) = U(u)$ . Подставляя  $\chi(u, v) = U(u)V(v)$  в уравнение (1.3.4), получаем

$$-\frac{U''}{U} + c\delta(u) - \frac{E}{2} = \frac{V''}{V}. \quad (1.3.5)$$

Поскольку левая часть зависит только от  $u$ , а правая только от  $v$ , то равенство возможно только при условии

$$-\frac{U''}{U} + c\delta(u) - \frac{E}{2} = \frac{V''}{V} = -\mu_1^2, \quad (1.3.6)$$

где  $\mu$  – некая константа. Уравнение для  $V$  немедленно дает

$$V(v) = C_1 e^{i\mu_1 v} + C_2 e^{-i\mu_1 v}. \quad (1.3.7)$$

Для  $U$  имеем

$$U'' + \mu_2^2 U - c\delta(u)U = 0, \quad (1.3.8)$$

где  $\mu_2^2 = E/2 - \mu_1^2$ . В областях  $u < 0$  и  $u > 0$  уравнение (1.3.8) эквивалентно свободному уравнению. Поэтому

$$U(u) = \begin{cases} G_1^+ \cos(\mu_2 u) + G_2^+ \sin(\mu_2 u), & u > 0, \\ G_1^- \cos(\mu_2 u) + G_2^- \sin(\mu_2 u), & u < 0, \end{cases}$$

В точке  $u = 0$  решения должны быть сшиты непрерывным образом, но с разрывом первой производной. Интегрируя уравнение (1.3.8) по  $u$  от  $-\epsilon$  до  $\epsilon$  и устремляя  $\epsilon \rightarrow 0$ , находим

$$U'(u) \Big|_{u=-0}^{u=+0} = cU(0). \quad (1.3.9)$$

Из непрерывности  $U(u)$  в нуле следует, что  $G_1^+ = G_1^- = G_1$ . Условие (1.3.9) в свою очередь дает

$$G_2^+ = G_2^- + \frac{c}{\mu_2} G_1. \quad (1.3.10)$$

В итоге, с учетом  $U(-u) = U(u)$ , находим

$$U(u) = 2\mu_2 \cos(\mu_2 u) + c\epsilon(u) \sin(\mu_2 u), \quad (1.3.11)$$

где  $\epsilon(u)$  – знаковая функция  $\epsilon(u) = \text{sign}(u)$ . В итоге, сделав замену  $2\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ ,  $2\mu_2 = \lambda_1 - \lambda_2$  и возвращаясь к старым переменным, находим

$$\begin{aligned} \chi(x_1, x_2) = & (\lambda_{21} - ic\epsilon(x_{21}))e^{i\lambda_1 x_1 + i\lambda_2 x_2} \\ & + (\lambda_{21} + ic\epsilon(x_{21}))e^{i\lambda_2 x_1 + i\lambda_1 x_2}, \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

причем  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = E$ . В формуле (1.3.12) использованы обозначения  $\lambda_{21} = \lambda_2 - \lambda_1$ ,  $x_{21} = x_2 - x_1$ . Подобными сокращенными обозначениями мы будем постоянно пользоваться на протяжении всего курса лекций.

Еще одно решение получается заменой  $x_j \rightarrow -x_j$ .

**1.3.2.  $N$  переменных.** В общем случае мы можем сказать, что в областях, где  $x_1 \neq x_2 \neq \dots \neq x_N$ , уравнение (1.3.1) по-прежнему эквивалентно свободному уравнению, а значит, его решение дается плоской волной вида  $\exp(i \sum_{j=1}^N \lambda_j x_j)$ , причем  $\sum_{j=1}^N \lambda_j^2 = E$ . На границах этих областей, где совпадают какие-то два  $x$ , плоские волны должны быть сшиты непрерывным образом, но с разрывом первой производной. Величина разрыва определяется из следующих соображений. Выберем любые  $x_j$  и  $x_k$  из набора  $x$ . В силу симметрии уравнения (1.3.1) можно без ограничения общности считать, что  $x_j = x_1$ ,  $x_k = x_2$ . Рассмотрим область  $x_3 < \dots < x_N < \{x_1, x_2\}$ . При этом в уравнении выживает всего

одна  $\delta$ -функция  $-\delta(x_2 - x_1)$ . Сделаем замену переменных (1.3.3) и проинтегрируем по  $u$  в малой окрестности  $u = 0$ . Получим

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} \chi(v, u, \{x\}) \right|_{u=+0} - \left. \frac{\partial}{\partial u} \chi(v, u, \{x\}) \right|_{u=-0} = c\chi(v, 0, \{x\}). \quad (1.3.13)$$

Но  $\partial/\partial u$  выражается через  $\partial/\partial x_1$  и  $\partial/\partial x_2$  по формулам (1.3.3). Используя эти формулы, мы приходим к условию

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \chi(x_1, x_2, \{x\}) \Big|_{x_2=x_1-0}^{x_2=x_1+0} = 2c\chi(x_2, x_2, \{x\}). \quad (1.3.14)$$

Или же с учетом симметрии  $\chi$  относительно замены  $x_1 \rightarrow x_2$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1} - c \right) \chi(x_1, x_2, \{x\}) \Big|_{x_2=x_1+0} = 0. \quad (1.3.15)$$

В итоге мы можем полностью переформулировать задачу. Рассмотрим область  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . В этой области надо решить уравнение

$$-\sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_k^2} = E\chi \quad (1.3.16)$$

с граничным условием

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} - c \right) \chi(\{x\}) \Big|_{x_j=x_k+0} = 0, \quad j > k. \quad (1.3.17)$$

Во всех остальных областях решение восстанавливается по симметрии. Кроме того, поскольку в рассматриваемой области заведомо  $x_k < \dots < x_j$  при  $k < j$ , то достаточно рассмотреть граничное условие

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial}{\partial x_k} - c \right) \chi(\{x\}) \Big|_{x_{k+1}=x_k+0} = 0. \quad (1.3.18)$$

Будем искать решение в области  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$  в виде

$$\chi(\{x\}|\{\lambda\}) = \sum_P A(P) \exp\left(i \sum_{j=1}^N x_j \lambda_{P(j)}\right), \quad \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 = E, \quad (1.3.19)$$

где сумма берется по всем возможным перестановкам набора  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , и функция  $A(P)$  есть некоторый постоянный коэффициент, зависящий только от перестановки (но не зависящий от  $x$ ). Очевидно, что это самый общий вид для возможного решения, если мы будем помнить о возможности общей замены  $x_j \rightarrow -x_j$ .

Нам известен явный вид решения при  $N = 2$ . Приведя это решение к виду (1.3.19), мы заключаем, что коэффициент  $A(P)$  зависит от некоторых параметров  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \chi(x_1, x_2 | \lambda_1, \lambda_2) &= \sum_P (-1)^{[P]} (\lambda_{P(2)} - \lambda_{P(1)} - ic) \\ &\times \exp\left(i \sum_{j=1}^2 x_j \lambda_{P(j)}\right), \quad N = 2, \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

Здесь  $[P]$  означает четность перестановки. В общем случае, в силу того, что потенциал взаимодействия сводится к сумме двухчастичных взаимодействий, можно ожидать, что функция  $A(P)$  факторизуется на произведение “двухчастичных” функций

$$A(P) = g(P) \prod_{a>b}^N \phi(\lambda_{P(a)}, \lambda_{P(b)}), \quad (1.3.21)$$

где коэффициент  $g(P)$  уже не зависит от  $\lambda$ . В принципе, глядя на решение для случая  $N = 2$ , уже сейчас можно догадаться о явном виде коэффициента  $g(P)$  и функции  $\phi(\lambda_a, \lambda_b)$ . Мы однако просто подставим представление (1.3.19) в граничное условие (1.3.18). Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_P A(P) (\lambda_{P(k+1)} - \lambda_{P(k)} + ic) \cdot \exp\left(i \sum_{j=1}^N x_j \lambda_{P(j)}\right) \Big|_{x_{k+1}=x_k+0} &= 0, \\ &(1.3.22) \\ &k = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Пользуясь (1.3.21), выделим в функции  $\chi(\{x\}|\{\lambda\})$  явную зависимость от  $x_{k+1}$  и  $x_k$

$$\begin{aligned} \chi(\{x\}|\{\lambda\}) &= \sum_P g(P) \cdot \phi(\lambda_{P(k+1)}, \lambda_{P(k)}) \\ &\times \prod_{a>k+1} \phi(\lambda_{P(a)}, \lambda_{P(k+1)}) \phi(\lambda_{P(a)}, \lambda_{P(k)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \prod_{a < k} \phi(\lambda_{P(k+1)}, \lambda_{P(a)}) \phi(\lambda_{P(k)}, \lambda_{P(a)}) \\ & \times \exp(ix_{k+1} \lambda_{P(k+1)} + ix_k \lambda_{P(k)}) \cdot \tilde{\chi}, \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

где  $\tilde{\chi}$  уже не зависит от  $x_{k+1}$  и  $x_k$ . Подставляя это в условие (1.3.22), находим

$$\begin{aligned} & \sum_P g(P) \cdot \phi(\lambda_{P(k+1)}, \lambda_{P(k)}) (\lambda_{P(k+1)} - \lambda_{P(k)} + ic) \\ & \times \prod_{a > k+1} \phi(\lambda_{P(a)}, \lambda_{P(k+1)}) \phi(\lambda_{P(a)}, \lambda_{P(k)}) \\ & \times \prod_{a < k} \phi(\lambda_{P(k+1)}, \lambda_{P(a)}) \phi(\lambda_{P(k)}, \lambda_{P(a)}) \\ & \times \exp(ix_k (\lambda_{P(k+1)} + \lambda_{P(k)})) \cdot \tilde{\chi} = 0. \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

Мы имеем равенство вида

$$\sum_s C_s e^{ix_k h_s} = 0, \quad (1.3.25)$$

где  $C_s$  и  $h_s$  – некоторые коэффициенты, не зависящие от  $x_k$ . Поскольку функции  $e^{ix_k h_s}$  линейно независимы при различных  $h_s$ , то равенство (1.3.25) может достигаться только при условии, что все  $C_s = 0$ . В нашем случае этого возможно добиться, только если перестановки  $P$  и  $P'$  таковы, что  $\lambda_{P'(k+1)} = \lambda_{P(k)}$  и  $\lambda_{P'(k)} = \lambda_{P(k+1)}$ . Тогда получим

$$\frac{\phi(\lambda_{P(k+1)}, \lambda_{P(k)})}{\phi(\lambda_{P(k)}, \lambda_{P(k+1)})} = \frac{g(P')}{g(P)} \cdot \frac{\lambda_{P(k)} - \lambda_{P(k+1)} + ic}{\lambda_{P(k+1)} - \lambda_{P(k)} + ic}. \quad (1.3.26)$$

Поскольку функция  $\chi(\{x\}|\{\lambda\})$  в любом случае определена с точностью до нормировки, мы находим

$$\phi(\lambda_j, \lambda_k) = \lambda_j k - ic, \quad g(P) = (-1)^{|P|}. \quad (1.3.27)$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} \chi(\{x\}|\{\lambda\}) &= \sum_P (-1)^{|P|} \prod_{j > k}^N (\lambda_{P(j)} - \lambda_{P(k)} - ic) \\ & \times \exp\left(i \sum_{j=1}^N x_j \lambda_{P(j)}\right), \quad x_1 < \dots < x_N. \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Остается восстановить функцию  $\chi(\{x\}|\{\lambda\})$  во всех остальных областях, потребовав, чтобы она была симметрична по  $x$ . Сравнивая со ответом для случая  $N = 2$ , можно догадаться, что полный ответ имеет вид

$$\begin{aligned} \chi(\{x\}|\{\lambda\}) = & \sum_P (-1)^{[P]} \prod_{j>k}^N (\lambda_{P(j)} - \lambda_{P(k)} - ic\epsilon(x_{jk})) \\ & \times \exp\left(i \sum_{j=1}^N x_j \lambda_{P(j)}\right). \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

Напомним, что в соответствии с принятой системой обозначений  $x_{jk} = x_j - x_k$ . Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно проверить, что решение (1.3.29) симметрично  $x$ .

Пока мы только нашли решение дифференциального уравнения (1.3.1). Теперь необходимо потребовать выполнения условия периодичности функции  $\chi$  по каждому  $x_j$ . Полагая в (1.3.29), например,  $x_j = L$  и  $x_j = 0$  получаем

$$e^{iL\lambda_j} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\lambda_j - \lambda_k + ic}{\lambda_j - \lambda_k - ic}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.3.30)$$

Получившаяся система носит название системы уравнений Бете.

Формально система (1.3.30) допускает такие решения, в которых два или более корней совпадают. Легко видеть, например, что если все  $\lambda_j = \lambda$ ,  $j = 1, \dots, N$ , то система уравнений Бете превращается в одно уравнение, допускающее явное решение. Заметим, однако, что функция  $\chi(\{x\}|\{\lambda\})$  антисимметрична по параметрам  $\lambda$ , поэтому она обращается в нуль, если хотя бы два корня системы (1.3.30) совпадают. Следовательно, такое состояние не может быть собственным вектором. Разумеется, мы можем разделить функцию  $\chi(\{x\}|\{\lambda\})$ , скажем, на произведение  $\prod_{j>k}^N (\lambda_j - \lambda_k)$  и сделать ее симметричной по параметрам  $\lambda$ . Однако в этом случае при совпадающих  $\lambda$  мы не сможем наложить на получившуюся функцию  $\chi$  периодическое граничное условие.<sup>3</sup> Мы приходим к выводу, что собственные функции гамильтониана даются только такими решениями системы уравнений Бете, в которых все корни попарно различны.

<sup>3</sup>Мы предлагаем читателю самостоятельно проверить это утверждение, например, для случая  $N = 2$ .

Такое свойство собственных функций носит название принципа Паули для одномерных бозонов. Подобная терминология, на первый взгляд, может вызвать удивление, поскольку мы привыкли к тому, что принцип Паули выполняется для фермионных систем. Не следует забывать, однако, что мы имеем дело с  $(1+1)$ -мерной системой, для которой не существует теоремы о связи спина и статистики. Поэтому частицы, существующие в одном пространственном измерении, обладают, как правило, и бозонными, и фермионными свойствами. В частности, в следующей лекции мы увидим, что основным состоянием системы одномерных бозонов является зона Ферми, что является прямым следствием принципа Паули.

Таким образом, мы доказали, что собственные функции гамильтониана  $H$  (1.2.3) имеют вид (1.2.10), где функции  $\chi(\{x\}) = \chi(\{x\}|\{\lambda\})$  даются формулой (1.3.29), а параметры  $\{\lambda\}$  являются попарно несовпадающими корнями системы уравнений Бете (1.3.30). При этом собственные значения равны

$$E = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2. \quad (1.3.31)$$

Несложно проверить, что собственные значения операторов числа частиц и импульса (1.2.4), (1.2.5) на состоянии  $|\omega_N\rangle$  с функцией (1.3.29) равны

$$Q|\omega_N\rangle = N|\omega_N\rangle, \quad (1.3.32)$$

$$P|\omega_N\rangle = p|\omega_N\rangle, \quad p = \sum_{j=1}^N \lambda_j. \quad (1.3.33)$$

По этой причине параметры  $\lambda_j$  часто называют импульсами частиц.

## 1.4. Полнота системы собственных функций

Нам остается доказать, что построенная система собственных функций гамильтониана полна. К сожалению, в рамках рассматриваемого метода такое доказательство до сих пор отсутствует. Если быть более точным, то отсутствует доказательство формулы для нормы собственной функции. Тем не менее в 1972 г. М. Годен

выдвинул гипотезу о явном виде такой формулы (см. например, [3]). Позднее эта гипотеза была доказана, но в рамках другого подхода, а именно, с помощью квантового метода обратной задачи [4]–[6]. В этом курсе мы совершенно не затрагиваем этот метод, поэтому приведем формулу для нормы собственной функции без доказательства.

Прежде всего перепишем систему (1.3.30) в логарифмическом виде

$$\Phi_j \equiv L\lambda_j + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi I_j, \quad (1.4.1)$$

где

$$\theta(\lambda) = i \log \left( \frac{ic + \lambda}{ic - \lambda} \right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{c}, \quad (1.4.2)$$

а  $I_j$  – набор целых или полуцелых (в зависимости от четности  $N$ ) чисел.

Гипотеза Годена состоит в том, что квадрат нормы функции  $\chi$  дается следующим выражением

$$\mathcal{N}^2(\{\lambda\}) = \int_0^L |\chi(\{x\}|\{\lambda\})|^2 d^N x = \prod_{j>k}^N ((\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2) \cdot \det \frac{\partial \Phi_j}{\partial \lambda_k}. \quad (1.4.3)$$

Явное выражение для якобиана в (1.4.3) имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial \lambda_k} = \delta_{jk} \left( L + \sum_{a=1}^N K(\lambda_j - \lambda_a) \right) - K(\lambda_j - \lambda_k), \quad (1.4.4)$$

где

$$K(\lambda) = \theta'(\lambda) = \frac{2c}{\lambda^2 + c^2}. \quad (1.4.5)$$

Формулы (1.4.3), (1.4.4) несложно проверить при малых  $N$ , например,  $N = 2, 3$ . В справедливости этих формул также можно убедиться в пределе бесконечной константы связи  $c \rightarrow \infty$  (см. лекцию 4).

Идею доказательства полноты системы построенных собственных функций можно проиллюстрировать на случае  $N = 2$ . При этом мы рассмотрим случай положительной константы связи. С доказательством полноты в случае  $c < 0$  читатель может ознакомиться в статье [7].

Мы должны доказать, что для любых двух симметричных, непрерывных на  $[0, L]$  функций  $f(x_1, x_2)$  и  $g(x_1, x_2)$  имеет место

$$\begin{aligned} & \int_0^L d^2x \int_0^L d^2y \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \frac{\chi(x_1, x_2 | \lambda_1, \lambda_2) \bar{\chi}(y_1, y_2 | \lambda_1, \lambda_2)}{\mathcal{N}^2(\lambda_1, \lambda_2)} f(x_1, x_2) g(y_1, y_2) \\ &= \int_0^L d^2x \cdot f(x_1, x_2) g(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Рассмотрим сумму вида

$$S = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \frac{F(\lambda_1, \lambda_2)}{\mathcal{N}^2(\lambda_1, \lambda_2)}, \quad (1.4.7)$$

где  $F(\lambda_1, \lambda_2)$  – некоторая симметричная функция. Фактически, суммирование здесь ведется не по  $\lambda_j$ , а по полуцелым числам  $I_j$  из уравнения (1.4.1). Действительно, всякая пара  $\{I_1, I_2\}$  определяет решение  $\lambda_1(I_1, I_2)$  и  $\lambda_2(I_1, I_2)$ . Таким образом, более правильно будет написать

$$S = \sum_{I_1, I_2 = -\infty}^{\infty} \frac{F(\lambda_1(I_1, I_2), \lambda_2(I_1, I_2))}{\mathcal{N}^2(\lambda_1(I_1, I_2), \lambda_2(I_1, I_2))}. \quad (1.4.8)$$

Тем не менее для краткости мы будем в дальнейшем писать  $\lambda_j$  вместо  $\lambda_j(I_1, I_2)$ .

С учетом (1.4.3), имеем

$$S = \sum_{I_1, I_2 = -\infty}^{\infty} \frac{F(\lambda_1, \lambda_2)}{2(\lambda_2 - \lambda_1 - ic)(\lambda_2 - \lambda_1 + ic) \cdot \det_N(\partial\Phi_j/\partial\lambda_k)}. \quad (1.4.9)$$

Пусть  $I_j = n_j + 1/2$ , где  $n_j$  – целые числа. Тогда (1.4.9) можно переписать в виде

$$S = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\lambda \cdot \frac{F(\lambda_1, \lambda_2) \delta(\Phi_1 - 2\pi n_1 - \pi) \delta(\Phi_2 - 2\pi n_2 - \pi)}{2(\lambda_2 - \lambda_1 - ic)(\lambda_2 - \lambda_1 + ic)}. \quad (1.4.10)$$

Действительно, буквально вычисляя интеграл в (1.4.10), мы получаем (1.4.9). При этом мы учитываем то, что матрица  $\partial\Phi_j/\partial\lambda_k$  положительно определена (см. раздел 2.1). Воспользовавшись теперь тождеством

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inz} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(z - 2\pi n), \quad (1.4.11)$$

мы приходим к

$$S = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\lambda}{4\pi^2} \cdot \frac{F(\lambda_1, \lambda_2) e^{iL(\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2)}}{2(\lambda_2 - \lambda_1 - ic)(\lambda_2 - \lambda_1 + ic)} \times \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - ic}{\lambda_2 - \lambda_1 + ic} \right)^{n_2 - n_1}. \quad (1.4.12)$$

Теперь нам нужно подставить в (1.4.12) в качестве функции  $F(\lambda_1, \lambda_2)$  произведение функций  $\chi(x_1, x_2 | \lambda_1, \lambda_2) \bar{\chi}(y_1, y_2 | \lambda_1, \lambda_2)$ . Следует учесть только, что фактически в формуле (1.4.6) нам следует суммировать только по  $\lambda_2 > \lambda_1$ , иными словами по  $n_2 > n_1$ . Действительно, замена  $n_2 \rightarrow n_1$  равносильна замене  $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$ , т.е. мы получаем тот же самый вектор состояния. Тем не менее, мы вполне можем суммировать по каждому  $n_j$  независимо, добавив в сумму множитель  $1/2$ . Случай  $n_1 = n_2$  исключается автоматически, так как при этом функция  $\chi$  обращается в нуль.

Переписав формулу (1.3.12) в виде

$$\chi(x_1, x_2) = \sum_P (\lambda_{21} - ic\epsilon(x_{P(2)} - x_{P(1)})) e^{i\lambda_1 x_{P(1)} + i\lambda_2 x_{P(2)}}, \quad (1.4.13)$$

мы получим

$$\begin{aligned} S(\{x\}, \{y\}) &= \frac{1}{4} \sum_{P, Q} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\lambda}{4\pi^2} \\ &\times \frac{(\lambda_{21} - ic\epsilon(x_{P(2)} - x_{P(1)}))(\lambda_{21} + ic\epsilon(y_{Q(2)} - y_{Q(1)}))}{(\lambda_{21} - ic)(\lambda_{21} + ic)} \\ &\times e^{i\lambda_1(Ln_1 + x_{P(1)} - y_{Q(1)}) + i\lambda_2(Ln_2 + x_{P(2)} - y_{Q(2)})} \left( \frac{\lambda_{21} - ic}{\lambda_{21} + ic} \right)^{n_2 - n_1}. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Так как в конечном итоге функцию  $S(\{x\}, \{y\})$  нужно будет подставить в интеграл и проинтегрировать по  $x_j$  и  $y_j$  вместе с функциями  $f(x_1, x_2)$  и  $g(y_1, y_2)$ , которые симметричны по своим аргументам, мы можем снять в (1.4.14) суммирование по перестанов-

кам  $P$  и  $Q$ , умножив правую часть на 4

$$S(\{x\}, \{y\}) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \lambda}{4\pi^2} \cdot \frac{(\lambda_{21} - ic\epsilon(x_{21}))(\lambda_{21} + ic\epsilon(y_{21}))}{(\lambda_{21} - ic)(\lambda_{21} + ic)} \\ \times e^{i\lambda_1(Ln_1 + x_1 - y_1) + i\lambda_2(Ln_2 + x_2 - y_2)} \left( \frac{\lambda_{21} - ic}{\lambda_{21} + ic} \right)^{n_{21}}. \quad (1.4.15)$$

Легко проверить, что

$$\frac{(\lambda_{21} - ic\epsilon(x_{21}))(\lambda_{21} + ic\epsilon(y_{21}))}{(\lambda_{21} - ic)(\lambda_{21} + ic)} = \left( \frac{\lambda_{21} - ic}{\lambda_{21} + ic} \right)^{\Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21})}, \quad (1.4.16)$$

где  $\Theta(x)$  – функция Хэвисайда. Тогда

$$S(\{x\}, \{y\}) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \lambda}{4\pi^2} \cdot e^{i\lambda_1(Ln_1 + x_1 - y_1) + i\lambda_2(Ln_2 + x_2 - y_2)} \\ \times \left( \frac{\lambda_{21} - ic}{\lambda_{21} + ic} \right)^{n_{21} + \Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21})}. \quad (1.4.17)$$

Вычитая и прибавляя 1 в правой части (1.4.17), мы приходим к

$$S(\{x\}, \{y\}) = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \delta(Ln_1 + x_1 - y_1) \delta(Ln_2 + x_2 - y_2) + S_1, \quad (1.4.18)$$

где

$$S_1 = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \lambda}{4\pi^2} \cdot e^{i\lambda_1(Ln_1 + x_1 - y_1) + i\lambda_2(Ln_2 + x_2 - y_2)} \\ \times \left[ \left( \frac{\lambda_{21} - ic}{\lambda_{21} + ic} \right)^{n_{21} + \Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21})} - 1 \right]. \quad (1.4.19)$$

Поскольку  $0 < x_j < L$  и  $0 < y_j < L$ , то  $-L < x_j - y_j < L$ . Следовательно, в формуле (1.4.18) остается лишь одно слагаемое с  $n_1 = n_2 = 0$

$$S(\{x\}, \{y\}) = \delta(x_1 - y_1) \delta(x_2 - y_2) + S_1. \quad (1.4.20)$$

Остается доказать, что  $S_1 = 0$ . Сделаем в интеграле (1.4.19) замену переменных  $\lambda_{21} = \mu$ ,  $\lambda_1 = \lambda$ . Тогда интеграл по  $\lambda$  дает  $\delta$ -функцию, и мы получаем

$$S_1 = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \delta(Ln_1 + Ln_2 + x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{2\pi} \cdot e^{i\mu(Ln_2 + x_2 - y_2)} \left[ \left( \frac{\mu - ic}{\mu + ic} \right)^{n_{21} + \Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21})} - 1 \right]. \quad (1.4.21)$$

Интеграл может быть отличен от нуля либо в случае

$$n_{21} + \Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21}) > 0,$$

либо при

$$n_{21} + \Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21}) < 0.$$

Рассмотрим первый случай.

Если  $n_{21} + \Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21}) > 0$ , то полюс подынтегрального выражения лежит в нижней полуплоскости. В этом случае интеграл будет отличен от нуля только если  $Ln_2 + x_2 - y_2 < 0$ . В противном случае мы можем замкнуть контур интегрирования в верхней полуплоскости и получим 0. Поскольку аргумент  $\delta$ -функции должен быть равен нулю, мы заключаем, что  $Ln_1 + x_1 - y_1 > 0$ . Итак, мы получаем систему неравенств

$$\begin{aligned} n_{21} + \Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21}) &> 0, \\ Ln_2 + x_2 - y_2 &< 0, \\ -Ln_1 - x_1 + y_1 &< 0. \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

Складывая два последних неравенства, получаем

$$\begin{aligned} n_{21} + \Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21}) &> 0, \\ Ln_{21} + x_{21} - y_{21} &< 0. \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

Очевидно, что первое из неравенств (1.4.23) выполняется только при  $n_{21} \geq 0$ . С другой стороны, второе из этих неравенств заведомо не может быть выполнено при  $n_{21} \geq 2$ , так как  $-L < x_{21} < L$  и  $-L < y_{21} < L$ . У нас остаются два случая  $n_{21} = 1$  и  $n_{21} = 0$ . Пусть  $n_{21} = 1$ . Тогда снова возможны два случая:  $x_{21} > 0$ ,  $y_{21} -$

любое;  $x_{21} < 0$ ,  $y_{21} < 0$ . В первом случае  $Ln_{21} + x_{21} > L$ , а следовательно,  $Ln_{21} + x_{21} - y_{21} > 0$ , и мы приходим к противоречию. Во втором случае  $Ln_{21} - y_{21} > L$ , и мы опять получаем  $Ln_{21} + x_{21} - y_{21} > 0$ . Таким образом, у нас остается единственная возможность  $n_{21} = 0$ . Легко видеть, что и в этом случае неравенства (1.4.23) нельзя удовлетворить. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21}) &> 0, \\ x_{21} - y_{21} &< 0. \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

Первое из этих неравенств имеет место только при  $x_{21} > 0$  и  $y_{21} < 0$ , что очевидно противоречит второму неравенству. Таким образом, во всех рассмотренных случаях интеграл  $S_1$  оказывается равным нулю.

Аналогично рассматривается случай  $n_{21} + \Theta(x_{21}) - \Theta(y_{21}) < 0$ . В результате мы имеем

$$S(\{x\}, \{y\}) = \delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2), \tag{1.4.25}$$

что и требовалось доказать.

При произвольном  $N$  доказательство вполне аналогично случаю  $N = 2$ . Сначала мы можем перейти от суммирования по корням системы уравнений Бете к суммированию по целым числам и получить  $N$ -мерный аналог формулы (1.4.10). Далее, действуя точно так же, как и при  $N = 2$ , можно получить интегральное представление, аналогичное представлению (1.4.17). После этого остается доказать, что полученный интеграл отличен от нуля только при  $n_1 = \dots = n_N = 0$  и в этом случае он равен произведению  $\delta$ -функций. Доказательство сводится к анализу системы неравенств, аналогичной системе (1.4.22).

В заключение отметим, что вопросы, затронутые в этой лекции, рассматриваются также в работах [1]–[3], [5], [7], [8].

## Лекция 2. Основное состояние системы одномерных бозонов

### 2.1. Свойства решений системы уравнений Бете

В этой лекции мы изучим свойства системы одномерных бозонов, которые вытекают из уравнений Бете (1.3.30).

**ТЕОРЕМА 2.1.1.** *При  $c > 0$  все корни системы (1.3.30) вещественны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\lambda_{\max}$  – корень системы (1.3.30), имеющий максимальную мнимую часть. Запишем уравнение, соответствующее этому корню и возьмем модуль от обеих частей

$$|e^{iL\lambda_{\max}}| = \prod_{k=1}^N \left| \frac{\lambda_{\max} - \lambda_k + ic}{\lambda_{\max} - \lambda_k - ic} \right|. \quad (2.1.1)$$

Очевидно, что правая часть этого равенств больше или равна 1. Но тогда, глядя на левую часть уравнения (2.1.1), мы заключаем, что  $\Im(\lambda_{\max}) \leq 0$ . Совершенно аналогично доказывается, что  $\Im(\lambda_{\min}) \geq 0$ , где  $\lambda_{\min}$  – корень системы (1.3.30), имеющий минимальную мнимую часть. Отсюда и следует утверждение теоремы.

При отрицательной константе связи возможно появление мнимых корней. На сегодняшний день этот случай изучен еще недостаточно хорошо, поэтому ниже мы будем рассматривать только случай  $c > 0$ , т.е. одномерный Бозе-газ с отталкиванием.

Напомним теперь систему уравнений Бете в логарифмической форме (1.4.1):

$$\Phi_j \equiv L\lambda_j + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi I_j, \quad (2.1.2)$$

где

$$\theta(\lambda) = i \log \left( \frac{ic + \lambda}{ic - \lambda} \right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{c}, \quad (2.1.3)$$

а  $I_j$  – набор целых или полуцелых (в зависимости от четности  $N$ ) чисел. Заметим, что  $\theta(\lambda)$  монотонно возрастающая функция:  $\theta(\lambda_2) > \theta(\lambda_1)$  при  $\lambda_2 > \lambda_1$ .

**ТЕОРЕМА 2.1.2.** *При фиксированных целых (полуцелых)  $I_j$  система (2.1.2) имеет единственное решение.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим функционал

$$S = \frac{L}{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 - 2\pi \sum_{j=1}^N I_j \lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \theta_1(\lambda_{jk}), \quad (2.1.4)$$

$$\theta_1(\lambda) = \int_0^\lambda \theta(\mu) d\mu. \quad (2.1.5)$$

Докажем, что функционал имеет единственный экстремум, и этот экстремум – минимум.

Очевидно, что условие экстремума  $\partial S / \partial \lambda_j = 0$  совпадает с системой (2.1.2). Рассмотрим матрицу вторых производных

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = \delta_{jk} \left( L + \sum_{a=1}^N K(\lambda_j - \lambda_a) \right) - K(\lambda_j - \lambda_k), \quad (2.1.6)$$

где

$$K(\lambda) = \theta'(\lambda) = \frac{2c}{\lambda^2 + c^2}. \quad (2.1.7)$$

Пусть  $v_j$  – набор вещественных чисел. Тогда для квадратичной формы имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k}^N \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} v_j v_k \\ &= L \sum_{j=1}^N v_j^2 + \sum_{j>k}^N K(\lambda_j - \lambda_k) (v_j - v_k)^2 \geq L \sum_{j=1}^N v_j^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Таким образом, квадратичная форма (2.1.8) положительно определена, следовательно функционал  $S$  выпуклый, т.е. он имеет единственный минимум.

Получим теперь некоторые оценки для корней системы (2.1.2).

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.1.** *Если  $I_j > I_k$ , то  $\lambda_j > \lambda_k$ , если  $I_j = I_k$ , то  $\lambda_j = \lambda_k$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычитая из уравнения с номером  $j$  уравнение с номером  $k$ , получим

$$L(\lambda_j - \lambda_k) + \sum_{l=1}^N (\theta(\lambda_j - \lambda_l) - \theta(\lambda_k - \lambda_l)) = 2\pi(I_j - I_k). \quad (2.1.9)$$

Так как  $\theta(\lambda)$  монотонно возрастает, то вся левая часть имеет тот же знак, что и первое слагаемое.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.2. При  $j > k$  имеют место следующие оценки:

$$\frac{2\pi(I_j - I_k)}{L} \geq (\lambda_j - \lambda_k) \geq \frac{2\pi(I_j - I_k)}{L(1 + 2D/c)}, \quad (2.1.10)$$

где  $D = N/L$  – средняя плотность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (2.1.9) уже следует

$$(\lambda_j - \lambda_k) \leq \frac{2\pi(I_j - I_k)}{L}. \quad (2.1.11)$$

Для доказательства второго неравенства заметим, что для функции  $K(\lambda)$ , определенной в (2.1.7), при вещественном  $\lambda$  справедлива оценка

$$0 < K(\lambda) \leq \frac{2}{c}. \quad (2.1.12)$$

Тогда при  $j > k$

$$\theta(\lambda_j - \lambda_l) - \theta(\lambda_k - \lambda_l) = \int_{\lambda_k}^{\lambda_j} K(\mu - \lambda_l) d\mu \leq \frac{2}{c}(\lambda_j - \lambda_k). \quad (2.1.13)$$

Подставляя эту оценку в условие (2.1.9), получаем

$$\begin{aligned} \frac{2\pi(I_j - I_k)}{L} &= (\lambda_j - \lambda_k) + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^N (\theta(\lambda_j - \lambda_l) - \theta(\lambda_k - \lambda_l)) \\ &\leq (\lambda_j - \lambda_k) \left(1 + 2 \frac{D}{c}\right), \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

что и требовалось доказать.

## 2.2. Основное состояние в термодинамическом пределе

Пусть мы имеем состояние с фиксированным числом частиц  $N$ . Напомним, что собственные значения энергии равны

$$E = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2. \quad (2.2.1)$$

С другой стороны при бесконечной константе связи выполнено  $\theta(\lambda) = 0$ , и система уравнений Бете становится тривиальной

$$L\lambda_j = 2\pi I_j. \quad (2.2.2)$$

Следовательно,

$$E = \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{j=1}^N I_j^2. \quad (2.2.3)$$

Напомним, что в силу принципа Паули все корни системы (2.2.2) должны быть попарно различны (см. лекцию 1). Следовательно, и все целые (полуцелые) числа  $I_j$  попарно различны. Очевидно, что при таких условиях минимум энергии достигается, если  $I_j$  расположены симметрично вокруг нуля, причем  $I_{j+1} - I_j = 1$ , т.е.

$$I_j = j - \frac{N+1}{2}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.2.4)$$

В случае конечного  $s$  представляется вполне разумным предположить, что минимум энергии достигается при таком же выборе чисел  $I_j$ . Мы не можем доказать это строго при конечном  $N$ , однако мы докажем, что это действительно так в термодинамическом пределе, когда  $N, L \rightarrow \infty$  при фиксированной средней плотности  $N/L = D = \text{const}$ . Тем самым мы построим основное состояние гамильтониана в термодинамическом пределе.<sup>1</sup>

Итак, рассмотрим состояние, которое задается числами (2.2.4). Чтобы отличать это состояние от других, в этом случае будем обозначать  $I_j = n_j$ . В силу оценок (2.1.10) имеем  $\lambda_N - \lambda_1 \leq 2\pi(N-1)/L$ . Будем считать, что в термодинамическом пределе параметры  $\lambda_j$  находятся на некотором интервале  $[-q, q]$ , где

<sup>1</sup>Напомним, что состояние называется основным, если соответствующее значение энергии минимально.

$q = \lim \lambda_N$ . В дальнейшем мы будем называть этот интервал зоной Ферми. Введем функцию

$$\rho(\lambda_j) = \frac{1}{L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)}, \quad (2.2.5)$$

и вычтем из уравнения с номером  $j + 1$  уравнение с номером  $j$ . Имеем

$$\frac{1}{\rho(\lambda_j)} + \sum_{k=1}^N (\theta(\lambda_{j+1} - \lambda_k) - \theta(\lambda_j - \lambda_k)) = 2\pi. \quad (2.2.6)$$

Пусть  $N, L \rightarrow \infty$  при  $N/L = D = \text{const}$ . Из оценок (2.1.10) следует, что в этом случае  $\lambda_{j+1} - \lambda_j \sim 1/L$ , а значит, мы можем заменить конечные разности на производные

$$\frac{1}{\rho(\lambda_j)} + (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \sum_{k=1}^N K(\lambda_j - \lambda_k) = 2\pi. \quad (2.2.7)$$

Перепишем формулу (2.2.7) в виде

$$\frac{1}{\rho(\lambda_j)} + \frac{1}{\rho(\lambda_j)} \sum_{k=1}^N K(\lambda_j - \lambda_k) \rho(\lambda_k) (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = 2\pi. \quad (2.2.8)$$

Сумма в формуле (2.2.8) имеет вид интегральной суммы. В пределе она переходит в интеграл, и мы получаем интегральное уравнение на функцию  $\rho(\lambda)$

$$2\pi\rho(\lambda) = 1 + \int_{-q}^q K(\lambda - \mu)\rho(\mu) d\mu. \quad (2.2.9)$$

Очевидно, что функция  $\rho(\lambda)$  имеет смысл плотности распределения основного состояния, нормированной на среднюю плотность  $D$ . Действительно, рассмотрим среднее по основному состоянию некоторой функции  $f$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\lambda_k) = \frac{L}{N} \sum_{k=1}^N f(\lambda_k) \rho(\lambda_k) (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \rightarrow \frac{1}{D} \int_{-q}^q f(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \quad (2.2.10)$$

поэтому естественно называть функцию  $\rho(\lambda)$  плотностью распределения. В частности, имеем

$$D = \int_{-q}^q \rho(\lambda) d\lambda. \quad (2.2.11)$$

При фиксированном  $D$  уравнения (2.2.9) и (2.2.11) однозначно фиксируют  $\rho(\lambda)$  и  $q$ , что будет показано ниже.

Приведем другой вывод уравнения (2.2.9), который попутно позволит нам ввести понятия вакансий, частицы и дырки. Пусть мы нашли некоторое решение  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  системы (2.1.2) при заданных  $I_j$ . По этому решению построим функцию  $\lambda(x)$ , которая при вещественном  $x$  является решением уравнения

$$L\lambda(x) + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda(x) - \lambda_k) = 2\pi Lx. \quad (2.2.12)$$

Полностью аналогично функционалу (2.1.4) мы можем рассмотреть функционал  $S$

$$S = \frac{L}{2} \lambda^2(x) - 2\pi Lx\lambda(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \theta_1(\lambda(x) - \lambda_k), \quad (2.2.13)$$

и доказать, что уравнение (2.2.12) имеет единственное решение, причем  $\lambda(x)$  есть монотонно возрастающая функция  $x$ . Следовательно, существует и обратная функция  $x(\lambda)$ .

Если некоторое целое (полуцелое)  $m \in \{I_j\}$ , то  $\lambda(m/L) = \lambda_m$ . Мы будем говорить, что число  $m$  определяет частицу, которая присутствует в рассматриваемом состоянии. При этом импульс этой частицы равен  $\lambda_m$ . Напротив, если  $m \notin \{I_j\}$ , мы будем говорить, что  $m$  определяет дырку в рассматриваемом состоянии с импульсом  $\lambda(m/L)$ . Все вместе – дырки и частицы, – будем называть вакансиями.

Очевидно, что в термодинамическом пределе функция  $x(\lambda)$  имеет смысл функции распределения вакансий, нормированной на среднюю плотность, так как  $L(x(\lambda) - x(\mu))$  есть число вакансий в интервале  $[\mu, \lambda]$ . Поэтому  $dx(\lambda)/d\lambda = \rho_t(\lambda)$  является плотностью вакансий. Мы можем также ввести плотности распределения частиц и дырок

$$\begin{aligned} L\rho_p(\lambda)d\lambda &- \text{число частиц в интервале } [\lambda, \lambda + d\lambda], \\ L\rho_h(\lambda)d\lambda &- \text{число дырок в интервале } [\lambda, \lambda + d\lambda]. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

При этом

$$\rho_t(\lambda) = \rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda). \quad (2.2.15)$$

Дифференцируя уравнение (2.2.12) по  $x$ , находим

$$1 + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^N K(\lambda(x) - \lambda_k) = 2\pi \rho_t(\lambda(x)). \quad (2.2.16)$$

Заменяя в пределе сумму на интеграл, получаем

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \rho_p(\mu) d\mu = 2\pi \rho_t(\lambda). \quad (2.2.17)$$

Данное уравнение справедливо для любого состояния, в котором при переходе к термодинамическому пределу квантовые числа  $I_j$  можно описать некоторой плотностью распределения  $\rho_p(\lambda)$ . В частном случае, когда числа  $I_j$  заданы формулой (2.2.4), мы получаем, что внутри зоны Ферми (т.е. на интервале  $[-q, q]$ ) плотности вакансий и частиц совпадают  $\rho_t(\lambda) = \rho_p(\lambda) = \rho(\lambda)$ , а вне зоны Ферми плотность частиц равна нулю. Мы приходим к уравнению (2.2.9).

### 2.3. Свойства интегрального оператора

Рассмотрим интегральный оператор

$$\mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \quad (2.3.1)$$

который действует на функции следующим образом

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\lambda, \mu)} \circ f(\mu) &= f(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda - \mu) f(\mu) d\mu, \\ f(\lambda) \circ \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\lambda, \mu)} &= f(\mu) - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda - \mu) f(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Поясним обозначения, использованные в формулах (2.3.2). Интегральные операторы обозначены жирным шрифтом, а их действие на функции обозначаются символом  $\circ$ . Аргументы ядра интегрального оператора записаны в качестве индексов. В тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, мы будем эти индексы опускать.

В этих обозначениях уравнение (2.2.9) на плотность можно записать в виде

$$\left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\lambda, \mu)} \circ \rho(\mu) = \frac{1}{2\pi}. \quad (2.3.3)$$

Изучим свойства этого интегрального оператора. Для этого перейдем к термодинамическому пределу в неравенстве (2.1.8)

$$\sum_{j,k}^N \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} v_j v_k \geq L \sum_{j=1}^N v_j^2 > 0. \quad (2.3.4)$$

Пусть  $v_j = v(\lambda_j)/\sqrt{2\pi\rho(\lambda_j)}$ , где  $v(\lambda)$  – некоторая вещественная функция. Тогда, поделив неравенство (2.3.4) на  $L^2$ , в термодинамическом пределе получим

$$\lim \frac{1}{L^2} \sum_{j,k}^N \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} \frac{v(\lambda_j)v(\lambda_k)}{2\pi\rho(\lambda_j)\rho(\lambda_k)} \geq \int_{-q}^q \frac{v^2(\lambda)}{2\pi\rho(\lambda)} d\lambda > 0. \quad (2.3.5)$$

Вычислим термодинамический предел левой части (2.3.5). В силу (2.2.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} &= \delta_{jk} \left( 1 + \frac{1}{L} \sum_{a=1}^N K(\lambda_j - \lambda_a) \right) - \frac{1}{L} K(\lambda_j - \lambda_k) \\ &\rightarrow \delta_{jk} \left( 1 + \int_{-q}^q K(\lambda_j - \mu) \rho(\mu) d\mu \right) - \frac{1}{L} K(\lambda_j - \lambda_k) \\ &= 2\pi\rho(\lambda_k) \left( \delta_{jk} - \frac{K(\lambda_j - \lambda_k)}{2\pi L \rho(\lambda_k)} \right). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Отсюда находим

$$\lim \frac{1}{L^2} \sum_{j,k}^N \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} \frac{v(\lambda_j)v(\lambda_k)}{2\pi\rho(\lambda_j)\rho(\lambda_k)} = v(\lambda) \circ \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\lambda,\mu)} \circ v(\mu). \quad (2.3.7)$$

Сравнивая с (2.3.5) получаем следующую оценку

$$v(\lambda) \circ \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\lambda,\mu)} \circ v(\mu) \geq \int_{-q}^q \frac{v^2(\lambda)}{2\pi\rho(\lambda)} d\lambda > 0. \quad (2.3.8)$$

Из неравенств (2.1.10) и определения  $\rho(\lambda)$  (2.2.5) немедленно следуют следующие оценки

$$\frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \frac{D}{c} \right) \geq \rho_{\max} \geq \rho(\lambda) \geq \frac{1}{2\pi}, \quad (2.3.9)$$

где через  $\rho_{\max}$  обозначено максимальное значение функции  $\rho(\lambda)$  на интервале  $[-q, q]$ . Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.1.** *Интегральный оператор  $\mathbf{I} - (1/2\pi)\mathbf{K}$  является невырожденным. Он положительно определен, причем для собственных значений  $\widehat{K}$  оператора  $\mathbf{K}$  имеет место оценка*

$$0 < \frac{1}{2\pi} \widehat{K} \leq \frac{2D}{2D + c} < 1. \quad (2.3.10)$$

Отметим ряд простых, но важных следствий.

**СЛЕДСТВИЕ 2.3.1.** *Оператор  $\mathbf{I} - (1/2\pi)\mathbf{K}$  обратим. При этом для обратного оператора*

$$(\mathbf{I} + \mathbf{R})_{(\lambda, \nu)} \circ \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\nu, \mu)} = \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\lambda, \nu)} \circ (\mathbf{I} + \mathbf{R})_{(\nu, \mu)} = \mathbf{I} \quad (2.3.11)$$

*справедливо представление в виде абсолютно сходящегося ряда*

$$\mathbf{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)^n. \quad (2.3.12)$$

**СЛЕДСТВИЕ 2.3.2.** *Если функция  $g(\lambda)$  четна (нечетна), то функция  $f(\lambda)$ , являющаяся решением уравнения*

$$\left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\lambda, \mu)} \circ f(\mu) = g(\lambda), \quad (2.3.13)$$

*также четна (нечетна).*

Для доказательства достаточно заметить, что  $K(\lambda) = K(-\lambda)$ .

## 2.4. Детерминант Фредгольма

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о норме основного состояния в термодинамическом пределе. В связи с этим нам потребуется ввести понятие детерминанта Фредгольма, которое будет играть очень важную роль при вычислении корреляционных функций.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4.1.** *Детерминантом Фредгольма интегрального оператора  $\mathbf{I} + \mathbf{V}$ , действующего на контуре  $\Gamma$ , называется ряд*

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Gamma} \det_n [V(\lambda_j, \lambda_k)] d^n \lambda \quad (2.4.1)$$

Здесь в правой части мы имеем детерминанты  $n \times n$  матриц, чьи элементы равны  $V(\lambda_j, \lambda_k)$ .

Поясним данное определение. Пусть мы имеем набор чисел  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ , принадлежащих контуру  $\Gamma$ . Для простоты будем считать  $\Gamma$  отрезком вещественной оси  $[a, b]$ , и  $\lambda_{j+1} - \lambda_j = \Delta$ . Рассмотрим  $N \times N$  матрицу  $\delta_{jk} + \Delta V(\lambda_j, \lambda_k)$ , где  $V(\lambda, \mu)$  – некоторая суммируемая с квадратом функция двух переменных, взятая в точках  $\lambda = \lambda_j$  и  $\mu = \lambda_k$ . Нас будет интересовать предел, при котором  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $\lambda_1 \rightarrow a$ ,  $\lambda_N \rightarrow b$ . Очевидно, что в таком пределе действие матрицы на векторы переходит в действие интегрального оператора на функции

$$\sum_{k=1}^N (\delta_{jk} + \Delta V(\lambda_j, \lambda_k)) f(\lambda_k) \rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda_j, \mu)} \circ f(\mu). \quad (2.4.2)$$

Иными словами мы можем сказать, что матрица переходит в интегральный оператор действующий на отрезке  $[a, b]$ . Естественно тогда говорить, что ее детерминант переходит в детерминант интегрального оператора. Раскладывая  $\det_N(\delta_{jk} + \Delta V(\lambda_j, \lambda_k))$  в степенной ряд по  $\Delta$ , мы получаем

$$\det_N(\delta_{jk} + \Delta V(\lambda_j, \lambda_k)) = \sum_{n=0}^N \frac{\Delta^n}{n!} \sum_{\mu_1 \in \Lambda, \dots, \mu_n \in \Lambda} \det_n[V(\mu_j, \mu_k)]. \quad (2.4.3)$$

В интересующем нас пределе суммы по переменным  $\mu_1, \dots, \mu_n$  переходят в интегралы по отрезку  $[a, b]$ , и мы приходим к определению (2.4.1).

Часто в качестве определения фредгольмова детерминанта используют другую формулу

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) = \exp[\text{Tr} \log(\mathbf{I} + \mathbf{V})], \quad (2.4.4)$$

где символом  $\text{Tr}$  обозначен след интегрального оператора. При этом логарифм интегрального оператора, как правило, понимается в смысле ряда

$$\begin{aligned} & \log(\mathbf{I} + \mathbf{V}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_a^b V(\lambda, \lambda_1) V(\lambda_1, \lambda_2) \cdots V(\lambda_{n-1}, \mu) d\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Такое определение детерминанта Фредгольма нельзя считать полностью эквивалентным определению 2.4.1, потому что ряд (2.4.5) сходится лишь при условии  $\|\mathbf{V}\| < 1$ . В тоже время для сходимости ряда (2.4.1) достаточно, например, ограниченности ядра  $V(\lambda, \mu)$ .<sup>2</sup> Подчеркнем однако, что такая неэквивалентность двух определений связана только с разложением логарифма интегрального оператора в ряд.

Если ядро интегрального оператора зависит от некоего параметра  $x$ ,  $V(\lambda, \mu) = V(\lambda, \mu|x)$ , то детерминант Фредгольма этого оператора является функцией от  $x$ :  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) = F(x)$ . Как правило, получить какую-нибудь информацию о поведении этой функции крайне сложно. Исключением является случай вырожденного ядра. В этом случае детерминант Фредгольма сводится к детерминанту матрицы конечного порядка, а именно, если

$$V(\lambda, \mu) = \sum_{\ell=1}^m f_{\ell}(\lambda)g_{\ell}(\mu), \quad (2.4.6)$$

то

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) = \det_m(\delta_{jk} + M_{jk}), \quad M_{jk} = \int_a^b f_k(\lambda)g_j(\lambda) d\lambda. \quad (2.4.7)$$

Доказательство этой формулы мы предоставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.<sup>3</sup> В этом случае, если функции  $f$  или  $g$  зависят от дополнительного параметра  $x$ , а  $m$  не слишком велико, то функция  $F(x)$  находится явно.

Отметим также еще одно свойство детерминантов Фредгольма. При преобразовании подобия детерминант не изменяется:

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}_{\varphi}), \quad V(\lambda, \mu) \rightarrow V_{\varphi}(\lambda, \mu) = V(\lambda, \mu) \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\mu)}. \quad (2.4.8)$$

Преобразование подобия часто используют для симметризации несимметричных ядер.

<sup>2</sup>Более подробно о детерминантах Фредгольма см., например, в монографии [9]. В этой монографии используется термин “знаменатель Фредгольма”.

<sup>3</sup>Подсказка. Детерминант Фредгольма, как и детерминант матрицы конечного порядка равен произведению собственных значений. Следует убедиться в том, что все собственные значения оператора  $\mathbf{I} + \mathbf{V}$ , отличные от единицы, совпадают с собственными значениями матрицы  $\delta_{jk} + M_{jk}$ .

Рассмотрим теперь вопрос о термодинамическом пределе нормы собственной функции. Из представлений (1.4.3), (1.4.4) следует, что при  $N, L \rightarrow \infty$  собственная функция становится ненормируемой. Нашей задачей, однако, будет отделить достаточно простые множители, стремящиеся к бесконечности, и определить конечный вклад. Преобразуем якобиан (1.4.4) в пределе большого  $L$

$$\begin{aligned}
 \det_N \frac{\partial \Phi_j}{\partial \lambda_k} &= \det_N \left[ \delta_{jk} L \left( 1 + \frac{1}{L} \sum_{a=1}^N K(\lambda_j - \lambda_a) \right) - K(\lambda_j - \lambda_k) \right] \\
 &\rightarrow \det_N \left[ \delta_{jk} L \left( 1 + \int_{-q}^q K(\lambda_j - \mu) \rho(\mu) d\mu \right) - K(\lambda_j - \lambda_k) \right] \\
 &= \det_N \left[ 2\pi L \rho(\lambda_j) \delta_{jk} - K(\lambda_j - \lambda_k) \right] \\
 &= \prod_{j=1}^N (2\pi L \rho(\lambda_j)) \det_N \left[ \delta_{jk} - \frac{K(\lambda_j - \lambda_k)}{2\pi L \rho(\lambda_k)} \right]. \quad (2.4.9)
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались уравнением (2.2.9) для плотности  $\rho(\lambda)$ . Остается разложить последний детерминант в степенной ряд по  $1/L$  (аналогично разложению (2.4.3) в ряд по  $\Delta$ ), и мы получаем

$$\begin{aligned}
 \det_N \left[ \delta_{jk} - \frac{K(\lambda_j - \lambda_k)}{2\pi L \rho(\lambda_k)} \right] &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{L^n n!} \sum_{\mu_1 \in [-q, q], \dots, \mu_n \in [-q, q]} \det_n \left[ \frac{K(\mu_j - \mu_k)}{2\pi \rho(\mu_k)} \right] \\
 &\rightarrow \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-q}^q d^n \lambda \det_n \left[ \frac{K(\lambda_j - \lambda_k)}{2\pi} \right] = \det \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right). \quad (2.4.10)
 \end{aligned}$$

Таким образом, в термодинамическом пределе квадрат нормы собственной функции оказывается пропорциональной детерминанту Фредгольма оператора  $\mathbf{I} - (1/2\pi)\mathbf{K}$

$$\mathcal{N}^2(\{\lambda\}) = \prod_{j>k}^N ((\lambda_j - \lambda_k)^2 + c^2) \cdot \prod_{j=1}^N (2\pi L \rho(\lambda_j)) \cdot \det \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right). \quad (2.4.11)$$

## 2.5. Возбужденные состояния

Мы предположили, что состояние, характеризующееся целыми (полуцелыми) числами  $n_j$  (напомним, что  $n_j = j - (N + 1)/2$ ), является основным состоянием. Рассмотрим теперь некоторое другое состояние, которое будем называть возбужденным. А именно, пусть возбужденное состояние характеризуется  $N$  числами  $n_1, \dots, n_{h-1}, n_{h+1}, \dots, n_N, n_p$ . Здесь в наборе чисел  $n_j$  пропущено число  $n_h$  и вместо него добавлено некое новое  $n_p$ . Такое состояние естественно назвать состоянием с одной дыркой в зоне Ферми и одной частицей вне зоны Ферми. Будем считать  $N$  и  $L$  достаточно большими. Тогда подобному выбору чисел  $I_j$  отвечают корни системы уравнений Бете  $\tilde{\lambda}_j$ , которые при  $j \neq h$  слегка сдвинуты по отношению к корням основного состояния  $\lambda_j$ :  $\tilde{\lambda}_j - \lambda_j \sim 1/L$ . Запишем соответствующую систему уравнений для  $j \neq h$

$$L\tilde{\lambda}_j + \sum_{k=1}^N \theta(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k) + \theta(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_p) - \theta(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_h) = 2\pi n_j. \quad (2.5.1)$$

Вводя функцию сдвига

$$F(\lambda|\tilde{\lambda}_p, \tilde{\lambda}_h) = \frac{\lambda_j - \tilde{\lambda}_j}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}, \quad (2.5.2)$$

вычтем из уравнения с номером  $j + 1$  уравнение с номером  $j$ . После несложных преобразований, аналогичных преобразованиям, сделанным при выводе уравнения для плотности, мы получим в пределе следующее интегральное уравнение для функции  $F$

$$\left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\lambda, \mu)} \circ F(\mu|\lambda_p, \lambda_h) = \frac{1}{2\pi} \theta(\lambda - \lambda_p) - \frac{1}{2\pi} \theta(\lambda - \lambda_h). \quad (2.5.3)$$

Здесь для краткости мы написали  $\lambda_p$  и  $\lambda_h$  вместо  $\tilde{\lambda}_p$  и  $\tilde{\lambda}_h$ . С учетом того, что

$$\frac{1}{2\pi} \theta(\lambda - \lambda_p) - \frac{1}{2\pi} \theta(\lambda - \lambda_h) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_p}^{\lambda_h} K(\mu - \lambda) d\mu, \quad (2.5.4)$$

мы получаем

$$F(\lambda|\lambda_p, \lambda_h) = \int_{\lambda_p}^{\lambda_h} R(\mu, \lambda) d\mu, \quad (2.5.5)$$

где  $R(\mu, \lambda)$  – ядро оператора, обратного к оператору  $\mathbf{I} - (1/2\pi)\mathbf{K}$ .

Легко видеть, что если мы рассмотрим состояние с  $n$  дырками и  $n$  частицами, то соответствующая функция сдвига оказывается аддитивной

$$F(\lambda|\{\lambda_p\}, \{\lambda_h\}) = \sum_{k=1}^n F(\lambda|\lambda_{p_k}, \lambda_{h_k}). \quad (2.5.6)$$

## 2.6. Энергия возбужденного состояния

Рассмотрим вспомогательную функцию  $\tilde{\varepsilon}(\lambda)$ , являющуюся решением уравнения

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K}\right)_{(\lambda, \mu)} \circ \tilde{\varepsilon}(\mu) = \lambda^2. \quad (2.6.1)$$

Очевидно, что  $\tilde{\varepsilon}(\lambda) = \tilde{\varepsilon}(-\lambda)$  (см. следствие 2.3.2). Кроме того, в силу абсолютной сходимости ряда (2.3.12) и условия  $K(\lambda - \mu) > 0$  при  $-q \leq \lambda, \mu \leq q$  мы заключаем, что  $\tilde{\varepsilon}(\lambda) \geq 0$ . Определим новую функцию

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K}\right)_{(\lambda, \mu)} \circ \varepsilon(\mu) = \lambda^2 - h, \quad (2.6.2)$$

где  $h$  – некоторая положительная константа. Очевидно, что  $\varepsilon(\lambda) = \tilde{\varepsilon}(\lambda) - 2\pi h \rho(\lambda)$ . Поскольку  $\rho(\lambda) > 0$  и является четной функцией, то существует такое  $h$ , при котором  $\varepsilon(\pm q) = 0$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.1.** Пусть  $\varepsilon(\lambda)$  удовлетворяет уравнению (2.6.2), где  $h$  такое, что  $\varepsilon(\pm q) = 0$ . Тогда  $\varepsilon(\lambda) < 0$  при  $|\lambda| < q$ , и  $\varepsilon(\lambda) > 0$  при  $|\lambda| > q$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Продифференцируем (2.6.2) по  $\lambda$ . Воспользуемся тем, что ядро  $K$  зависит от разности, проинтегрируем по частям и учтем  $\varepsilon(\pm q) = 0$ . Получим

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K}\right)_{(\lambda, \mu)} \circ \varepsilon'(\mu) = 2\lambda. \quad (2.6.3)$$

Функция  $\varepsilon'(\lambda)$  нечетна. Докажем, что она положительна при  $\lambda > 0$ . Для этого определим последовательность функций  $\varepsilon'_n(\lambda)$  соотношением

$$\varepsilon'_{n+1}(\lambda) = 2\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda - \mu) \varepsilon'_n(\mu) d\mu, \quad \varepsilon'_1(\lambda) = 2\lambda. \quad (2.6.4)$$

В силу абсолютной сходимости ряда (2.3.12) такая последовательность функций сходится к решению уравнения (2.6.3). С другой стороны, пусть некоторое  $\varepsilon'_n(\lambda) > 0$  при  $\lambda > 0$ . Тогда

$$\varepsilon'_{n+1}(\lambda) = 2\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^q (K(\lambda - \mu) - K(\lambda + \mu)) \varepsilon'_n(\mu) d\mu. \quad (2.6.5)$$

Поскольку  $K(\lambda - \mu) - K(\lambda + \mu) > 0$  при  $\lambda, \mu > 0$ , то оба слагаемых в правой части (2.6.5) положительны, а следовательно, и  $\varepsilon'_{n+1}(\lambda) > 0$ .

Таким образом, мы получаем, что функция  $\varepsilon'(\lambda)$  имеет единственный ноль при  $\lambda = 0$ . Следовательно  $\varepsilon(\lambda)$  имеет единственный экстремум при  $\lambda = 0$ . Поскольку  $\varepsilon(\lambda) \rightarrow \lambda^2 - h$  при  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ , мы заключаем, что этот экстремум минимум. Наконец, учитывая, что  $\varepsilon(\pm q) = 0$ , мы приходим к доказательству утверждения.

Вычислим теперь энергию возбужденного состояния, содержащего одну дырку и одну частицу. В термодинамическом пределе имеем

$$\begin{aligned} \Delta E &= \lambda_p^2 - \lambda_h^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^N (\tilde{\lambda}_j^2 - \lambda_j^2) \rightarrow \lambda_p^2 - \lambda_h^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^N 2\lambda_j (\tilde{\lambda}_j - \lambda_j) \\ &\rightarrow \lambda_p^2 - \lambda_h^2 - \int_{-q}^q 2\lambda F(\lambda | \lambda_p, \lambda_h) d\lambda \\ &= \lambda_p^2 - \lambda_h^2 - \int_{-q}^q d\lambda \int_{\lambda_p}^{\lambda_h} d\mu \cdot 2\lambda R(\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Из уравнения (2.6.3) следует, что

$$\int_{-q}^q 2\lambda R(\lambda, \mu) d\lambda = \varepsilon'(\mu) - 2\mu. \quad (2.6.7)$$

Подставляя это в последний интеграл в (2.6.6), немедленно находим

$$\Delta E = \varepsilon(\lambda_p) - \varepsilon(\lambda_h) > 0, \quad (2.6.8)$$

поскольку  $|\lambda_p| > q$  и  $|\lambda_h| < q$ . Мы видим, что энергия возбужденного состояния действительно всегда оказывается положительной. Легко видеть также, что если взять состояние с несколькими

дырками и частицами, то в силу (2.5.6) энергия такого возбуждения оказывается равной

$$\Delta E = \sum_{k=1}^n (\varepsilon(\lambda_{p_k}) - \varepsilon(\lambda_{h_k})), \quad (2.6.9)$$

а функция  $\varepsilon(\lambda)$  имеет смысл энергии частицы. Таким образом, мы установили, что энергия возбужденных состояний положительна. Следовательно, состояние, построенное в разделе 2.2, является основным состоянием.

## 2.7. Большой канонический ансамбль

В описанном выше подходе мы искали основное состояние в секторе с фиксированным числом частиц  $N$ , что в свою очередь в термодинамическом пределе однозначно фиксировало плотность газа  $D$ . Существует, однако, и другой подход, в котором константа  $h$ , входящая в уравнение (2.6.2), приобретает простой физический смысл. Добавим к исходному гамильтониану квантового нелинейного уравнения Шрёдингера слагаемое, пропорциональное оператору числа частиц

$$H \rightarrow H - hQ, \quad (2.7.1)$$

где

$$Q = \int_0^L \Psi^\dagger \Psi dx. \quad (2.7.2)$$

Естественно назвать  $h$  химическим потенциалом. Поскольку имеем  $[H, Q] = 0$ , собственные функции нового гамильтониана не меняются и по-прежнему параметризуются решениями уравнений Бете. Однако собственные значения теперь имеют вид

$$E = \sum_{j=1}^N (\lambda_j^2 - h). \quad (2.7.3)$$

Теперь при малых значениях  $\lambda$  существуют отрицательные вклады в энергию, и минимум энергии достигается тогда, когда заполнены все вакансии, для которых  $\lambda^2 - h < 0$ . При этом число частиц в основном состоянии  $N$ , а значит, и плотность  $D$ , становятся функциями химического потенциала  $h$ . Как и ранее, в термодинамическом пределе корни уравнений Бете  $\lambda_j$  заполняют интервал

$[-q, q]$ , однако определяющим теперь является не уравнение для плотности распределения, а уравнение для энергии (2.6.2) с дополнительным условием  $\varepsilon(\pm q) = 0$ . Тем самым неявно, но однозначно фиксируется  $q$ , как функция  $c$  и  $h$ . Плотность распределения  $\rho(\lambda)$  и средняя плотность  $D$  тоже становятся функциями  $c$  и  $h$ .

При наличии химического потенциала число частиц в возбужденном состоянии не фиксировано, и мы можем рассматривать, например, возбуждения с одной частицей (или одной дыркой). Несложно проверить, что функция сдвига в этом случае задается уравнениями

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\lambda, \mu)} \circ F(\mu | \lambda_p) &= \frac{1}{2\pi} \theta(\lambda - \lambda_p), \\ \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K} \right)_{(\lambda, \mu)} \circ F(\mu | \lambda_h) &= -\frac{1}{2\pi} \theta(\lambda - \lambda_h), \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

а энергия возбуждения оказывается равной  $\varepsilon(\lambda_p)$  или  $-\varepsilon(\lambda_h)$ .

В заключение отметим, что вопросы, затронутые в этой лекции, рассматриваются также в работах [3], [5], [8], [10]–[12].

## Лекция 3. Система одномерных бозонов при конечной температуре

### 3.1. Состояние термодинамического равновесия

В этой лекции мы переходим к исследованию системы одномерных бозонов при конечной температуре. Мы уже видели, что при нулевой температуре одномерные бозоны описываются интегральными уравнениями, задающими, например, плотность распределения в основном состоянии или энергию возбуждений. При конечной температуре основная информация о системе содержится в уравнении термодинамического равновесия. Для вывода этого уравнения нужно вычислить статистическую сумму модели. По определению, статистическая сумма при конечной температуре  $T$  равна

$$Z = \text{tr}(e^{-H/T}) = \sum_n e^{-E_n/T} = e^{-F/T}, \quad (3.1.1)$$

где  $F$  – свободная энергия. Суммирование ведется по всем собственным состояниям гамильтониана  $H$ , т.е. по всем наборам целых (полуцелых) чисел  $\{I_j\}$ . Для вывода уравнения, задающего состояние термодинамического равновесия, следует перейти от микроскопического описания системы в терминах чисел  $\{I_j\}$  к макроскопическому, в терминах плотностей частиц, дырок и вакансий. При этом мы должны учесть, что фиксированной макроскопической ситуации, т.е. заданному значению плотностей  $\rho_p$ ,  $\rho_h$  и  $\rho_t$ , соответствует много микроскопических ситуаций (т.е. наборов  $\{I_j\}$ ). Действительно, число способов разместить  $L\rho_p(\lambda)d\lambda$  частиц по  $L\rho_t(\lambda)d\lambda$  вакансиям равно

$$\exp dS = \frac{(L\rho_t(\lambda)d\lambda)!}{(L\rho_p(\lambda)d\lambda)!(L\rho_h(\lambda)d\lambda)!} \quad (3.1.2)$$

или, когда  $L$  достаточно велико,

$$dS = Ld\lambda(\rho_t(\lambda) \log \rho_t(\lambda) - \rho_p(\lambda) \log \rho_p(\lambda) - \rho_h(\lambda) \log \rho_h(\lambda)). \quad (3.1.3)$$

При фиксированном полном числе частиц  $N$  выражение для статистической суммы имеет вид

$$Z_N = \sum_{I_1 < \dots < I_N} e^{-E_N(I_1, \dots, I_N)/T}. \quad (3.1.4)$$

Ограничимся суммированием только по таким состояниям, полный импульс которых равен нулю. Это означает, что  $\sum_{j=1}^N I_j = 0$ . Тогда мы можем ввести новые независимые переменные  $I_{j+1,j} = I_{j+1} - I_j$  и выражение для  $Z_N$  приобретает вид

$$Z_N = \sum_{I_{2,1}} \dots \sum_{I_{N,N-1}} e^{-E_N/T}. \quad (3.1.5)$$

С другой стороны, при достаточно большом  $L$  новые микроскопические переменные  $I_{j+1,j}$  могут быть выражены в терминах макроскопических плотностей вакансий и частиц

$$I_{j+1,j} \rightarrow \frac{\lambda(I_{j+1}) - \lambda(I_j)}{\lambda(I_j + 1) - \lambda(I_j)} \rightarrow \frac{\rho_t(\lambda_j)}{\rho_p(\lambda_j)}. \quad (3.1.6)$$

Наконец, энергия  $E_N$  равна

$$E_N = L \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \rho_p(\lambda) d\lambda. \quad (3.1.7)$$

Теперь мы можем формально переписать выражение для статистической суммы (3.1.5) в макроскопических переменных

$$Z_N = \sum_{\rho_p(\lambda_1)} \dots \sum_{\rho_p(\lambda_{N-1})} \exp \left\{ -\frac{L}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \rho_p(\lambda) d\lambda \right\}. \quad (3.1.8)$$

Согласно уравнению (3.1.6) суммирование должно было бы производиться по всем возможным отношениям  $\rho_t(\lambda)/\rho_p(\lambda)$ . Однако мы учли, что плотность вакансий  $\rho_t(\lambda)$  связана с плотностью частиц  $\rho_p(\lambda)$  уравнением (2.2.17). Поэтому лишь одна из этих двух функций является независимой. В качестве такой независимой функции мы выбрали  $\rho_p(\lambda)$ .

В термодинамическом пределе сумма вида (3.1.8) переходит в функциональный интеграл. Следует только помнить, что при замене суммы на интеграл одному макроскопическому состоянию

соответствует много микроскопических. Иными словами, каждое слагаемое  $e^{E_N/T}$  умножается на фактор  $e^S$ , где в силу (3.1.2)

$$S = L \int_{-\infty}^{\infty} \left( \rho_t(\lambda) \log \rho_t(\lambda) - \rho_p(\lambda) \log \rho_p(\lambda) - \rho_h(\lambda) \log \rho_h(\lambda) \right) d\lambda. \quad (3.1.9)$$

Кроме того мы должны учесть, что суммирование происходит при фиксированной средней плотности  $D = N/L$ , т.е.

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_p(\lambda) d\lambda. \quad (3.1.10)$$

В результате мы приходим к следующему выражению для  $Z_N$ :

$$Z_N = \int \mathcal{D}[\rho_p(\lambda)] \delta \left( D - \int_{-\infty}^{\infty} \rho_p(\lambda) d\lambda \right) \exp \left\{ S - \frac{E_N}{T} \right\}, \quad (3.1.11)$$

где функционалы  $E_N$  и  $S$  заданы формулами (3.1.7), (3.1.9). С учетом

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{hx} dx, \quad (3.1.12)$$

мы получаем

$$Z_N = \text{const} \int dh \int \mathcal{D}[\rho_p(\lambda)] \times \exp \left\{ S - \frac{E_N}{T} + \frac{Lh}{T} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \rho_p(\lambda) d\lambda - D \right) \right\}. \quad (3.1.13)$$

Обратим внимание на то, что все функционалы, входящие в (3.1.13) и зависящие от плотности  $\rho_p(\lambda)$ , пропорциональны большому (стремящемуся к бесконечности) множителю  $L$ . Поэтому мы можем оценить получившийся интеграл по методу стационарной фазы. Пусть

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \rho_t(\lambda) \log \rho_t(\lambda) - \rho_p(\lambda) \log \rho_p(\lambda) - \rho_h(\lambda) \log \rho_h(\lambda) - \frac{\lambda^2}{T} \rho_p(\lambda) \right) d\lambda + \frac{h}{T} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \rho_p(\lambda) d\lambda - D \right), \quad (3.1.14)$$

Нам нужно найти экстремум этого функционала. При этом нам следует учесть, что  $\rho_t(\lambda) = \rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda)$ , и кроме того плотности  $\rho_t(\lambda)$  и  $\rho_p(\lambda)$  связаны между собой уравнением (2.2.17). Тогда вариация по  $\rho_p(\lambda)$  равна

$$\frac{\delta W}{\delta \rho_p(\lambda)} = -\frac{\lambda^2 - h}{T} + \log \frac{\rho_h(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta \rho_t(\mu)}{\delta \rho_p(\lambda)} \log \left( 1 + \frac{\rho_h(\mu)}{\rho_p(\mu)} \right) d\mu. \quad (3.1.15)$$

Из уравнения (2.2.17) следует, что

$$\frac{\delta \rho_t(\mu)}{\delta \rho_p(\lambda)} = \frac{1}{2\pi} K(\lambda - \mu).$$

Вводя обозначение

$$\frac{\rho_h(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} = e^{\varepsilon(\lambda)/T}, \quad (3.1.16)$$

мы приходим к нелинейному интегральному уравнению на функцию  $\varepsilon(\lambda)$

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \log(1 + e^{-\varepsilon(\mu)/T}) d\mu. \quad (3.1.17)$$

Уравнение (3.1.17) представляет собой искомое уравнение термодинамического равновесия. Оно задает соотношение плотностей дырок и частиц в состоянии, дающим основной вклад в статистическую сумму в термодинамическом пределе. Это уравнение впервые было получено в работе [13] и носит название уравнения Янга–Янга.

Отметим, что состояние термодинамического равновесия не является собственным состоянием гамильтониана, как это было в случае  $T = 0$ . Состояние термодинамического равновесия представляет собой смесь собственных состояний. Действительно, как мы уже объясняли, одному набору макроскопических переменных  $\rho_p(\lambda)$ ,  $\rho_h(\lambda)$  соответствует  $\exp(dS)$  микроскопических состояний, каждое из которых есть собственная функция гамильтониана, характеризующаяся набором чисел  $\{I_j\}$ .

Нам остается вычислить значение функционала  $W$  на решении уравнения (3.1.17). С учетом  $\rho_t(\lambda) = \rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda)$  и (3.1.16)

имеем

$$\begin{aligned}
 W &= -\frac{Dh}{T} + \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left\{ \rho_p(\lambda) \left[ \log(1 + e^{\varepsilon(\lambda)/T}) + \frac{h - \lambda^2}{T} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \rho_h(\lambda) \log(1 + e^{-\varepsilon(\lambda)/T}) \right\} \\
 &= -\frac{Dh}{T} + \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \left\{ \rho_t(\lambda) \log(1 + e^{-\varepsilon(\lambda)/T}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varepsilon(\lambda) - \lambda^2 + h}{T} \rho_p(\lambda) \right\}. \quad (3.1.18)
 \end{aligned}$$

Теперь следует выразить  $\rho_t(\lambda)$  через  $\rho_p(\lambda)$  с помощью уравнения (2.2.17), а для комбинации  $\varepsilon(\lambda) - \lambda^2 + h$  использовать уравнение Янга–Янга. Тогда мы немедленно получаем

$$W = -\frac{Dh}{T} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log(1 + e^{-\varepsilon(\mu)/T}) d\mu. \quad (3.1.19)$$

Данное значение функционала  $W$ , вычисленное в точке экстремума, и определяет искомое выражение для статистической суммы

$$Z = e^{-F/T}, \quad (3.1.20)$$

где свободная энергия на единицу длины равна

$$\frac{F}{L} = Dh - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log(1 + e^{-\varepsilon(\mu)/T}) d\mu. \quad (3.1.21)$$

В получившемся выражении для свободной энергии содержится величина  $h$ , смысл которой пока не ясен. Кроме того, при выводе уравнения Янга–Янга мы нашли лишь экстремум функционала  $W$ , не убедившись в том, что этот экстремум является минимумом. Мы займемся решением этих вопросов в следующем разделе.

### 3.2. Другой вывод уравнения состояния

Выведем уравнение (3.1.17) еще раз другим способом. Нам нужно найти минимум функционала

$$\begin{aligned}
 X = L \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^2 - h) \rho_p(\lambda) d\lambda \\
 + TL \int_{-\infty}^{\infty} [\rho_p(\lambda) \log \rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda) \log \rho_h(\lambda) \\
 - (\rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda)) \log(\rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda))] d\lambda.
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

По сравнению с формулой (3.1.14) мы опустили несущественное слагаемое, пропорциональное  $D$ , и умножили весь функционал на  $T$ . При этом, согласно определениям плотностей частиц и дырок, минимум должен достигаться, во-первых, на функции  $\rho_p(\lambda) \geq 0$ , а во-вторых,  $\rho_h(\lambda)$  при этом тоже должна быть положительна. Если мы посмотрим на уравнение (2.2.17), связывающее между собой  $\rho_p(\lambda)$  и  $\rho_h(\lambda)$ ,

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \rho_p(\mu) d\mu = 2\pi(\rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda)), \tag{3.2.2}$$

то увидим, что далеко не при всяком выборе  $\rho_p(\lambda) \geq 0$  мы автоматически получим  $\rho_h(\lambda) \geq 0$ . Будем говорить, что  $\rho_p(\lambda) \in R_0$ , если  $\rho_p(\lambda) \geq 0$ , и функция  $\rho_h(\lambda)$ , определяемая уравнением (3.2.2), тоже неотрицательна. Легко видеть, что если имеем  $\rho_p^{(1)}(\lambda) \in R_0$  и  $\rho_p^{(2)}(\lambda) \in R_0$ , то

$$x\rho_p^{(1)}(\lambda) + (1-x)\rho_p^{(2)}(\lambda) \in R_0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Таким образом, множество  $R_0$  выпукло. Следовательно, мы ищем минимум функционала на выпуклом множестве  $R_0$ .

Пусть  $\rho_p(\lambda) = \rho_0(\lambda) + x\rho_1(\lambda)$ , и пусть для некоторого сегмента  $x$  имеем  $\rho_p(\lambda) \in R_0$ . Проинтегрируем (3.2.1) по  $x$

$$\begin{aligned}
 \frac{dX}{dx} = L \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (\lambda^2 - h) \rho_1(\lambda) - T \rho_1(\lambda) \log \frac{\rho_h(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} \right. \\
 \left. - T \frac{d(\rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda))}{dx} \log \left( 1 + \frac{\rho_p(\lambda)}{\rho_h(\lambda)} \right) \right] d\lambda.
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Учитывая уравнение (3.2.2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} = L \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (\lambda^2 - h)\rho_1(\lambda) - T\rho_1(\lambda) \log \frac{\rho_h(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} \right] d\lambda \\ - \frac{TL}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu)\rho_1(\mu) \log \left( 1 + \frac{\rho_p(\lambda)}{\rho_h(\lambda)} \right) d\lambda d\mu. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Вновь введем обозначение (3.1.16), и тогда

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} = L \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(\lambda) d\lambda \left[ \lambda^2 - h - \varepsilon(\lambda) \right. \\ \left. - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \log(1 + e^{-\varepsilon(\mu)/T}) d\mu \right]. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Таким образом, мы вновь видим, что экстремум функционала  $X$  достигается на решении уравнения Янга–Янга (3.1.17). Вычислим теперь вторую производную

$$\frac{d^2X}{dx^2} = L \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(\lambda) d\lambda \left[ -\frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \frac{\partial \varepsilon(\mu)/\partial x}{1 + e^{\varepsilon(\mu)/T}} d\mu \right]. \quad (3.2.6)$$

С другой стороны, из уравнения (3.2.2) следует

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\log \rho_p(\lambda) - \log \rho_h(\lambda)) \\ &= \frac{1}{\rho_p(\lambda)} \left( \rho_1(\lambda) - e^{-\varepsilon(\lambda)/T} \frac{\partial \rho_h(\lambda)}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{\rho_p(\lambda)} \left( \rho_1(\lambda)(1 + e^{-\varepsilon(\lambda)/T}) \right. \\ &\quad \left. - e^{-\varepsilon(\lambda)/T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu)\rho_1(\mu) d\mu \right) \\ &= \frac{1 + e^{-\varepsilon(\lambda)/T}}{\rho_p(\lambda)} \left( \rho_1(\lambda) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + e^{\varepsilon(\lambda)/T}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu)\rho_1(\mu) d\mu \right). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + e^{\varepsilon(\lambda)/T}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \rho_1(\mu) d\mu \quad (3.2.8)$$

$$= \rho_1(\lambda) + \frac{\rho_p(\lambda)}{1 + e^{-\varepsilon(\lambda)/T}} \cdot \frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial x}. \quad (3.2.9)$$

Заменяя в последнем интеграле в формуле (3.2.6)  $\lambda$  на  $\mu$  и воспользовавшись (3.2.9), получаем для второй производной

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{L}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_p(\lambda)}{1 + e^{-\varepsilon(\lambda)/T}} \left[ \frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial x} \right]^2 d\lambda > 0. \quad (3.2.10)$$

Таким образом, найденный экстремум является минимумом.

Выясним теперь физический смысл параметра  $h$ . Обозначим найденный минимум функционала  $X$  через  $Y = Y(L, T, h)$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial h} &= -L \int_{-\infty}^{\infty} \rho_p(\lambda) d\lambda = -N, & (\text{число частиц}), \\ \frac{\partial Y}{\partial T} &= -S, & (\text{энтропия}). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Тогда полный дифференциал функции  $Y$  может быть записан в виде

$$dY = -N dh - S dT + (Y/L) dL. \quad (3.2.12)$$

Следовательно,

$$d(Y + Nh) = h dN - S dT + (Y/L) dL. \quad (3.2.13)$$

Но  $Y + Nh$  – это свободная энергия, а значит,  $h$  – химический потенциал,  $Y/L$  – давление.

### 3.3. Уравнение Янга–Янга

В предыдущих разделах мы доказали, что состояние термодинамического равновесия описывается уравнением Янга–Янга. Возникает естественный вопрос о существовании и единственности решения этого уравнения. Докажем существование решения уравнения (3.1.17). Для доказательства нам потребуется вспомогательная лемма.

ЛЕММА 3.3.1. Пусть

$$f(x) = -h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu) \log(1 + e^{-(\mu^2+x)/T}) d\mu. \quad (3.3.1)$$

Тогда решение уравнения  $f(x) = x$  существует и единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем, что функция  $f(x) - x$  монотонно убывает и принимает все значения в интервале  $[-\infty, \infty]$ . Отсюда будет следовать утверждение леммы.

Продифференцируем (3.3.1) по  $x$

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\mu) d\mu}{1 + e^{(\mu^2+x)/T}} > 0. \quad (3.3.2)$$

Очевидно также, что  $f(x) \rightarrow -h$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Следовательно,  $f(x) - x \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

С учетом того, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu) d\mu = 1, \quad (3.3.3)$$

мы можем переписать (3.3.2) в виде

$$f'(x) - 1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\mu) d\mu}{1 + e^{-(\mu^2+x)/T}} < 0. \quad (3.3.4)$$

Таким образом,  $f(x) - x$  — монотонно убывающая функция. Наконец, переписав с учетом (3.3.3) определение функции  $f(x)$  следующим образом:

$$f(x) = x - h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu) \log(e^{x/T} + e^{-\mu^2/T}) d\mu, \quad (3.3.5)$$

мы видим, что  $f(x) - x \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

ТЕОРЕМА 3.3.2. Решение уравнения (3.1.17) существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим последовательность функций  $\varepsilon_n(\lambda)$

$$\varepsilon_0(\lambda) = \lambda^2 - h, \quad \varepsilon_{n+1}(\lambda) = \lambda^2 - h + A_n, \quad (3.3.6)$$

где

$$A_n = -\frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \log(1 + e^{-\varepsilon_n(\mu)/T}) d\mu. \quad (3.3.7)$$

Докажем, что для всех  $\lambda$  последовательность  $\varepsilon_n(\lambda)$  монотонно убывает

$$\varepsilon_0(\lambda) > \varepsilon_1(\lambda) > \dots > \varepsilon_n(\lambda) > \dots \quad (3.3.8)$$

и ограничена снизу

$$\varepsilon_n(\lambda) \geq \lambda^2 + x_0. \quad (3.3.9)$$

Отсюда будет следовать утверждение теоремы.

Свойство (3.3.8) доказывается сравнительно легко. Заметим, что  $A_n < 0$ , следовательно,  $\varepsilon_0(\lambda) > \varepsilon_1(\lambda)$ . Пусть теперь  $\varepsilon_n(\lambda) > \varepsilon_{n-1}(\lambda)$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{n+1}(\lambda) - \varepsilon_n(\lambda) \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \{ \log(1 + e^{-\varepsilon_{n-1}(\mu)/T}) \\ & \quad - \log(1 + e^{-\varepsilon_n(\mu)/T}) \} d\mu < 0. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Перейдем к доказательству неравенства (3.3.9). Прежде всего заметим, что  $\varepsilon_n(\lambda) = \varepsilon_n(-\lambda)$ . Докажем, что  $\varepsilon_n(\lambda)$  монотонно возрастает при  $\lambda > 0$ . Доказательство этого утверждения похоже на доказательство Предложения 2.6.1 (см. в частности, формулу (2.6.5)). Продифференцируем  $\varepsilon_{n+1}(\lambda)$  по  $\lambda$

$$\varepsilon'_{n+1}(\lambda) = 2\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [K(\lambda - \mu) - K(\lambda + \mu)] \frac{\varepsilon'_n(\mu)}{1 + e^{\varepsilon_n(\mu)/T}} > 0, \quad (3.3.11)$$

так как  $K(\lambda - \mu) > K(\lambda + \mu)$  при  $\lambda, \mu > 0$ . Заметим также, что  $A_n(\lambda) = A_n(-\lambda)$ , и из оценки (3.3.11) следует, что  $A_n(\lambda)$  монотонно возрастает при  $\lambda > 0$ . Следовательно, функция  $\varepsilon_n(\lambda)$  имеет единственный минимум при  $\lambda = 0$ . Тогда

$$\varepsilon_n(\lambda) \geq \lambda^2 + \varepsilon_n(0), \quad (3.3.12)$$

следовательно,

$$\log(1 + e^{-\varepsilon_n(\mu)/T}) < \log(1 + e^{-(\mu^2 + \varepsilon_n(0))/T}), \quad (3.3.13)$$

из чего в свою очередь вытекает оценка

$$\varepsilon_{n+1}(0) \geq -h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu) \log(1 + e^{-(\mu^2 + \varepsilon_n(0))/T}) d\mu. \quad (3.3.14)$$

Пусть теперь  $x_0$  – корень уравнения  $f(x) = x$  из леммы 3.3.1. Докажем, что  $\varepsilon_n(0) \geq x_0$ . Вспомним, что функция  $f(x)$  (см. (3.3.1)) монотонно возрастает, и что  $f(x) \rightarrow -h$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Поэтому

$$\varepsilon_0(0) = -h > f(x_0) = x_0. \quad (3.3.15)$$

Пусть теперь для некоторого  $n$  справедливо  $\varepsilon_{n-1}(0) \geq x_0$ . Заметим, что неравенство можно переписать в виде  $\varepsilon_{n+1}(0) \geq f(\varepsilon_n(0))$ . Тогда

$$\varepsilon_n(0) \geq f(\varepsilon_{n-1}(0)) \geq f(x_0) = x_0. \quad (3.3.16)$$

Таким образом, мы доказали по индукции, что  $\varepsilon_n(0) \geq x_0$ , а следовательно, с учетом (3.3.12) мы получаем, что  $\varepsilon_n(\lambda) \geq \lambda^2 + x_0$ , что и требовалось доказать.

### 3.4. Предельный случай $T = 0$

При нулевой температуре состояние термодинамического равновесия переходит в основное состояние гамильтониана. Поэтому в пределе  $T \rightarrow 0$  мы должны воспроизвести формулы, описывающие основное состояние (см. лекцию 2).

При доказательстве существования решения уравнения Янга–Янга (3.1.17) мы получили оценку

$$\lambda^2 - h \geq \varepsilon(\lambda) \geq \lambda^2 + x_0, \quad (3.4.1)$$

где  $x_0$  – единственный корень уравнения  $f(x_0) = x_0$ , а функция  $f(x)$  задана формулой (3.3.1) (или эквивалентной ей формулой (3.3.5)). Из формулы (3.3.5) находим

$$h = -\frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu) \log(e^{x/T} + e^{-\mu^2 T}) d\mu. \quad (3.4.2)$$

Легко проверить, что  $h$  – монотонно убывающая функция  $x_0$ , принимающая все значения в интервале  $[-\infty, \infty]$ . При  $T \rightarrow 0$  несложно получить

$$\begin{aligned} h &> 0, & x_0 < 0, \\ h &< 0, & x_0 > 0, \\ h &= 0, & x_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Таким образом, при  $h < 0$  функция  $\varepsilon(\lambda)$  оказывается всюду положительной (легко проверить, что это верно не только при  $T \rightarrow 0$ ,

но и при конечном  $T$ ). Устремляя в уравнении (3.1.17)  $T \rightarrow 0$ , видим, что интеграл исчезает, и остается

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h > 0, \quad T = 0, \quad h < 0. \quad (3.4.4)$$

В этом случае средняя плотность основного состояния оказывается нулевой  $D = 0$ .

Если  $h > 0$ , то функция  $\varepsilon(\lambda)$  имеет два корня  $\pm q_T$ , которые не исчезают и в пределе  $T = 0$ . Пусть  $\lim_{T \rightarrow 0} q_T = q$ . Тогда в пределе  $T \rightarrow 0$  получаем  $\varepsilon(\pm q) = 0$ ,  $\varepsilon(\lambda) > 0$  при  $|\lambda| > q$  и  $\varepsilon(\lambda) < 0$  при  $|\lambda| < q$ . Подставляя это в уравнение Янга–Янга, находим

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h - \frac{1}{2\pi} \int_{-q}^q K(\lambda - \mu) \varepsilon(\mu) d\mu, \quad (3.4.5)$$

т.е. мы воспроизвели уравнение (2.6.2) для энергии возбужденного состояния при нулевой температуре. С учетом того, что  $\exp(\varepsilon(\lambda)/T) = \rho_h(\lambda)/\rho_p(\lambda)$ , легко видеть, что мы воспроизводим и все уравнения для плотности частиц (2.2.9), (2.2.11).

### 3.5. Предельные случаи для константы связи

Рассмотрим систему уравнений (3.1.17), (3.2.2)

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^2 - h - \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \log(1 + e^{-\varepsilon(\mu)/T}) d\mu. \quad (3.5.1)$$

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \rho_p(\mu) d\mu = 2\pi(\rho_p(\lambda) + \rho_h(\lambda)). \quad (3.5.2)$$

в пределах  $c = \infty$  и  $c = 0$ . При  $c = \infty$  имеем  $K(\lambda) = 0$ , и оба уравнения явно решаются

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda) &= T \log \frac{\rho_h(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} = \lambda^2 - h, \\ \rho_h(\lambda) + \rho_p(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Отсюда немедленно находим

$$\rho_p(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + e^{(\lambda^2 - h)/T}}, \quad (3.5.4)$$

что соответствует распределению свободных фермионов.

При  $c = 0$  имеем

$$\frac{1}{2\pi} K(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{\lambda - ic} - \frac{1}{\lambda + ic} \right) \rightarrow \delta(\lambda). \quad (3.5.5)$$

Уравнения снова явно решаются

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon(\lambda)/T} &= \frac{\rho_h(\lambda)}{\rho_p(\lambda)} = e^{(\lambda^2 - h)T} - 1, \\ \rho_h(\lambda) &= 1. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Отсюда находим

$$\rho_p(\lambda) = \frac{1}{e^{(\lambda^2 - h)T} - 1}, \quad (3.5.7)$$

что, как и следовало ожидать, соответствует распределению свободных бозонов.

### 3.6. Возбуждения при ненулевой температуре

Введем функцию

$$\vartheta(\lambda) = \frac{\rho_p(\lambda)}{\rho_t(\lambda)} = \frac{1}{1 + e^{\varepsilon(\lambda)/T}}, \quad (3.6.1)$$

которую естественно назвать фермиевским весом. Тогда условие (2.2.17) можно переписать в виде уравнения на плотность вакансий

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \vartheta(\mu) \rho_t(\mu) d\mu = 2\pi \rho_t(\lambda). \quad (3.6.2)$$

Формально уравнение (3.6.2) можно получить из уравнения (2.2.9) заменой меры интегрирования

$$\int_{-q}^q d\mu \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(\mu) d\mu. \quad (3.6.3)$$

Ниже мы увидим, что все уравнения, описывающие наблюдаемые в состоянии термодинамического равновесия, можно получить с помощью такой замены из соответствующих уравнений при нулевой температуре. Поэтому введем оператор  $\mathbf{I} - (1/2\pi)\mathbf{K}_T$ , действующий на функции следующим образом:

$$\left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K}_T \right)_{(\lambda, \mu)} \circ f(\mu) = f(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \vartheta(\mu) f(\mu) d\mu, \quad (3.6.4)$$

и изучим его свойства. Удобно рассмотреть симметричное ядро

$$\tilde{K}_T(\lambda, \mu) = K(\lambda - \mu) \sqrt{\vartheta(\lambda)\vartheta(\mu)}, \quad (3.6.5)$$

связанное с исходным ядром  $K(\lambda - \mu)\vartheta(\mu)$  преобразованием подобия (2.4.8). Поступим аналогично выводу формулы (2.3.8). Имеем

$$\lim \frac{1}{L^2} \sum_{j,k}^N \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} \frac{v(\lambda_j)v(\lambda_k)}{2\pi\rho_t(\lambda_j)\rho_t(\lambda_k)} \geq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2(\lambda)}{2\pi\rho_t(\lambda)} d\lambda > 0. \quad (3.6.6)$$

С другой стороны, термодинамический предел левой части формулы (3.6.6) теперь равен

$$\frac{1}{L} \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} \rightarrow 2\pi \sqrt{\rho_t(\lambda_k)\rho_t(\lambda_j)} \left( \delta_{jk} - \frac{K(\lambda_j - \lambda_k)}{2\pi L \sqrt{\rho_t(\lambda_k)\rho_t(\lambda_j)}} \right). \quad (3.6.7)$$

Отсюда находим

$$\lim \frac{1}{L^2} \sum_{j,k}^N \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} \frac{v(\lambda_j)v(\lambda_k)}{2\pi\rho_t(\lambda_j)\rho_t(\lambda_k)} = v(\lambda) \circ \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \tilde{\mathbf{K}}_T \right)_{(\lambda, \mu)} \circ v(\mu). \quad (3.6.8)$$

Сравнивая с (3.6.6) получаем следующую оценку

$$v(\lambda) \circ \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \tilde{\mathbf{K}}_T \right)_{(\lambda, \mu)} \circ v(\mu) \geq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v^2(\lambda)}{2\pi\rho_t(\lambda)} d\lambda > 0. \quad (3.6.9)$$

Поскольку для  $\rho_t(\lambda)$  по-прежнему справедливы оценки (2.3.9), мы получаем следующие оценки для собственных значений симметризованного ядра

$$0 < \frac{1}{2\pi} \hat{K}_T \leq \frac{2D}{2D + c} < 1. \quad (3.6.10)$$

Отсюда, следует, что оператор  $\mathbf{I} - (1/2\pi)\tilde{\mathbf{K}}_T$  невырожден и обратим, а значит, то же самое верно и для оператора  $\mathbf{I} - (1/2\pi)\mathbf{K}_T$ .

Рассмотрим теперь возбуждения в состоянии термодинамического равновесия. Возьмем какую-нибудь собственную функцию, которая присутствует в состоянии термодинамического равновесия, и покажем, что возбуждения зависят только от макроскопических величин.

Пусть собственная функция описывается параметрами  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , являющимися решением системы (2.1.2) при заданных  $I_j$

$$L\lambda(x) + \sum_{k=1}^N \theta(\lambda(x) - \lambda_k) = 2\pi Lx. \quad (3.6.11)$$

Аналогично формуле (2.2.5) определим плотность частиц, как

$$\lim \frac{1}{L(\lambda_{j+1} - \lambda_j)} = \lim \frac{1}{L(\lambda(I_{j+1}/L) - \lambda(I_j/L))} = \rho_p(\lambda_j). \quad (3.6.12)$$

В свою очередь плотность вакансий  $\rho_t(\lambda_j)$  равна

$$\rho_t(\lambda_j) = \lim \frac{1}{L[\lambda((I_j + 1)/L) - \lambda(I_j/L)]}. \quad (3.6.13)$$

Рассмотрим теперь другую собственную функцию, характеризующуюся набором чисел  $I'_j$ , совпадающих с  $I_j$  за исключением некоторого  $I'_h \neq I_h$ . Иными словами, по сравнению с исходным состоянием мы теперь рассматриваем состояние с одной частицей и одной дыркой. Как и раньше, новые решения уравнений Бете  $\tilde{\lambda}_j$  слегка сдвинуты по отношению к старым  $\lambda_j$ , причем

$$L\tilde{\lambda}_j + \sum_{k=1}^N \theta(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_k) + \theta(\tilde{\lambda}_j - \lambda_p) - \theta(\tilde{\lambda}_j - \lambda_h) = 2\pi I_j, \quad j \neq h. \quad (3.6.14)$$

Как и в случае нулевой температуры, мы вводим функцию сдвига

$$F(\lambda_j | \lambda_p, \lambda_h) = \frac{\lambda(I_j/L) - \tilde{\lambda}(I_j/L)}{\lambda((I_j + 1)/L) - \lambda(I_j/L)}. \quad (3.6.15)$$

Вычитая из уравнений для  $\tilde{\lambda}_j$  уравнения для  $\lambda_j$ , и заменяя конечные разности на производные, находим

$$\begin{aligned} L(\tilde{\lambda}_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^N K(\lambda_{jk})[(\tilde{\lambda}_j - \lambda_j) - (\tilde{\lambda}_k - \lambda_k)] \\ = \theta(\lambda_j - \lambda_h) - \theta(\lambda_j - \lambda_p). \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

Поделив на  $L[\lambda((I_j + 1)/L) - \lambda(I_j/L)]$ , получим

$$\begin{aligned}
 & - F(\lambda_j | \lambda_p, \lambda_h) \left( 1 + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^N K(\lambda_{jk}) \right) \\
 & \quad - \rho_t(\lambda_j) \sum_{k=1}^N K(\lambda_{jk}) F(\lambda_j | \lambda_p, \lambda_h) \left[ \lambda \left( \frac{I_k + 1}{L} \right) - \lambda \left( \frac{I_k}{L} \right) \right] \\
 & = \rho_t(\lambda_j) (\theta(\lambda_j - \lambda_h) - \theta(\lambda_j - \lambda_p)). \tag{3.6.17}
 \end{aligned}$$

Переходя к пределу, с учетом (2.2.17), мы получим

$$\left( \mathbf{I} - \frac{1}{2\pi} \mathbf{K}_T \right)_{(\lambda, \mu)} \circ F(\mu | \lambda_p, \lambda_h) = \frac{1}{2\pi} (\theta(\lambda - \lambda_p) - \theta(\lambda - \lambda_h)). \tag{3.6.18}$$

$$1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda - \mu) \rho_p(\mu) d\mu = 2\pi \rho_t(\lambda). \tag{3.6.19}$$

Данное уравнение справедливо для любого состояния, в котором при переходе к термодинамическому пределу квантовые числа  $I_j$  можно описать некоторой плотностью распределения  $\rho_p(\lambda)$ . В частном случае, когда числа  $I_j$  заданы формулой (2.2.4), мы получаем, что на интервале  $[-q, q]$  плотности вакансий и частиц совпадают  $\rho_t(\lambda) = \rho_p(\lambda) = \rho(\lambda)$ , а вне этого интервала плотность частиц равна нулю. Мы приходим к уравнению (2.2.9).

Вычисление энергии возбуждений производится аналогично тому, как это было сделано в лекции 2. Минимальные изменения связаны с заменой меры интегрирования (3.6.3).

В заключение отметим, что вопросы, затронутые в этой лекции, рассматриваются также в работах [5], [8], [13].

## Лекция 4. Корреляционные функции одномерных непроницаемых бозонов

### 4.1. Определения

В этой и последующих лекциях мы начнем изучение корреляционных функций в модели одномерного Бозе-газа. По определению корреляционной функцией оператора  $\mathcal{O}$  называется

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T = \frac{\text{tr}(\mathcal{O}e^{-H/T})}{\text{tr} e^{-H/T}}. \quad (4.1.1)$$

Здесь  $H$  — гамильтониан (1.2.3),  $T$  — температура, а след берется по пространству состояний. Если мы выберем в качестве базиса в этом пространстве систему собственных функций гамильтониана, которые мы на время обозначим символом<sup>1</sup>  $|\omega_n\rangle$ , то формулу (4.1.1) можно переписать в виде

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T = \frac{\sum_n \langle \omega_n | \mathcal{O} | \omega_n \rangle e^{-E_n/T}}{\sum_n \langle \omega_n | \omega_n \rangle e^{-E_n/T}}, \quad (4.1.2)$$

где  $E_n$  — собственное значение гамильтониана, отвечающее собственной функции  $|\omega_n\rangle$ . Подчеркнем, что в этой формуле собственные функции должны быть нормированы на единицу  $\langle \omega_n | \omega_n \rangle = 1$ .

В случае нулевой температуры в суммах в формуле (4.1.2) выживает лишь одно слагаемое, отвечающее минимальному собственному значению, т.е. среднее по основному состоянию  $|\omega_0\rangle$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \omega_0 | \mathcal{O} | \omega_0 \rangle. \quad (4.1.3)$$

Ясно, что для вычисления корреляционных функций необходимо прежде всего нормировать собственные функции на единицу. Для этого нужно вычислить норму состояния, заданного уравнением (1.2.10), что в свою очередь сводится к вычислению интеграла

---

<sup>1</sup>В данном случае индекс  $n$  не указывает на то, что  $|\omega_n\rangle$  является  $n$ -частичным состоянием, а просто перечисляет всевозможные собственные функции.

в (1.4.3). Как мы уже отмечали в лекции 1, в рамках описываемого метода вычислить этот интеграл не удается. Тем более, трудно рассчитывать на то, что нам удастся вычислить среднее какого-то нетривиального оператора  $\mathcal{O}$ . Поэтому, начиная с этого момента мы будем рассматривать случай непроницаемых бозонов (свободных фермионов), т.е. предел  $c \rightarrow \infty$ . Мы уже видели в предыдущих лекциях, что этот частный случай весьма прост. Например, все интегральные уравнения, описывающие основное состояние и состояние термодинамического равновесия, становятся тривиальными. Тем не менее, как мы увидим ниже, корреляционные функции даже в этом простом частном случае остаются весьма нетривиальными.

## 4.2. Норма собственной функции

Для определенности мы в дальнейшем будем рассматривать большой канонический ансамбль (т.е. с дополнительным членом  $-\hbar Q$  в гамильтониане). Напомним, что в этом случае собственные значения энергии даются формулой (2.7.3).

В пределе  $c \rightarrow \infty$  формулы для собственных векторов гамильтониана сильно упрощаются. Общее выражение для собственной функции по-прежнему записывается в виде (1.2.10)

$$|\omega_N\rangle \equiv |\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle = \frac{1}{N!} \int_0^L \chi(\{x\}|\{\lambda\}) \prod_{j=1}^N \Psi^\dagger(x_j) d^N x |0\rangle, \quad (4.2.1)$$

однако явное выражение для функции  $\chi(\{x\}|\{\lambda\})$  после нормировки на  $(-ic)^{(N^2-N)/2}$  становится

$$\chi(\{x\}|\{\lambda\}) = \prod_{j>k}^N \epsilon(x_j - x_k) \det_N(e^{ix_k \lambda_j}). \quad (4.2.2)$$

При этом параметры  $\lambda_j$  удовлетворяют системе уравнений Бете, которая принимает вид

$$e^{iL\lambda_j} = (-1)^{N-1}. \quad (4.2.3)$$

Иными словами  $\lambda_j = 2\pi I_j/L$ , где  $I_j$  – целые или полужелые числа в зависимости от четности  $N$ . В дальнейшем будем считать для

определенности, что  $N$  четное.<sup>2</sup> Тогда параметры  $\lambda$  пропорциональны полуцелым числам  $\lambda_k = 2\pi(n_k + 1/2)/L$ .

Прежде всего, для правильной нормировки собственных функций нам необходимо вычислить норму вектора

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 &= \langle \lambda_1, \dots, \lambda_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle = \frac{1}{N!} \int_0^L |\chi_N(\{x\} | \{\lambda\})|^2 d^N x \\ &= \frac{1}{N!} \int_0^L \det_N(e^{-ix_k \lambda_j}) \det_N(e^{ix_k \lambda_j}) d^N x. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Разумеется, мы можем просто взять представление (1.4.3), разделить правую часть на  $c^{N^2-N}$ , перейти к пределу  $c \rightarrow \infty$  и получить  $\mathcal{N}^2 = L^N$ . Напомним однако, что в рамках описываемого метода формула (1.4.3) является всего лишь гипотезой. В то же время, в точке свободных фермионов формула для нормы может быть доказана строго, исходя из интегрального представления (4.2.4).

Докажем следующую лемму.

**ЛЕММА 4.2.1.** Пусть  $f_j(x)$  и  $g_j(x)$  – набор функций, интегрируемых с квадратом на интервале  $[a, b]$  ( $a$  и  $b$  могут быть комплексными). Тогда

$$\int_a^b \det_N f_k(x_j) \det_N g_k(x_j) d^N x = N! \det_N \left( \int_a^b f_j(x) g_k(x) dx \right). \quad (4.2.5)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Имеем

$$\begin{aligned} & \int_a^b \det_N f_k(x_j) \det_N g_k(x_j) d^N x \\ &= \sum_P (-1)^{[P]} \int_a^b \prod_{j=1}^N f_j(x_{P(j)}) \cdot \det_N g_k(x_j) d^N x \\ &= \sum_P (-1)^{[P]} \int_a^b \prod_{j=1}^N f_j(x_j) \cdot \det_N g_k(x_{P^{-1}(j)}) d^N x \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Читатель легко может самостоятельно проверить, что при нечетных  $N$  ни вывод представления для корреляционных функций, ни конечный результат не изменяются.

$$\begin{aligned}
&= \sum_P (-1)^{[P]} \int_a^b \prod_{j=1}^N f_j(x_j) \cdot \det_N g_k(x_j) \cdot (-1)^{[P]} d^N x \\
&= N! \int_a^b \prod_{j=1}^N f_j(x_j) \cdot \det_N g_k(x_j) d^N x. \tag{4.2.6}
\end{aligned}$$

Поясним сделанные преобразования. Сначала мы записали первый из детерминантов согласно его определению. Далее в каждом члене суммы по перестановкам была сделана замена переменных интегрирования  $x_{P(j)} \rightarrow x_j$ . При такой замене во втором детерминанте происходит перестановка строк. Возвращая эти строки на исходные места, мы получаем дополнительный знак  $(-1)^{[P]}$ , который сокращается с исходным  $(-1)^{[P]}$ . Так как после этого от перестановки ничего не зависит, сумма по этим перестановкам дает  $N!$ . По сути доказано, что так как исходное подынтегральное выражение было симметричным по переменным  $x_1, \dots, x_N$ , то каждый член суммы по перестановкам дает тот же вклад, что и произведение диагональных членов первой матрицы.

Продолжим преобразования далее.

$$\begin{aligned}
&N! \int_a^b \prod_{j=1}^N f_j(x_j) \cdot \det_N g_k(x_j) d^N x \\
&= N! \int_a^b \det_N (f_j(x_j) g_k(x_j)) d^N x = N! \det_N \left( \int_a^b f_j(x_j) g_k(x_j) dx_j \right). \tag{4.2.7}
\end{aligned}$$

Снова сделаем пояснения. Каждый из сомножителей произведения вносится в соответствующую строку второго детерминанта. Теперь каждая переменная интегрирования  $x_j$  входит только в  $j$ -ю строчку, следовательно, можно выполнить интегрирование построчно. Остается удалить у каждой переменной интегрирования индекс  $j$ , и мы приходим к утверждению леммы.

**СЛЕДСТВИЕ 4.2.1.** Пусть  $f_j(x)$  и  $g_j(x)$  – набор функций, суммируемых с квадратом на некотором множестве  $X$ . Тогда

$$\sum_{x_1 \in X} \cdots \sum_{x_N \in X} \det_N f_k(x_j) \det_N g_k(x_j) = N! \det_N \left( \sum_{x \in X} f_j(x) g_k(x) \right). \tag{4.2.8}$$

Доказательство полностью аналогично рассмотренному выше.

Вернемся к вычислению нормы. Воспользовавшись леммой 4.2.1, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^2 &= \det_N \left( \int_0^L e^{i(\lambda_j - \lambda_k)x} dx \right) \\ &= \det_N \left( \frac{e^{i(\lambda_j - \lambda_k)L} - 1}{i(\lambda_j - \lambda_k)} \right) = \det_N (L\delta_{jk}) = L^N. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Действительно, в силу уравнений Бете (4.2.3)  $e^{i(\lambda_j - \lambda_k)L} = 1$ , поэтому все внедиагональные элементы получившейся матрицы обращаются в нуль. Для диагональных элементов после раскрытия неопределенности получаем, что все они равны  $L$ .

### 4.3. Форм-фактор поля

Определим матричный элемент

$$F_N(x|\{\mu\}, \{\lambda\}) = \frac{1}{L^{N+1/2}} \langle \mu_1, \dots, \mu_{N+1} | \Psi^\dagger(x) | \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle, \quad (4.3.1)$$

который будем называть форм-фактором поля  $\Psi^\dagger(x)$ . В этой формуле  $\langle \mu_1, \dots, \mu_{N+1} |$  и  $| \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle$  суть два произвольных собственных состояния гамильтониана. Легко получить, что

$$F_N(x|\{\mu\}, \{\lambda\}) = \frac{1}{N!L^{N+1/2}} \int_0^L \bar{\chi}_{N+1}(\{z\}, x|\{\mu\}) \chi_N(\{z\}|\{\lambda\}) d^N z. \quad (4.3.2)$$

Подставляя явные выражения для функций  $\chi$ , имеем

$$\begin{aligned} &F_N(x|\{\mu\}, \{\lambda\}) \\ &= \frac{1}{N!L^{N+1/2}} \int_0^L \prod_{j=1}^N \epsilon(x - z_j) \det_N (e^{iz_k \lambda_j}) \det_{N+1} \begin{pmatrix} e^{-iz_1 \mu_k} \\ \dots \\ e^{-iz_N \mu_k} \\ e^{-ix \mu_k} \end{pmatrix} d^N z. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Здесь мы явно указали, что в матрице  $(N+1) \times (N+1)$  в первых  $N$  строках стоят элементы  $e^{-iz_j \mu_k}$ , а в последней строке  $e^{-ix \mu_k}$ .

Далее, действуя точно так же, как и при доказательстве леммы 4.2.1, мы приходим к следующему выражению:

$$F_N(x|\{\mu\}, \{\lambda\}) = \frac{1}{L^{N+1/2}} \det_{N+1} \begin{pmatrix} \int_0^L \epsilon(x-z)e^{iz(\lambda_1-\mu_k)} dz & & \\ & \cdots & \\ \int_0^L \epsilon(x-z)e^{iz(\lambda_N-\mu_k)} dz & & \\ & & e^{-ix\mu_k} \end{pmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$F_N(x|\{\mu\}, \{\lambda\}) = \frac{(-2i)^N}{L^{N+1/2}} e^{ix(\sum_{j=1}^N \lambda_j - \sum_{j=1}^{N+1} \mu_j)} \det_{N+1} \begin{pmatrix} 1/(\lambda_1 - \mu_k) & & \\ & \cdots & \\ 1/(\lambda_N - \mu_k) & & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Здесь в последней строке детерминанта стоят единицы. При выполнении интегрирования мы учли уравнения Бете. При этом, поскольку  $\lambda_j$  пропорциональны полужелым числам, а  $\mu_j$  пропорциональны целым (так как число параметров  $\mu_j$  на единицу больше, чем число параметров  $\lambda_j$ ), то разность  $\lambda_j - \mu_k$  никогда не равна нулю. Далее, вычитая из всех столбцов последний, мы получаем, что все элементы  $(N+1)$ -й строки, кроме последнего, обращаются в нуль. Тогда детерминант сводится к детерминанту матрицы порядка  $N$ , и мы приходим к новой формуле

$$\begin{aligned} & F_N(x|\{\mu\}, \{\lambda\}) \\ &= \frac{(-2i)^N}{L^{N+1/2}} e^{ix(\sum_{j=1}^N \lambda_j - \sum_{j=1}^{N+1} \mu_j)} \det_N \left( \frac{1}{\lambda_j - \mu_k} - \frac{1}{\lambda_j - \mu_{N+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Отсюда следует еще одно представление

$$\begin{aligned} F_N(x|\{\mu\}, \{\lambda\}) &= \frac{(-2i)^N}{L^{N+1/2}} e^{ix(\sum_{j=1}^N \lambda_j - \sum_{j=1}^{N+1} \mu_j)} \\ &\quad \times \frac{\prod_{a=1}^N (\mu_a - \mu_{N+1})}{\prod_{a=1}^N (\lambda_a - \mu_{N+1})} \det_N \left( \frac{1}{\lambda_j - \mu_k} \right). \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Детерминант в формуле (4.3.7) носит название детерминанта Коши. Можно написать еще несколько представлений для форм-

фактора поля, воспользовавшись тождествами:

$$\begin{aligned} & \det_N \left( \frac{1}{\lambda_j - \mu_k} - \frac{1}{\lambda_j - \mu_{N+1}} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \det_N \left( \frac{1}{\lambda_j - \mu_k} - \frac{\alpha}{\lambda_j - \mu_{N+1}} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\prod_{a>b}^N (\lambda_a - \lambda_b) \prod_{a>b}^{N+1} (\mu_b - \mu_a)}{\prod_{a=1}^N \prod_{b=1}^{N+1} (\lambda_a - \mu_b)} = \sum_P (-1)^{|P|} \prod_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j - \mu_{P(j)}}. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Поясним эти тождества. Первое равенство следует из того, что ранг матрицы  $1/(\lambda_j - \mu_{N+1})$  равен 1. Действительно, рассмотрим  $\det(A + \alpha B)$ , где  $A$  – произвольная матрица, а матрица  $B$  имеет единичный ранг. Если мы разложим этот детерминант по степеням параметра  $\alpha$ , то очевидно, что коэффициентами при  $\alpha^n$  являются всевозможные  $n \times n$  миноры матрицы  $B$ . В силу условия  $\text{rank } B = 1$  все они равны нулю при  $n > 1$ , откуда следует, что  $\det(A + \alpha B)$  является линейной функцией параметра  $\alpha$ . В нашем случае получаем, что функция  $\det(1/(\lambda_j - \mu_k) - \alpha/(\lambda_j - \mu_{N+1}))$  линейна по  $\alpha$ . Но для любой линейной функции  $f(\alpha)$  справедливо  $(1 + \partial/\partial \alpha)f(\alpha)|_{\alpha=0} = f(1)$ .

Во втором равенстве использована формула (4.3.7) и явное представление для детерминанта Коши:

$$\det_N \left( \frac{1}{\lambda_j - \mu_k} \right) = \frac{\prod_{a>b}^N (\lambda_a - \lambda_b)(\mu_b - \mu_a)}{\prod_{a=1}^N \prod_{b=1}^N (\lambda_a - \mu_b)}. \quad (4.3.9)$$

Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно доказать справедливость этого представления.

Наконец третье равенство легко доказать индукцией по  $N$ , рассматривая вычеты в точках  $\mu_k = \lambda_j$ .

#### 4.4. Матричный элемент оператора $\Psi(x_1)\Psi^\dagger(x_2)$

Рассмотрим теперь матричный элемент вида

$$g_N(x|\{\lambda\}) = \frac{\langle \lambda_1, \dots, \lambda_N | \Psi(x_1)\Psi^\dagger(x_2) | \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle}{\langle \lambda_1, \dots, \lambda_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle}, \quad x = x_2 - x_1. \quad (4.4.1)$$

Раскладывая этот матричный элемент по полному набору состояний

$$g_N(x|\{\lambda\}) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_{N+1}} \frac{\langle \lambda_1, \dots, \lambda_N | \Psi(x_1) | \mu_1, \dots, \mu_{N+1} \rangle}{\langle \lambda_1, \dots, \lambda_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle} \times \frac{\langle \mu_1, \dots, \mu_{N+1} | \Psi^\dagger(x_2) | \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle}{\langle \mu_1, \dots, \mu_{N+1} | \mu_1, \dots, \mu_{N+1} \rangle}, \quad (4.4.2)$$

мы приходим к следующему представлению

$$g_N(x|\{\lambda\}) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_{N+1}} \bar{F}_N(x_1|\{\mu\}, \{\lambda\}) F_N(x_2|\{\mu\}, \{\lambda\}). \quad (4.4.3)$$

Здесь суммирование ведется по всем наборам  $\mu_1, \dots, \mu_{N+1}$ , в которых параметры  $\mu_j$  попарно различны. От суммирования по наборам легко перейти к индивидуальному суммированию по каждой переменной  $\mu_j$

$$g_N(x|\{\lambda\}) = \frac{1}{(N+1)!} \sum_{\mu_1 \in 2\pi n/L} \dots \sum_{\mu_{N+1} \in 2\pi n/L} \bar{F}_N(x_1|\{\mu\}, \{\lambda\}) F_N(x_2|\{\mu\}, \{\lambda\}), \quad (4.4.4)$$

поскольку в любом случае при совпадающих  $\mu_j$  форм-фактор обращается в нуль. Воспользовавшись формулами (4.3.8), получаем

$$g_N(x|\{\lambda\}) = \frac{4^N e^{ix \sum_{j=1}^N \lambda_j}}{(N+1)! L^{2N+1}} \sum_{\mu_1 \in 2\pi n/L} \dots \sum_{\mu_{N+1} \in 2\pi n/L} e^{-ix \sum_{k=1}^{N+1} \mu_k} \times \sum_P (-1)^{|P|} \prod_{j=k}^N \frac{1}{\lambda_k - \mu_{P(k)}} \times \left(1 + \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \det_N \left( \frac{1}{\lambda_j - \mu_k} - \frac{\alpha}{\lambda_j - \mu_{N+1}} \right) \Big|_{\alpha=0}. \quad (4.4.5)$$

Дальнейшие преобразования очень похожи на те, которые делались при доказательстве леммы 4.2.1. Прежде всего мы заменяем сумму по перестановкам на одно слагаемое, умноженное

на  $(N + 1)!$

$$\begin{aligned}
 g_N(x|\{\lambda\}) &= \frac{4^N e^{ix \sum_{j=1}^N \lambda_j}}{L^{2N+1}} \\
 &\times \sum_{\mu_1 \in 2\pi n/L} \cdots \sum_{\mu_{N+1} \in 2\pi n/L} e^{-ix \sum_{k=1}^{N+1} \mu_k} \prod_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k - \mu_k} \\
 &\times \left(1 + \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \det_N \left( \frac{e^{-ix\mu_k}}{\lambda_j - \mu_k} - \frac{\alpha e^{-ix\mu_k}}{\lambda_j - \mu_{N+1}} \right) \Big|_{\alpha=0}.
 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Теперь вносим в соответствующий столбец детерминанта множители  $e^{-ix\mu_k}/(\lambda_k - \mu_k)$

$$\begin{aligned}
 g_N(x|\{\lambda\}) &= \frac{4^N e^{ix \sum_{j=1}^N \lambda_j}}{L^{2N+1}} \sum_{\mu_1 \in 2\pi n/L} \cdots \sum_{\mu_{N+1} \in 2\pi n/L} e^{-ix\mu_{N+1}} \\
 &\times \left(1 + \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \det_N \left( \frac{e^{-ix\mu_k}}{(\lambda_j - \mu_k)(\lambda_k - \mu_k)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha e^{-ix\mu_k}}{(\lambda_j - \mu_{N+1})(\lambda_k - \mu_k)} \right) \Big|_{\alpha=0}.
 \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Поскольку параметры  $\mu_k$  при  $k = 1, \dots, N$  входят лишь в  $k$ -й столбец, мы можем внести под знак детерминанта и суммы по параметрам  $\mu_1, \dots, \mu_N$

$$\begin{aligned}
 g_N(x|\{\lambda\}) &= \frac{4^N e^{ix \sum_{j=1}^N \lambda_j}}{L^{2N+1}} \sum_{\mu_{N+1} \in 2\pi n/L} \left( e^{-ix\mu_{N+1}} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \\
 &\times \det_N \left( \sum_{\mu_k \in 2\pi n/L} \frac{e^{-ix\mu_k}}{(\lambda_j - \mu_k)(\lambda_k - \mu_k)} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\mu_k \in 2\pi n/L} \frac{\alpha e^{-ix(\mu_k)}}{(\lambda_j - \mu_{N+1})(\lambda_k - \mu_k)} \right) \Big|_{\alpha=0}.
 \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Особняком стоит сумма по параметру  $\mu_{N+1}$ , поскольку в детерминанте (4.4.8) эта переменная входит в каждую строку. Заметим однако, что от  $\mu_{N+1}$  зависит только матрица, пропорциональная

параметру  $\alpha$ , по которому ведется дифференцирование в нуле. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \left( e^{-ix\mu_{N+1}} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) \det_N \left( \sum_{\mu_k \in 2\pi n/L} \frac{e^{-ix\mu_k}}{(\lambda_j - \mu_k)(\lambda_k - \mu_k)} \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{\mu_k \in 2\pi n/L} \frac{\alpha e^{-ix(\mu_{N+1} + \mu_k)}}{(\lambda_j - \mu_{N+1})(\lambda_k - \mu_k)} \right) \Big|_{\alpha=0} \\
 &= e^{-ix\mu_{N+1}} \det_N \left( \sum_{\mu_k \in 2\pi n/L} \frac{e^{-ix\mu_k}}{(\lambda_j - \mu_k)(\lambda_k - \mu_k)} \right) \\
 & \quad - \sum_{j,k=1}^N \frac{e^{-ix(\mu_{N+1} + \mu_k)}}{(\lambda_j - \mu_{N+1})(\lambda_k - \mu_k)} M_{jk}, \tag{4.4.9}
 \end{aligned}$$

где коэффициенты  $M_{jk}$  не зависят от  $\mu_{N+1}$  и являются алгебраическими дополнениями к соответствующим матричным элементам. Мы видим, что суммирование по  $\mu_{N+1}$  тоже можно внести под знак детерминанта, а именно,

$$\begin{aligned}
 & g_N(x|\{\lambda\}) \\
 &= \frac{4^N e^{ix \sum_{j=1}^N \lambda_j}}{L^{2N+1}} \left( \sum_{\mu_{N+1} \in 2\pi n/L} e^{-ix\mu_{N+1}} + \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) \\
 & \quad \times \det_N \left( \sum_{\mu_k \in 2\pi n/L} \frac{e^{-ix\mu_k}}{(\lambda_j - \mu_k)(\lambda_k - \mu_k)} \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{\mu_k \in 2\pi n/L} \sum_{\mu_{N+1} \in 2\pi n/L} \frac{\alpha e^{-ix(\mu_{N+1} + \mu_k)}}{(\lambda_j - \mu_{N+1})(\lambda_k - \mu_k)} \right) \Big|_{\alpha=0}. \tag{4.4.10}
 \end{aligned}$$

Действительно, выполняя в формуле (4.4.10) дифференцирование по  $\alpha$  в нуле, мы вновь приходим к (4.4.9).

Остается выполнить суммирование. Для этого воспользуемся формулой.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-inz}}{n-a} = -\frac{\pi}{\sin \pi a} e^{-iza + i\pi a \epsilon(z)}, \quad -\pi < z < \pi, \quad z \neq 0. \tag{4.4.11}$$

Отсюда, учитывая, что  $-2L < x = x_2 - x_1 < 2L$ , получаем

$$\sum_{\mu \in 2\pi n/L} \frac{e^{-ix\mu}}{(\mu - \lambda_j)} = -\frac{i}{2} L \epsilon(x) e^{-ix\lambda_j}. \quad (4.4.12)$$

Здесь мы учли, что параметры  $\lambda_j$  пропорциональны полуцелым числам  $\lambda_j = 2\pi(n_j + 1/2)/L$ . Продифференцировав (4.4.11) по  $a$ , находим также

$$\sum_{\mu \in 2\pi n/L} \frac{e^{-ix\mu}}{(\mu - \lambda_j)^2} = \frac{L^2}{4} \left(1 - \frac{2|x|}{L}\right) e^{-ix\lambda_j}. \quad (4.4.13)$$

Подставляя (4.4.12), (4.4.13) в (4.4.10) и опуская несложные промежуточные выкладки, мы получаем следующее представление для корреляционной функции полей  $g_N(x|\{\lambda\})$

$$g_N(x|\{\lambda\}) = \left( \delta(x) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \times \det_N \left( \delta_{jk} + \frac{1}{L} V_0^{(x)}(\lambda_j, \lambda_k) + \frac{\alpha}{L} P_0^{(x)}(\lambda_j, \lambda_k) \right) \Big|_{\alpha=0}, \quad (4.4.14)$$

где

$$V_0^{(x)}(\lambda, \mu) = -\frac{4 \sin(|x|/2)(\lambda - \mu)}{\lambda - \mu}, \quad (4.4.15)$$

$$P_0^{(x)}(\lambda, \mu) = e^{-(ix/2)(\lambda + \mu)}. \quad (4.4.16)$$

Обсудим теперь вопрос о термодинамическом пределе выражения (4.4.14). Пусть вектор  $|\lambda_1, \dots, \lambda_N\rangle$  представляет собой основное состояние гамильтониана. Тогда

$$\lambda_j = \frac{2\pi}{L} \left( j - \frac{N+1}{2} \right). \quad (4.4.17)$$

Как мы уже видели в лекции 2, детерминанты матриц вида  $\delta_{jk} + M_{jk}/L$  в термодинамическом пределе переходят в фредгольмовы детерминанты интегральных операторов  $\mathbf{I} + \mathbf{M}\rho$ . В нашем случае  $\rho(\lambda) = 1/2\pi$ , следовательно,

$$\langle \Psi(x_1)\Psi^\dagger(x_2) \rangle = \left( \delta(x) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \det \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2\pi} \mathbf{V}_0^{(x)} + \frac{\alpha}{2\pi} \mathbf{P}_0^{(x)} \right) \Big|_{\alpha=0}, \quad (4.4.18)$$

где ядра  $\mathbf{V}_0^{(x)}$  и  $\mathbf{P}_0^{(x)}$  даются формулами (4.4.15), (4.4.16).

### 4.5. Матричный элемент оператора

$$\Psi(x_1, t_1)\Psi^\dagger(x_2, t_2)$$

Форм-факторный подход очень удобен для вычисления разновременных корреляционных функций. Напомним, что зависимость от времени полей  $\Psi$  и  $\Psi^\dagger$  задается с помощью оператора эволюции

$$\Psi(x, t) = e^{iHt}\Psi(x)e^{-iHt}, \quad \Psi^\dagger(x, t) = e^{iHt}\Psi^\dagger(x)e^{-iHt}. \quad (4.5.1)$$

Определим зависящий от времени форм-фактор поля

$$\begin{aligned} F_N(x, t|\{\mu\}, \{\lambda\}) &= \frac{1}{L^{N+1/2}} \langle \mu_1, \dots, \mu_{N+1} | \Psi^\dagger(x, t) | \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle \\ &= \exp\left(-iht + it \sum_{j=1}^{N+1} \mu_j^2 - it \sum_{j=1}^N \lambda_j^2\right) F_N(x|\{\mu\}, \{\lambda\}). \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Теперь мы можем вычислить разновременную корреляционную функцию полей

$$g_N(x, t|\{\lambda\}) = \frac{\langle \lambda_1, \dots, \lambda_N | \Psi(x_1, t_1)\Psi^\dagger(x_2, t_2) | \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle}{\langle \lambda_1, \dots, \lambda_N | \lambda_1, \dots, \lambda_N \rangle}, \quad (4.5.3)$$

$$x = x_2 - x_1, \quad t = t_2 - t_1,$$

в виде суммы по форм-факторам

$$g_N(x, t|\{\lambda\}) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_{N+1}} \bar{F}_N(x_1, t_1|\{\mu\}, \{\lambda\}) F_N(x_2, t_2|\{\mu\}, \{\lambda\}). \quad (4.5.4)$$

Дальнейшие вычисления в точности совпадают с рассмотренными выше. В итоге мы получаем

$$\begin{aligned} g_N(x, t|\{\lambda\}) &= \frac{4^N e^{iht+ix \sum_{j=1}^N \lambda_j - it \sum_{j=1}^N \lambda_j^2}}{L^{2N+1}} \\ &\times \left( \sum_{\mu_{N+1} \in 2\pi n/L} e^{-ix\mu_{N+1} + it\mu_{N+1}^2} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \det_N \left( \sum_{\mu_k \in 2\pi n/L} \frac{e^{-ix\mu_k + it\mu_k^2}}{(\lambda_j - \mu_k)(\lambda_k - \mu_k)} \right. \\ & \left. - \sum_{\mu_k \in 2\pi n/L} \sum_{\mu_{N+1} \in 2\pi n/L} \frac{\alpha e^{-ix(\mu_{N+1} + \mu_k) + it(\mu_{N+1}^2 + \mu_k^2)}}{(\lambda_j - \mu_{N+1})(\lambda_k - \mu_k)} \right) \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Теперь суммы по параметрам  $\mu$  не вычисляются в элементарных функциях. Однако в пределе большого  $L$  эти суммы можно упростить.

## 4.6. Пределы сингулярных сумм

Рассмотрим сумму с простым полюсом. Пусть требуется вычислить сумму

$$S = \frac{1}{L} \sum_{\mu \in 2\pi n/L} \frac{f(\mu)}{\mu - \lambda}, \quad (4.6.1)$$

в пределе  $L \rightarrow \infty$ . Здесь  $f(\mu)$  – гладкая функция, убывающая или быстро осциллирующая на бесконечности, а  $\lambda$  – некоторое фиксированное вещественное число, не совпадающее с  $2\pi n/L$ . Удобно разбить эту сумму на три слагаемых  $S = S_- + S_+ + S_0$ , где

$$S_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \frac{f(2\pi n/L)}{n - \tilde{\lambda}}, \quad (4.6.2)$$

и  $\tilde{\lambda} = L\lambda/2\pi$ . Числа  $N_1$  и  $N_2$  следует выбрать так, чтобы выполнялось

$$\tilde{\lambda} + N_1 \gg 1, \quad N_2 - \tilde{\lambda} \gg 1. \quad (4.6.3)$$

Суммы  $S_-$  и  $S_+$  являются дополнительными к  $S_0$  и их термодинамические пределы легко вычисляются

$$\begin{aligned} S_- &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{-N_1-1} \frac{f(2\pi n/L)}{n - \tilde{\lambda}} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-2\pi N_1/L} \frac{f(\mu) d\mu}{\mu - \lambda}, \\ S_+ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \frac{f(2\pi n/L)}{n - \tilde{\lambda}} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi N_2/L}^{\infty} \frac{f(\mu) d\mu}{\mu - \lambda}. \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Вычислим предел суммы  $S_0$ .

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \frac{f(2\pi n/L) - f(2\pi\tilde{\lambda}/L)}{n - \tilde{\lambda}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \frac{f(2\pi\tilde{\lambda}/L)}{n - \tilde{\lambda}} \\
 &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi N_1/L}^{2\pi N_2/L} \frac{(f(\mu) - f(\lambda)) d\mu}{\mu - \lambda} + \frac{f(\lambda)}{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \frac{1}{n - \tilde{\lambda}}.
 \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

Для последнего слагаемого в правой части формулы (4.6.5) имеем

$$\begin{aligned}
 &\frac{f(\lambda)}{2\pi} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \frac{1}{n - \tilde{\lambda}} \\
 &= \frac{f(\lambda)}{2\pi} (\psi(N_2 + 1 - \tilde{\lambda}) - \psi(-N_1 - \tilde{\lambda})) \\
 &= \frac{f(\lambda)}{2\pi} (\psi(N_2 + 1 - \tilde{\lambda}) - \psi(N_1 + 1 + \tilde{\lambda}) - \pi \operatorname{ctg}(\pi\tilde{\lambda})) \\
 &\rightarrow \frac{f(\lambda)}{2\pi} \left( \log \frac{N_2 - \tilde{\lambda}}{N_1 + \tilde{\lambda}} - \pi \operatorname{ctg}(\pi\tilde{\lambda}) \right).
 \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

Здесь были использованы следующие свойства логарифмической производной  $\Gamma$ -функции

$$\begin{aligned}
 \psi(z) &= \frac{d}{dz} \log \Gamma(z), & \psi(z) - \psi(1-z) &= -\pi \operatorname{ctg} \pi z, \\
 \psi(z) &\rightarrow \log z \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

Теперь разобьем интеграл в правой части формулы (4.6.5) на разность двух интегралов, каждый из которых понимается в смысле главного значения. Тогда получим

$$S_0 \rightarrow \frac{1}{2\pi} \text{V. P.} \int_{-2\pi N_1/L}^{2\pi N_2/L} \frac{f(\mu) d\mu}{\mu - \lambda} - \frac{f(\lambda)}{2} \operatorname{ctg}(\pi\tilde{\lambda}). \tag{4.6.8}$$

В итоге для полной суммы  $S$  мы имеем

$$S \rightarrow \frac{1}{2\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu) d\mu}{\mu - \lambda} - \frac{f(\lambda)}{2} \operatorname{ctg}(\pi\tilde{\lambda}). \tag{4.6.9}$$

Дифференцируя эту формулу по  $\lambda$ , мы получаем формулу для суммы, содержащей полюс второго порядка

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} \sum_{\mu \in 2\pi n/L} \frac{f(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} \\ & \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu) d\mu}{\mu - \lambda} + \frac{Lf(\lambda)}{4 \sin^2(\pi\tilde{\lambda})} - \frac{f'(\lambda)}{2} \text{ctg}(\pi\tilde{\lambda}). \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Мы видим, что из-за присутствия в конечных результатах функций  $\text{ctg}(L\lambda/2)$  и  $\sin^2(L\lambda/2)$  рассмотренные сингулярные суммы не имеют хорошо определенного предела при  $L \rightarrow \infty$ . Однако в нашем частном случае, когда  $\lambda = (2\pi/L)(m + 1/2)$ , предел формулы (4.6.9) существует, а (4.6.10) ведет себя линейно по  $L$

$$S \rightarrow \frac{1}{2\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu) d\mu}{\mu - \lambda}, \quad (4.6.11)$$

$$\frac{1}{L} \sum_{\mu \in 2\pi n/L} \frac{f(\mu)}{(\mu - \lambda)^2} \rightarrow \frac{Lf(\lambda)}{4} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu) d\mu}{\mu - \lambda}. \quad (4.6.12)$$

### 4.7. Разновременной коррелятор в термодинамическом пределе

Воспользовавшись формулами, полученными в предыдущем разделе, мы можем записать в пределе большого  $L$  следующее представление для разновременной корреляционной функции

$$\begin{aligned} g_N(x, t|\{\lambda\}) &= e^{iht} \left( G(x, t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \\ & \times \det_N \left( \delta_{jk} + \frac{1}{L} V_0^{(x,t)}(\lambda_j, \lambda_k) - \frac{\alpha}{L} P_0^{(x,t)}(\lambda_j, \lambda_k) \right) \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

Здесь

$$V_0^{(x,t)}(\lambda, \mu) = \frac{E(\lambda|x, t) - E(\mu|x, t)}{\lambda - \mu} \cdot e^{(ix/2)(\lambda+\mu) - (it/2)(\lambda^2 + \mu^2)}, \quad (4.7.2)$$

$$P_0^{(x,t)}(\lambda, \mu) = E(\lambda|x, t)E(\mu|x, t)e^{(ix/2)(\lambda+\mu) - (it/2)(\lambda^2 + \mu^2)}. \quad (4.7.3)$$

Функции  $G(x, t)$  и  $E(\lambda|x, t)$  равны

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda^2 - ix\lambda} d\lambda, \quad (4.7.4)$$

$$E(\lambda|x, t) = \frac{1}{2\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\mu^2 - ix\mu}}{\mu - \lambda} d\mu. \quad (4.7.5)$$

В термодинамическом пределе, если параметры  $\lambda_1 \dots, \lambda_N$  соответствуют основному состоянию, мы снова получаем детерминант Фредгольма

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(x_1, t_1) \Psi^\dagger(x_2, t_2) \rangle \\ &= e^{iht} \left( G(x, t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \det \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2\pi} \mathbf{V}_0^{(x,t)} - \frac{\alpha}{2\pi} \mathbf{P}_0^{(x,t)} \right) \Big|_{\alpha=0}. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Легко проверить, что при  $t = 0$  мы возвращаемся к формуле (4.4.18).

## 4.8. Конечная температура

Мы уже видели в лекции 3, что с формальной точки зрения переход от нулевой температуры к конечной состоит в замене меры интегрирования (3.6.3) в уравнениях (см., например, (3.6.2), (3.6.18)). Естественно ожидать, что ровно то же самое происходит и с корреляционными функциями. А именно,

$$\begin{aligned} & \langle \Psi(x_1, t_1) \Psi^\dagger(x_2, t_2) \rangle_T \\ &= e^{iht} \left( G(x, t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \det \left( \mathbf{I} + \frac{1}{2\pi} \mathbf{V}_T^{(x,t)} - \frac{\alpha}{2\pi} \mathbf{P}_T^{(x,t)} \right) \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \quad (4.8.1)$$

где интегральный оператор действует теперь на всей вещественной оси, а ядра  $\mathbf{V}_T^{(x,t)}$  и  $\mathbf{P}_T^{(x,t)}$  равны

$$V_T^{(x,t)}(\lambda, \mu) = V_0^{(x,t)}(\lambda, \mu) \vartheta(\mu), \quad P_T^{(x,t)}(\lambda, \mu) = P_0^{(x,t)}(\lambda, \mu) \vartheta(\mu), \quad (4.8.2)$$

где в пределе  $c \rightarrow \infty$  фермиевский вес  $\vartheta(\lambda)$  имеет вид

$$\vartheta(\lambda) = (1 + e^{\varepsilon(\lambda)/T})^{-1} = (1 + e^{(\lambda^2 - h)/T})^{-1}. \quad (4.8.3)$$

Строгое доказательство представления (4.8.1) сталкивается, однако, с некоторыми сложностями, особенно в случае положительного химического потенциала. Мы подробно рассмотрим более простой случай  $h < 0$  и коротко опишем последовательность действий в случае  $h > 0$ .

Для вывода формулы (4.8.1) мы можем воспользоваться определением корреляционной функции при конечной температуре (4.1.2), в которой  $\mathcal{O} = \Psi(x_1, t_1)\Psi^\dagger(x_2, t_2)$ . Действительно, формула (4.7.1) справедлива для матричного элемента оператора  $\Psi(x_1, t_1)\Psi^\dagger(x_2, t_2)$  по любому состоянию, т.е. для любого  $N$  и для любых корней системы уравнений Бете  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ . Поэтому все, что нам нужно сделать, это подставить представление (4.7.1) в формулу (4.8.1) и вычислить соответствующие суммы. Для этого мы выведем несколько простых формул.

Пусть  $W(x, y)$  – некоторая функция двух переменных, суммируемая с квадратом на  $\mathbb{R}^2$ . Построим  $m \times m$  матрицу  $W(n_j, n_k) = W(x, y)|_{\substack{x=n_j \\ y=n_k}}$ , где каждое из целых чисел  $n_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, m$ , находится в интервале  $-A \leq n_\ell \leq B - 1$  ( $A > 0$  и  $B > 0$  также предполагаются целыми). Вычислим сумму

$$J = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\{n\} \in [-A, B-1]} \det_m(W(n_j, n_k)). \quad (4.8.4)$$

Здесь в каждом слагаемом по  $m$  сумма берется по всем различным наборам целых чисел  $n_1, \dots, n_m$ , из интервала  $[-A, B - 1]$ . Поскольку при совпадающих  $n$  детерминант обращается в ноль, мы можем перейти от суммирования по наборам к суммированию по каждому  $n$  индивидуально, как мы уже не раз делали в предыдущих разделах

$$J = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n_1 \in [-A, B-1]} \dots \sum_{n_m \in [-A, B-1]} \det_m(W(n_j, n_k)). \quad (4.8.5)$$

Заметим, что в сумме по  $m$  все члены, начиная с  $m = B + A + 1$ , обращаются в нуль. Действительно, при  $m > B + A$  в детерминанте (4.8.5) по крайней мере два  $n$  совпадают, поскольку  $-A \leq n_\ell \leq B - 1$ . Тогда сумма по  $m$  есть не что иное, как разложение детерминанта матрицы порядка  $B + A$

$$J = \det_{B+A} (\delta_{jk} + W(n_j, n_k)). \quad (4.8.6)$$

Действительно, раскладывая детерминант в формуле (4.8.6) в ряд по степеням  $W$ , мы приходим к (4.8.5).

Пусть теперь в формуле (4.8.4) суммирование ведется только по четным  $m$ . Тогда

$$\begin{aligned} J_{\text{even}} &= \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ even}}}^{\infty} \sum_{\{n\} \in [-A, B-1]} \det_m(W(n_j, n_k)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\{n\} \in [-A, B-1]} (1 + (-1)^m) \det_m(W(n_j, n_k)) \\ &= \det_{B+A}(\delta_{jk} + W(n_j, n_k)) + \det_{B+A}(\delta_{jk} - W(n_j, n_k)). \end{aligned} \quad (4.8.7)$$

Аналогично при суммировании по нечетным  $m$  получим

$$\begin{aligned} J_{\text{odd}} &= \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ odd}}}^{\infty} \sum_{\{n\} \in [-A, B-1]} \det_m(W(n_j, n_k)) \\ &= \det_{B+A}(\delta_{jk} + W(n_j, n_k)) - \det_{B+A}(\delta_{jk} - W(n_j, n_k)). \end{aligned} \quad (4.8.8)$$

Воспользовавшись формулами (4.8.7), (4.8.8), мы теперь легко можем вычислить суммы в (4.1.2). Для того чтобы иметь возможность рассматривать числитель и знаменатель формулы (4.1.2) по отдельности, мы предположим на время, что корни системы уравнений Бете  $\lambda_j$  принадлежат некоторому конечному интервалу  $[-\Lambda_1, \Lambda_2]$ , где  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  – некоторые вещественные положительные числа, которые впоследствии будут устремлены к бесконечности.

Рассмотрим, например, сумму в знаменателе формулы (4.1.2) (напомним, что в этой формуле собственные функции  $|\omega\rangle$  нормированы на единицу). Имеем

$$Z = \sum_n e^{-E_n/T} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\{\lambda\} \in [-\Lambda_1, \Lambda_2]} e^{-\sum_{j=1}^m \varepsilon(\lambda_j)/T} \quad (4.8.9)$$

Учтем, что параметры  $\lambda_j$  пропорциональны целым числам при  $m$  нечетном, и полуцелым числам при четном  $m$ . Тогда равенство

(4.8.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\{\lambda\} \in [-\Lambda_1, \Lambda_2]} e^{-\sum_{j=1}^m \varepsilon(\lambda_j)/T} \\
 &= \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ even}}}^{\infty} \sum_{\{n\} \in [-A, B-1]} \det_m (\delta(n_j, n_k) e^{-\varepsilon(2\pi(n_j+1/2)/L)/T}) \\
 &\quad + \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ odd}}}^{\infty} \sum_{\{n\} \in [-A, B-1]} \det_m (\delta(n_j, n_k) e^{-\varepsilon(2\pi n_j/L)/T}). \quad (4.8.10)
 \end{aligned}$$

Здесь  $A$  и  $B$  выбраны так, что  $2\pi A/L = \Lambda_1$ ,  $2\pi B/L = \Lambda_2$ . Мы также использовали не совсем привычную форму записи для символа Кронекера  $\delta(n_j, n_k)$ :

$$\delta(n_j, n_k) = \begin{cases} 1, & n_j = n_k, \\ 0, & n_j \neq n_k. \end{cases} \quad (4.8.11)$$

Сделано это для того, чтобы при переходе от суммирования по наборам  $\{n\}$  к суммированию по каждому  $n_j$  автоматически исключить слагаемые, в которых несколько  $n$  совпадают. Теперь нам остается воспользоваться формулами (4.8.7), (4.8.8), подставив в них  $W(n_j, n_k) = \delta(n_j, n_k)$ . В результате мы получаем сумму четырех детерминантов, каждый из которых легко вычисляется, поскольку является детерминантом диагональной матрицы:

$$Z = \sum_n e^{-E_n/T} = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2) + \frac{1}{2}(Z_3 - Z_4), \quad (4.8.12)$$

где

$$Z_{1,2} = \prod_{j=-A}^{B-1} (1 \pm e^{-\varepsilon(\lambda_j)/T}), \quad Z_{3,4} = \prod_{j=-A}^{B-1} (1 \pm e^{-\varepsilon(\lambda'_j)/T}) \quad (4.8.13)$$

и параметры  $\lambda_j$  пропорциональны полуцелым  $\lambda_j = 2\pi(n+1/2)/L$ , а параметры  $\lambda'_j$  целым  $\lambda'_j = 2\pi n/L$ .

Совершенно аналогично вычисляется сумма в числителе формулы (4.1.2). Единственное, что нужно сделать при подстановке (4.7.1) в (4.1.2), это заменить стандартный символ Кронекера  $\delta_{jk}$

на символ вида (4.8.11), чтобы исключить суммирование по совпадающим целым (полуцелым) числам. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} & \sum_n \langle \omega_n | \Psi(x_1, t_1) \Psi^\dagger(x_2, t_2) | \omega_n \rangle e^{-E_n/T} \\ &= e^{iht} \left( G(x, t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left( \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_3 - U_4}{2} \right) \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \quad (4.8.14)$$

где

$$\begin{aligned} U_{1,2} = \det_{B+A} \left[ \delta_{jk} (1 \pm e^{-\varepsilon(\lambda_j)/T}) \right. \\ \left. \pm e^{-\varepsilon(\lambda_j)/T} \left( \frac{1}{L} V_0^{(x,t)}(\lambda_j, \lambda_k) - \frac{\alpha}{L} P_0^{(x,t)}(\lambda_j, \lambda_k) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.8.15)$$

$$\begin{aligned} U_{3,4} = \det_{B+A} \left[ \delta_{jk} (1 \pm e^{-\varepsilon(\lambda'_j)/T}) \right. \\ \left. \pm e^{-\varepsilon(\lambda'_j)/T} \left( \frac{1}{L} V_0^{(x,t)}(\lambda'_j, \lambda'_k) - \frac{\alpha}{L} P_0^{(x,t)}(\lambda'_j, \lambda'_k) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.8.16)$$

До сих пор все рассуждения были справедливы, не зависимо от знака химического потенциала  $h$ . Разница начинается при переходе к термодинамическому пределу, и заключается она в том, что при  $h > 0$  функция  $1 - e^{-\varepsilon(\lambda)/T}$  имеет два нуля на вещественной оси, в то время как при  $h < 0$  эта функция всегда положительна.

Рассмотрим случай  $h < 0$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8.1.** В пределе  $\Lambda_1, \Lambda_2, L \rightarrow \infty$

$$\lim_{\Lambda_1, \Lambda_2, L \rightarrow \infty} \frac{Z_1}{Z_3} = 1, \quad \lim_{\Lambda_1, \Lambda_2, L \rightarrow \infty} \frac{Z_{2,4}}{Z_{1,3}} = 0. \quad (4.8.17)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства воспользуемся формулой<sup>3</sup>

$$\sum_{j=-A}^{B-1} f\left(\frac{2\pi j}{L}\right) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\Lambda_1}^{\Lambda_2} f(z) dz - \frac{f(\Lambda_2) - f(-\Lambda_1)}{2} + O(L^{-1}). \quad (4.8.18)$$

<sup>3</sup>Формула (4.8.18) является тривиальным следствием формулы Эйлера–Маклорена (см., например, [14]).

Здесь  $f(z)$  – функция, непрерывная при  $-\Lambda_1 \leq z \leq \Lambda_2$ . Собственно, мы уже неоднократно пользовались этой формулой при замене суммы на интеграл, но учитывали лишь первое слагаемое в правой части (4.8.18). Теперь мы просто учли дополнительное слагаемое, остающееся конечным при  $L \rightarrow \infty$ . Согласно (4.8.18), имеем

$$\begin{aligned}
 \log\left(\frac{Z_1}{Z_3}\right) &= \sum_{j=-A}^{B-1} \log(1 + e^{-\varepsilon(2\pi(j+1/2)/L)/T}) \\
 &\quad - \sum_{j=-A}^{B-1} \log(1 + e^{-\varepsilon(2\pi j/L)/T}) \\
 &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\Lambda_1}^{\Lambda_2} [\log(1 + e^{-\varepsilon(z+\pi/L)/T}) - \log(1 + e^{-\varepsilon(z)/T})] dz \\
 &\quad + O(L^{-1}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\Lambda_1}^{\Lambda_2} \frac{d}{dz} \log(1 + e^{-\varepsilon(z)/T}) \cdot dz + O(L^{-1}) \\
 &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + e^{-\varepsilon(\Lambda_2)/T}}{1 + e^{-\varepsilon(\Lambda_1)/T}}\right) + O(L^{-1}) \rightarrow 0 \quad (4.8.19) \\
 &\quad \text{при } \Lambda_1, \Lambda_2, L \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Здесь при переходе от первой строки ко второй мы воспользовались (4.8.17) и учли, что внеинтегральные члены дают вклад порядка  $1/L$ . При переходе к третьей строке конечная разность была аппроксимирована производной, опять же с точностью до  $1/L$ . Таким образом, первое из утверждений (4.8.17) доказано.

Для доказательства второго равенства в (4.8.17) достаточно учесть только первый член в правой части формулы (4.8.18). Имеем

$$\begin{aligned}
 \log\left(\frac{Z_4}{Z_3}\right) &= \sum_{j=-A}^{B-1} \log(1 - e^{-\varepsilon(2\pi j/L)/T}) - \sum_{j=-A}^{B-1} \log(1 + e^{-\varepsilon(2\pi j/L)/T}) \\
 &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\Lambda_1}^{\Lambda_2} \log\left(\frac{1 - e^{-\varepsilon(z)/T}}{1 + e^{-\varepsilon(z)/T}}\right) dz + O(1). \quad (4.8.20)
 \end{aligned}$$

Функция, стоящая под знаком интеграла строго отрицательна, поэтому сам интеграл является конечной отрицательной величиной. Эта отрицательная величина в свою очередь умножается

на  $L$ , и тогда при  $L \rightarrow \infty$  мы получаем  $\log(Z_4/Z_3) \rightarrow -\infty$ , а значит,  $Z_4/Z_3 \rightarrow 0$ . Аналогично доказывается, что  $Z_2/Z_1 \rightarrow 0$  при  $L \rightarrow \infty$ .

Теперь мы легко можем перейти к термодинамическому пределу для корреляционной функции. Для этого в формулах (4.8.15), (4.8.16) для  $U_k$  вынесем множители  $1 \pm e^{-\varepsilon(\lambda_j)/T}$  или  $1 \pm e^{-\varepsilon(\lambda'_j)/T}$  за знак детерминанта. Тогда мы получим  $U_k = Z_k \tilde{U}_k$ , где

$$\tilde{U}_{1,2} = \det_{B+A} \left[ \delta_{jk} \pm \frac{\vartheta_{F,B}(\lambda_j)}{L} (V_0^{(x,t)}(\lambda_j, \lambda_k) - \alpha P_0^{(x,t)}(\lambda_j, \lambda_k)) \right], \quad (4.8.21)$$

$$\tilde{U}_{3,4} = \det_{B+A} \left[ \delta_{jk} \pm \frac{\vartheta_{F,B}(\lambda'_j)}{L} (V_0^{(x,t)}(\lambda'_j, \lambda'_k) - \alpha P_0^{(x,t)}(\lambda'_j, \lambda'_k)) \right]. \quad (4.8.22)$$

Здесь

$$\vartheta_{F,B}(\lambda) = (1 \pm e^{\varepsilon(\lambda)/T})^{-1}. \quad (4.8.23)$$

Очевидно, что детерминанты в формулах (4.8.21), (4.8.22) в термодинамическом пределе переходят в фредгольмовы детерминанты интегральных операторов, т.е. остаются конечными величинами. В то же время множители  $Z_k$  ведут себя согласно утверждению (4.8.17). Следовательно,

$$\lim_{\Lambda_1, \Lambda_2, L \rightarrow \infty} \frac{U_1 + U_2 + U_3 - U_4}{Z_1 + Z_2 + Z_3 - Z_4} = \lim_{\Lambda_1, \Lambda_2, L \rightarrow \infty} \tilde{U}_1. \quad (4.8.24)$$

Последний предел как раз и дает нам детерминант Фредгольма из формулы (4.8.1).

Опишем теперь кратко случай  $h > 0$ . Как уже отмечалось, в этом случае функция  $1 - e^{-\varepsilon(\lambda)/T}$  имеет простые нули в точках  $\lambda = \pm q$ , где  $q = \sqrt{h}$ . Это приводит к тому, что  $\log(1 - e^{-\varepsilon(\lambda)/T})$  имеет логарифмические особенности при  $\lambda = \pm q$ . Тогда при вычислении поведения произведений  $Z_2$  и  $Z_4$  при большом  $L$  мы не можем пользоваться формулой (4.8.18), так как она справедлива лишь для функций, непрерывных на интервале  $[-\Lambda_1, \Lambda_2]$ . Поэтому необходимо обобщить эту формулу на случай функций, имеющих логарифмические особенности. Делается это с помощью метода, вполне аналогичного методу, описанному в разделе 4.6, где мы вычисляли поведение при большом  $L$  сумм, содержащих

простой или двойной полюс. В результате формула (4.8.18) модифицируется. А именно, если  $f(\lambda)$  – гладкая функция, такая, что  $f(\pm q) = 0$ ,  $f'(\pm q) \neq 0$  и  $f(\lambda) > 0$  при  $|\lambda| > q$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{j=-A}^{B-1} \log f\left(\frac{2\pi j}{L}\right) &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\Lambda_1}^{\Lambda_2} \log |f(z)| dz - \frac{1}{2} \log \left| \frac{f(\Lambda_2)}{f(-\Lambda_1)} \right| \\ &\quad + \log\left(-\frac{1}{4} \sin^2 \frac{Lq}{2}\right) + O(L^{-1}). \end{aligned} \quad (4.8.25)$$

При этом предполагается, что  $\Lambda_{1,2} \gg q$ . Дополнительное слагаемое  $\log(-1/4 \sin^2(Lq/2))$  не имеет устойчивого поведения при больших  $L$ . Тем не менее его вещественная часть не положительна, а следовательно, второе равенство в формуле (4.8.17) по-прежнему остается в силе.

Вторая сложность в случае  $h > 0$  возникает при вычислении термодинамического предела детерминантов  $\tilde{U}_2$  и  $\tilde{U}_4$  (см. (4.8.21), (4.8.22)). Действительно, соответствующие матрицы пропорциональны функции  $\vartheta_B(\lambda)$ , которая имеет простые полюсы в точках  $\lambda = \pm q$ . Поэтому переход к термодинамическому пределу тут следует совершать более аккуратно, с использованием формул для сумм, содержащих простой полюс (см. раздел 4.6). Можно показать, что произведение  $\sin^2(Lq/2) \cdot \tilde{U}_{2,4}$  хоть и не имеет хорошо определенного термодинамического предела, но остается ограниченной величиной при  $L \rightarrow \infty$ . Этого, однако, уже вполне достаточно для перехода к пределу в формуле (4.8.24). В результате при  $h > 0$  мы получаем тот же самый ответ (4.8.1), что и в случае отрицательного химического потенциала.

В заключение отметим, что вопросы, затронутые в этой лекции, рассматриваются также в работах [8], [15].

## Лекция 5. Интегральные операторы и матричная задача Римана

### 5.1. Обозначения

В предыдущей лекции мы получили представление для корреляционной функции полей в виде детерминанта Фредгольма. Как мы уже отмечали ранее, фредгольмовы детерминанты являются крайне сложными объектами, которые удастся вычислить явным образом лишь в исключительных случаях. Возникает вопрос, каким образом можно если и не вычислить детерминант явно, то по крайней мере извлечь полезную информацию из полученного представления? В частности, можно ли, исходя из детерминантного представления (4.8.1), вычислить такую важную физическую характеристику, как асимптотическое поведение корреляционной функции полей при больших расстояниях и временах? Эта и следующая лекция посвящены решению именно этого вопроса.

В этой лекции мы свяжем фредгольмов детерминант (4.8.1) с решением матричной задачи Римана и решениями классического нелинейного уравнения Шрёдингера.

Разновременная корреляционная функция полей при конечной температуре равна детерминанту Фредгольма (4.8.1). Для упрощения обозначений мы в дальнейшем будем опускать индексы  $(x, t)$  и  $T$  у ядер интегральных операторов. Кроме того, с помощью преобразования подобия мы можем симметризовать эти ядра<sup>1</sup>

$$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} \sqrt{\frac{\vartheta(\lambda)}{\vartheta(\mu)}}, \quad \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \sqrt{\frac{\vartheta(\lambda)}{\vartheta(\mu)}}. \quad (5.1.1)$$

---

<sup>1</sup>Данная процедура вовсе не является обязательной и сделана исключительно для удобства дальнейшей работы. Но вообще говоря, все дальнейшее изложение остается справедливым и для несимметричных интегральных операторов.

Таким образом, представление для корреляционной функции по-прежнему имеет вид

$$\langle \Psi(x_1, t_1) \Psi^\dagger(x_2, t_2) \rangle_T = e^{iht} \left( G(x, t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \det(\mathbf{I} + \mathbf{V} - \alpha \mathbf{P}) \Big|_{\alpha=0}. \quad (5.1.2)$$

Здесь ядро  $V(\lambda, \mu)$  и одномерный проектор  $P(\lambda, \mu)$  равны

$$V(\lambda, \mu) = \frac{2}{\pi} \frac{E(\lambda|x, t) - E(\mu|x, t)}{\lambda - \mu} \times \sqrt{\vartheta(\lambda)\vartheta(\mu)} e^{(ix/2)(\lambda+\mu) - (it/2)(\lambda^2 + \mu^2)}, \quad (5.1.3)$$

$$P(\lambda, \mu) = \frac{2}{\pi} E(\lambda|x, t) E(\mu|x, t) \times \sqrt{\vartheta(\lambda)\vartheta(\mu)} e^{(ix/2)(\lambda+\mu) - (it/2)(\lambda^2 + \mu^2)}, \quad (5.1.4)$$

а функции  $G(x, t)$ ,  $E(\lambda|x, t)$  и  $\vartheta(\lambda)$  задаются соответственно формулами (4.7.4), (4.7.5) и (4.8.3). Интегральный оператор в формуле (5.1.2) действует на всей вещественной оси. Лишь в случае нулевой температуры функция  $\vartheta(\lambda)$  вырождается в характеристическую функцию интервала  $[-q, q]$ , где  $q = \sqrt{\hbar}$ , и тогда оператор фактически действует на интервале  $[-q, q]$ .

Обратим внимание на то, что ядро  $V(\lambda, \mu)$  может быть записано в виде

$$V(\lambda, \mu) = \frac{e_+(\lambda)e_-(\mu) - e_-(\lambda)e_+(\mu)}{\lambda - \mu}. \quad (5.1.5)$$

где

$$e_-(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \vartheta(\lambda) e^{(ix/2)\lambda - (it/2)\lambda^2}, \quad (5.1.6)$$

$$e_+(\lambda) = e_-(\lambda) E(\lambda|x, t). \quad (5.1.7)$$

В терминах функций  $e_\pm(\lambda)$  проектор  $P(\lambda, \mu)$  равен

$$P(\lambda, \mu) = e_+(\lambda)e_+(\mu). \quad (5.1.8)$$

Рассмотрим свойства интегральных операторов с ядрами вида

$$V(\lambda, \mu) = \frac{\langle E^L(\lambda) | E^R(\mu) \rangle}{\lambda - \mu}, \quad (5.1.9)$$

где  $\langle E^L(\lambda) |$  и  $|E^R(\mu)\rangle$  – два вектора из некоторого конечномерного пространства, компоненты которых являются функциями переменных  $\lambda$  и  $\mu$ . В числителе формулы (5.1.9) стоит скалярное произведение этих векторов. В частности, если мы положим

$$\langle E^L(\lambda) | = (-e_-(\lambda), e_+(\lambda)), \quad |E^R(\mu)\rangle = \begin{pmatrix} e_+(\mu) \\ e_-(\mu) \end{pmatrix}, \quad (5.1.10)$$

то получим ядро (5.1.5). Однако пока мы не будем предполагать ни условия (5.1.10), ни того, что векторы  $\langle E^L(\lambda) |$  и  $|E^R(\mu)\rangle$  двухкомпонентные, а рассмотрим более общий случай  $n$ -компонентных векторов.

Будем также считать, что ядро  $V(\lambda, \mu)$  несингулярно при  $\lambda = \mu$ , т.е.

$$\langle E^L(\lambda) | E^R(\lambda) \rangle = 0. \quad (5.1.11)$$

Равенство (5.1.11) будем называть условием ортогональности.

Напомним, что в соответствии с принятыми выше обозначениями действие интегральных операторов на функции записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda, \mu)} \circ f(\mu) &= f(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda, \mu) f(\mu) d\mu, \\ f(\lambda) \circ (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda, \mu)} &= f(\mu) + \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) V(\lambda, \mu) d\lambda. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

В частности, запись вида  $|E^R(\lambda)\rangle \circ (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda, \mu)}$  означает, что оператор  $\mathbf{I} + \mathbf{V}$  действует на каждую компоненту вектора  $|E^R(\lambda)\rangle$  по отдельности:

$$\begin{aligned} |E^R(\lambda)\rangle \circ (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda, \mu)} \\ \iff E_j^R(\mu) + \int_{-\infty}^{\infty} E_j^R(\lambda) V(\lambda, \mu) d\lambda, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Определим два новых вектора  $|F^R(\lambda)\rangle$  и  $\langle F^L(\lambda) |$ , как решения интегральных уравнений

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda, \mu)} \circ \langle F^L(\mu) | &= \langle E^L(\lambda) |, \\ |F^R(\lambda)\rangle \circ (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda, \mu)} &= |E^R(\mu)\rangle. \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

Имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1.1. Пусть

$$(\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda, \nu)} \circ (\mathbf{I} - \mathbf{R})_{(\nu, \mu)} = \mathbf{I}. \quad (5.1.15)$$

Тогда ядро  $R$  резольвенты равно:

$$R(\lambda, \mu) = \frac{\langle F^L(\lambda) | F^R(\mu) \rangle}{\lambda - \mu}. \quad (5.1.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий (5.1.14) следует, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{R})_{(\lambda, \mu)} \circ \langle E^L(\mu) | &= \langle F^L(\lambda) |, \\ |E^R(\lambda) \rangle \circ (\mathbf{I} - \mathbf{R})_{(\lambda, \mu)} &= |F^R(\mu) \rangle. \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Умножая обе части равенства (5.1.15) на  $\lambda - \mu$ , имеем

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu)V(\lambda, \mu) - \int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda, \nu)(\lambda - \nu + \nu - \mu)R(\nu, \mu) d\nu \\ = (\lambda - \mu)R(\lambda, \mu), \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

или в силу (5.1.14), (5.1.17)

$$\begin{aligned} \langle E^L(\lambda) | E^R(\mu) \rangle - \int_{-\infty}^{\infty} \langle E^L(\lambda) | E^R(\nu) \rangle R(\nu, \mu) d\nu \\ = (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda, \nu)} \circ (\nu - \mu)R(\nu, \mu). \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

Отсюда получаем

$$\langle E^L(\lambda) | F^R(\mu) \rangle = (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda, \nu)} \circ (\nu - \mu)R(\nu, \mu). \quad (5.1.20)$$

Остается подействовать на получившееся равенство слева оператором  $\mathbf{I} - \mathbf{R}$ , и мы приходим к требуемому результату.

## 5.2. Задача Римана

В этом разделе мы покажем, что интегральные операторы с ядрами вида (5.1.9) оказываются тесно связанными с матричной задачей Римана специального вида.

Пусть требуется найти  $n \times n$  матрицу  $\chi(\lambda)$ , удовлетворяющую трем условиям

- 1)  $\chi(\lambda) \rightarrow I, \quad \lambda \rightarrow \infty$  (условие нормировки),
- 2)  $\chi(\lambda)$  — аналитическая функция  $\lambda$  при  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , (5.2.1)
- 3)  $\chi_-(\lambda) = \chi_+(\lambda)\widehat{G}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$  (условие скачка).

В условии 3 символами  $\chi_{\pm}(\lambda)$  обозначены предельные значения матрицы  $\chi(\lambda)$  соответственно слева и справа от вещественной оси (т.е. из верхней и из нижней полуплоскости), а  $\widehat{G}(\lambda)$  – некоторая матрица, называемая матрицей скачка, заданная на  $\mathbb{R}$ . Задача (5.2.1) называется матричной задачей Римана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В условии нормировки подразумевается, что  $\lambda$  может стремиться к бесконечности по любому направлению, в том числе и вдоль вещественной оси. Тогда очевидно, что для разрешимости задачи Римана необходимо, чтобы условия нормировки и скачка были бы согласованы, а именно,  $\widehat{G}(\lambda) \rightarrow I$  при  $\lambda \pm \infty$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. В задаче (5.2.1) матричнозначная функция  $\chi(\lambda)$  имеет разрез на вещественной оси. Это связано с тем, что именно на вещественной оси действует интегральный оператор (5.1.12). Вообще говоря, задача Римана может ставиться на достаточно произвольном ориентированном контуре  $\Gamma$ , не обязательно гладком или связанном.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2.1. Задача Римана (5.2.1) эквивалентна сингулярному интегральному уравнению<sup>2</sup>

$$\chi_+(\lambda) = I - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_+(\mu)(\widehat{G}(\mu) - I)}{\mu - \lambda - i0} d\mu. \quad (5.2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия задачи Римана. Тогда

$$\begin{aligned} & I - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_+(\mu)(\widehat{G}(\mu) - I)}{\mu - \lambda - i0} d\mu \\ &= I - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_-(\mu) - I - (\chi_+(\mu) - I)}{\mu - \lambda - i0} d\mu \\ &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_+(\mu) - I}{\mu - \lambda - i0} d\mu = \chi_+(\lambda). \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Здесь при выводе последнего равенства мы учли условие нормировки, из которого следует, что  $\chi_+(\mu) - I \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow \infty$ . Тогда,

<sup>2</sup>Если решение задачи Римана имеет разрез не на вещественной оси, а на некотором ориентированном контуре  $\Gamma$ , то и интеграл в (5.2.2) берется по  $\Gamma$  со сдвигом  $\lambda$  влево от контура.

закрывая контур интегрирования в верхней полуплоскости, мы видим, что интеграл равен вычету подынтегрального выражения в точке  $\mu = \lambda + i0$ .

Пусть теперь выполнено уравнение (5.2.2). Определим функцию  $\chi(\lambda)$  следующим образом:

$$\chi(\lambda) = I - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_+(\mu)(\widehat{G}(\mu) - I)}{\mu - \lambda} d\mu. \quad (5.2.4)$$

Тогда предельное значение этой функции на вещественной оси из верхней полуплоскости совпадает с  $\chi_+(\lambda)$ . Предельное значение из нижней полуплоскости равно

$$\chi_-(\lambda) = I - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_+(\mu)(\widehat{G}(\mu) - I)}{\mu - \lambda + i0} d\mu. \quad (5.2.5)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{z + i0} = \frac{1}{z - i0} - 2\pi i \delta(z), \quad (5.2.6)$$

получаем

$$\chi_-(\lambda) = \chi_+(\lambda) + \chi_+(\lambda)(\widehat{G}(\lambda) - I) = \chi_+(\lambda)\widehat{G}(\lambda). \quad (5.2.7)$$

Условие нормировки очевидно выполнено.

Интегральные операторы  $\mathbf{I} + \mathbf{V}$ , рассмотренные в предыдущем разделе, оказываются тесно связанными с задачей Римана (5.2.1), в которой матрица скачка имеет вид

$$\widehat{G}(\lambda) = I + 2\pi i \widehat{H}(\lambda), \quad (5.2.8)$$

где

$$\widehat{H}(\lambda) = |E^R(\lambda)\rangle\langle E^L(\lambda)|. \quad (5.2.9)$$

Следствием условия ортогональности (5.1.11) являются очевидные свойства

$$\text{tr } \widehat{H}(\lambda) = 0, \quad \widehat{H}^2(\lambda) = 0 \quad (5.2.10)$$

и, следовательно,

$$\det \widehat{G}(\lambda) = 1. \quad (5.2.11)$$

Отсюда мы немедленно получаем, что

$$\det \chi(\lambda) = 1. \quad (5.2.12)$$

Действительно, в силу (5.2.11) функция  $\det \chi(\lambda)$  непрерывна при переходе через вещественную ось, следовательно, она является аналитической функцией  $\lambda$  во всей комплексной плоскости. Тогда по теореме Лиувилля она тождественно равна константе, а в силу условия нормировки эта константа равна 1. Отсюда вытекает, что  $\chi^{-1}(\lambda)$  существует и удовлетворяет следующей задаче Римана

- 1')  $\chi^{-1}(\lambda) \rightarrow I, \lambda \rightarrow \infty,$
- 2')  $\chi^{-1}(\lambda)$  – аналитическая функция  $\lambda$  при  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$  (5.2.13)
- 3')  $\chi_-^{-1}(\lambda) = \widehat{G}^{-1}(\lambda)\chi_+^{-1}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}.$

В силу свойств (5.2.10) легко видеть, что  $\widehat{G}^{-1}(\lambda) = I - 2\pi i \widehat{H}(\lambda).$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2.2.** *Задачи Римана (5.2.1), (5.2.13) с матрицей скачка (5.2.8) эквивалентны интегральным уравнениям (5.1.14).*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть выполнено (5.1.14). Докажем, что

$$\chi(\lambda) = I - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F^R(\mu)\rangle\langle E^L(\mu)|}{\mu - \lambda} d\mu. \quad (5.2.14)$$

Условия нормировки и аналитичности функции, определенной формулой (5.2.14) очевидны. Докажем условие скачка. Имеем

$$\begin{aligned} \chi_+(\lambda)\widehat{G}(\lambda) &= \chi_+(\lambda) + 2\pi i \left[ |E^R(\lambda)\rangle\langle E^L(\lambda)| \right. \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F^R(\mu)\rangle\langle E^L(\mu)|E^R(\lambda)\rangle\langle E^L(\lambda)|}{\mu - \lambda - i0} d\mu \right]. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

В подынтегральном выражении образовалось скалярное произведение  $\langle E^L(\mu)|E^R(\lambda)\rangle,$  которое обращается в нуль при  $\lambda = \mu.$  Поэтому можно заменить в знаменателе  $\lambda + i0$  на  $\lambda$

$$\begin{aligned} &\chi_+(\lambda)\widehat{G}(\lambda) \\ &= \chi_+(\lambda) + 2\pi i \left[ |E^R(\lambda)\rangle - \int_{-\infty}^{\infty} |F^R(\mu)\rangle V(\mu, \lambda) d\mu \right] \langle E^L(\lambda)| \\ &= I - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F^R(\mu)\rangle\langle E^L(\mu)|}{\mu - \lambda - i0} d\mu + 2\pi i |F^R(\lambda)\rangle\langle E^L(\lambda)| \\ &= I - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F^R(\mu)\rangle\langle E^L(\mu)|}{\mu - \lambda + i0} d\mu = \chi_-(\lambda). \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Аналогично доказывается, что

$$\chi^{-1}(\lambda) = I - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|E^R(\mu)\rangle\langle F^L(\mu)|}{\mu - \lambda} d\mu. \quad (5.2.17)$$

Пусть теперь известны решения задач (5.2.1), (5.2.13). Докажем, что

$$|F^R(\lambda)\rangle = \chi(\lambda)|E^R(\lambda)\rangle. \quad (5.2.18)$$

Вспользуемся эквивалентностью задачи Римана и интегрально-го уравнения (5.2.2), которое принимает вид

$$\chi_+(\lambda) = I - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_+(\mu)\widehat{H}(\mu)}{\mu - \lambda - i0} d\mu. \quad (5.2.19)$$

Подействуем этим уравнением на вектор  $|E^R(\lambda)\rangle$

$$\chi_+(\lambda)|E^R(\lambda)\rangle = |E^R(\lambda)\rangle - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_+(\mu)|E^R(\mu)\rangle\langle E^L(\mu)|E^R(\lambda)\rangle}{\mu - \lambda - i0} d\mu. \quad (5.2.20)$$

В подынтегральном выражении вновь получилось скалярное произведение  $\langle E^L(\mu)|E^R(\lambda)\rangle$ , а значит, в знаменателе можно сделать замену  $\lambda + i0 \rightarrow \lambda$ . Тогда получим

$$(\chi_+(\mu)|E^R(\mu)\rangle) \circ (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\mu,\lambda)} = |E^R(\lambda)\rangle, \quad (5.2.21)$$

т.е.  $(\chi_+(\mu)|E^R(\mu)\rangle)$  удовлетворяет уравнению (5.1.14) слева от  $\mathbb{R}$ , а значит

$$|F^R(\lambda)\rangle = \chi_+(\lambda)|E^R(\lambda)\rangle. \quad (5.2.22)$$

Непосредственно на вещественной оси в силу условия ортогональности имеем

$$\begin{aligned} \chi_-(\lambda)|E^R(\lambda)\rangle &= \chi_+(\lambda)(I + 2\pi i|E^R(\lambda)\rangle\langle E^L(\lambda)|)|E^R(\lambda)\rangle \\ &= \chi_+(\lambda)|E^R(\lambda)\rangle. \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Таким образом равенство (5.2.22) может быть продолжено в нижнюю полуплоскость, и мы приходим к (5.2.18). Аналогично доказывается, что

$$\langle F^L(\lambda)| = \langle E^L(\lambda)|\chi^{-1}(\lambda). \quad (5.2.24)$$

Предложение доказано.

### 5.3. Асимптотические разложения

В силу условий нормировки матрицы  $\chi(\lambda)$  и  $\chi^{-1}(\lambda)$  стремятся к единичной матрице при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Опишем это поведение более подробно. Воспользуемся формулой (5.2.14).

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= I - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F^R(\mu)\rangle\langle E^L(\mu)|}{\mu - \lambda} d\mu \\ &= I + \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F^R(\mu)\rangle\langle E^L(\mu)| \left(1 - \mu^m/\lambda^m + \mu^m/\lambda^m\right)}{1 - \mu/\lambda} d\mu,\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

где  $m$  – любое целое положительное число. Отсюда находим

$$\chi(\lambda) = I + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k}{\lambda^{k+1}} + \mathcal{R},\tag{5.3.2}$$

где

$$\begin{aligned}B_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu^k |F^R(\mu)\rangle\langle E^L(\mu)| d\mu, \\ \mathcal{R} &= -\frac{1}{\lambda^m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^m |F^R(\mu)\rangle\langle E^L(\mu)|}{\mu - \lambda} d\mu.\end{aligned}\tag{5.3.3}$$

Заметим, что векторы  $\langle E^L(\lambda)|$  и  $|E^R(\lambda)\rangle$  пропорциональны корню из фермиевского веса  $\vartheta(\lambda)$ , который Гауссовым образом убывает на бесконечности:  $\vartheta(\lambda) \sim e^{-\lambda^2/T}$  при  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ . Из соотношений (5.2.18), (5.2.24) следует, что точно так же ведут себя на бесконечности векторы  $\langle F^L(\lambda)|$  и  $|F^R(\lambda)\rangle$ . Отсюда следует, что интегралы, определяющие коэффициенты  $B_k$  сходятся при любом  $k$ , а остаточный член  $\mathcal{R}$  пропорционален  $\lambda^{-m-1}$ :

$$\chi(\lambda) = I + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k}{\lambda^{k+1}} + O(\lambda^{-m-1}).\tag{5.3.4}$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты  $B_k$  не имеют разреза на вещественной оси, т.е. они не зависят от того, по какому направлению  $\lambda$  стремится к бесконечности. Разрез же в правой части формулы (5.3.4) сохраняется в остаточном члене.

В случае нулевой температуры, когда фермиевский вес вырождается в характеристическую функцию интервала  $[-q, q]$ ,

суммирование по  $m$  в формуле (5.3.4) может быть продолжено до бесконечности, причем полученный ряд оказывается абсолютно сходящимся при  $|\lambda| > q$ . Действительно, в этом случае мы можем написать

$$\chi(\lambda) = I + \frac{1}{\lambda} \int_{-q}^q \frac{|F^R(\mu)\rangle\langle E^L(\mu)|}{1 - \mu/\lambda} d\mu = I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\lambda^{k+1}}, \quad |\lambda| > q. \quad (5.3.5)$$

Мы видим, что функция  $\chi(\lambda)$  не имеет разреза при  $|\lambda| > q$ , как и должно быть. В случае же конечной температуры ряд (5.3.5) расходится всюду, кроме точки  $\lambda^{-1} = 0$ . Это не удивительно, так как раскладывать знаменатель  $1 - \mu/\lambda$  в бесконечную геометрическую прогрессию мы можем только при условии  $|\mu/\lambda| < 1$ , чего невозможно добиться при интегрировании по  $\mu$  по всей вещественной оси.

Аналогично получаем

$$\chi^{-1}(\lambda) = I - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\tilde{B}_k}{\lambda^{k+1}} + O(\lambda^{-m-1}), \quad (5.3.6)$$

где

$$\tilde{B}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^k |E^R(\mu)\rangle\langle F^L(\mu)| d\mu. \quad (5.3.7)$$

Очевидно, что коэффициенты  $\tilde{B}_k$  и  $B_k$  не являются независимыми, а выражаются друг через друга, например  $\tilde{B}_0 = B_0$ ,  $\tilde{B}_1 = B_1 - B_0^2$  и т.д. В этих соотношениях можно убедиться непосредственно, например

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} |E^R(\mu)\rangle\langle F^L(\mu)| d\mu = |F^R(\lambda)\rangle \circ (\mathbf{I} + \mathbf{V})_{(\lambda, \mu)} \circ \langle F^L(\mu)| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F^R(\lambda)\rangle\langle E^L(\lambda)| d\lambda = B_0. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Кроме того из условия  $\det \chi(\lambda) = 1$  следует еще ряд тождеств на эти коэффициенты, например,  $\text{tr } B_0 = 0$ .

## 5.4. Дифференциальные уравнения

В нашем случае векторы  $\langle E^L(\lambda)|$  и  $|E^R(\lambda)\rangle$  являются двухкомпонентными и зависят от дополнительных параметров: расстояния  $x$  и времени  $t$ . При этом легко видеть, что производные

по  $x$  и  $t$  от этих векторов могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} |E^R(\lambda)\rangle = L(\lambda) |E^R(\lambda)\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial z} \langle E^L(\lambda)| = -\langle E^L(\lambda)|L(\lambda), \quad (5.4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |E^R(\lambda)\rangle = M(\lambda) |E^R(\lambda)\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle E^L(\lambda)| = -\langle E^L(\lambda)|M(\lambda), \quad (5.4.2)$$

где<sup>3</sup>

$$L(\lambda) = \frac{1}{2i} \lambda \sigma_3 + \frac{1}{2i} [g, \sigma_3], \quad M(\lambda) = -\lambda L(\lambda) + \partial_x g, \quad (5.4.3)$$

$$g = -G\sigma_+.$$

Приведем подробные вычисления. Наиболее просто вычисляются производные от функции  $e_-(\lambda)$

$$\partial_x e_-(\lambda) = -\frac{\lambda}{2i} e_-(\lambda), \quad \partial_t e_-(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2i} e_-(\lambda). \quad (5.4.4)$$

Вычислим производные функции  $E$ .

$$\partial_x E(\lambda) = -\frac{i}{2\pi} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\mu^2 - ix\mu} (\mu - \lambda + \lambda)}{\mu - \lambda} d\mu = -i\lambda E(\lambda) - iG. \quad (5.4.5)$$

Аналогично вычисляется производная по времени

$$\partial_t E(\lambda) = i\lambda^2 E(\lambda) + i\lambda G - \partial_x G. \quad (5.4.6)$$

Отсюда находим

$$\partial_x e_+(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} e_+(\lambda) - iG e_-(\lambda), \quad (5.4.7)$$

$$\partial_t e_+(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2i} e_+(\lambda) + (i\lambda G - \partial_x G) e_-(\lambda).$$

Введем матрицу  $g = -G\sigma_+$ . Легко видеть, что

$$-iG\sigma_+ = \frac{1}{2i} [g, \sigma_3], \quad (5.4.8)$$

и мы получаем формулы (5.4.1)–(5.4.3).

<sup>3</sup>Напомним явные выражения для матриц Паули:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что вторая смешанная производная вектора  $|E^R(\lambda)\rangle$  не должна зависеть от порядка дифференцирования:

$$\partial_x \partial_t |E^R(\lambda)\rangle = \partial_t \partial_x |E^R(\lambda)\rangle.$$

Отсюда вытекает условие совместности формул (5.4.1)–(5.4.3)

$$\partial_t L - \partial_x M + [L, M] = 0. \quad (5.4.9)$$

Строго говоря, условие совместности формул (5.4.1)–(5.4.3) должно выполняться лишь в слабом смысле

$$(\partial_t L - \partial_x M + [L, M])|E^R(\lambda)\rangle = 0.$$

Однако, если существуют хотя бы два значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , при которых векторы  $|E^R(\lambda_1)\rangle$  и  $|E^R(\lambda_2)\rangle$  являются линейно независимыми, то слабое условие переходит в сильное (5.4.9). В нашем случае существование таких двух значений очевидно. Легко также проверить, что равенство вторых смешанных производных вектора  $\langle E^L(\lambda)|$  приводит к тому же условию совместности (5.4.9).

Подставляя в (5.4.9) явные выражения для  $L$  и  $M$ , получаем

$$\begin{aligned} & \partial_t \left( \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 + \frac{1}{2i} [g, \sigma_3] \right) - \partial_x \left( \frac{\lambda^2}{2i} \sigma_3 + \frac{\lambda}{2i} [g, \sigma_3] + \partial_x g \right) \\ & + \left[ \frac{\lambda}{2i} \sigma_3 + \frac{1}{2i} [g, \sigma_3], \partial_x g \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

или

$$\frac{1}{2i} [\partial_t g, \sigma_3] + \frac{\lambda}{2i} [\partial_x g, \sigma_3] - \partial_x^2 g + \frac{\lambda}{2i} [\sigma_3, \partial_x g] + \frac{1}{2i} [[g, \sigma_3], \partial_x g] = 0. \quad (5.4.11)$$

Члены, пропорциональные  $\lambda$ , сокращаются автоматически. Последний коммутатор обращается в нуль, так как  $[g, \sigma_3] \sim \sigma_+$  и  $g \sim \sigma_+$ . В итоге у нас остается

$$\frac{1}{2i} [\partial_t g, \sigma_3] - \partial_x^2 g = 0, \quad (5.4.12)$$

или

$$i \partial_t G - \partial_x^2 G = 0, \quad (5.4.13)$$

что, разумеется, верно.

Из условий (5.2.18), (5.2.24) следует, что представления, аналогичные (5.4.1), (5.4.2) существуют и для производных векторов  $|F^R(\lambda)\rangle$  и  $\langle F^L(\lambda)|$

$$\frac{\partial}{\partial x}|F^R(\lambda)\rangle = \mathcal{L}(\lambda)|F^R(\lambda)\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial z}\langle F^L(\lambda)| = -\langle F^L(\lambda)|\mathcal{L}(\lambda), \quad (5.4.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|F^R(\lambda)\rangle = \mathcal{M}(\lambda)|F^R(\lambda)\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t}\langle F^L(\lambda)| = -\langle F^L(\lambda)|\mathcal{M}(\lambda), \quad (5.4.15)$$

причем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda) &= \partial_x \chi(\lambda) \cdot \chi^{-1}(\lambda) + \chi(\lambda)L(\lambda)\chi^{-1}(\lambda), \\ \mathcal{M}(\lambda) &= \partial_t \chi(\lambda) \cdot \chi^{-1}(\lambda) + \chi(\lambda)M(\lambda)\chi^{-1}(\lambda). \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

Поскольку преобразование от  $|E^R(\lambda)\rangle$  к  $|F^R(\lambda)\rangle$  непрерывно на вещественной оси, матрицы  $\mathcal{L}(\lambda)$  и  $\mathcal{M}(\lambda)$  также непрерывны на вещественной оси. В этом можно убедиться и непосредственно, подставив в формулы (5.4.16) предельные значения  $\chi_{\pm}(\lambda)$  и воспользовавшись соотношениями

$$\partial_x \widehat{G} = [L, \widehat{G}], \quad \partial_t \widehat{G} = [M, \widehat{G}]. \quad (5.4.17)$$

С другой стороны, вне вещественной оси матрицы  $\chi(\lambda)$  и  $\chi^{-1}(\lambda)$  не имеют особенностей. Отсюда следует, что матрицы  $\mathcal{L}(\lambda)$  и  $\mathcal{M}(\lambda)$  имеют особенности там же, где и исходные матрицы  $L(\lambda)$  и  $M(\lambda)$ , т.е.  $\mathcal{L}(\lambda)$  является линейной функцией  $\lambda$ , а  $\mathcal{M}(\lambda)$  квадратичной функцией  $\lambda$ . Перепишем первое из уравнений (5.4.16) в виде

$$\partial_x \chi(\lambda) = \mathcal{L}(\lambda)\chi(\lambda) - \chi(\lambda)L(\lambda). \quad (5.4.18)$$

Пусть  $\mathcal{L}(\lambda) = \lambda\alpha + \beta$ . Подставим это представление в формулу (5.4.18), а для матрицы  $\chi(\lambda)$  воспользуемся асимптотическим разложением (5.3.4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \partial_x B_0(\lambda) + \dots &= (\lambda\alpha + \beta) \left( I + \frac{1}{\lambda} B_0 + \frac{1}{\lambda^2} B_1 + \dots \right) \\ &\quad - \left( I + \frac{1}{\lambda} B_0 + \frac{1}{\lambda^2} B_1 + \dots \right) \left( \frac{1}{2i} \lambda \sigma_3 + \frac{1}{2i} [g, \sigma_3] \right). \end{aligned} \quad (5.4.19)$$

Приравнивая коэффициенты при  $\lambda^1$  и  $\lambda^0$ , находим

$$\alpha = \frac{1}{2i} \sigma_3, \quad \beta = \frac{1}{2i} [B_0 + g, \sigma_3] \quad (5.4.20)$$

и, значит,

$$\mathcal{L}(\lambda) = \frac{1}{2i} \lambda \sigma_3 + \frac{1}{2i} [B_0 + g, \sigma_3]. \quad (5.4.21)$$

Помимо явного выражения для матрицы  $\mathcal{L}(\lambda)$  мы также получаем бесконечный набор тождеств, вытекающих из равенства нулю коэффициентов при отрицательных степенях  $\lambda$ , например,

$$2i \partial_x B_0 = [\sigma_3, B_1] + [B_0 + g, \sigma_3] B_0 - B_0 [g, \sigma_3]. \quad (5.4.22)$$

Соотношение (5.4.22) легко проверить непосредственным вычислением. Имеем

$$\begin{aligned} 2i \partial_x B_0 &= 2i \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} |F^R(\lambda)\rangle \langle E^L(\lambda)| d\lambda \\ &= 2i \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\lambda) |F^R(\lambda)\rangle \langle E^L(\lambda)| d\lambda \\ &\quad - 2i \int_{-\infty}^{\infty} |F^R(\lambda)\rangle \langle E^L(\lambda)| L(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda \sigma_3 + [B_0 + g, \sigma_3]) |F^R(\lambda)\rangle \langle E^L(\lambda)| d\lambda \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} |F^R(\lambda)\rangle \langle E^L(\lambda)| \left( \lambda \sigma_3 + \frac{1}{2i} [g, \sigma_3] \right) d\lambda \\ &= [\sigma_3, B_1] + [B_0 + g, \sigma_3] B_0 - B_0 [g, \sigma_3]. \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Совершенно аналогично из соотношения

$$\partial_t \chi(\lambda) = \mathcal{M}(\lambda) \chi(\lambda) - \chi(\lambda) M(\lambda). \quad (5.4.24)$$

находится матрица  $\mathcal{M}(\lambda)$

$$\mathcal{M}(\lambda) = -\lambda \mathcal{L}(\lambda) + \partial_x (g + B_0). \quad (5.4.25)$$

При выводе этого соотношения мы воспользовались тождеством (5.4.22).

Введем обозначение  $b = B_0 + g$ . Тогда матрицы  $\mathcal{L}(\lambda)$  и  $\mathcal{M}(\lambda)$  имеют точно такой же вид, как и исходные  $L(\lambda)$  и  $M(\lambda)$ , если в последних заменить  $g$  на  $b$ . Поэтому условие совместности

$$\partial_t \mathcal{L} - \partial_x \mathcal{M} + [\mathcal{L}, \mathcal{M}] = 0 \quad (5.4.26)$$

аналогично формуле (5.4.11)

$$\frac{1}{2i}[\partial_t b, \sigma_3] - \partial_x^2 b + \frac{1}{2i}[[b, \sigma_3], \partial_x b] = 0. \quad (5.4.27)$$

Однако на этот раз последний коммутатор не обращается в нуль, а дает нелинейный вклад в получающееся уравнение. Равенство нулю диагональных членов уравнения (5.4.27) эквивалентно условию

$$\partial_x b_{11} = -\partial_x b_{22} = ib_{12}b_{21}. \quad (5.4.28)$$

Легко видеть, что это условие автоматически удовлетворяется в силу (5.4.22). Внедиагональные члены дают нам систему уравнений на коэффициенты  $b_{12}$  и  $b_{21}$

$$\begin{aligned} i\partial_t b_{21} &= -\partial_x^2 b_{21} + 2b_{21}^2 b_{12}, \\ -i\partial_t b_{12} &= -\partial_x^2 b_{12} + 2b_{12}^2 b_{21}. \end{aligned} \quad (5.4.29)$$

Мы видим, что полученная система совпадает с классическим нелинейным уравнением Шредингера с константой связи  $c = 1$ . Более точно, поскольку  $b_{12} \neq \bar{b}_{21}$ , мы имеем дело с уравнением из иерархии AKNS (1.1.11).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Мы получили систему (5.4.29), как условие совместности уравнений (5.4.14) и (5.4.15). Как уже отмечалось условие совместности должно выполняться лишь в слабом смысле. Можно однако убедиться в справедливости уравнений (5.4.29) иным способом. Мы уже видели, что производная  $\partial_x B_0$  выражается через  $B_0$  и  $B_1$  (см. (5.4.22)). Действуя аналогичным образом, мы можем выразить  $\partial_x^2 B_0$  и  $\partial_t B_0$  через  $B_0$ ,  $B_1$  и  $B_2$ , подставить полученные выражения в левую часть (5.4.27) и убедиться в том, что она действительно равна нулю.

## 5.5. Производные детерминанта

Выразим теперь производные фредгольмова детерминанта через коэффициенты асимптотического разложения задачи Римана. Если ядро интегрального оператора зависит от некоторого параметра  $z$ , то из представления (2.4.4) следует, что производная от детерминанта по  $z$  равна

$$\partial_z \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) = \text{Tr } \partial_z \mathbf{V}(\mathbf{I} + \mathbf{V})^{-1}. \quad (5.5.1)$$

Напомним, что здесь и далее символом  $\text{Tr}$  обозначен след интегрального оператора, в то время как символ  $\text{tr}$  означает след матрицы. Воспользуемся этой формулой и вычислим производную по параметру  $\alpha$

$$\begin{aligned} & \left( G + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}(\lambda, \mu) - \alpha \mathbf{P}(\lambda, \mu)) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \left( G + \text{Tr}(P(\lambda, \mu) \circ (\mathbf{I} - \mathbf{R})_{(\mu, \lambda)}) \right) \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) = b_{12} \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Здесь мы воспользовались формулами (5.1.8), (5.1.10). Таким образом, ответ для корреляционной функции полей имеет вид

$$\langle \Psi(x_1, t_1) \Psi^\dagger(x_2, t_2) \rangle = e^{iht} b_{12} \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}). \quad (5.5.3)$$

Теперь вычислим производные детерминанта по  $x$  и  $t$ . Для этого сначала продифференцируем ядро  $V$ . Имеем

$$\partial_x V(\lambda, \mu) = - \frac{\langle E^L(\lambda) | (L(\lambda) - L(\mu)) | E^R(\mu) \rangle}{\lambda - \mu} = \frac{i}{2} \langle E^L(\lambda) | \sigma_3 | E^R(\mu) \rangle. \quad (5.5.4)$$

Аналогично

$$\partial_t V(\lambda, \mu) = \frac{\lambda + \mu}{2i} \langle E^L(\lambda) | \sigma_3 | E^R(\mu) \rangle - \frac{i}{2} \langle E^L(\lambda) | [g, \sigma_3] | E^R(\mu) \rangle. \quad (5.5.5)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \partial_x \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) &= \frac{i}{2} \text{Tr}(\langle E^L(\lambda) | \sigma_3 | E^R(\mu) \rangle \circ (\mathbf{I} - \mathbf{R})_{(\mu, \lambda)}) \\ &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E^L(\lambda) | \sigma_3 | F^R(\lambda) \rangle d\lambda \\ &= \frac{i}{2} \text{tr} \int_{-\infty}^{\infty} |F^R(\lambda)\rangle \langle E^L(\lambda) | \sigma_3 d\lambda = \text{tr}(b\sigma_3) = ib_{11}. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Производная по времени дается более сложным выражением

$$\begin{aligned} \partial_t \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) &= \frac{1}{2i} \text{Tr}(\langle E^L(\lambda) | (\lambda + \mu)\sigma_3 + [g, \sigma_3] | E^R(\mu) \rangle \circ (\mathbf{I} - \mathbf{R})_{(\mu, \lambda)}) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E^L(\lambda) | (\lambda\sigma_3 + [g, \sigma_3]) | F^R(\lambda) \rangle d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \langle F^L(\mu) | \mu \sigma_3 | E^R(\mu) \rangle d\mu \\
& = \frac{1}{2i} \operatorname{tr}((B_1 + \tilde{B}_1) \sigma_3) + \frac{1}{2i} \operatorname{tr}(B_0 [g, \sigma_3]) \\
& = i(B_1)_{22} - i(B_1)_{11} - ib_{12}G.
\end{aligned} \tag{5.5.7}$$

Здесь мы воспользовались соотношением  $\tilde{B}_1 = B_1 - B_0^2$ , а также равенством  $\operatorname{tr}(B_0^2 \sigma_3) = 0$ , которое следует из условия  $\operatorname{tr} B_0 = 0$ .

Вторые логарифмические производные детерминанта выражаются только через коэффициенты  $b_{12}$  и  $b_{21}$ :

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) &= -b_{12}b_{21}, \\
\partial_x \partial_t \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) &= i \partial_x b_{12} \cdot b_{21} - i \partial_x b_{21} \cdot b_{12}.
\end{aligned} \tag{5.5.8}$$

Отметим, что полученные выражения в точности совпадают с плотностями первого и второго интегралов движения для уравнений (5.4.29) (ср. также с формулами (1.1.9), (1.1.10)). Таким образом, фредгольмов детерминант играет роль  $\tau$ -функции иерархии АКНС (1.1.13), которая в нашем случае, правда, зависит только от двух времен  $t_1 = x$  и  $t_2 = t$ .

Мы видим, что корреляционные функции квантового нелинейного уравнения Шредингера в пределе свободных фермионов оказываются теснейшим образом связанными с классическим нелинейным уравнением Шредингера (более точно – с иерархией АКНС). Этот удивительный факт до сих пор не имеет исчерпывающего объяснения.

Таким образом мы свели задачу о вычислении детерминанта Фредгольма к решению хорошо изученных дифференциальных уравнений. К сожалению, это пока мало, что дает, поскольку сами по себе уравнения (5.4.29) имеют бесконечно много решений. Выбрать из них нужное можно, например, зная начальные данные, однако при  $t = 0$  интегральный оператор хоть и упрощается, но явно вычислить его детерминант по-прежнему не представляется возможным. О наличии функционального произвола в решениях системы (5.4.29) свидетельствует и тот факт, что мы при выводе этих уравнений совершенно не использовали явный вид фермиевского веса  $\vartheta(\lambda)$ . Легко видеть, что если заменить  $\vartheta(\lambda)$  на любую другую функцию (даже не обязательно непрерывную), достаточно быстро убывающую на бесконечности, то все приведенные рассуждения остаются в силе. В то же время детерминант Фредгольма безусловно зависит от конкретного вида весовой функции.

Приведенные выше рассуждения, казалось бы, обесценивают тот факт, что фредгольмов детерминант оказывается  $\tau$ -функцией иерархии AKNS, однако это не так. Дело в том, что тот же детерминант Фредгольма связан и с решением матричной задачи Римана, которая уже имеет единственное решение. Если нам удастся найти асимптотику этого решения при больших  $x$  и  $t$ , то подставив ее в уравнения (5.4.29), можно получить поправочные члены, вплоть до полного асимптотического разложения. Следующая лекция как раз и посвящена методу, позволяющему получить асимптотическое решение задачи Римана.

В заключение отметим, что вопросы, затронутые в этой лекции, рассматриваются также в работах [8], [16], [17].

## Лекция 6. Нелинейный метод наискорейшего спуска

### 6.1. Введение

В этой лекции мы переходим к вычислению асимптотического поведения корреляционных функций при больших расстояниях. Для этого мы построим асимптотическое решение задачи Римана (5.2.1). Существуют различные подходы для нахождения таких асимптотических решений. Мы опишем один из них, получивший название нелинейного метода наискорейшего спуска [18]. Этот метод возник сравнительно недавно, в 1993 г., и на сегодняшний день является, пожалуй, наиболее мощным. Опишем вкратце основные шаги этого метода.

На первом шаге в задаче Римана делается специальная подстановка, позволяющая факторизовать матрицу скачка на произведение верхне- и нижне-треугольных матриц. На втором шаге исходный контур, соответствующий разрезу решения задачи Римана, расщепляется на два или более контуров, на каждом из которых определена новая матрица скачка. При этом расщепление совершается таким образом, чтобы новые матрицы скачка оказались бы асимптотически близки к единичной матрице. Это позволяет найти лидирующую асимптотику решения исходной задачи Римана.

Описанные первые два шага являются достаточно общими и допускают лишь незначительные модификации в зависимости от конкретной задачи. Последующие шаги, напротив, сильно зависят от конкретной задачи. Если после расщепления исходного контура новые матрицы скачка оказываются *равномерно* близки к единичной, то тогда для нахождения поправок к лидирующему члену асимптотики достаточно воспользоваться сингулярным интегральным уравнением (5.2.2). В противном случае сначала приходится более детально исследовать задачу Римана в окрестностях точек, где равномерность асимптотических оценок нарушается.

Ниже мы рассмотрим простейший случай, соответствующий не зависящей от времени корреляционной функции полей при конечной температуре и отрицательном химическом потенциале. Мы также кратко поясним, с чем связаны дополнительные трудности вычисления асимптотики в других случаях и кратко охарактеризуем пути их преодоления.

Сначала напомним полученные ранее результаты. Корреляционная функция полей пропорциональна детерминанту Фредгольма

$$\langle \Psi^\dagger(x_2)\Psi(x_1) \rangle = -(B_0)_{12} \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}). \quad (6.1.1)$$

Для простоты мы изменили порядок операторов  $\Psi$  и  $\Psi^\dagger$ . Действительно, в случае, когда поля не зависят от времени, изменение порядка приводит к добавлению  $\delta$ -функции. С другой стороны функция  $G(x, t)$  (см. предыдущий раздел) при  $t = 0$  как раз и становится той самой  $\delta$ -функцией. Поэтому, изменив порядок полей, мы можем написать  $(B_0)_{12}$  вместо коэффициента  $b_{12}$ .

Ядро  $V(\lambda, \mu)$  в формуле (6.1.1) равно

$$V(\lambda, \mu) = -\frac{2 \sin(x(\lambda - \mu)/2)}{\lambda - \mu} \sqrt{\vartheta(\lambda)\vartheta(\mu)}, \quad (6.1.2)$$

где  $\vartheta(\lambda)$  – это фермиевский вес (4.8.3). Ядро (6.1.2) может быть записано в канонической форме (5.1.9)

$$V(\lambda, \mu) = \frac{\langle E^L(\lambda) | E^R(\mu) \rangle}{\lambda - \mu}, \quad (6.1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \langle E^L(\lambda) | &= (-e^{(ix/2)\lambda}, e^{-(ix/2)\lambda}) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \vartheta(\lambda), \\ |E^R(\mu) \rangle &= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} e^{-(ix/2)\mu} \\ e^{(ix/2)\mu} \end{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \vartheta(\mu), \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Множитель  $(B_0)_{12}$  в формуле (6.1.1) выражается через решение задачи Римана (5.2.1) с матрицей скачка  $\widehat{G}(\lambda)$  (5.2.8). В нашем конкретном случае

$$\widehat{G}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - 2\vartheta(\lambda) & 2\vartheta(\lambda)e^{-ix\lambda} \\ -2\vartheta(\lambda)e^{ix\lambda} & 1 + 2\vartheta(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (6.1.5)$$

Матрица  $B_0$  является первым коэффициентом асимптотического разложения  $\chi(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\chi(\lambda) = I + \frac{B_0}{\lambda} + O(\lambda^{-2}). \quad (6.1.6)$$

Тогда  $(B_0)_{12}$  – это просто соответствующий элемент матрицы  $B_0$ , и

$$\partial_x \log \det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) = i(B_0)_{11}. \quad (6.1.7)$$

Формулы (6.1.6), (6.1.7) позволяют, зная решение задачи Римана (5.2.1), найти корреляционную функцию с точностью до множителя, не зависящего от  $x$ .

## 6.2. Асимптотика быстро осциллирующих интегралов

Данный раздел является вспомогательным. Его цель состоит в том, чтобы проиллюстрировать основные идеи, лежащие в основе нелинейного метода наискорейшего спуска, на более простом примере – асимптотической оценке интегралов от быстро осциллирующих функций. Даже если читатель хорошо знаком с методами, применяющимися для подобных оценок, мы рекомендуем ему ознакомиться с содержанием этого раздела, поскольку мы рассматриваем все эти методы с точки зрения их применимости к решению матричной задачи Римана.

**6.2.1. Интеграл по всей оси.** Пусть требуется оценить интеграл вида

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(\lambda) d\lambda \quad (6.2.1)$$

при большом  $x$ . Функция  $f(\lambda)$  не зависит от  $x$  и предполагается голоморфной в некоторой полосе, содержащей вещественную ось. Будем считать для простоты, что ближайшая к вещественной оси и лежащая в верхней полуплоскости особенность этой функции является простым полюсом. Иными словами  $f(\lambda)$  представима в виде  $f(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)/(\lambda - \mu_0 - i\mu_1)$ , причем  $\mu_1 > 0$ , а особые точки функции  $\tilde{f}(\lambda)$  лежат дальше от вещественной оси, чем точка  $\mu_0 + i\mu_1$ . Тогда для вычисления асимптотики достаточно сдвинуть контур интегрирования в верхнюю полуплоскость на некоторую величину  $ia$  так, чтобы пересечь полюс в точке  $\mu_0 + i\mu_1$  (см. рис. 6.1), не затрагивая особенностей функции  $\tilde{f}(\lambda)$ . Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma} e^{i\lambda x} f(\lambda) d\lambda + 2\pi i \tilde{f}(\mu_0 + i\mu_1) e^{ix\mu_0 - \mu_1 x}. \quad (6.2.2)$$

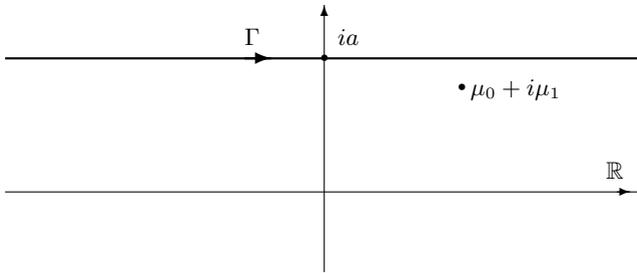


Рис. 6.1. Сдвиг контура в случае интегрирования по вещественной оси

Обратим внимание на то, что на контуре  $\Gamma$  подынтегральное выражение *равномерно* ограничено экспоненциально малой величиной  $e^{-ax}$ . Отсюда

$$J = 2\pi i \tilde{f}(\mu_0 + i\mu_1) e^{ix\mu_0 - \mu_1 x} + o(e^{-\mu_1 x}). \quad (6.2.3)$$

Асимптотика интеграла получилась экспоненциальной.

Если под интегралом стоит  $e^{-ix\lambda}$ , то контур следует сдвигать в нижнюю полуплоскость.

Ясно, что описанный метод вычисления асимптотики применим и тогда, когда  $f(\lambda)$  имеет полюсы высших порядков. Случай, когда особенностями функции  $f(\lambda)$  являются разрывы, более сложен. Однако и в этом случае, если контур интегрирования можно равномерно сдвинуть с вещественной оси, то подынтегральное выражение становится экспоненциально малым. Поэтому и в данной ситуации интеграл (6.2.1) экспоненциально убывает при больших  $x$ , хотя явно вычислить степень этого убывания может оказаться не просто.

**6.2.2. Интеграл по конечному отрезку.** Пусть теперь контур интегрирования представляет собой конечный отрезок

$$J = \int_{-q}^q e^{i\lambda x} f(\lambda) d\lambda. \quad (6.2.4)$$

В этом случае мы не можем сдвинуть контур целиком с вещественной оси, поскольку концы его зафиксированы. Возможная деформация показана на рис. 6.2. Здесь  $a$  можно выбрать произвольным образом, так чтобы функция  $f(\lambda)$  оставалась бы голоморфной в области, ограниченной контуром  $\Gamma$  и вещественной осью. Существенным является то обстоятельство, что теперь

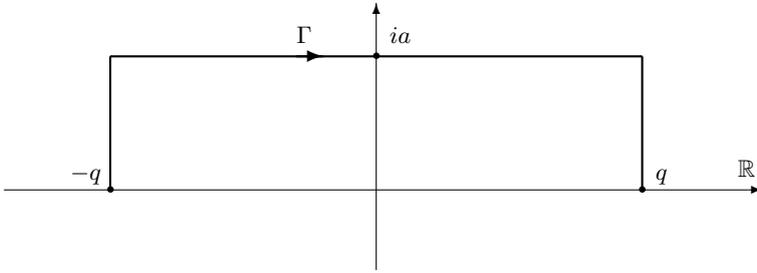


Рис. 6.2. Деформация контура в случае интегрирования по конечному отрезку

подынтегральное выражение не может быть сделано экспоненциально малым равномерно на всем контуре  $\Gamma$ . Действительно, если на горизонтальной части нового контура подынтегральное выражение равномерно ограничено множителем  $e^{-ax}$ , то на вертикальных отрезках это не так.

Рассмотрим подробнее интегралы по этим вертикальным отрезкам. Вычислим, например, интеграл по отрезку  $[-q, -q + ia]$ . Пользуясь тем, что  $f(\lambda)$  голоморфна в круге с центром в  $-q$  и радиусом большим  $a$ , разложим ее в степенной ряд

$$J_- = \int_{-q}^{-q+ia} e^{i\lambda x} f(\lambda) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-q)}{n!} \int_{-q}^{-q+ia} e^{i\lambda x} (\lambda + q)^n d\lambda. \quad (6.2.5)$$

Сделав замену переменной  $\lambda + q = i\mu$ , получаем

$$\begin{aligned} J_- &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} f^{(n)}(-q) e^{-iqx}}{n!} \int_0^a e^{-\mu x} \mu^n d\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} f^{(n)}(-q) e^{-iqx}}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \mu^n d\mu + O(e^{-ax}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{x}\right)^{n+1} f^{(n)}(-q) e^{-iqx}. \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

При выводе этой формулы мы воспользовались тем, что на луче  $[a, \infty)$  подынтегральная функция равномерно ограничена экспоненциально малым фактором  $e^{-ax}$ .

Совершенно аналогично вычисляется интеграл по отрезку  $[q, q + ia]$ , и в результате мы получаем, что интеграл  $J$  степенным образом убывает с ростом  $x$ . При этом асимптотика выражается через значения функции  $f(\lambda)$  и ее производных на концах интервала. Описанный способ вычисления асимптотики остается применимым и в том случае, если функция  $f(\lambda)$  имеет интегрируемые особенности на концах интервала, например

$$f(\lambda) \rightarrow (\lambda + q)^\nu \tilde{f}(\lambda), \quad \lambda \rightarrow -q, \quad (6.2.7)$$

где  $\nu > -1$ , а  $\tilde{f}(\lambda)$  уже является голоморфной в окрестности  $\lambda = -q$ .

**6.2.3. Случай седловой точки.** Вернемся снова к интегралу по вещественной оси, однако изменим осциллирующую функцию

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^2 t - i\lambda x} f(\lambda) d\lambda. \quad (6.2.8)$$

Рассмотрим поведение интеграла при  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ , и фиксированном конечном отношении  $x/2t = \lambda_0$ . Удобно переписать (6.2.8) в виде

$$J = e^{i\lambda_0^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda - \lambda_0)^2 t} f(\lambda) d\lambda. \quad (6.2.9)$$

Вообще говоря, ничто не мешает нам сдвинуть контур целиком с вещественной оси в верхнюю или нижнюю полуплоскость. Однако, на этот раз такой сдвиг ничего не дает, поскольку подынтегральное выражение не становится малым на новом контуре. Действительно, если мы сдвинем контур, например, в верхнюю полуплоскость (рис. 6.1), то справа от седловой точки функция  $e^{i(\lambda - \lambda_0)^2 t}$  станет экспоненциально малой, но слева от седловой точки она оказывается экспоненциально большой. Поэтому приходится совершать иную деформацию контура интегрирования, показанную на рис. 6.3. Теперь на наклонной части контура подынтегральное выражение убывает гауссовым образом, после чего продолжает экспоненциально убывать на горизонтальных “крыльях” контура  $\Gamma$ . Но, как и в предыдущем примере, экспоненциальные оценки не являются равномерными, поскольку вблизи  $\lambda_0$  подынтегральное выражение ведет себя, как  $O(1)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Ясно, что основной вклад в интеграл теперь дает малая окрестность седловой точки, поэтому, как и в предыдущем примере мы

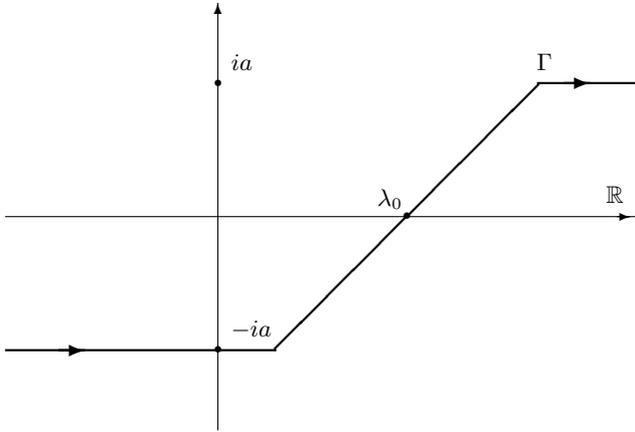


Рис. 6.3. Деформация контура интегрирования при наличии седловой точки

можем разложить функцию  $f(\lambda)$  в окрестности этой точки в степенной ряд. Ограничиваясь первым членом разложения, имеем

$$J \approx e^{i\lambda_0^2 t} f(\lambda_0) \int_{\lambda_0 - ae^{i\pi/4}}^{\lambda_0 + ae^{i\pi/4}} e^{i(\lambda - \lambda_0)^2 t} d\lambda. \quad (6.2.10)$$

Сделав замену переменных  $\lambda - \lambda_0 = \mu e^{i\pi/4}$  и распространяя интегрирование по  $\mu$  на всю вещественную ось, мы приходим к оценке

$$J \approx \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{i\lambda_0^2 t + i\pi/4} f(\lambda_0). \quad (6.2.11)$$

Поправки к этому выражению легко могут быть вычислены, если учесть следующие члены разложения функции  $f(\lambda)$ . Для нас, однако, важным является тот факт, что как и в случае интеграла по конечному отрезку, асимптотика вновь получилась степенной. Причина этого опять-таки заключается в невозможности сдвинуть целиком контур интегрирования с вещественной оси. Это, в свою очередь, приводит к неравномерности асимптотических оценок для подынтегрального выражения.

Мы приходим к следующему выводу. Если контур интегрирования можно деформировать так, что подынтегральное выражение становится *равномерно* экспоненциально малым на конту-

ре, то асимптотика интеграла от быстро осциллирующей функции является экспоненциальной. В противном случае асимптотика имеет степенной характер.

Это же правило работает и при нахождении асимптотического решения задачи Римана, матрица скачка которой содержит быстро осциллирующие функции. В случае корреляционных функций при нулевой температуре задача Римана формулируется на конечном отрезке, концы которого строго фиксированы. Это приводит к тому, что при любой деформации исходного контура разреза мы не можем получить равномерных оценок для матрицы скачка. В случае же корреляционной функции, зависящей от времени, из-за наличия в матрице скачка седловой точки, находящейся на вещественной оси, приходится проводить новые контуры разреза через эту седловую точку. И это снова приводит к неравномерности оценок.

Именно по этой причине мы подробно останавливаемся на простейшем случае – одновременном корреляторе полей при конечной температуре. Отметим, что даже в этой ситуации имеется некоторая разница между последовательностью действий в случае положительного и отрицательного химического потенциала. Мы рассмотрим случай  $h < 0$ , а в заключение кратко прокомментируем случай  $h > 0$ , а так же методы решения задачи Римана для зависящих от времени корреляционных функций при нулевой температуре.

### 6.3. Нелинейный метод наискорейшего спуска

Возможность асимптотического решения задачи Римана с матрицей скачка (6.1.5) связана с тем, что внедиагональные элементы  $\widehat{G}(\lambda)$  содержат быстро осциллирующие (при большом  $x$ ) функций  $e^{\pm ix\lambda}$ . Основная идея метода вычисления асимптотики состоит в деформации контура скачка таким образом, чтобы на новом контуре матрица скачка стала бы близка к единичной матрице. Если матрица скачка  $\widehat{G}(\lambda)$  аналитична и не имеет нулей в некоторой области, содержащей разрез, то в этой области контур скачка (разреза) может быть произвольным образом деформирован. Действительно, из условия  $\chi_-(\lambda) = \chi_+(\lambda)\widehat{G}(\lambda)$  следует, что  $\chi_-(\lambda)$  может быть аналитически продолжена в некоторую область слева от разреза (вплоть до ближайшей особенности  $\widehat{G}(\lambda)$ ). Аналогич-

но, из условия  $\chi_+(\lambda) = \chi_-(\lambda)\widehat{G}^{-1}(\lambda)$  следует, что  $\chi_+(\lambda)$  может быть аналитически продолжена в некоторую область справа от разреза (вплоть до ближайшего нуля  $\widehat{G}(\lambda)$ ). Таким образом существует некоторая общая область аналитичности функций  $\chi_+(\lambda)$  и  $\chi_-(\lambda)$ , и деформация контура скачка в этой области означает всего лишь переопределения места склейки двух функций.

Особенность матричной задачи Римана состоит в том, что в матрице скачка присутствуют быстро осциллирующие функции двух типов:  $e^{ix\lambda}$  и  $e^{-ix\lambda}$ , одна из которых становится экспоненциально малой в верхней полуплоскости, а другая в нижней. Поэтому невозможно деформировать контур скачка таким образом, чтобы одновременно сделать обе эти функции экспоненциально малыми.

Указанная трудность обходится следующим образом. Сделаем подстановку

$$\chi(\lambda) = \Phi(\lambda)A(\lambda), \quad (6.3.1)$$

где  $\Phi(\lambda)$  – новая неизвестная матрица, а  $A(\lambda)$  – диагональная матрица с элементами

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (6.3.2)$$

где  $\alpha(\lambda)$  является решением скалярной задачи Римана

$$\begin{aligned} \alpha_-(\lambda) &= \alpha_+(\lambda)(1 - 2\vartheta(\lambda)) & \text{при } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \alpha(\lambda) &\rightarrow 1 & \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

и  $\alpha(\lambda)$  аналитична в верхней и нижней полуплоскости. Смысл такой подстановки станет ясен чуть позже, а пока обсудим возможность такой подстановки. Скалярная задача Римана (6.3.3) является корректно сформулированной при условии, что функция скачка

$$1 - 2\vartheta(\lambda) = \frac{e^{(\lambda^2-h)/T} - 1}{e^{(\lambda^2-h)/T} + 1} \quad (6.3.4)$$

не обращается в нуль на вещественной оси<sup>1</sup>. Мы видим, что это возможно лишь при отрицательном химическом потенциале:  $h < 0$ . Тогда решением задачи (6.3.3) является функция

$$\alpha(\lambda) = \exp\left(\frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(1 - 2\vartheta(\mu))}{\mu - \lambda} d\mu\right). \quad (6.3.5)$$

<sup>1</sup>Более подробно о скалярной задаче Римана см. в [9].

Обратим внимание на то, что при  $h > 0$  интеграл в (6.3.5) был бы просто неопределен.

После подстановки (6.3.1) мы получаем задачу Римана для матрицы  $\Phi(\lambda)$  с новой матрицей скачка

$$\Phi_-(\lambda) = \Phi_+(\lambda)\widehat{G}_\Phi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (6.3.6)$$

где

$$\widehat{G}_\Phi(\lambda) = A_+(\lambda)\widehat{G}(\lambda)A_-^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & P(\lambda)e^{-i\lambda x} \\ Q(\lambda)e^{i\lambda x} & 1 + P(\lambda)Q(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (6.3.7)$$

и

$$P(\lambda) = \frac{2\alpha_-^2(\lambda)\vartheta(\lambda)}{1 - 2\vartheta(\lambda)}, \quad Q(\lambda) = -\frac{2\vartheta(\lambda)}{\alpha_+^2(\lambda)(1 - 2\vartheta(\lambda))}. \quad (6.3.8)$$

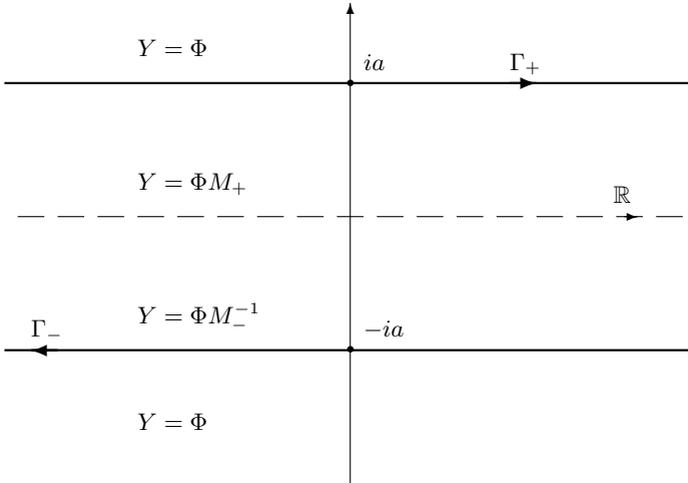
Теперь мы можем пояснить смысл подстановки (6.3.1). Он состоял в том, чтобы у новой матрицы скачка  $\widehat{G}_\Phi$  левый верхний элемент  $(\widehat{G}_\Phi)_{11}$  стал бы равен единице, и при этом детерминант матрицы по-прежнему был бы равен единице. Любая  $2 \times 2$  матрица, обладающая такими свойствами, факторизуется в произведение ниже-треугольной и выше-треугольной матриц, в частности,

$$\widehat{G}_\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Q(\lambda)e^{i\lambda x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & P(\lambda)e^{-i\lambda x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_+(\lambda)M_-(\lambda). \quad (6.3.9)$$

Индексы плюс и минус у матриц  $M$  поставлены для того, чтобы подчеркнуть, что матрица  $M_+$  допускает аналитическое продолжение в некоторую область верхней полуплоскости, а  $M_-$  в некоторую область нижней полуплоскости.

Рассмотрим теперь новый контур  $\Gamma$ , состоящий из двух горизонтальных прямых  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ , причем  $\Gamma_+$  лежит в области аналитичности матрицы  $M_+$ , а  $\Gamma_-$  лежит в области аналитичности матрицы  $M_-$  (см. рис. 6.4).<sup>2</sup> Определим новую матрицу  $Y(\lambda)$ , как показано на рисунке рис. 6.4. Установим свойства этой матрицы. Очевидно, что  $Y(\lambda) \rightarrow I$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Очевидно также, что

<sup>2</sup>Обратите внимание на то, что контур  $\Gamma_-$  ориентирован справа налево, поэтому областью, расположенной слева от этого контура, является область  $\Im(\lambda) < -a$ . Вообще говоря, выбор ориентации контура является делом вкуса.

Рис. 6.4. Новый контур скачка и матрица  $Y$ 

$Y(\lambda)$  аналитична всюду, кроме разрывов на прямых  $\Gamma_{\pm}$  и, возможно, вещественной оси. Предельные значения на разрывах связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_-(\lambda) &= Y_+(\lambda)M_+(\lambda), & \lambda \in \Gamma_+, \\ Y_-(\lambda) &= Y_+(\lambda)M_-^{-1}(\lambda), & \lambda \in \Gamma_-. \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Что же касается разрыва на вещественной оси, то легко проверить, что он исчез

$$\begin{aligned} Y_- &= \Phi_- M_-^{-1} = \Phi_+ \widehat{G}_{\Phi} M_-^{-1} \\ &= \Phi_+ M_+ M_- M_-^{-1} = \Phi_+ M_+ = Y_+, & \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Таким образом вместо задачи Римана на вещественной оси мы получили задачу Римана (6.3.10) на двух контурах  $\Gamma_{\pm}$ , причем

$$\begin{aligned} M_+(\lambda) &= I + O(e^{-ax}), & \lambda \in \Gamma_+, \\ M_-^{-1}(\lambda) &= I + O(e^{-ax}), & \lambda \in \Gamma_-. \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Иными словами мы добились того, что матрица скачка (состоящая по сути из двух матриц  $M_{\pm}$ ) отличается от единичной на экспоненциально малую поправку равномерно на всем контуре

$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ . Отсюда следует, что  $Y(\lambda) = I$  с точностью до экспоненциально малой поправки, а значит, и  $\Phi(\lambda) = I + O(e^{-ax})$  по крайней мере при  $|\Im(\lambda)| \geq a$ . Отсюда

$$\chi(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}(\lambda) \end{pmatrix} + O(e^{-ax}), \quad |\Im(\lambda)| \geq a. \quad (6.3.13)$$

Для наших целей этого уже достаточно, поскольку нам нужно знать даже не само решение исходной задачи Римана  $\chi(\lambda)$ , а всего лишь первый член  $B_0$  разложения (6.1.6). С учетом (6.3.1), (6.3.2), (6.3.5) мы получаем

$$(B_0)_{11} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \log(1 - 2\vartheta(\mu)) d\mu, \quad (6.3.14)$$

откуда в силу (6.1.7) находим

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{V}) = C_0 \exp\left(\frac{x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log\left(\frac{e^{(\mu^2-h)/T} - 1}{e^{(\mu^2-h)/T} + 1}\right) d\mu\right), \quad (6.3.15)$$

где  $C_0$  – константа интегрирования.

## 6.4. Улучшенная оценка

Полученной оценки недостаточно для определения асимптотического поведения корреляционной функции, так как в первом приближении матрица  $\chi(\lambda)$  получилась диагональной, и коэффициент  $(B_0)_{12}$  оказался равным нулю. Для того, чтобы получить оценку для этого матричного элемента, достаточно воспользоваться сингулярным интегральным уравнением (5.2.2), которое для матрицы  $Y(\lambda)$  выглядит следующим образом

$$Y_+(\lambda) = I - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{Y_+(\mu)(M_+(\mu) - I) d\mu}{\mu - \lambda_+} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} \frac{Y_+(\mu)(M_-^{-1}(\mu) - I) d\mu}{\mu - \lambda_+}. \quad (6.4.1)$$

Здесь  $\lambda_+$  означает, что параметр  $\lambda$  находится вне области, ограниченной контуром  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ , иными словами  $|\Im(\lambda)| > a$ . Подставляя сюда явные выражения для  $M_{\pm}$  мы, в частности, получаем

$$(Y_+)_{12}(\lambda) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty-ia}^{\infty-ia} \frac{(Y_+)_{11}(\mu)\vartheta(\mu)\alpha_-^2(\mu) d\mu}{(1 - 2\vartheta(\mu))(\mu - \lambda_+)}. \quad (6.4.2)$$

Воспользуемся тем, что  $(Y_+)_{11}(\mu) = 1 + o(e^{-ax})$  равномерно по  $\mu$ . Тогда с точностью до экспоненциально малых поправок получаем

$$(Y_+)_{12}(\lambda) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty-ia}^{\infty-ia} \frac{\vartheta(\mu)\alpha_-^2(\mu) d\mu}{(1-2\vartheta(\mu))(\mu-\lambda_+)}, \quad (6.4.3)$$

откуда

$$(B_0)_{12} = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty-ia}^{\infty-ia} \frac{\vartheta(\mu)\alpha_-^2(\mu)e^{-i\mu x} d\mu}{1-2\vartheta(\mu)}. \quad (6.4.4)$$

Получившийся интеграл уже может быть оценен путем сдвига контура интегрирования вниз к ближайшей особенности подынтегрального выражения (см. раздел 6.2). Положим для удобства  $h = -p^2$ . Тогда ближайшая к вещественной оси особенность подынтегрального выражения в нижней полуплоскости находится в точке  $\mu = -ip$  (т.е. корень уравнения  $e^{(\lambda^2-h)/T} - 1 = 0$ ). Вычисляя вычет в этой точке, находим

$$(B_0)_{12} = \frac{T}{ip} \alpha_-^2(-ip)e^{-px} + o(e^{-px}). \quad (6.4.5)$$

Окончательно для корреляционной функции получаем

$$\begin{aligned} & \langle \Psi^\dagger(x_2)\Psi(x_1) \rangle \\ &= C_0 \exp \left[ -px + \frac{x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log \left( \frac{e^{(\lambda^2-h)/T} - 1}{e^{(\lambda^2-h)/T} + 1} \right) d\mu \right] (1 + o(e^{-px})). \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

## 6.5. Комментарии

Обсудим теперь другие случаи корреляционных функций и прежде всего остановимся на случае  $h > 0$ . Тогда, как уже отмечалось, функция  $1-2\vartheta(\lambda)$  обращается в нуль на вещественной оси при  $\lambda = \pm q = \sqrt{h}$ . Из-за этого задача Римана (6.3.3) для функции  $\alpha(\lambda)$  оказывается некорректно поставленной, а функции  $P(\lambda)$  и  $Q(\lambda)$  имеют сингулярности на вещественной оси (см. (6.3.8)).

Тем не менее матрица скачка  $\widehat{G}(\lambda)$  (6.1.5) по-прежнему аналитична в некоторой полосе, содержащей вещественную ось, и ее детерминант по-прежнему равен единице. Следовательно, исходный контур скачка (вещественная ось) может быть деформирован в области аналитичности матрицы  $\widehat{G}(\lambda)$ . Рассмотрим деформацию, изображенную на рис. 6.5.

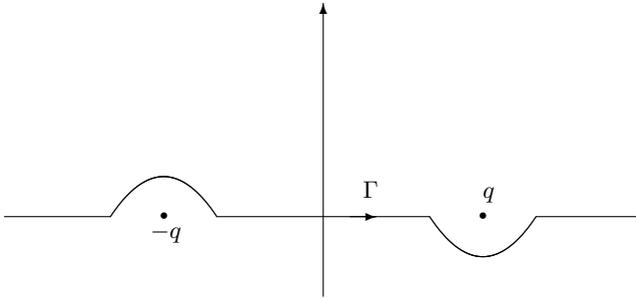


Рис. 6.5. Деформация исходного контура скачка

При выборе обхода нулей функции  $1 - 2\vartheta(\lambda)$  важно добиться того, чтобы при движении вдоль нового контура  $\Gamma$  полное изменение аргумента функции  $1 - 2\vartheta(\lambda)$  равнялось бы нулю:

$$\text{var arg}(1 - 2\vartheta(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in \Gamma.$$

Тогда Задача Римана

$$\alpha_-(\lambda) = \alpha_+(\lambda)(1 - 2\vartheta(\lambda)), \quad \lambda \in \Gamma \quad (6.5.1)$$

является корректно поставленной, и ее решение дается формулой

$$\alpha(\lambda) = \exp\left(\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\log(1 - 2\vartheta(\mu))}{\mu - \lambda} d\mu\right). \quad (6.5.2)$$

Условие  $\text{var arg}(1 - 2\vartheta(\lambda)) = 0$  обеспечивает сходимость интеграла в формуле (6.5.2). Какая именно из двух точек  $\pm q$  обходится сверху, а какая снизу, не существенно.

Теперь мы, как и в случае отрицательного химического потенциала, можем сделать подстановку (6.3.1) с функцией  $\alpha(\lambda)$ , определенной формулой (6.5.2). В результате мы снова получаем задачу Римана (6.3.6), но уже на контуре  $\Gamma$

$$\Phi_-(\lambda) = \Phi_+(\lambda)\widehat{G}_{\Phi}(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma. \quad (6.5.3)$$

При этом матрица  $\widehat{G}_{\Phi}(\lambda)$  по-прежнему факторизуется в произведение  $M_+(\lambda)M_-(\lambda)$  (см. (6.3.9), (6.3.8)). К сожалению, этого еще недостаточно для того, чтобы расщепить контур разреза и перейти к задаче Римана (6.3.10) на новую матрицу  $Y(\lambda)$ , как это

было при  $h < 0$ . Причина в том, что функции  $P(\lambda)$  и  $Q(\lambda)$  (6.3.8) имеют полюсы в точках  $\lambda = \pm q$ , следовательно, матрицы  $M_+(\lambda)$ ,  $M_-(\lambda)$  не могут быть аналитически продолжены соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскость. Подробно узнать о том, как обходится эта проблема, можно в [8, раздел (XV.4)].

Если мы рассматриваем не зависящие от времени корреляционные функции при нулевой температуре, то контуром разреза в исходной задаче Римана является отрезок  $[-q, q]$ . Метод асимптотического решения задачи Римана, изложенный в разделе 6.3, проходит и в этом случае. Основное отличие состоит в том, что теперь концы разреза фиксированы, поэтому задача Римана для матрицы  $Y$  формулируется на контуре  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ , показанном на рис. 6.6. Как следствие, матрицы скачка  $M_{\pm}$  не могут быть

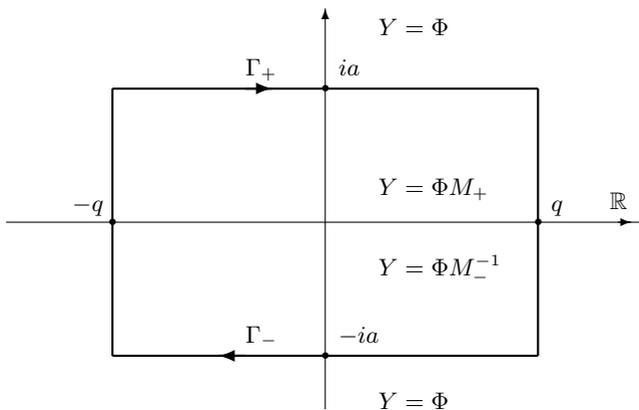


Рис. 6.6. Деформация контура в случае задачи Римана на конечном отрезке

представлены в виде  $I + O(e^{-ax})$  равномерно на всем контуре  $\Gamma$ , и основной вклад в решение дается малыми окрестностями точек  $\pm q$ . Не вдаваясь в многочисленные детали, скажем лишь, что дальнейшие действия сводятся к анализу задачи Римана для матрицы  $Y$  именно в этих малых окрестностях. Решение этой задачи может быть найдено явно в терминах вырожденной гипергеометрической функции (подробности можно найти, например, в работе [19]).

Асимптотический анализ задачи Римана, описывающей разновременную корреляционную функцию, является, пожалуй, наи-

более сложным. Первая дополнительная проблема состоит в том, что в этом случае быстро осциллирующие функции входят во все элементы исходной матрицы скачка  $\widehat{G}(\lambda)$ , а не только во внедиагональные, как это было в примерах, рассмотренных ранее. Данная проблема обходится с помощью подстановки  $\chi(\lambda) = \widetilde{\chi}(\lambda) \times \chi^{(0)}(\lambda)$ , где

$$\chi^{(0)}(\lambda) = I - \frac{\sigma_+}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\mu^2 - ix\mu}}{\mu - \lambda} d\mu, \quad (6.5.4)$$

а  $\widetilde{\chi}(\lambda)$  – новая неизвестная матрица. Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\mu^2 - ix\mu}}{\mu - \lambda \mp i0} d\mu = E(\lambda|x, t) \pm \frac{i}{2} e^{it\lambda^2 - ix\lambda}. \quad (6.5.5)$$

С учетом (6.5.5) мы сразу же получаем, что предельные значения матрицы  $\widetilde{\chi}(\lambda)$  на вещественной оси из нижней и верхней полуплоскости связаны между собой матрицей  $\widetilde{G}$ :  $\widetilde{\chi}_-(\lambda) = \widetilde{\chi}_+(\lambda)\widetilde{G}(\lambda)$ , где

$$\begin{aligned} \widetilde{G}(\lambda) &= \chi_+^{(0)}(\lambda)G(\lambda)\left(\chi_-^{(0)}(\lambda)\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2\vartheta(\lambda) & i(\vartheta(\lambda) - 1)e^{it\lambda^2 - ix\lambda} \\ -4i\vartheta(\lambda)e^{-it\lambda^2 + ix\lambda} & 1 - 2\vartheta(\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

Теперь быстро осциллирующие функции входят только во внедиагональные матричные элементы, и мы можем действовать по аналогии с примерами, рассмотренными выше. Поскольку функции  $e^{\pm i(t\lambda^2 - x\lambda)}$  содержат седловую точку  $\lambda_0 = x/2t$ , то вопрос состоит в том, как перейти от исходной задачи Римана на вещественной оси к задаче Римана для матрицы  $Y$  с разрезами на контуре, изображенном на рис. 6.7. Такой переход достигается с помощью подстановки, аналогичной (6.3.1):  $\widetilde{\chi} = \Phi A$ , но теперь скалярная задача Римана для функции  $\alpha(\lambda)$  имеет разрывную функцию скачка

$$\begin{aligned} \alpha_-(\lambda) &= \alpha_+(\lambda)(1 - 2\vartheta(\lambda)), & \lambda < \lambda_0, \\ \alpha_-(\lambda) &= \alpha_+(\lambda)(1 - 2\vartheta(\lambda))^{-1}, & \lambda > \lambda_0. \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

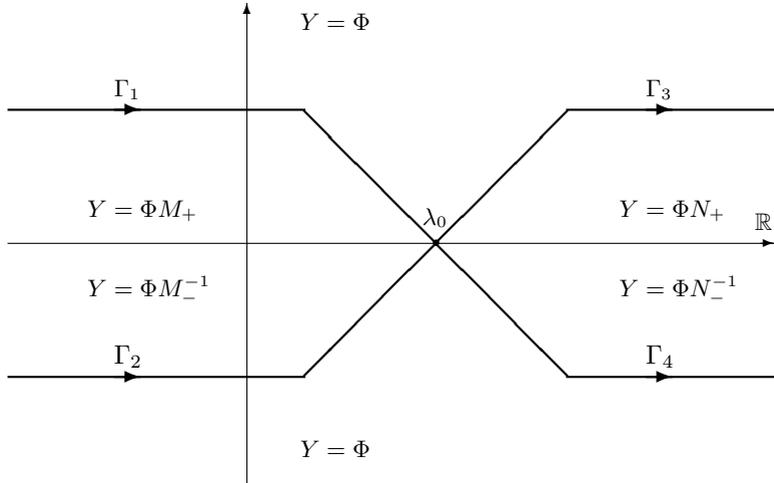


Рис. 6.7. Деформация контура разреза при наличии седловой точки

В результате новая матрица скачка  $\widehat{G}_\Phi(\lambda)$  по-разному факторизуется в произведение треугольных матриц слева и справа от седловой точки  $\lambda_0$

$$\begin{aligned} \widehat{G}_\Phi &= M_+ M_-, & \lambda < \lambda_0, \\ \widehat{G}_\Phi &= N_+ N_-, & \lambda > \lambda_0. \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Определение матрицы  $Y(\lambda)$  показано на рис. 6.7. В результате всех этих действий мы приходим к задаче Римана на контуре  $\Gamma = \bigcup_{k=1}^4 \Gamma_k$ , в которой матрицы скачка  $M_\pm$  и  $N_\pm$  отличаются от единичной на экспоненциально малую величину всюду, кроме малой окрестности седловой точки. То есть как и в случае корреляционной функции при нулевой температуре, мы имеем дело с неравномерной оценкой. Проблема, таким образом, сводится к анализу задачи Римана в окрестности  $\lambda_0$ . Этот анализ во многом схож с тем, который проводится в окрестностях концов интервала  $\pm q$  в случае нулевой температуры. Решение задачи Римана в окрестности седловой точки находится явно и дается в терминах функции параболического цилиндра. Для уточнения асимптотики и получения поправочных членов можно воспользоваться уравнениями (5.4.29).

Мы, разумеется, привели здесь лишь основные шаги, необходимые для решения задачи Римана, описывающей разновременную корреляционную функцию. Многочисленные детали и нюансы (как, например, разница между положительным и отрицательным химическим потенциалом) были опущены. Подробности можно найти в [19].

В заключение отметим, что вопросы, затронутые в этой лекции, рассматриваются также в работах [8], [18], [19].

## Список литературы

- [1] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [2] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, М., 1989.
- [3] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Мир, М., 1987.
- [4] V. E. Korepin, “Calculation of norms of Bethe wave functions”, *Comm. Math. Phys.*, **86**:3 (1982), 391–418.
- [5] В. Е. Корепин, Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, *Квантовый метод обратной задачи и корреляционные функции*, Наука, М., 1991.
- [6] Н. А. Славнов, “Об одном тождестве для дуальных полей”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики*. 14, Зап. научн. сем. ПОМИ, **245**, ПОМИ, СПб., 1997, 270–281.
- [7] Ф. А. Березин, Г. П. Похил, В. М. Финкельберг, “Уравнение Шрёдингера для системы одномерных частиц с точечным взаимодействием”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1964, № 1, 21–28.
- [8] V. E. Korepin, N. M. Bogolyubov, A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [9] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, Т. 4, Учеб. пособие, Наука, М., 1958.
- [10] E. H. Lieb, “Exact analysis of an interaction Bose gas. I. The general solution and the ground state”, *Phys. Rev. (2)*, **130** (1963), 1605–1616.
- [11] E. H. Lieb, “Exact analysis of an interacting Bose gas. II. The excitation spectrum”, *Phys. Rev. (2)*, **130** (1963), 1616–1624.
- [12] C. N. Yang, “Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction”, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1312–1315.
- [13] C. N. Yang, C. P. Yang, “Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive delta-function interaction”, *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 1115–1122.

- 
- [14] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Физматгиз, М., 1963.
- [15] V. E. Korepin, N. A. Slavnov, “The time dependent correlation function of an impenetrable Bose gas as a Fredholm minor. I”, *Comm. Math. Phys.*, **129**:1 (1990), 103–113.
- [16] A. R. Its, A. Ġ. Izergin, V. E. Korepin, N. A. Slavnov, “Differential equations for quantum correlation functions”, *Internat. J. Modern Phys. B*, **4**:5 (1990), 1003–1037.
- [17] Н. А. Славнов, “Фредгольмовы детерминанты и  $\tau$ -функции”, *ТМФ*, **109**:3 (1996), 357–371.
- [18] P. Deift, X. Zhou, “A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation”, *Ann. of Math.* (2), **137**:2 (1993), 295–368.
- [19] V. V. Cheianov, M. B. Zvonarev, “Zero temperature correlation functions for the impenetrable fermion gas”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:6 (2004), 2261–2297.



*Научное издание*

## **Лекционные курсы НОЦ**

**Выпуск 18**

*Никита Андреевич Славнов*

**Введение в теорию квантовых интегрируемых систем.  
Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера**

---

Сдано в набор 28.10.2011. Подписано в печать 20.12.2011.

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 13,25. Тираж 200 экз.

---

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН  
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/noc/> e-mail: [pupyrev@mi.ras.ru](mailto:pupyrev@mi.ras.ru)