ISSN 2226-5929

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Выпуск 19

Издание выходит с 2003 года

А. В. Пухликов

Бирациональная геометрия многомерных многообразий Фано

Москва
2014

УДК 512.763+512.765
ББК 22.151.5
С56

Пухликов А. В.

С56 Бирациональная геометрия многомерных многообразий Фано – М.: МИАН, 2014. – 174 с. – (Современные проблемы математики, ISSN 2226-5929; Вып. 19).

ISBN 978-5-98419-058-9

Серия "Современные проблемы математики" – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН.

DOI: 10.4213/spm52
DOI: 10.4213/book1513

ISBN 978-5-98419-058-9

Содержание

Введение

Цель настоящего обзора – дать полное и замкнутое изложение следующих результатов автора по бирациональной геометрии многомерных многообразий Фано:

- бирациональная жесткость общих гиперповерхностей Фано индекса 1 [1];
- бирациональная жесткость общих полных пересечений Фано индекса 1, коразмерность которых строго меньше половины размерности [2];
- бирациональная жесткость итерированных двойных накрытий Фано [3];
- бирациональная жесткость общих гиперповерхностей Фано с изолированными особенностями [4];
- описание бирациональной геометрии двойных пространств Фано индекса 2 [5].

Структура обзора такова. В гл. 1 изложена общая теория метода максимальных особенностей, включая технику подсчета кратностей. В гл. 2 развита техника гиперкасательных дивизоров, которая применяется к гиперповерхностям и полным пересечениям Фано и дает первые два результата из приведенного выше списка. Глава 3 посвящена итерированным двойным накрытиям Фано и гл. 4 – гиперповерхностям Фано с изолированными особенностями. Наконец, гл. 5 воспроизводит доказательство теоремы о бирациональной геометрии двойных пространств Фано индекса 2 размерности 5 и выше: любая структура нетривиального расслоения на рационально связные многообразия задается пучком полуантиканонических дивизоров.

На сегодняшний день метод максимальных особенностей, составляющий техническую основу настоящей работы, является наиболее эффективным средством описания бирациональной геометрии явно заданных многообразий Фано и расслоений на многообразия Фано. Это связано с тем, что бирациональная геометрия рационально связных многообразий определяется поведением линейных систем дивизоров с максимальными (т.е. не каноническими) особенностями на этих многообразиях. Описание возможных бирациональных отображений заданного многообразий (или расслоения) Фано сводится, таким образом, к описанию линейных систем с максимальными особенностями, что и является предметом метода максимальных особенностей. Например, если таких линейных систем вообще нет, то многообразие является бирационально сверхжестким (классический пример – трехмерная квартика) и, кроме самого себя, не допускает бирациональных отображений на другие многообразия Фано. В частности, в описанной ситуации бирациональная классификация для данного класса многообразий сводится к бирегулярной. В других случаях линейные системы с максимальными особенностями существуют, но допускают полное и компактное описание; например, для двойных пространств индекса 2 любая такая система составлена из пучка полуантиканонических дивизоров. Из этого описания немедленно извлекается полное описание бирациональных перестроек данного многообразия.

Такова общая идея подхода, реализованного в методе максимальных особенностей (детали см. в гл. 1, § 1). Хотя некоторые ключевые идеи метода восходят к работам Нётера [6] и Фано [7]–[9], первая полная и строгая версия метода была развита лишь в 1970 г. в [10]. За последующие четыре десятилетия метод совершенствовался и дополнялся новыми идеями (в последние пятнадцать лет влияние программы минимальных моделей было особенно сильным).

Глава 1. Метод максимальных особенностей

В данной главе приведены основные определения и общие факты теории бирациональной жесткости. Вводятся понятия порога канонического присоединения, бирациональной (сверх)жесткости и максимальной особенности. Обсуждаются основные геометрические свойства бирационально жестких многообразий и описывается общая структура метода максимальных особенностей (§ 1.1). Развита техника подсчета кратностей, играющая ключевую роль в исключении максимальных особенностей и доказано $4n^2$-неравенство (§ 1.2). В § 1.3 на примере полного пересечения квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$ описана процедура откручивания максимальных особенностей.

§ 1.1. Обрыв канонического присоединения

Введены и на простых примерах проиллюстрированы понятия порога и виртуального порога канонического присоединения, на основе которых определены бирациональная жесткость и сверхжесткость. Введено неравенство Нётера–Фано и определены максимальные особенности и подмногообразия подвижных линейных систем. Описаны ключевая конструкция ориентированного графа, связанного с последовательностью раздутий, и соответствующая комбинаторная техника. Доказаны некоторые геометрические свойства бирационально жестких многообразий и описана общая структура метода максимальных особенностей.

1.1.1. Порог канонического присоединения и бирациональная жесткость. Гладкое проективное рационально связное многообразие X удовлетворяет классическому условию обрыва присоединения канонического класса: для любого эффективного дивизора D линейная система $|D + mK_X|$ пуста при $m \gg 0$, поскольку K_X отрицателен на любом семействе рациональных кривых, заметающих X, а эффективный дивизор неотрицателен на любом таком семействе. Чтобы формализовать эту идею, рассмотрим группу Пикара $A^1X = \operatorname{Pic} X$, положим

$$A^1_{\mathbb{R}}X = A^1X \otimes \mathbb{R}$$

и определим конусы

$$A^1_+X \subset A^1_{\mathbb{R}}X$$

псевдоэффективных классов и

$$A^1_{\mathrm{mov}}X \subset A^1_{\mathbb{R}}X$$

подвижных классов как замкнутые (в обычной вещественной топологии $A^1_{\mathbb{R}}X \cong \mathbb{R}^k$) конусы, порожденные классами эффективных дивизоров и подвижных дивизоров (т.е. дивизоров в линейных системах без неподвижных компонент) соответственно.

Определение 1.1.1. *Порог канонического присоединения* дивизора D на многообразии X есть число

$$c(D, X) = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \mid D + \varepsilon K_X \in A^1_+X\}.$$

Если Σ – непустая линейная система на X, полагаем

$$c(\Sigma, X) = c(D, X),$$

где $D \in \Sigma$ – произвольный дивизор.

Пример 1.1.1. (i) Пусть X – *примитивное многообразие Фано*, т.е. гладкое проективное многообразие с обильным антиканоническим классом и

$$\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}K_X.$$

Для любого эффективного дивизора D имеем

$$D \in |-nK_X|$$

для некоторого $n \geqslant 1$, так что

$$c(D, X) = n.$$

Если заменить условие $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}K_X$ более слабым условием

$$\operatorname{rk} \operatorname{Pic} X = 1,$$

т.е.

$$K_X = -rH,$$

где $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}H,\ r \geqslant 2$ – индекс многообразия X, то для $D \in |nH|$ получаем

$$c(D, X) = \frac{n}{r}.$$

(ii) Пусть $\pi\colon V \to S$ – рационально связное расслоение с

$$\operatorname{div} V > \operatorname{div} S \geqslant 1,$$

Δ – эффективный дивизор на базе S. Очевидно,

$$c(\pi^*\Delta, V) = 0.$$

Если

$$\operatorname{Pic} V = \mathbb{Z}K_V \oplus \pi^* \operatorname{Pic} S,$$

т.е. V/S – стандартное расслоение Фано, и D – эффективный дивизор на V, который не поднят с базы S, то

$$D \in |-nK_V + \pi^* R|$$

для некоторого дивизора R на S, где $n \geqslant 1$. Очевидно,

$$c(D, V) \leqslant n,$$

и, более того, если дивизор R эффективен, то

$$c(D, V) = n.$$

В самом деле, K_V отрицателен на слоях морфизма π (в частности, на плотных семействах рациональных кривых, заметающих слои проекции π), в то время как любой дивизор, поднятый с базы, тривиален на слоях.

(iii) Пусть $F_1, \dots, F_K$ – примитивные многообразия Фано, $V = F_1 \times \dots \times F_K$ – их прямое произведение. Пусть $H_i = -K_{F_i}$ – положительная образующая группы $\operatorname{Pic} F_i$. Положим

$$S_i = \prod_{j \neq i} F_i,$$

так что $V \cong F_i \times S_i$. Пусть $\rho_i\colon V \to F_i$ и $\pi_i\colon V \to S_i$ – проекции на сомножители. Злоупотребляя обозначениями, пишем H_i вместо $\rho_i^* H_i$, так что

$$\operatorname{Pic} V = \bigoplus_{i=1}^{K} \mathbb{Z} H_i$$

и

$$K_V = -H_1 - \dots - H_K.$$

Для любого эффективного дивизора D на V получаем

$$D \in |n_1 H_1 + \dots + n_K H_K|$$

для некоторых неотрицательных $n_1, \dots, n_K \in \mathbb{Z}_+$ и, очевидно,

$$c(D, V) = \min\{n_1, \dots, n_K\}.$$

Этот пример сводится к предыдущему: предположим, что $c(D, V) = n_1$, и положим

$$n = n_1, \quad \pi = \pi_1, \quad F = F_1, \quad S = S_1.$$

Получаем

$$\Sigma \subset |-nK_V + \pi^* Y|,$$

где

$$Y = \sum_{i=2}^{K} (n_i - n) H_i$$

– эффективный класс на базе S расслоения $\pi\colon V \to S$. Это случай (ii) выше.

Порог канонического присоединения легко вычисляется, однако он не обладает бирациональной инвариантностью.

Пример 1.1.2. Пусть $\pi\colon \mathbb{P}^M \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ – линейная проекция из $(M-m-1)$-мерного подпространства $P \subset \mathbb{P}^M$. Рассмотрим подвижную линейную систему Λ гиперповерхностей степени n в $\mathbb{P}^m$, и пусть Σ – ее прообраз относительно π. Очевидно,

$$c(\Sigma, \mathbb{P}^M) = \frac{n}{M+1}\,.$$

Раздуем, однако, плоскость P, скажем $\sigma\colon \mathbb{P}^+ \to \mathbb{P}^M$, так что композиция $\pi \circ \sigma\colon \mathbb{P}^+ \to \mathbb{P}^m$ есть $\mathbb{P}^{M-m}$-расслоение. Пусть Σ^+ – собственный прообраз системы Σ на $\mathbb{P}^+$. Поскольку $\pi \circ \sigma$ – морфизм с рационально связными слоями, получаем

$$c(\Sigma^+, \mathbb{P}^+) = 0.$$

Этот пример легко обобщить на линейные проекции полных пересечений Фано $V \subset \mathbb{P}^M$ индекса 2 или выше.

Чтобы преодолеть бирациональную неинвариантность порога канонического присоединения, дадим

Определение 1.1.2. Для подвижной линейной системы Σ на многообразии X определим *виртуальный порог канонического присоединения* формулой

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = \inf_{X^\sharp \to X} \{c(\Sigma^\sharp, X^\sharp)\},$$

где точная нижняя грань берется по всем бирациональным морфизмам $X^\sharp \to X$, $X^\sharp$ – гладкая проективная модель $\mathbb{C}(X)$, $\Sigma^\sharp$ – собственный прообраз системы Σ на $X^\sharp$.

Виртуальный порог очевидным образом есть бирациональный инвариант пары (X, Σ): если $\chi\colon X \dashrightarrow X^+$ – бирациональное отображение, $\Sigma^+ = \chi_*\Sigma$ – собственный прообраз системы Σ относительно χ^{-1}, то получаем

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = c_{\mathrm{virt}}(\Sigma^+).$$

Предложение 1.1.1. (i) *Предположим, что на многообразии V нет подвижных линейных систем с нулевым виртуальным порогом канонического присоединения. Тогда на V нет структур нетривиального расслоения на многообразия отрицательной кодаировой размерности, т.е. не существует рационального доминантного отображения*

$$\rho\colon V \dashrightarrow S, \qquad \operatorname{div} S \geqslant 1,$$

общий слой которого имеет отрицательную кодаирову размерность.

(ii) *Пусть $\pi\colon V \to S$ – рационально связное расслоение. Предположим, что каждая подвижная линейная система Σ на V с нулевым виртуальным порогом канонического присоединения, $c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = 0$, есть прообраз системы на базе: $\Sigma = \pi^*\Lambda$, где Λ – некоторая подвижная линейная система на S. Тогда любое бирациональное отображение*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "\chi"] \arrow[d, "\pi"'] & V^\sharp \arrow[d, "\pi^\sharp"] \\ S & S^\sharp \end{tikzcd} \tag{1.1.1}$$

где $\pi^\sharp\colon V^\sharp \to S^\sharp$ – расслоение на многообразия отрицательной кодаировой размерности, является послойным, т.е. существует рациональное доминантное отображение

$$\rho\colon S \dashrightarrow S^\sharp,$$

превращающее диаграмму (1.1.1) в коммутативную,

$$\pi^\sharp \circ \chi = \rho \circ \pi.$$

Другими словами, $\pi^\sharp \geqslant \pi$ в смысле отношения порядка на множестве рационально связных структур: π – минимальный элемент $RC(V)$.

Таким образом, для некоторых рационально связных многообразий виртуальный порог канонического присоединения сводит проблему описания множества $RC(V)$ к такой же проблеме для базы S. Это ключевой шаг, во многих случаях ведущий к исчерпывающему описанию множества $RC(V)$. Но главный недостаток виртуальных порогов состоит в том, что их очень трудно вычислять.

Точнее говоря, единственный известный способ их вычислять – сводить к обычным порогам.

Определение 1.1.3. (i) Многообразие V называется *бирационально сверхжестким*, если для любой подвижной линейной системы Σ на V выполнено равенство

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma, V).$$

(ii) Многообразие V (соответственно расслоение Фано V/S) называется *бирационально жестким*, если для любой подвижной линейной системы Σ на V существует бирациональный автоморфизм $\chi \in \operatorname{Bir} V$ (соответственно послойный бирациональный автоморфизм $\chi \in \operatorname{Bir}(V/S)$), обеспечивающий равенство

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = c(\chi_*\Sigma, V).$$

В следующих примерах перечислены основные классы многообразий и расслоений Фано, для которых сегодня известна бирациональная жесткость или сверхжесткость.

Пример 1.1.3. (i) Гладкая трехмерная квартика $V = V_4 \subset \mathbb{P}^4$ бирационально сверхжесткая, что немедленно следует из рассуждений в [10].

(ii) Общее гладкое полное пересечение $V_{2\cdot 3} \subset \mathbb{P}^5$ кубической гиперповерхности и квадрики бирационально жесткое, но не сверхжесткое [11], [12]. Описание его группы бирациональных автоморфизмов обсуждается ниже, в пп. 1.3.2–1.3.3.

(iii) Общее полное пересечение $V_{d_1\dots d_k} \subset \mathbb{P}^{M+k}$ индекса 1, т.е.

$$d_1 + \dots + d_k = M + k,$$

и размерности $M \geqslant 4$ бирационально сверхжесткое при $M \geqslant 2k+1$ [2].

(iv) Первыми примерами бирационально сверхжестких многообразий Фано произвольной размерности были двойные пространства

$$\sigma\colon V \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^M, \qquad M \geqslant 4,$$

разветвленные над гладкой гиперповерхностью $W_{2M} \subset \mathbb{P}^M$ степени $2M$, и двойные квадрики

$$\sigma\colon V \xrightarrow{2:1} Q \subset \mathbb{P}^{M+1}, \qquad M \geqslant 4,$$

разветвленные над гладким полным пересечением

$$W = Q \cap W^*_{2(M-1)},$$

$W^*_{2(M-1)} \subset \mathbb{P}^{M+1}$ – гиперповерхность степени $2(M-1)$ [13].

(v) Обобщая предыдущий пример, пусть

$$\sigma\colon V \to Q \subset \mathbb{P}^{M+1}$$

– двойное накрытие, где

$$Q = Q_m \subset \mathbb{P}^{M+1}$$

– гладкая гиперповерхность степени m, а дивизор ветвления $W \subset Q$ высекается на Q гиперповерхностью $W^*_{2l} \subset \mathbb{P}^{M+1}$, где $m + l = M + 1$. Многообразие V бирационально сверхжесткое для общих Q, W^* [14]. Вместо двойного накрытия можно рассмотреть произвольное циклическое накрытие, вместо гиперповерхности $Q \subset \mathbb{P}^{M+1}$ – гладкое полное пересечение $Q \subset \mathbb{P}^{M+k}$ подходящего индекса и коразмерности $k < M/2$. Общее многообразие в этих классах бирационально сверхжесткое [15]. Другой пример дают итерированные двойные накрытия (см. [3] и гл. 3).

Все многообразия примера 1.1.3 реализуются как полные пересечения Фано во взвешенных проективных пространствах.

Гипотеза 1.1.1. *Гладкое полное пересечение Фано индекса* 1 *и размерности* $\geqslant 4$ *во взвешенном проективном пространстве бирационально жесткое, размерности* $\geqslant 5$ *– бирационально сверхжесткое.*

Напомним, что для примитивного многообразия Фано бирациональная (сверх)жесткость немедленно влечет отсутствие нетривиальных структур рационально связного расслоения.

1.1.2. Особенности линейных систем. Исходная точка доказательства бирациональной (сверх)жесткости рационально связного многообразия V такова: зафиксируем подвижную линейную систему Σ, удовлетворяющую неравенству

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) < c(\Sigma) \tag{1.1.2}$$

(если таких систем нет, то многообразие сверхжесткое и доказывать нечего). По определению это означает, что существует бирациональный морфизм $\varphi\colon V^+ \to V$, для которого выполнено неравенство

$$c(\Sigma^+, V^+) < c(\Sigma),$$

где Σ^+ – собственный прообраз системы Σ. Отметим, что φ не может быть изоморфизмом в коразмерности 1 (т.е. вне замкнутого подмножества $Y_+ \subset V^+$ коразмерности $\geqslant 2$): в противном случае для любого эффективного дивизора D на V и его собственного прообраза D^+ имели бы

$$c(D) = c(D^+).$$

Стало быть, существуют исключительные дивизоры $E \subset V^+$, стягиваемые морфизмом φ (в классической терминологии *исключительным дивизором* называется объединение всех неприводимых, или простых, дивизоров, стягиваемых морфизмом φ; для удобства изложения мы называем каждую неприводимую компоненту также исключительным дивизором). Каждый такой дивизор определяет дискретное нормирование $\mathrm{ord}_E(\,\cdot\,)$ поля рациональных функций $\mathbb{C}(V)$. Это нормирование не зависит от модели V^+ в следующем смысле: если

$$\varphi^\sharp\colon V^\sharp \to V$$

– другой бирациональный морфизм, причем бирациональное отображение

$$(\varphi^\sharp)^{-1} \circ \varphi\colon V^+ \dashrightarrow V^\sharp$$

есть изоморфизм в общей точке дивизора E, так что

$$(\varphi^\sharp)^{-1} \circ \varphi(E) = E^\sharp \subset V^\sharp$$

– исключительный дивизор морфизма $\varphi^\sharp$, то

$$\mathrm{ord}_E = \mathrm{ord}_{E^\sharp}.$$

Неприводимое многообразие $\varphi(E) \subset V$ называется *центром* дискретного нормирования ord_E и также не зависит от выбора модели V^+ (обозначается $\mathrm{centre}(E,V)$ или просто $\mathrm{centre}(E)$, когда ясно, о какой модели идет речь). Нормирования поля $\mathbb{C}(V)$, реализуемые исключительными дивизорами бирациональных морфизмов, называются *геометрическими*.

Поскольку дивизор D на многообразии V задается локальными уравнениями, применяя нормирование ord_E, получаем *кратность*

$$\nu_E(D) \in \mathbb{Z}_+$$

эффективного дивизора D относительно E. Очевидно, $\nu_E(D) \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда носитель дивизора D содержит $\mathrm{centre}(E)$. Если $\mathcal{E}$ – множество исключительных дивизоров бирационального морфизма φ, D^+ – собственный прообраз D на V^+, то имеем

$$\varphi^* D = D^+ + \sum_{E \in \mathcal{E}} \nu_E(D) E. \tag{1.1.3}$$

Для канонического класса K_{V^+} имеем представление

$$K_{V^+} = \varphi^* K_V + \sum_{E \in \mathcal{E}} a(E) E, \tag{1.1.4}$$

где

$$a(E) = a(E, V) \geqslant 1$$

– дискрепантность геометрического нормирования E, также не зависящая от модели V^+. Напомним, что мы работаем в классе неособых проективных многообразий.

В силу предположения имеем

$$n = c(\Sigma) > 0.$$

Определение 1.1.4. Геометрическое дискретное нормирование ord_E поля $\mathbb{C}(V)$ называется *максимальной особенностью* линейной системы Σ, если выполнено неравенство Нётера–Фано

$$\nu_E(\Sigma) > na(E), \tag{1.1.5}$$

где

$$\nu_E(\Sigma) = \nu_E(D)$$

для общего дивизора $D \in \Sigma$.

Имеется особенно простой и важный класс максимальных особенностей.

Определение 1.1.5. Неприводимое подмногообразие $Y \subset V$ коразмерности $\geqslant 2$ называется *максимальным подмногообразием* линейной системы Σ, если выполнено неравенство

$$\mathrm{mult}_Y \Sigma > n(\mathrm{codim}\, Y - 1),$$

где

$$\mathrm{mult}_Y \Sigma = \mathrm{mult}_Y D$$

для общего дивизора $D \in \Sigma$.

Отметим, что для корректного определения чисел $\nu_E(D)$ и $a(E)$ достаточно, чтобы многообразие V^+ было неособым лишь в общей точке исключительного дивизора E. Например, в определениях и конструкциях, приведенных выше, можно предполагать лишь, что особенности многообразия V^+ имеют коразмерность $\geqslant 2$ (это так, если V^+ нормально). Имея это в виду, предположим, что $Y \subset V$ – максимальное подмногообразие линейной системы Σ. Раздуем его: $\varphi\colon V^+ \to V$; пусть $E = \varphi^{-1}(Y)$ – исключительный дивизор. Имеем

$$\nu_E(\Sigma) = \mathrm{mult}_Y \Sigma$$

и

$$a(E) = \mathrm{codim}\, Y - 1,$$

так что E реализует максимальную особенность системы Σ. Поэтому максимальные подмногообразия представляют собой (простейший) тип максимальных особенностей.

Предложение 1.1.2. *В предположении, что выполнено неравенство* (1.1.2), *линейная система Σ обладает максимальной особенностью.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon V^+ \to V$ – бирациональный морфизм (с неособым V^+), удовлетворяющий неравенству

$$c(\Sigma^+) < c(\Sigma) = n,$$

$\mathcal{E}$ – множество простых дивизоров, стягиваемых морфизмом φ, $D \in \Sigma$ – общий дивизор, $D^+ \in \Sigma^+$ – его собственный прообраз на V^+. Из соотношений (1.1.3), (1.1.4) получаем

$$A^1_+ V^+ \not\ni D^+ + nK_{V^+} = \varphi^*(D + nK_V) - \sum_{E \in \mathcal{E}} e(E)E,$$

где

$$e(E) = \nu_E(D) - na(E).$$

Поскольку $D + nK_V \in A^1_+ V$ и подъем псевдоэффективного класса очевидным образом псевдоэффективен, получаем, что существует хотя бы один исключительный дивизор E, для которого $e(E) > 0$, что и требовалось доказать.

Отметим, что в силу сделанного выше замечания многообразие V^+ достаточно предполагать неособым в коразмерности 1, так что предложение 1.1.2 не зависит от теоремы о разрешении особенностей и поэтому верно в любой характеристике.

С исключительным дивизором $E \subset V^+$ связана однозначно определенная последовательность раздутий. Пусть X – некоторое проективное (возможно, особое) многообразие, $\psi\colon V^+ \dashrightarrow X$ – бирациональное отображение, стягивающее E в подмногообразие $B = \psi(E) \subset X$ коразмерности $\geqslant 2$, причем $B \not\subset \operatorname{Sing} X$ не содержится целиком во множестве особых точек. Пусть $\sigma_B\colon X(B) \to X$ – раздутие подмногообразия B,

$$E(B) = \sigma_B^{-1}(B)$$

– исключительный дивизор.

Предложение 1.1.3. *Имеет место альтернатива: либо композиция бирациональных отображений $\sigma_B^{-1} \circ \psi\colon V^+ \dashrightarrow X$ есть изоморфизм в окрестности общей точки дивизора E, и тогда*

$$\sigma_B^{-1} \circ \psi(E) = E(B),$$

либо $B^+ = \sigma_B^{-1} \circ \psi(E)$ есть неприводимое подмногообразие коразмерности $\geqslant 2$, причем

$$B^+ \not\subset \operatorname{Sing} X(B), \qquad B^+ \subset E(B)$$

и

$$\sigma_B(B^+) = B.$$

Доказательство. Утверждение очевидно: мы просто перечислили имеющиеся возможности. Отметим лишь, что вне σ_B-прообраза множества $\operatorname{Sing} X \cup \operatorname{Sing} B$ многообразие $X(B)$ неособо и

$$\sigma_B(B^+) = \sigma_B \circ \sigma_B^{-1} \circ \psi(E) = B.$$

Отметим также, что вне σ_B-прообраза множества $\operatorname{Sing} X \cup \operatorname{Sing} B$ морфизм $\sigma_B\colon E(B) \to B$ есть локально тривиальное $\mathbb{P}^{\operatorname{codim} B - 1}$-расслоение, а дискрепантность исключительного дивизора $E(B)$ есть $\operatorname{codim} B - 1$.

Итерируя конструкцию предложения 1.1.3, получаем последовательность раздутий

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i,i-1}\colon V_i & \longrightarrow & V_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, \\ \bigcup & & \bigcup \\ E_i & \longrightarrow & B_{i-1} \end{array} \tag{1.1.6}$$

где $V_0 = V$, $B_0 = \operatorname{centre}(E, V)$, и, далее, B_j есть центр E на V_j,

$$E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1})$$

– исключительный дивизор, B_{i-1} – центр раздутия $\varphi_{i,i-1}$. Иными словами, мы последовательно раздуваем центры нормирования E. Многообразия $V_1, V_2, \ldots$ могут, вообще говоря, быть особыми, однако V_j неособо в общей точке подмногообразий $B_j \subset E_j$ для каждого $j = 1, \ldots$. Положим для $i > j$

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{j+1,j} \circ \cdots \circ \varphi_{i,i-1} \colon V_i \to V_j, \qquad \varphi_{i,i} = \mathrm{id}_{V_i}.$$

Согласно (итерированному) предложению 1.1.3 $\varphi_{i,j}(B_i) = B_j$ при $i > j$. Для неприводимого подмногообразия на V_j (скажем, $Y \subset V_j$) его собственный прообраз на V_i (если он определен, т.е. $Y \not\subset B_j$) обозначаем добавлением верхнего индекса i (скажем, $Y^i \subset V_i$).

То же обозначение применяем к эффективным алгебраическим циклам, скажем,

$$Z^i = \Sigma m_k Z_k^i$$

для цикла $Z = \Sigma m_k Z_k$ на V_j. Использование этого обозначения подразумевает, что собственный прообраз корректно определен.

Предложение 1.1.4. *Последовательность раздутий* (1.1.6) *обрывается*: *для некоторого* $K \geqslant 1$ *реализуется первый случай альтернативы предложения* 1.1.3, *т.е.*

$$\sigma_{K,0}^{-1} \circ \psi(E) = E_K.$$

Доказательство. Как мы увидим ниже, дискрепантности исключительных дивизоров E_i по отношению к модели V монотонно возрастают, в частности,

$$a(E_i, V) \geqslant i,$$

в то же время

$$a(E_i, V) \leqslant a(E, V),$$

потому что центр E на V_i содержится в E_i, что и требовалось доказать.

Последовательность раздутий (1.1.6) назовем разрешением нормирования ν_E относительно модели V. На множестве раздутий $\varphi_{i,i-1}$, или, точнее, множестве исключительных дивизоров $\{E_1, \ldots, E_K\}$, введем структуру ориентированного графа следующим образом: положим $i \to j$, если $i > j$ и $B_{i-1} \subset E_j^{i-1}$. Эта важная структура впервые появилась в [10] (для поверхностей – в [16], [17]). Ее смысл в том, чтобы вычислить собственный прообраз исключительных дивизоров:

$$E_j^i = \varphi_{i,j}^* E_j - \sum_{j \leftarrow k \leqslant i} \varphi_{i,k}^* E_k.$$

Для того чтобы, наоборот, вычислить полный прообраз в терминах собственных прообразов, положим для $i > j$: p_{ij} – число путей из E_i в E_j в описанном ориентированном графе, $p_{ij} \geqslant 1$. Положим также $p_{ii} = 1$.

Предложение 1.1.5. *Имеет место разложение*

$$\varphi_{i,j}^* E_j = \sum_{k=j}^{i} p_{kj} E_k^i. \tag{1.1.7}$$

Доказательство. Следуя [10], проведем доказательство индукцией по $i \geqslant j$. Если $i = j$, то доказывать нечего. Если $i = j + 1$, то

$$\varphi_{j+1,j}^* E_j = E_j^{j+1} + E_{j+1},$$

потому что $B_j \subset E_j$ и дивизор E_j неособ в общей точке B_j. Теперь для $i \geqslant j+2$ имеем

$$\varphi^*_{i,j} E_j = \varphi^*_{i,i-1}(\varphi^*_{i-1,j} E_j) = \varphi^*_{i,i-1}\left(\sum_{k=j}^{i-1} p_{kj} E_k^{i-1}\right) = \sum_{k=j}^{i-1} p_{kj} E_k^i + \left(\sum_{\substack{k=j \\ B_{i-1} \subset E_k^{i-1}}}^{i-1} p_{kj}\right) E_i.$$

Нетрудно понять, что имеет место равенство

$$p_{ij} = \sum_{i \to k} p_{kj}$$

(в каждом пути из i в j отметим *первую* вершину графа после i: $i \to k \to \cdots \to j$). Этим предложение доказано.

Комбинаторные варианты p_{ij} дают явные представления для кратностей и дискрепантностей. Пусть Σ^j – собственный прообраз линейной системы Σ на V_j. Положим

$$\nu_j = \operatorname{mult}_{B_{j-1}} \Sigma^{j-1}, \qquad \beta_j = \operatorname{codim} B_{j-1} - 1.$$

Получаем

$$\nu_{E_K}(\Sigma) = \nu_E(\Sigma) = \sum_{i=1}^K p_{Ki}\nu_i, \qquad a(E) = \sum_{i=1}^K p_{Ki}\beta_i.$$

Полагая для удобства обозначений $p_i = p_{Ki}$, получаем традиционную форму неравенства Нётера–Фано

$$\sum_{i=1}^K p_i\nu_i > n\sum_{i=1}^K p_i\beta_i. \tag{1.1.8}$$

Замечание 1.1.1. Из проведенных рассуждений видно, что наши построения имеют смысл в более общем контексте. Многообразие V может быть особым, однако необходимо, во-первых, чтобы по крайней мере некоторая кратность ND любого дивизора Вейля D на V задавалась локально одним уравнением (это позволяет поднимать дивизоры относительно морфизмов) и, во-вторых, чтобы для любых раздутий все дискрепантности исключительных дивизоров были положительны. Таким образом, неравенство Нётера–Фано и понятие максимальной особенности имеют смысл для многообразий с $\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями.

Замечание 1.1.2. Неравенство Нётера–Фано может быть следующим образом переформулировано на языке $\mathbb{Q}$-дивизоров (т.е. линейных комбинаций простых дивизоров с рациональными коэффициентами). Пусть $D \in \Sigma$ – общий дивизор. Тогда лог-пара

$$\left(V, \frac{1}{n}D\right)$$

не канонична, т.е. имеет неканоническую особенность $E \subset V^+$, удовлетворяющую неравенству

$$\nu_E\left(\frac{1}{n}D\right) > a(E).$$

Напомним [18], что лог-пара (V, Z), где Z – эффективный $\mathbb{Q}$-дивизор, *канонична*, если для любого геометрического дискретного нормирования ν_E имеет место неравенство $\nu_E(Z) \leqslant a(E)$. Пара (V, Z) *терминальна* (соответственно *лог-терминальна* и *лог-канонична*), если для любого ν_E имеет место неравенство $\nu_E(Z) < a(E)$ (соответственно $\nu_E(Z) < a(E)+1$ и $\nu_E(Z) \leqslant a(E)+1$). Эти понятия работают в современных продвинутых методах многомерной бирациональной геометрии.

В качестве иллюстрации этих концепций докажем

Предложение 1.1.6. *Пусть V – примитивное многообразие Фано, V' – многообразие Фано с $\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями и числом Пикара 1, т.е.*

$$\operatorname{Pic} V' \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} K_{V'},$$

$\chi\colon V \dashrightarrow V'$ *– бирациональное отображение.*

(i) *Предположим, что V бирационально жесткое. Тогда V и V' (бирегулярно) изоморфны (хотя само отображение χ, вообще говоря, не есть изоморфизм).*

(ii) *Предположим, что V бирационально сверхжесткое. Тогда χ есть бирегулярный изоморфизм. В частности, группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают*: $\operatorname{Bir} V = \operatorname{Aut} V$.

Доказательство. (i) Пусть $\chi\colon V \dashrightarrow V'$ – бирациональное отображение, $\varphi\colon Y \to V$ – его разрешение по Хиронаке, так что $\psi = \chi \circ \varphi\colon Y \to V'$ – бирациональный морфизм. Многообразие Y неособо и

$$\operatorname{Pic} Y = \mathbb{Z}\varphi^* K_V \oplus \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} E_i,$$

где $\{E_i \mid i \in I\}$ – множество всех φ-исключительных дивизоров. По предположению

$$\operatorname{Pic} Y \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\psi^* K_{V'} \oplus \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Q} E'_j,$$

где $\{E'_j \mid j \in J\}$ – множество всех ψ-исключительных дивизоров. Для простоты обозначений положим

$$K = \varphi^* K_V, \qquad K' = \psi^* K_{V'}.$$

Получаем

$$K_Y = K + \sum_{i \in I} a_i E_i = K' + \sum_{j \in J} a'_j E'_j, \tag{1.1.9}$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \geqslant 1$ и $a'_j \in \mathbb{Q}$, $a'_j > 0$. Пусть

$$\Sigma' = |-mK_{V'}|, \qquad m \gg 0,$$

– очень обильная линейная система. Очевидно, $c(\Sigma', V') = m$. Возьмем ее собственный прообраз

$$\Sigma = \chi_*^{-1} \Sigma' \subset |-nK_V|;$$

очевидно, $c(\Sigma, V) = n$. Подкручивая на подходящий бирациональный автоморфизм, мы можем считать, что виртуальный и реальный пороги канонического присоединения совпадают уже для Σ. Значит, $n \leqslant m$. Собственный прообраз линейной системы Σ на Y совпадает с собственным прообразом линейной системы Σ' относительно ψ. Следовательно, существуют целые положительные числа b_i, $i \in I$, такие, что

$$-mK' = -nK - \sum_{i \in I} b_i E_i.$$

Деля на m и подставляя в (1.1.9), получаем

$$\left(1 - \frac{n}{m}\right) K = \sum_{i \in I} \left(\frac{b_i}{m} - a_i\right) E_i + \sum_{j \in J} a'_j E'_j.$$

Поскольку дивизоры E_i являются φ-исключительными и $a'_j > 0$, получаем равенство

$$n = m;$$

иначе получаем противоречие с обильностью класса $(-K_V)$. Далее, все дивизоры E'_j оказываются φ-исключительными и, более того,

$$\{E_i \mid i \in I\} = \{E'_j \mid j \in J\},$$

иначе $\operatorname{rk}\operatorname{Pic} V' \geqslant 2$. Значит, χ – изоморфизм в коразмерности 1; положим

$$U = V \setminus \bigcup_{i\in I} \varphi(E_i), \qquad U' = V' \setminus \bigcup_{j\in J} \psi(E'_j),$$

тогда $\chi\colon U \to U'$ – изоморфизм. Следовательно,

$$\Sigma = |-nK_V|$$

и χ индуцирует изоморфизм линейных систем Σ и Σ'. Следовательно, $\chi\colon V \to V'$ – изоморфизм. (Таким образом, доказано, что для произвольного бирационального отображения $\chi\colon V \dashrightarrow V'$ существует такой бирациональный автоморфизм $\chi^* \in \operatorname{Bir} V$, что $\chi \circ \chi^*$ – изоморфизм.)

Утверждение (ii) теперь очевидно. Предложение 1.1.6 доказано.

1.1.3. Общая схема метода. Сформулируем основные шаги метода максимальных особенностей. Для каждого геометрического дискретного нормирования $\nu = \nu_E$ поля $\mathbb{C}(V)$ (реализуемого исключительным дивизором $E \subset V^+$ на некоторой модели $V^+ \to V$) нужно ответить на следующий вопрос:

> *существует ли подвижная линейная система Σ с порогом канонического присоединения $n = c(\Sigma) > 0$, для которой ν_E есть максимальная особенность (т.е. имеет место неравенство (1.1.5))?*

Получение отрицательного ответа на этот вопрос называется *исключением* данной максимальной особенности. Как мы отметили выше, это наиболее трудная часть работы. Известные сегодня технические приемы исключения подробно рассмотрены ниже.

Если ответ на поставленный выше вопрос положительный, то необходимо предъявить подвижную линейную систему Σ с максимальной особенностью E. Следующий шаг в этом случае – *откручивание* максимальной особенности E. В наиболее простом виде процедура откручивания выглядит так: строится бирациональный автоморфизм $\tau_E \in \operatorname{Bir} V$ такой, что для любой линейной системы Σ, имеющей максимальную особенность E, выполнено неравенство

$$c((\tau_E^{-1})_*\Sigma) < c(\Sigma),$$

где $(\tau_E^{-1})_*\Sigma$ – собственный прообраз Σ относительно τ_E, причем E уже не является максимальной особенностью системы $(\tau_E^{-1})_*\Sigma$. Таким образом, τ_E "откручивает" (устраняет) максимальную особенность E, одновременно понижая порог канонического присоединения.

Пусть V – примитивное многообразие Фано. Предположим, что для V описанная выше схема успешно реализована. Пусть $\mathcal{M}$ — множество дискретных нормирований, для которых ответ на поставленный выше вопрос положительный, т.е. любое нормирование E реализуется в качестве максимальной особенности тогда и только тогда, когда $E \in \mathcal{M}$.

В этих предположениях имеет место

Теорема 1.1.1. (i) *Многообразие V бирационально жесткое.*

(ii) *Группа бирациональных автоморфизмов* $\operatorname{Bir} V$ *порождена подгруппой бирегулярных автоморфизмов* $\operatorname{Aut} V$ *и подгруппой* $B(V)$, *порожденной откручивающими преобразованиями* τ_E, $E \in \mathcal{M}$.

(iii) *Если* $\mathcal{M} = \varnothing$, *то* V *бирационально сверхжесткое.*

Доказательство. На примитивном многообразии Фано порог канонического присоединения принимает лишь целые положительные значения. Поэтому процедура откручивания не может быть бесконечной: для некоторой последовательности максимальных особенностей $E_1, \ldots, E_N$ бирациональный автоморфизм $\tau = \tau_{E_1} \circ \cdots \circ \tau_{E_N}$ преобразует систему Σ в систему $\Sigma = (\tau^{-1})_* \Sigma$, не имеющую максимальных особенностей, и потому согласно предложению 1.1.2

$$c(\Sigma^\tau) = c_{\mathrm{virt}}(\Sigma^\tau) = c_{\mathrm{virt}}(\Sigma),$$

что и означает бирациональную жесткость. Если $\mathcal{M} = \varnothing$, то получаем это равенство порогов сразу, что и доказывает (iii). Осталось установить (ii). Для произвольного бирационального автоморфизма $\chi \in \operatorname{Bir} V$ рассмотрим очень обильную линейную систему $\Sigma^* = |-mK_V|$ и ее собственный прообраз $\Sigma^\chi = (\chi^{-1})_* \Sigma^*$ относительно χ. Если

$$c(\Sigma^\chi) = c_{\mathrm{virt}}(\Sigma^\chi) = c_{\mathrm{virt}}(\Sigma^*) \leqslant m,$$

то $\Sigma^\chi = \Sigma^*$ (скажем, по соображениям размерности $\operatorname{div} \Sigma^\chi$), так что $\chi \in \operatorname{Aut} V$ – бирегулярный автоморфизм. Поэтому процедура откручивания максимальных особенностей доказывает (ii) одновременно с (i). Теорема доказана.

Замечание 1.1.3. Во всех изученных случаях откручивающие бирациональные отображения τ_E являются инволюциями, канонически определенными соответствующими максимальными особенностями, так что, в частности, для любого бирегулярного автоморфизма $\alpha \in \operatorname{Aut} V$ имеет место равенство $\alpha^{-1} \tau_E \alpha = \tau_{\alpha(E)}$ и подгруппа $B(V)$ нормальна, а $\operatorname{Bir} V$ есть расширение

$$1 \to B(V) \to \operatorname{Bir} V \to \operatorname{Aut} V \to 1.$$

Далее, из описания процедуры откручивания понятно, что соотношения между образующими τ_E, $E \in \mathcal{M}$, могут появляться тогда и только тогда, когда откручивание не определено однозначно, т.е. некоторая подвижная линейная система Σ может иметь две различные максимальные особенности $E_1 \neq E_2$ одновременно. Если, наоборот, такое невозможно, то группа $B(V)$ есть свободное произведение циклических групп $\langle \tau_E \rangle$ (в частности, очень велика). Приведенное рассуждение дает несколько упрощенную картину. Точное описание дано ниже на примере вычисления группы бирациональных автоморфизмов $\operatorname{Bir} V_{2\cdot 3}$ полного пересечения Фано $V_{2\cdot 3} \subset \mathbb{P}^5$.

Замечание 1.1.4. Описанная выше процедура откручивания максимальных особенностей является удовлетворительной далеко не для всех многообразий. Типичной является ситуация, когда некоторая максимальная особенность E реализуется подвижной линейной системой Σ, однако не откручивается бирациональным автоморфизмом: такого автоморфизма τ_E просто не существует.

Опыт практического изучения таких особенностей уже давно привел к общему убеждению, что в этом случае особенности E соответствует другая структура рационально связного расслоения или многообразия Фано на V, т.е. E откручивается бирациональным отображением $V \dashrightarrow V^\sharp$. Эти соображения, основанные на большом эмпирическом материале, составляют суть *программы Саркисова* – теории факторизации бирациональных отображений в композицию бирациональных отображений очень специального вида – *элементарных линков* [19]. В размерности 3 программа Саркисова есть полностью доказанная теорема, много раз публиковавшаяся с разной степенью подробности [20]–[23]. Недавние успехи программы лог-минимальных моделей позволяют надеяться, что и многомерная версия программы Саркисова будет завершена в обозримом будущем. Однако подчеркнем, что это общая теорема существования, сама по себе не дающая описания бирациональной геометрии конкретного многообразия V. Как и сто лет назад, главная проблема заключается в выделении реализуемых максимальных особенностей и в построении откручивающих отображений (последнее для явно заданного многообразия никогда не является сложной задачей). По этой причине в данном обзоре мы ограничились простым вариантом метода максимальных особенностей, когда откручивание осуществляется бирациональными автоморфизмами. Кроме того, следует иметь в виду, что примеров до конца изученных многообразий (за исключением расслоений на коники), в которых появляются линки на другую модель, очень мало (см. [24]–[27]); как правило, многообразия с нетривиальными линками имеют богатую бирациональную геометрию и современная техника еще недостаточно сильна для них.

Замечание 1.1.5. Выше мы упомянули некоторые варианты понятия максимальной особенности, пришедшие из программы минимальных моделей. Если нормирование ν_E удовлетворяет нестрогому неравенству Нётера–Фано, т.е. $\nu_E(\Sigma) \geqslant na(E)$, то пара

$$\left(V, \frac{1}{n} D\right)$$

не терминальна. Знание таких особенностей E (фактически речь идет о равенстве Нётера–Фано $\nu_E = na(E)$, так как иначе получаем обычное понятие максимальной особенности) позволяет описывать структуры K-тривиального расслоения на V, т.е. бирациональные отображения $\chi\colon V \dashrightarrow V^\sharp$, где $V^\sharp$ снабжено морфизмом $\pi\colon V^\sharp \to S^\sharp$, слой общего положения которого имеет тривиальный канонический класс, а также бирациональные отображения $\chi\colon V \dashrightarrow V^\sharp$ на многообразия Фано с каноническими особенностями [2], [21], [28]–[32], [34]. В частности, несложная модификация доказательства предложения 1.1.6 (в конце рассуждения нужно учесть, что исключительные дивизоры E_i появятся со строго положительными коэффициентами) дает следующее утверждение.

Предложение 1.1.7. *Предположим, что на примитивном многообразии Фано V нет максимальных особенностей, $\mathcal{M} = \varnothing$, а любая подвижная линейная система Σ, удовлетворяющая нестрогому неравенству Нётера–Фано для некоторого ν_E, задает отображение $V \dashrightarrow S$ на многообразие меньшей размерности. Тогда любое бирациональное отображение $\chi\colon V \dashrightarrow V^\sharp$ на многообразие $V^\sharp$ с каноническими особенностями (без ограничений на ранг группы Пикара $\rho(V^\sharp)$) есть бирегулярный изоморфизм.*

§ 1.2. Исключение максимальных особенностей

В этом параграфе рассмотрена задача исключения максимальной особенности $E \subset V^+$ подвижной линейной системы Σ на гладком многообразии V. Задача естественно распадается на исключение максимальных подмногообразий (п. 1.2.1) и исключение бесконечно близкой максимальной особенности. В п. 1.2.2 рассмотрен ключевой локальный факт, на котором основана процедура исключения – *$4n^2$-неравенство*, в п. 1.2.3 приведено другое доказательство этого неравенства, основанное на принципе связности Шокурова–Коллара.

1.2.1. Максимальные подмногообразия. Мы используем обозначения и конструкции п. 1.1.2. Особенность $E \subset V^+$ и ее разрешение фиксированы. Мы хотим доказать, что E не является максимальной особенностью никакой подвижной линейной системы Σ с

$$n = c(\Sigma) > 0.$$

Методы доказательства существенно различны для разных типов особенностей и разных классов многообразий. Прежде всего, разделим множество особенностей на два естественных типа. В обозначениях п. 1.1.2 размерности раздуваемых подмногообразий $\operatorname{div} B_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, не убывают. Следовательно, имеет место альтернатива: либо

$$\operatorname{div} B_0 = \cdots = \operatorname{div} B_{N-1},$$

либо

$$\operatorname{div} B_0 < \operatorname{div} B_{N-1}.$$

В последнем случае скажем, что E – *бесконечно близкая* особенность.

Предложение 1.2.1. *Предположим, что E – максимальная особенность подвижной линейной системы Σ и*

$$\operatorname{div} B_0 = \operatorname{div} B_{N-1}.$$

Тогда подмногообразие $B = B_0$ (центр особенности E на V) есть максимальное подмногообразие системы Σ.

Доказательство очевидным образом следует из явной формы (1.1.8) неравенства Нётера–Фано, равенства локальных дискрепантностей

$$\beta_1 = \cdots = \beta_N = \operatorname{codim} B - 1$$

и невозрастания кратностей

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \cdots \geqslant \nu_N.$$

Следствие 1.2.1. *Если центр $B \subset V$ максимальной особенности E не есть максимальное подмногообразие системы Σ, то E – бесконечно близкая максимальная особенность.*

Наибольшую трудность представляет именно исключение бесконечно близкого случая. Сейчас рассмотрим основные приемы исключения максимальных подмногообразий. Чаще всего используются два метода.

Предположим, что $\operatorname{div} V \geqslant 4$ и

$$A^2 V = \mathbb{Z} K_V^2,$$

где $A^2 V$ есть группа классов циклов коразмерности 2 по модулю численной эквивалентности. Этому условию по теореме Лефшеца удовлетворяют, например, все гладкие полные пересечения Фано индекса 1 размерности $\geqslant 5$ в проективном пространстве (на самом деле – во взвешенном проективном пространстве; этот класс может быть еще расширен и может включать семейства особых многообразий). Пусть $B \sim m K_V^2$ – неприводимое подмногообразие коразмерности 2.

Предложение 1.2.2. *Подмногообразие B не может быть максимальным подмногообразием подвижной линейной системы $\Sigma \subset |-nK_V|$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $D_1, D_2 \in \Sigma$ – общие дивизоры. Корректно определен эффективный цикл $Z = (D_1 \circ D_2)$ теоретико-схемного пересечения D_1 и D_2, так как $\operatorname{codim}(D_1 \cap D_2) = 2$ в силу общности этих дивизоров. Цикл Z (зависящий, конечно, от выбора D_1, D_2) назовем *самопересечением* системы Σ. Имеем

$$n^2 K_V^2 \sim Z = \alpha B + Y,$$

где Y – некоторый эффективный цикл коразмерности 2 и $\alpha > n^2$. Немедленно получаем противоречие. Предложение доказано.

Если V – произвольное примитивное многообразие Фано (без каких-либо дополнительных предположений относительно A^2V), то приведенное рассуждение позволяет ограничить множество максимальных подмногообразий коразмерности 2.

Точнее, пусть $Y \subset V$ – неприводимое подмногообразие (произвольной коразмерности). Назовем (антиканонической) степенью Y число

$$\deg Y = (Y \cdot (-K_V)^{\dim Y}) \in \mathbb{Z}_+.$$

В частности, $\deg V = (-K_V)^{\dim V}$ есть степень самого многообразия V. В обозначениях доказательства предложения 1.2.2, вычисляя

$$\deg Z = n^2 \deg V \geqslant \alpha \deg B,$$

получаем оценку

$$\deg B < \deg V. \tag{1.2.1}$$

Например, на трехмерной квартике $V_4 \subset \mathbb{P}^4$ степень максимальной кривой может принимать значения 1, 2 и 3; как показано в [10], ни одна из этих возможностей не реализуется. Однако главный смысл оценки (1.2.1) в том, что класс подмногообразий коразмерности 2, которые могут быть максимальными, становится обозримым, и возникающие возможности можно перебрать вручную.

Наиболее мощный метод исключения максимальных подмногообразий – это метод конусов, предложенный в [35], [1] и затем развивавшийся в [36], [33]. Опишем его на примере гладкой гиперповерхности Фано $V = V_M \subset \mathbb{P}^M$.

Лемма 1.2.1. *Для любой кривой $C \subset V$*

$$\operatorname{mult}_C |\chi| \leqslant n.$$

Доказательство. Воспользуемся следующей конструкцией.

Предложение 1.2.3. *Пусть $C \subset W$, где $W \subset \mathbb{P}^M$ – гладкая гиперповерхность. Пусть $x \in \mathbb{P}^M \setminus W$ – точка общего положения, $C(x) \subset \mathbb{P}^M$ – конус с вершиной x и базой C. Тогда*

$$C(x) \cap W = C \cup R(x),$$

где вычетная кривая $R(x)$ пересекает C в $\deg R(x)$ различных точках.

Доказательство. Несложно проверить, что на поверхности $C(x)$ кривая C численно эквивалентна гиперплоскому сечению. Нужно, однако, показать, что для общей точки x все точки пересечения R и C имеют кратность 1.

Очевидно, C пересекает $R(x)$ в тех и только тех точках, где C пересекает дивизор ветвления $W_x \subset W$ проекции $\pi\colon W \to \mathbb{P}^{M-1}$ из точки x. Гиперповерхность W_x высекается на W гиперповерхностью

$$F_x = \sum_{i=0}^{M} \frac{\partial F}{\partial z_i} x_i = 0,$$

где $(z_0 : \dots : z_M)$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^M$, $F(z_0, \dots, z_M)$ – уравнение W относительно этих координат, и $(x_0 : \dots : x_M)$ есть точка x. Но многообразие W неособо, так что линейная система

$$\left| \sum_{i=0}^{M} \lambda_i \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|$$

не имеет базисных точек. Поэтому для общей точки x пересечение $C \cap W_x$ состоит из

$$(\deg W - 1) \deg C = \deg R(x)$$

различных точек, что и требовалось доказать.

Вернемся к доказательству леммы 1.2.1. Пусть $a \in \mathbb{P} \setminus V$ – общая точка, $R(a)$ – вычетная кривая пересечения конуса $C(a)$ и гиперповерхности V. Тогда ограничение линейной системы $|\chi|$ на $R(a)$ есть линейный ряд степени $n \cdot \deg R(a)$, имеющий $\deg R(a)$ неподвижных точек кратности $\mathrm{mult}_C |\chi|$, что и доказывает лемму.

Метод конусов позволяет оценивать кратности подмногообразий более высокой коразмерности, не только дивизоров [36], а также исключать максимальные особенности на различных типах гиперповерхностей и полных пересечений Фано [33], [29].

Имеются и другие методы исключения максимальных подмногообразий положительной размерности [10], [11], [37], [13], [38]. Все они тем или иным способом реализуют одну и ту же идею – найти на многообразии V подвижное подмногообразие S малой размерности, имеющее возможно большее пересечение с максимальным подмногообразием, и ограничить систему Σ на S. Получается эффективный дивизор на S, имеющий, однако, "слишком большие" особенности, что и дает противоречие; конкретные примеры см. в перечисленных выше работах.

1.2.2. $4n^2$-неравенство. Обратимся к бесконечно близкому случаю. Пусть $E \subset V^+$ – максимальная особенность системы Σ, причем (в обозначениях п. 1.1.2, которыми мы пользуемся без специальных оговорок)

$$\operatorname{div} B_0 < \operatorname{div} B_{N-1}.$$

В частности, $\operatorname{codim} B_0 \geqslant 3$. Положим $B = B_0$ и рассмотрим самопересечение $Z = (D_1 \circ D_2)$ системы Σ. Напомним, что $n = c(\Sigma) > 0$ есть порог канонического присоединения и выполнено неравенство Нётера–Фано (1.1.5) (в явной традиционной форме (1.1.8)).

Теорема 1.2.1 ($4n^2$-неравенство). *Имеет место оценка*

$$\mathrm{mult}_B Z > 4n^2. \tag{1.2.2}$$

Прежде чем доказывать теорему 1.2.1, сделаем несколько замечаний. Из этой теоремы немедленно следует бирациональная сверхжесткость трехмерной квартики: линейная система Σ высекается на $V = V_4$ гиперповерхностями степени n, так что

$$\deg Z = 4n^2$$

в смысле обычной степени в проективном пространстве. Далее, $B = p \in V$ – некоторая точка, так что Z – эффективная кривая степени $4n^2$ в $\mathbb{P}^4$, имеющая точку кратности больше чем $4n^2$, чего, конечно, не может быть. Это исключает максимальную особенность и доказывает бирациональную сверхжесткость. Из приведенного рассуждения также следует, что бесконечно близких максимальных особенностей нет на многообразиях Фано степени $\leqslant 4$. Впервые $4n^2$-неравенство было опубликовано в [39], однако и само неравенство, и метод его доказательства извлечены из [10] (с существенными упрощениями), где они содержатся в неявной форме.

Доказательство теоремы 1.2.1. Рассмотрим сначала следующую общую ситуацию.

Пусть $B \subset X$, $B \not\subset \operatorname{Sing} X$, – неприводимое подмногообразие коразмерности $\geqslant 2$, и пусть $\sigma_B \colon X(B) \to X$ – его раздутие, $E(B) = \sigma_B^{-1}(B)$ – исключительный дивизор. Пусть $Z = \sum m_i Z_i$, $Z_i \subset E(B)$, – цикл размерности k, $k \geqslant \operatorname{div} B$. Определим *степень* цикла Z, полагая

$$\deg Z = \sum_i m_i \deg(Z_i \cap \sigma_B^{-1}(b)),$$

где $b \in B$ – точка общего положения, $\sigma_B^{-1}(b) \cong \mathbb{P}^{\operatorname{codim} B - 1}$ и степень справа есть обычная степень в проективном пространстве.

Отметим, что $\deg Z_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma_B(Z_i)$ – собственное замкнутое подмножество подмногообразия B.

Наши вычисления основаны на следующем утверждении.

Пусть D и Q – два различных простых дивизора Вейля на X, D^B и Q^B – их собственные прообразы на $X(B)$. Вообще, для любого подмногообразия $Y \subset X$ его собственный прообраз на $X(B)$ обозначаем через Y^B.

Лемма 1.2.2. (i) *Предположим, что* $\operatorname{codim} B \geqslant 3$. *Тогда*

$$D^B \circ Q^B = (D \circ Q)^B + Z,$$

где $\circ$ *обозначает цикл теоретико-схемного пересечения*, $\operatorname{Supp} Z \subset E(B)$ *и*

$$\operatorname{mult}_B(D \circ Q) = (\operatorname{mult}_B D)(\operatorname{mult}_B Q) + \deg Z.$$

(ii) *Предположим, что* $\operatorname{codim} B = 2$. *Тогда*

$$D^B \circ Q^B = Z + Z_1,$$

где $\operatorname{Supp} Z \subset E(B)$, $\operatorname{Supp} \sigma_B(Z_1)$ *не содержит* B *и*

$$D \circ Q = [(\operatorname{mult}_B D)(\operatorname{mult}_B Q) + \deg Z]B + (\sigma_B)_* Z_1.$$

Доказательство легко получается применением стандартной теории пересечений [40].

Вернемся теперь к дискретному нормированию ν.

Разобьем разрешение $\varphi_{i,i-1}\colon X_i \to X_{i-1}$ на нижнюю часть, $i = 1, \ldots, L \leqslant K$, соответствующую раздутиям, для которых $\operatorname{codim} B_{i-1} \geqslant 3$, и верхнюю часть, $i = L+1, \ldots, K$, соответствующую раздутиям, для которых $\operatorname{codim} B_{i-1} = 2$. Может случиться, что $L = K$ и верхняя часть пуста.

Пусть $D_1, D_2 \in \Sigma$ – два различных общих дивизора. Определим последовательность циклов коразмерности 2 на многообразиях X_i, полагая

$$\begin{aligned}
&D_1 \circ D_2 = Z_0,\\
&D_1^1 \circ D_2^2 = Z_0^1 + Z_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&D_1^i \circ D_2^i = (D_1^{i-1} \circ D_2^{i-1})^i + Z_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

где $Z_i \subset E_i$. Тем самым, для любого $i \leqslant L$ получаем

$$D_1^i \circ D_2^i = Z_0^i + Z_1^i + \cdots + Z_{i-1}^i + Z_i.$$

Для любых $j > i, j \leqslant L$ положим

$$m_{i,j} = \operatorname{mult}_{B_{j-1}}(Z_i^{j-1})$$

(кратность неприводимого подмногообразия вдоль меньшего подмногообразия понимается в обычном смысле; для произвольного цикла продолжаем кратность по линейности).

Положим $d_i = \deg Z_i$.

Получаем следующую систему равенств:

$$\begin{aligned}
&\nu_1^2 + d_1 = m_{0,1},\\
&\nu_2^2 + d_2 = m_{0,2} + m_{1,2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\nu_i^2 + d_i = m_{0,i} + \cdots + m_{i-1,i},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\nu_L^2 + d_L = m_{0,L} + \cdots + m_{L-1,L}.$$

Теперь

$$d_L \geqslant \sum_{i=L+1}^{K} \nu_i^2 \deg(\varphi_{i-1,L})_* B_{i-1} \geqslant \sum_{i=L+1}^{K} \nu_i^2.$$

Определение 1.2.1. Функция $a\colon \{1,\ldots,L\} \to \mathbb{R}_+$ называется *согласованной со структурой графа*, если

$$a(i) \geqslant \sum_{j\to i} a(j)$$

для любого $i = 1,\ldots,L$.

В действительности будет использоваться только одна функция, согласованная со структурой графа, а именно $a(i) = p_{Ki} = p_i$.

Предложение 1.2.4. *Пусть $a(\,\cdot\,)$ – функция, согласованная со структурой графа. Тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^{L} a(i) m_{0,i} \geqslant \sum_{i=1}^{L} a(i)\nu_i^2 + a(L) \sum_{i=L+1}^{K} \nu_i^2.$$

Доказательство. Умножим i-е равенство на $a(i)$ и сложим их: справа для любого $i \geqslant 1$ получим выражение

$$\sum_{j\geqslant i+1} a(j) m_{i,j}.$$

В левой части для любого $i \geqslant 1$ получаем слагаемое $a(i)d_i$.

Лемма 1.2.3. *Если $m_{i,j} > 0$, то*

$$i \to j.$$

Доказательство. Если $m_{i,j} > 0$, то некоторая компонента цикла Z_i^{j-1} содержит B_{j-1}. Но $Z_i^{j-1} \subset E_i^{j-1}$. Что и требовалось доказать.

А теперь сравним кратности m_{ij} с соответствующими степенями.

Лемма 1.2.4. *Для любых $i \geqslant 1$, $j \leqslant L$ имеем*

$$m_{i,j} \leqslant d_i.$$

Доказательство. Подмногообразия B_a неособы в своих общих точках. Но поскольку отображения $\varphi_{a,b}\colon B_a \to B_b$ сюръективны, можно считать кратности в общих точках. Учитывая, что кратности не возрастают при раздутии неособого подмногообразия, сводим утверждение к очевидному случаю гиперповерхности в проективном пространстве. Лемма доказана.

В результате получаем следующую оценку:

$$\sum_{j\geqslant i+1} a(j) m_{i,j} = \sum_{\substack{j\geqslant i+1\\ m_{i,j}\neq 0}} a(j) m_{i,j} \leqslant d_i \sum_{j\to i} a(j) \leqslant a(i) d_i.$$

В силу сказанного выше можно отбросить справа все слагаемые $m_{i,*}$, $i \geqslant 1$, а слева – все слагаемые d_i, $i \geqslant 1$, заменяя при этом знак $=$ на знак $\leqslant$. Что и требовалось доказать.

Следствие 1.2.2. *Положим*

$$m = m_{0,1} = \mathrm{mult}_B(D_1 \circ D_2), \qquad D_i \in \Sigma.$$

Тогда имеет место неравенство

$$m\left(\sum_{i=1}^{L} a(i)\right) \geqslant \sum_{i=1}^{L} a(i)\nu_i^2 + a(L) \sum_{i=L+1}^{K} \nu_i^2.$$

Следствие 1.2.3. *Имеет место следующее неравенство*:

$$m\left(\sum_{i=1}^{L} p_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{K} p_i\nu_i^2.$$

Доказательство. При $i \geqslant L+1$ очевидным образом имеем $p_i \leqslant p_L$. Что и требовалось доказать.

Принимая во внимание неравенство Нётера–Фано для нормирования ν, видим, что правая часть в этом неравенстве строго больше, чем значение квадратичной формы $\sum_{i=1}^{K} p_i\nu_i^2$ в точке

$$\nu_1 = \cdots = \nu_K = \frac{\sum_{i=1}^{K} p_i\delta_i n}{\sum_{i=1}^{K} p_i}.$$

Теперь положим

$$\Sigma_l = \sum_{\delta_j \geqslant 2} p_j, \qquad \Sigma_u = \sum_{\delta_j = 1} p_j.$$

В этих обозначениях имеем

$$\mathrm{mult}_B\, Z > \frac{(2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{\Sigma_l(\Sigma_l + \Sigma_u)} n^2.$$

Теперь легкими вычислениями показываем, что правая часть не меньше чем $4n^2$.

Доказательство теоремы 1.2.1 завершено.

1.2.3. Второе доказательство: принцип связности. Ввиду важности теоремы 1.2.1 дадим ее другое доказательство. Его идея предложена в [41], однако приводимый ниже вариант использует только так называемый принцип связности Шокурова–Коллара [18], [42] для сведения теоремы 1.2.1 к ранее известному факту о графах раздутий на неособых поверхностях [38]. Достаточно рассмотреть случай, когда $B = o$ – точка (возьмем общий росток неособого подмногообразия размерности $\operatorname{codim} B$ в точке общего положения $o \in B$, трансверсальный к B, и ограничим систему Σ на этот росток).

Пусть $S \ni o$ – общий росток гладкой поверхности на многообразии X. Очевидно, $\Lambda = \Sigma|_S$ – росток линейной системы кривых на S, имеющий точку o изолированной базисной точкой. Поскольку пара

$$\left(X, \frac{1}{n}\Sigma\right)$$

не канонична в точке o (это просто переформулировка неравенства Нётера–Фано (1.1.5)), то в силу обращения присоединения (которое есть прямое следствие принципа связности Шокурова–Коллара [18], [42]) пара

$$\left(S, \frac{1}{n}\Lambda\right)$$

не лог-канонична в точке o. Другими словами, для некоторого бирационального морфизма $\varphi\colon \widetilde{S} \to S$ гладких поверхностей существует простой дивизор $E \subset \widetilde{S}$, удовлетворяющий лог-варианту неравенства Нётера–Фано:

$$\nu_E(\Lambda) > n(a(E)+1), \tag{1.2.3}$$

где $a(\,\cdot\,)$ – дискрепантность, $\nu_E(\,\cdot\,)$ – кратность общего дивизора системы относительно E. Пусть $D_1, D_2 \in \Lambda$ – общие кривые, $Z = (D_1 \circ D_2)$ – нульмерная подсхема на S. Можно считать, что ее носитель – точка o.

Предложение 1.2.5. *Имеет место следующее неравенство*:

$$\operatorname{mult}_o Z (= \deg Z) > 4n^2.$$

Поскольку наши рассмотрения локальны, $\operatorname{mult}_o Z = \deg Z$ – это просто степень нульмерной схемы Z. Поскольку $S \ni o$ – общий росток поверхности, немедленно получаем утверждение теоремы 1.2.1.

Доказательство предложения 1.2.5. Мы приведем элементарное рассуждение, основанное на явных вычислениях. Исходное рассуждение Корти см. в [41]. Пусть

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "\varphi_{i,i-1}"'] & E_i \arrow[d] \\ S_{i-1} \arrow[r, phantom, "\ni"] & x_{i-1} \end{tikzcd}$$

– разрешение дискретного нормирования ν_E, $i = 1, \ldots, N$, $x_0 = o$, $x_1, \ldots, x_{N-1}$ – точки на $S_1, \ldots, S_{N-1}$ соответственно, где $x_i \in E_i$ и $\nu_{E_N} = \nu_E$. Пусть Γ – граф этого разрешения: $\{1, \ldots, N\}$ – множество вершин, а вершины i и j, $i > j$, соединены ориентированным ребром (обозначение $i \to j$ всегда подразумевает, что $i > j$), если и только если

$$x_{i-1} \in E_j^{i-1},$$

где E_j^{i-1} – собственный прообраз исключительной прямой E_j на S_{i-1}. Положим также

$$p_j = (\text{число путей из } N \text{ в } j)$$

для $j \leqslant N-1$, $p_N = 1$. Положим $\nu_i = \operatorname{mult}_{x_{i-1}} \Lambda^{i-1}$, где Λ^{i-1} – собственный прообраз линейной системы Λ на S_{i-1}. Легко видеть, что в терминах разрешения лог-неравенство (1.2.3) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \nu_i > n\biggl(\sum_{i=1}^{N} p_i + 1\biggr).$$

Кроме того, имеет место следующая оценка:

$$\operatorname{mult}_o Z \geqslant \sum_{i=1}^{N} \nu_i^2.$$

Лемма 1.2.5. *Справедливо следующее неравенство*:

$$\operatorname{mult}_o Z > \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i + 1\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} p_i^2}\, n^2.$$

Доказательство получается элементарными вычислениями: минимум квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{N} s_i^2$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{N} p_i s_i = c \tag{1.2.4}$$

достигается при $s_i = p_i a$, где общая константа a находится из равенства (1.2.4).

Ввиду этой леммы предложение 1.2.5 вытекает из следующего факта.

Лемма 1.2.6. *Справедливо следующее неравенство*:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} p_i + 1\right)^2 \geqslant 4\sum_{i=1}^{N} p_i^2. \tag{1.2.5}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что в неравенстве (1.2.5) равенство может достигаться, например, когда $N = 1$. Считаем, что $N \geqslant 2$. Положим

$$\{2, \ldots, k \leqslant N\} = \{i \mid i \to 1\}.$$

По определению чисел p_i получаем равенство

$$p_1 = \sum_{i \to 1} p_i = \sum_{i=2}^{k} p_i.$$

Следовательно, неравенство (1.2.5) может быть переписано в следующем виде:

$$\left(2p_1 + \sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\right)^2 \geqslant 4\sum_{i=1}^{N} p_i^2,$$

или, после несложного преобразования,

$$4\left(\sum_{i=2}^{k} p_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\right) + \left(\sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\right)^2 \geqslant 4\sum_{i=2}^{k} p_i^2 + 4\sum_{i=k+1}^{N} p_i^2.$$

Легко видеть, что если $k = N$, то подграф графа Γ с вершинами $\{2, \ldots, N\}$ имеет вид

$$2 \leftarrow 3 \leftarrow \cdots \leftarrow N$$

(поскольку на любой поверхности S_i кривая $\bigcup_{j \leqslant i} E_j^i$ есть в силу гладкости дивизор с нормальными пересечениями). Значит,

$$p_2 = \cdots = p_N = 1$$

и неравенство (1.2.5) выполнено очевидным образом. Поэтому будем считать, что $N \geqslant k + 1$. Рассуждая по индукции по числу вершин графа Γ, можно предполагать, что неравенство

$$\left(\sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\right)^2 \geqslant 4\sum_{i=k+1}^{N} p_i^2$$

справедливо. Следовательно, достаточно показать, что справедлива следующая оценка:

$$\left(\sum_{i=2}^{k} p_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\right) \geqslant \sum_{i=2}^{k} p_i^2. \tag{1.2.6}$$

Если $k = 2$, то по построению получаем

$$p_2 \leqslant \sum_{i=3}^{N} p_i,$$

откуда немедленно вытекает неравенство (1.2.6). Если $k \geqslant 3$, то подграф графа Γ с вершинами $\{2, \dots, \}$ есть цепь

$$2 \leftarrow 3 \leftarrow \dots \leftarrow k.$$

Поскольку $k \to k-1$ и $k \to 1$, вершины k и i, $i \in \{2, \dots, k-2\}$, не соединены стрелкой (ориентированным ребром). Следовательно,

$$j \not\to i$$

при $j \geqslant k+1$, $i \in \{2, \dots, k-2\}$. Тем самым, каждый путь из вершины N в вершину $i \in \{2, \dots, k-2\}$ должен проходить через вершину $k-1$. Поэтому

$$p_2 = \dots = p_{k-1} = p_k + \sum_{\substack{i \to k-1 \\ i \geqslant k+1}} p_i. \tag{1.2.7}$$

Лемма 1.2.7. *Для любого* $i \in \{1, \dots, N\}$ *справедливо следующее неравенство*:

$$p_i \leqslant \sum_{j \geqslant i+2} p_j + 1 \tag{1.2.8}$$

(*если множество* $\{j \geqslant i+2\}$ *пусто, сумма считается равной нулю*).

Доказательство. Это чисто комбинаторный факт, устанавливаемый убывающей индукцией по i. Оставляем его читателю в качестве упражнения (доказательство более сильного утверждения будет дано в § 5.4).

Вернемся к доказательству леммы 1.2.6. Имеем

$$p_2 = \dots = p_{k-1} \leqslant \sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1.$$

Но $p_k \leqslant p_{k-1}$, так что

$$\left(\sum_{i=2}^{k} p_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\right) \geqslant p_{k-1}\sum_{i=2}^{k} p_i \geqslant \sum_{i=2}^{k} p_i^2,$$

что и требовалось.

Другие приложения принципа связности Шокурова–Коллара будут даны в гл. 4 и 5.

§ 1.3. Откручивание максимальных особенностей

В данном параграфе рассматривается задача откручивания максимальных особенностей подвижных линейных систем. В п. 1.3.1 представлена общая картина: на элементарном примере объясняется процедура откручивания и суммируется известная информация. В пп. 1.3.2 и 1.3.3 дано полное описание (образующие и соотношения) группы бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}\, V_{2\cdot 3}$ полного пересечения квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$.

1.3.1. Откручивающие бирациональные автоморфизмы. Пусть Σ – подвижная линейная система на многообразии V, имеющая максимальную особенность E. Предположим, что (в терминологии и обозначениях § 1.1) особенность E можно открутить бирациональным автоморфизмом $\tau_E \in \operatorname{Bir} V$, зависящим только от особенности E. В силу этого предположения об универсальности можно рассчитывать на то, что:

- линейная система $(\tau_E^{-1})_*|-nK_V|$, задающая само отображение τ_E, имеет максимальную особенность E;
- автоморфизм τ_E откручивает особенность E у самого себя, так что композиция τ_E^2 не имеет E максимальной особенностью; более того, естественно предположить, что τ_E^2 не имеет максимальных особенностей вообще.

Во всех изученных случаях именно так и происходит. Все найденные откручивающие преобразования оказываются инволюциями:

$$\tau_E^2 = \mathrm{id}.$$

Однако это чисто эмпирический факт. Существуют два способа построения откручивающих инволюций. Первый способ применяется тогда, когда максимальная особенность E порождает рациональное отображение $V \overset{2:1}{\dashrightarrow} W$ степени 2. В этом случае $\tau_E \in \operatorname{Bir} V$ есть инволюция Галуа, переставляющая точки в общем слое. Образ особенности E относительно τ_E есть дивизор на V. Второй способ применяется тогда, когда особенность E порождает рациональное отображение $V \overset{\gamma}{\dashrightarrow} W$, общий слой которого – эллиптическая кривая, причем γ имеет (рациональное) сечение. Эллиптическая кривая C с фиксированной точкой $o \in C$ есть абелево многообразие,

$$C \cong \mathbb{C}/\Lambda,$$

где точка o соответствует $0 \in \mathbb{C}$, что позволяет определить (эллиптическое) отражение $z \mapsto -z$ (в смысле указанного изоморфизма). Теперь $\tau_E \in \operatorname{Bir} V$ есть γ-послойное отображение, на общем слое $\gamma^{-1}(w)$ действующее как эллиптическое отражение.

Простейший (и, вероятно, исторически самый первый) пример инволюции Галуа дает откручивание точки на кубической гиперповерхности

$$V = V_3 \subset \mathbb{P}^{M+1}, \qquad M \geqslant 3.$$

Пусть $o \in V$ – некоторая точка, $\varphi\colon \widetilde{V} \to V$ – ее раздутие, $E = \varphi^{-1}(o) \subset \widetilde{V}$ – исключительный дивизор. Имеем

$$\operatorname{Pic} V = \mathbb{Z}H, \qquad \operatorname{Pic} \widetilde{V} = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}E, \qquad K_{\widetilde{V}} = -(M-1)H + (M-1)E,$$

где $H \in \operatorname{Pic} V$ – класс гиперплоского сечения. Дискрепантность $a(E)$ равна $M-1$, так что подвижная система $\Sigma \subset |nH|$ имеет E максимальной особенностью, если выполнено неравенство

$$\nu = \operatorname{mult}_o \Sigma > n \tag{1.3.1}$$

(для собственного прообраза $\widetilde{\Sigma}$ на $\widetilde{V}$ имеем $\widetilde{\Sigma} \subset |nH - \nu E|$). Существуют ли такие линейные системы?

Пусть $(z_1, \ldots, z_{M+1})$ – некоторая система аффинных координат с началом в точке o,

$$f = q_1 + q_2 + q_3, \qquad \deg q_i = i,$$

– разложение Тейлора уравнения $f(z_*)$ гиперповерхности V. Очевидно, замкнутое множество $Y \subset V$, состоящее из всех прямых на V, проходящих через точку o, задается системой уравнений

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0.$$

Предложение 1.3.1. *Удовлетворяющая неравенству* (1.3.1) *подвижная линейная система существует тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{codim}_V Y = 2.$$

Доказательство. Для любой прямой $L \subset \mathbb{P}^{M+1}$, $o \in L \subset V$, и произвольного дивизора $D \in \Sigma$ имеем

$$(D \cdot L) = n,$$

так что из неравенства $\operatorname{mult}_o D > n$ следует, что

$$L \subset D.$$

Поэтому если $\operatorname{codim}_V Y = 1$, то линейная система Σ не может быть подвижной. Обратно, если $\operatorname{codim}_V Y = 2$, то рассмотрим линейную систему Λ, высекаемую на V квадриками

$$\lambda(q_1 + q_2) + l_1(z_*)q_1,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $l_1(z_*)$ – произвольная линейная форма. Очевидно, в силу конструкции

$$(q_1 + q_2)|_V = -q_3|_V, \qquad q_1|_V = -(q_2 + q_3)|_V,$$

так что $\operatorname{mult}_o \Lambda \geqslant 3$. Поскольку $\Lambda \subset |2H|$ и базисное множество системы Λ есть в точности Y, система Λ не имеет неподвижных компонент. Предложение доказано.

Очевидно, для общей точки $o \in V$ множество Y имеет коразмерность 2. Предполагая это, зафиксируем некоторую подвижную систему Σ с максимальной особенностью E. Рассмотрим проекцию $\pi_o \colon \mathbb{P}^{M+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^M$ из точки o и ограничим ее на V. Очевидно, $\pi = \pi_o|_V \colon V \dashrightarrow \mathbb{P}^M$ есть рациональное отображение степени 2, так что имеется инволюция Галуа $\tau_E \in \operatorname{Bir} V$. Пусть $\widetilde{Y} \subset \widetilde{V}$ – собственный прообраз конуса Y на $\widetilde{V}$.

Предложение 1.3.2. *Инволюция τ_E продолжается до бирегулярного автоморфизма открытого τ_E-инвариантного множества $\widetilde{V} \setminus \widetilde{Y} = U$, $\tau_E \in \operatorname{Aut} U$.*

Доказательство очевидно.

Поскольку $\widetilde{Y} \subset \widetilde{V}$ – замкнутое множество коразмерности 2, действие инволюции τ_E на группе Пикара $\operatorname{Pic} \widetilde{V}$ корректно определено.

Предложение 1.3.3. *Действие τ_E на группе $\operatorname{Pic} \widetilde{V} = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}E$ задается формулами*

$$\tau_E^* H = 2H - 3E, \qquad \tau_E^* = H - 2E.$$

Доказательство. Утверждение верно в силу τ_E-инвариантности класса $H - E$ и равенства

$$\tau_E(E) = V \cap T_o V,$$

где $T_o V \subset \mathbb{P}^{M+1}$ – касательная гиперплоскость в точке o.

Пусть, наконец, $\Sigma_1 = (\tau_E)_* \Sigma$ – собственный прообраз линейной системы Σ относительно τ_E, $\widetilde{\Sigma}_1$ – собственный прообраз системы Σ_1 на $\widetilde{V}$. Имеем, очевидно,

$$\widetilde{\Sigma}_1 = \tau_E(\widetilde{\Sigma}) \subset |n\tau_E^* - \nu\tau_E^* E| = |n_1 H - \nu_1 E|,$$

где согласно предложению 1.3.3

$$n_1 = 2n - \nu, \qquad \nu_1 = 3n - 2\nu.$$

Поскольку по предположению $\nu > n$, для порогов канонического присоединения получаем неравенство
$$c(\Sigma_1) = n_1 = 2n - \nu < n = c(\Sigma).$$
Кроме того,
$$n_1 - \nu_1 = \nu - n > 0,$$
так что E уже не является максимальной особенностью системы Σ_1. Процедура откручивания завершена.

Второй метод построения откручивающих отображений (с помощью эллиптических расслоений) вполне аналогичен первому, хотя с вычислительной точки зрения обычно более сложен. Отметим, что если эллиптическая кривая C вложена в $\mathbb{P}^2$ в качестве гладкой кубической кривой, то эллиптическая инволюция относительно точки $o \in C \subset \mathbb{P}^2$ (принятой в качестве нуля группового закона на C) есть проективное отражение кубической кривой $C \subset \mathbb{P}^2$ относительно точки $p \in C$, однозначно определенной условием
$$\mathcal{O}_C(2o + p) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)|_C,$$
так что эллиптические инволюции легко сводятся к проективным отражениям. Однако явные геометрические конструкции инволюций типа Галуа и эллиптических инволюций существенно различаются, как будет видно ниже на примере многообразия $V_{2\cdot 3} \subset \mathbb{P}^5$. Этот пример иллюстрирует и появление соотношений между откручивающими инволюциями, когда процедура откручивания определена неоднозначно.

Техника откручивания максимальных особенностей, включая описание соотношений между образующими группы бирациональных автоморфизмов, приняла современный вид в работах Манина [16], [17], [43] о поверхностях над незамкнутыми полями. Известно не так много многообразий размерности 3 и выше (среди полностью изученных), имеющих нетривиальную группу бирациональных автоморфизмов, т.е. требующих реального применения процедуры откручивания. Вот основные типы таких многообразий Фано:

- двойные квадрики индекса 1 $V_4 \xrightarrow{2:1} Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ [11];
- полное пересечение квадрики и кубики $V_{2\cdot 3} \subset \mathbb{P}^5$ [11], [12], рассмотренное ниже;
- трехмерная квартика с двойной точкой $V_4 \subset \mathbb{P}^4$ [38] (случай нескольких двойных точек рассмотрен в [27]);
- 95 семейств взвешенных гиперповерхностей Фано [44];
- гиперповерхности Фано $V_M \subset \mathbb{P}^M$, $M \geqslant 5$, с особой точкой кратности $M - 2$ общего положения [4] (единственный изученный пример в произвольной размерности).

Кроме того, нетривиальная процедура откручивания применялась к некоторым семействам расслоений Фано: пучкам поверхностей дель Пеццо [45]–[48] и пучкам многомерных многообразий Фано индекса 1 [15], [33], [49]. Однако относительный случай выходит за рамки настоящего обзора и будет рассмотрен во второй части работы, посвященной расслоениям над нетривиальной базой.

1.3.2. Полное пересечение квадрики и кубики: образующие. Мы изучаем (следуя [12]) полное пересечение $V = Q \cap F \subset \mathbb{P}^5$, где Q – квадрика и F – кубическая гиперповерхность. Многообразие V предполагается гладким и, более того, общим в смысле, определенном ниже, в частности
$$\operatorname{Pic} V = \mathbb{Z}H,$$
где $H = -K_V$ – класс гиперплоского сечения $V \subset \mathbb{P}^5$.

Пусть $L \subset V$ – прямая в $\mathbb{P}^5$.

Предложение 1.3.4. *Для нормального пучка $\mathcal{N}_{L/V}$ имеются две возможности:*

- $\mathcal{N}_{L/V} \cong \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L$ (*L – прямая общего типа*);
- $\mathcal{N}_{L/V} \cong \mathcal{O}_L(-2) \oplus \mathcal{O}_L(1)$ (*L – прямая необщего типа*).

Более того, прямая L является прямой необщего типа, если и только если выполнено любое из двух эквивалентных условий:

- *существует плоскость $P\subset\mathbb{P}^5$ такая, что $L\subset P$ и теоретико-схемное пересечение $V\cap P$ неприведено в каждой точке прямой L;*
- *пусть $\sigma\colon\widetilde{V}\to V$ – раздутие L, $E=\sigma^{-1}(L)$ – исключительный дивизор; тогда, ограничивая на E собственный прообраз на $\widetilde{V}$ общего гиперплоского сечения, содержащего L, получаем необильный дивизор на E.*

Доказательство несложно и оставляется читателю.

Будем рассматривать общее полное пересечение $V=Q\cap F$, удовлетворяющее следующим условиям:

- V не содержит прямых необщего типа (обычным подсчетом размерностей легко проверяется, что данное условие выполнено для общего полного пересечения);
- на V нет тройки прямых, лежащих в одной плоскости и имеющих общую точку;
- квадрика Q невырожденная.

Пусть $L\subset V$ – некоторая прямая. Проекция $\mathbb{P}^5\dashrightarrow\mathbb{P}^3$ из L определяет рациональное отображение $\pi_L\colon V\dashrightarrow\mathbb{P}^3$ степени 2. Пусть $\alpha_L\in\operatorname{Bir}V$ – соответствующая инволюция Галуа.

Более формально, пусть $\sigma\colon\widetilde{V}\to V$ – раздутие L, $E=\sigma^{-1}(L)\subset\widetilde{V}$ – исключительный дивизор. Отображение π_L продолжается до морфизма $p=\pi_L\circ\sigma\colon\widetilde{V}\to\mathbb{P}^3$.

Лемма 1.3.1. *Морфизм p есть конечный морфизм степени 2 вне замкнутого подмножества $W\subset\widetilde{V}$ коразмерности 2 и $p(W)\subset\mathbb{P}^3$ есть конечное множество точек. Инволюция α_L продолжается до бирегулярной инволюции множества $\widetilde{V}\setminus W$. Ее действие на $\operatorname{Pic}\widetilde{V}=\mathbb{Z}H\oplus\mathbb{Z}E$ дается формулами*

$$\alpha_L^*(H)=4H-5E,\qquad \alpha_L^*(E)=3H-4E.$$

Доказательство. Проекция $p\colon\widetilde{V}\to\mathbb{P}^3$ есть конечный морфизм вне множества $W\subset\widetilde{V}$, состоящего из кривых, стягиваемых морфизмом p. Покажем, что таких кривых конечное число. Пусть

$$H'=nH-\nu E,\qquad E'=mH-\mu E$$

– классы в $\operatorname{Pic}\widetilde{V}$ собственного прообраза общего гиперплоского сечения и дивизора E относительно α_L. Линейная система $|H-E|$ очевидным образом инвариантна относительно α_L. Возьмем общую поверхность $S\in|H-E|$.

Поскольку $K_S=0$, бирациональная инволюция $\alpha_L|_S$ продолжается до бирегулярной инволюции этой поверхности. Обозначим ее через α_S, а ограничения H и E на S – через H_S и E_S соответственно. Получаем

$$\alpha_S^*H_S=nH_S-\nu E_S,\qquad \alpha_S^*E_S=mH_S-\mu E_S,$$

и класс H_S-E_S α_S^*-инвариантен, откуда имеем $n=m+1$, $\nu=\mu+1$. Поскольку α_S есть автоморфизм,

$$(\alpha_S^*H_S\cdot(H_S-E_S))=(H_S\cdot(H_S-E_S))=5$$

и

$$(\alpha_S^*H_S)^2=(H_S)^2=6,$$

откуда в силу очевидных равенств

$$(H_S\cdot E_S)=1,\qquad (E_S^2)=-2$$

получаем следующие две возможности для n, m, ν, μ:

- $H' = 4H - 5E$, $E' = 3H - 4E$;
- $H' = H$, $E' = E$;

последнее, очевидно, невозможно, потому что α_L не может быть продолжено до бирегулярного автоморфизма V.

По построению система $|4H - 5E|$ подвижна. Однако если кривая C стягивается морфизмом p, то $(C \cdot (H - E)) = 0$ и поэтому

$$(C \cdot H') < 0.$$

Мы заключаем, что таких кривых может быть лишь конечное число. Что и требовалось доказать.

Теперь пусть $P \subset \mathbb{P}^5$ – 2-плоскость такая, что $P \cap V$ – объединение трех прямых,

$$P \cap V = L \cup L_1 \cup L_2.$$

Такое возможно, только если $P \subset Q$. Пусть $\sigma\colon \widetilde{V} \to V$ – композиция трех раздутий: сначала раздуваем L, затем собственный прообраз L_1, затем собственный прообраз L_2.

Исключительные дивизоры на $\widetilde{V}$, отвечающие прямым L, L_1, L_2, обозначаем через E, E_1, E_2 соответственно.

Лемма 1.3.2. *Инволюция α_L продолжается до бирегулярной инволюции на $\widetilde{V} \setminus W$, где W – замкнутое подмножество коразмерности 2. Действие α_L на*

$$\operatorname{Pic} \widetilde{V} = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}E_1 \oplus \mathbb{Z}E_2$$

дается формулами

$$\begin{aligned} \alpha_L^* &= 4H - 5E - 2E_1 - 2E_2, \\ \alpha_L^* E &= 3H - 4E - 2E_1 - 2E_2 \end{aligned}$$

и

$$\alpha_L^* E_i = E_j, \qquad \{i, j\} = \{1, 2\}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

Рассмотрим теперь коники на многообразии V.

Легко видеть, что имеется одномерное семейство неприводимых коник $Y \subset V$ таких, что плоскость $P(Y) = \langle Y \rangle$ целиком содержится в квадрике Q. Очевидно,

$$P(Y) \cap V = Y \cup L(Y),$$

где $L(Y)$ – вычетная прямая. Описанные коники будем называть *специальными кониками*.

Каждая специальная коника Y порождает следующую конструкцию. Положим $P = P(Y)$. Рассмотрим проекцию $\pi_P\colon \mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ из плоскости P. Слои π_P суть 3-плоскости $S \supset P$, так что

$$S \cap Q = P \cup P(S),$$

где $P(S)$ – вычетная плоскость. Следовательно, π_P расслаивает V над $\mathbb{P}^2$ на эллиптические кривые $C_S = P(S) \cap F$ – плоские кубики. Общая кривая C_S пересекает вычетную прямую $L(Y)$ в одной точке, которая есть пересечение $L(Y) \cap P(S)$. Определим инволюцию $\beta_Y \in \operatorname{Bir} V$ как послойное отображение, полагая $\beta_Y|_{C_S}$ эллиптическим отражением, где групповой закон на C_S задается точкой $L(Y) \cap P(S)$ в качестве нуля.

Пусть $\sigma\colon \widetilde{V} \to V$ – композиция раздутия коники Y и раздутия собственного прообраза прямой $L(Y)$, E и E^+ – соответствующие исключительные дивизоры. Очевидно, $\pi_P \circ \sigma\colon V \to \mathbb{P}^2$ – морфизм, общий слой которого есть эллиптическая кривая C_t, $t \in \mathbb{P}^2$. Дивизор E^+ есть сечение этого эллиптического расслоения, $(E^+ \cdot C_t) = 1$.

Лемма 1.3.3. *Бирациональная инволюция β_Y продолжается до бирегулярной инволюции на дополнении $\widetilde{V}\setminus W$, где W есть замкнутое подмножество коразмерности 2 и, более того, $\pi_P\circ\sigma(W)\subset\mathbb{P}^2$ есть конечное множество. Действие β_Y на*

$$\operatorname{Pic}\widetilde{V}=\mathbb{Z}H\oplus\mathbb{Z}E\oplus\mathbb{Z}E^+$$

дается формулами

$$\begin{aligned}\beta_Y^*H&=13H-14E-8E^+,\\ \beta_Y^*E&=12H-13E-8E^+,\\ \beta_Y^*E^+&=E^+.\end{aligned}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.3.1.

Как будет показано в следующем пункте, инволюции α_L и β_Y позволяют открутить максимальные особенности любой подвижной системы на многообразии V.

1.3.3. Полное пересечение квадрики и кубики: соотношения. Пусть $P\subset\mathbb{P}^5$ – такая плоскость, что $P\subset Q$ и

$$P\cap F=L_1\cup L_2\cup L_3$$

– объединение трех прямых.

Лемма 1.3.4. *Имеет место следующее соотношение*:

$$(\alpha_{L_1}\circ\alpha_{L_2}\circ\alpha_{L_3})^2=\mathrm{id}_V.$$

Доказательство. Очевидно, каждая из трех инволюций α_{L_i} сохраняет слои проекции $\pi_P\colon V\dashrightarrow\mathbb{P}^2$ из плоскости P. Напомним, что общий слой $\pi_P^{-1}(t)$ есть кубическая кривая C_t, где

$$C_t\cap P=\{x_1,x_2,x_3\},\qquad x_i=C_t\cap L_i.$$

Возьмем точку $x\in C_t$; очевидно,

$$\alpha_{L_i}(x)+x+x_i\sim x_1+x_2+x_3$$

на C_t. Поэтому получаем

$$\begin{aligned}\alpha_{L_3}(x)&\sim x_1+x_2-x,\\ \alpha_{L_2}\circ\alpha_{L_3}(x)&\sim x_3-x_2+x,\\ \alpha_{L_1}\circ\alpha_{L_2}\circ\alpha_{L_3}(x)&\sim 2x_2-x,\\ (\alpha_{L_1}\circ\alpha_{L_2}\circ\alpha_{L_3})^2(x)&\sim x,\end{aligned}$$

что и требовалось.

После проделанной подготовительной работы мы можем сформулировать основную теорему, описывающую бирациональную геометрию многообразия V.

Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{C}$ – множества прямых и специальных коник на V соответственно. Пусть G^+ – свободная группа, порожденная словами A_L и B_Y для всех $L\in\mathcal{L}$ и $Y\in\mathcal{C}$ соответственно. Пусть $R^+\subset G^+$ – нормальная подгруппа, порожденная словами A_L^2 для всех $L\in\mathcal{L}$, словами B_Y^2 для всех $Y\in\mathcal{C}$ и, наконец, словами $(A_{L_1}A_{L_2}A_{L_3})^2$ для всех троек различных прямых $L_1,L_2,L_3\in\mathcal{L}$ таких, что

$$\langle L_1\cup L_2\cup L_3\rangle=\mathbb{P}^2.$$

Пусть $G=G^+/R^+$ – факторгруппа. Построим полупрямое произведение $G\operatorname{Aut}V$, используя очевидное действие группы $\operatorname{Aut}V$ на G: для $\rho\in\operatorname{Aut}V$ положим

$$\rho A_L\rho^{-1}=A_{\rho(L)},\qquad \rho B_Y\rho^{-1}=B_{\rho(Y)}.$$

Пусть $\varepsilon\colon\operatorname{Aut}V\to\operatorname{Bir}V$ – гомоморфизм, переводящий A_L в α_L, B_Y в β_Y и тождественный на $\operatorname{Aut}V$.

Теорема 1.3.1. *Многообразие V бирационально жесткое и ε есть изоморфизм групп.*

Доказательство. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{C}$. Рассмотрим произвольную подвижную линейную систему $\Sigma \subset |nH|$ на V. Очевидно,

$$c(\Sigma, V) = n.$$

Чтобы доказать, что ε есть биекция, в качестве Σ возьмем собственный прообраз линейной системы $|H|$ гиперплоских сечений относительно фиксированного бирационального автоморфизма $\chi \in \operatorname{Bir} V$. Очевидно, в этом случае $n = 1$ тогда и только тогда, когда $\chi \in \operatorname{Aut} V$ (и по построению бирегулярные автоморфизмы содержатся в образе ε).

Бирациональную жесткость и сюръективность ε будем доказывать одновременно, используя следующий ключевой технический факт.

Предложение 1.3.5. *Предположим, что $c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) < n$. Тогда существует подмногообразие $B \in \mathcal{B}$ (т.е. прямая или специальная коника) такое, что*

$$\operatorname{mult}_B \Sigma > n.$$

Более того, имеется самое большее два подмногообразия в $\mathcal{B}$ с этим свойством, и если их два, скажем $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, то они суть прямые, $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$, их линейная оболочка $\langle B_1, B_2 \rangle$ есть плоскость $P = \mathbb{P}^2$ и $P \subset Q$.

Доказательство см. в [12].

Лемма 1.3.5. (i) *Пусть $L \subset V$ – прямая, $\Sigma^+ \subset |n_+H|$ – собственный прообраз линейной системы Σ относительно α_L. Выполнены следующие равенства*:

$$n_+ = 4n - 3 \operatorname{mult}_L \Sigma, \qquad \operatorname{mult}_L \Sigma^+ = 5n - 4 \operatorname{mult}_L \Sigma.$$

(ii) *Пусть $Y \in \mathcal{C}$ – специальная коника, $L = L(Y) \in \mathcal{L}$ – вычетная прямая, $\Sigma^+ \subset |n_+H|$ – собственный прообраз линейной системы Σ относительно β_Y. Выполнены следующие равенства*:

$$n_+ = 13n - 12 \operatorname{mult}_Y \Sigma,$$
$$\operatorname{mult}_Y \Sigma^+ = 14n - 13 \operatorname{mult}_Y \Sigma, \qquad \operatorname{mult}_L \Sigma^+ = 8n - 8 \operatorname{mult}_Y \Sigma + \operatorname{mult}_L \Sigma.$$

(iii) *Пусть $P \subset \mathbb{P}^5$ – 2-плоскость такая, что $P \cap V = L \cup L_1 \cup L_2$, а Σ^+ такое, как в части* (i) *выше. Тогда для $\{i, j\} = \{1, 2\}$ имеем*

$$\operatorname{mult}_{L_i} \Sigma^+ = 2n - 2 \operatorname{mult}_L \Sigma + \operatorname{mult}_{L_j} \Sigma.$$

Доказательство получается непосредственным применением лемм 1.3.1–1.3.3.

Следствие 1.3.1. *Инволюция $\tau = \alpha_L$ или β_Y удовлетворяет неравенству $n_+ < n$ тогда и только тогда, когда L или Y есть максимальная кривая линейной системы Σ соответственно, где $\Sigma^+ \subset |n_+H|$ – собственный прообраз Σ относительно τ.*

Следствие 1.3.2. *В обозначениях предыдущего следствия предположим, что $n_+ = n$. Тогда $\tau = \alpha_L$ для некоторой прямой $L \in \mathcal{L}$ и существуют такие прямые $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, что $L \cup L_1 \cup L_2 = P \cap V$, где $P \subset Q$ – некоторая плоскость.*

Теперь докажем бирациональную жесткость многообразия V и сюръективность ε. Предположим, что $c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) < n$ для некоторой подвижной линейной системы Σ. Согласно предложению 1.3.5 существует кривая $B \in \mathcal{B}$ такая, что $\operatorname{mult}_B \Sigma > n$. Пусть $\tau \in \varepsilon(G)$ – соответствующая инволюция, т.е.

$$\tau = \begin{cases} \alpha_L, & \text{если } B = L \in \mathcal{L}, \\ \beta_Y, & \text{если } B = Y \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Согласно следствию 1.3.1

$$\Sigma^+ \subset |n_+ H| \qquad \text{с} \quad n_+ < n,$$

где Σ^+ – собственный прообраз Σ относительно τ. Итерируя эту процедуру, построим последовательность инволюций $\tau_i \in \varepsilon(G)$ таких, что собственные прообразы $\Sigma^{(i)} \subset |n_i H|$ системы Σ относительно композиций $\tau_i \ldots \tau_1$ удовлетворяют неравенствам $n_i < n_{i-1}$. Поскольку $n_i \in \mathbb{Z}_+$, на некотором шаге мы уже больше не сможем понизить порог $c(\Sigma^{(i)}, V)$. Следовательно, для некоторого $k \geqslant 1$ получим

$$c(\Sigma^{(k)}, V) = c_{\text{virt}}(\Sigma^{(k)}, V) = c_{\text{virt}}(\Sigma, V),$$

что и означает бирациональную жесткость. Более того, если зафиксировать бирациональный автоморфизм $\chi \in \operatorname{Bir} V$ и взять в качестве Σ собственный прообраз системы $|H|$ относительно χ, то описанная выше процедура дает равенство $n_k = 1$ для некоторого k, т.е. $\Sigma^{(k)} \subset |H|$. Сравнивая размерности, получаем $\Sigma^{(k)} = |H|$, откуда вытекает, что $\tau_k \ldots \tau_1 \chi \in \operatorname{Aut} V$ – бирегулярное отображение. Этим доказана сюръективность отображения ε.

Последний шаг в доказательстве теоремы 1.3.1 – установить, что ε имеет тривиальное ядро.

Для удобства обозначений записываем слова в алфавите A_L, B_Y, используя заглавные буквы, а соответствующие бирациональные отображения обозначаем строчными буквами, например $t = \varepsilon(T)$ и т.д. Для автоморфизма $t \in \operatorname{Bir} V$ определим целое число $n(t) \in \mathbb{Z}_+$ формулой

$$\Sigma \subset |n(t)H|,$$

где Σ – собственный прообраз системы $|H|$ относительно t; очевидно, $n(t) = 1$ тогда и только тогда, когда $t \in \operatorname{Aut} V$. Теорема 1.3.1 немедленно вытекает из следующего факта.

Предложение 1.3.6. *Пусть $W = T_1 \ldots T_l$ – произвольное слово в алфавите*

$$\{A_L, B_Y \mid L \in \mathcal{L}, Y \in \mathcal{C}\}.$$

Если $w \in \operatorname{Aut} V$, то, используя соотношения в R^+, можно преобразовать слово W в пустое слово.

Доказательство. Обозначим через W_i, $i \leqslant l(W) = l$, левый отрезок слова W длины i, т.е. $W_i = T_1 \ldots T_i$. Положим

$$n^*(W) = \max\{n(w_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant l(W)\}$$

и

$$\omega(W) = \sharp\{i \mid n(w_i) = n^*(W),\, 1 \leqslant i \leqslant l(W)\}.$$

Теперь поставим в соответствие каждому слову W упорядоченную тройку

$$(n^*(W), \omega(W), l(W)).$$

Введем на множестве слов отношение порядка, полагая $W > W'$, если выполнено одно из условий:

- $n^*(W) > n^*(W')$;
- $n^*(W) = n^*(W')$ и $\omega(W) > \omega(W')$;
- $n^*(W) = n^*(W')$, $\omega(W) = \omega(W')$ и $l(W) > l(W')$.

Легко видеть, что каждая убывающая цепь слов $W^{(1)} > W^{(2)} > \cdots$ обрывается. Следовательно, достаточно показать, что если $w \in \operatorname{Aut} V$, то слово W можно преобразовать в такое слово W', что $W > W'$, $w = w'$.

Если слово W содержит подслово A_LA_L или B_YB_Y, то, удаляя это подслово, получим меньшее слово W' (потому что образ каждого левого отрезка слова W' совпадает с образом некоторого левого отрезка слова W и отображение множества левых отрезков слова W' в множество левых отрезков W инъективно).

Поэтому можно предполагать, что W не содержит подслов A_LA_L или B_YB_Y.

Поскольку $n(w)=1$, можно предположить, что $n^*(W)\geqslant 2$ (иначе нечего доказывать). Пусть

$$s=\min\{i \mid n(w_i)=n^*(W)\}\leqslant l(W)-1.$$

Рассмотрим два случая $T_s=B_Y$ и $T_s=A_L$ по отдельности.

Случай 1: $T_s=B_Y$. В этом случае

$$n(w_{s-1})=n(w_s\beta_Y)<n(w_s)$$

согласно выбору s. В силу следствия 1.3.1

$$\operatorname{mult}_Y\Sigma_s>n(w_s),$$

где Σ_s – собственный прообраз $|H|$ относительно w_s. Поскольку по построению $n(w_{s+1})\leqslant n(w_s)$, получаем

$$T_{s+1}=T_s=B_Y.$$

Это противоречит нашему предположению, что W не содержит подслов A_LA_L и B_YB_Y.

Случай 2: $T_s=A_L$. В силу выбора s получаем

$$\operatorname{mult}_L\Sigma_s>n(w_s).$$

По предположению $T_{s+1}\neq T_s$ и $n(w_{s+1})\leqslant n(w_s)$. Согласно следствию 1.3.2

$$T_{s+1}=A_{L'},$$

где $L'\subset V$ – такая прямая, что существует третья прямая $Z\subset V$,

$$L\cup L'\cup Z=P\cap V$$

для некоторой плоскости $P\subset Q$.

Лемма 1.3.6. (i) *Множество Z – максимальная прямая отображения w_{s-1}, т.е.*

$$\operatorname{mult}_Z\Sigma_{s-1}>n(w_{s-1}).$$

Следовательно,

$$n(w_{s-1}\alpha_Z)<n(w_{s-1}).$$

(ii) *Выполнено неравенство*

$$n(w_{s-1}\alpha_Z)-\operatorname{mult}_{L'}\Sigma'=n(w_s)-\operatorname{mult}_{L'}\Sigma_s\leqslant 0,$$

где Σ' – собственный прообраз $|H|$ относительно $w_{s-1}\alpha_Z$. Следовательно,

$$n(w_{s-1}\alpha_Z\alpha_{L'})\leqslant n(w_{s-1}\alpha_Z).$$

Доказательство. Проводим непосредственные вычисления, основанные на лемме 1.3.5. Рассмотрим утверждение (i). Поскольку $w_s = w_{s-1}\alpha_L$, получаем $w_{s-1} = w_s\alpha_L$ и по лемме 1.3.5

$$n(w_{s-1}) = n(w_s\alpha_L) = 4n(w_s) - 3\,\mathrm{mult}_L\,\Sigma_s$$

и

$$\mathrm{mult}_Z\,\Sigma_{s-1} = 2n(w_s) - 2\,\mathrm{mult}_L\,\Sigma_s + \mathrm{mult}_{L'}\,\Sigma_s.$$

Следовательно,

$$n(w_{s-1}) - \mathrm{mult}_Z\,\Sigma_{s-1} = 2n(w_s) - \mathrm{mult}_L\,\Sigma_s - \mathrm{mult}_{L'}\,\Sigma_s < 0,$$

что нам и нужно. В случае (ii) рассуждения аналогичны. Лемма доказана.

Завершим, наконец, доказательство теоремы 1.3.1. Сначала рассмотрим случай, когда

$$\mathrm{mult}_{L'}\,\Sigma_s > n(w_s).$$

Используя соотношения $A_Z^2 = e$ и $A_Z A_{L'} A_L = A_L A_{L'} A_Z$, можно заменить подслово $A_L A_{L'}$ подсловом $A_Z A_{L'} A_L A_Z$. Эта операция увеличивает длину слова. Обозначим новое слово через W^+.

Очевидно, $W_i^+ = W_i$ при $i \leqslant s-1$. Далее,

$$w_s^+ = w_{s-1}\alpha_Z, \qquad w_{s+1}^+ = w_{s-1}\alpha_Z\alpha_{L'}$$

и

$$w_{s+2}^+ = w_{s-1}\alpha_Z\alpha_{L'}\alpha_L = w_{s+1}\alpha_Z,$$

так что $w_{s+i}^+ = w_{s+i-2}$ при $i \geqslant 3$. Согласно доказанной выше лемме

$$n(w_i^+) < n(w_s) = n^*(W), \qquad i = s, s+1, s+2$$

(и по построению это верно также и для меньших значений $i < s$). Следовательно, если $\omega(W) \geqslant 2$, то

$$n^*(W^+) = n^*(W), \qquad \omega(W^+) = \omega(W) - 1.$$

Если $\omega(W) = 1$, то

$$n^*(W^+) < n^*(W).$$

В любом случае $W^+ < W$.

Остается рассмотреть случай

$$\mathrm{mult}_{L'}\,\Sigma_s = n(w_s).$$

Тогда

$$n(w_{s+1}) = n(w_s), \qquad \mathrm{mult}_{L'}\,\Sigma_{s+1} = n(w_{s+1}).$$

Поскольку по предположению отсутствуют подслова $A_{L'}A_{L'}$, имеем $T_{s+2} = A_Z$. Теперь заменим подслово

$$T_s T_{s+1} T_{s+2} = A_L A_{L'} A_Z$$

подсловом $A_Z A_{L'} A_L$. Обозначим новое слово через W^+. Оно имеет ту же длину и по лемме 1.3.5 получаем неравенства

$$n(w_i^+) < n^*(W), \qquad i = s, s+1, s+2.$$

Рассуждая, как в предыдущем случае, завершаем доказательство.

Глава 2. Гиперкасательные дивизоры

Данная глава посвящена технике гиперкасательных дивизоров – мощному инструменту получения оценок сверху для особенностей алгебраических подмногообразий. Комбинация техники подсчета кратностей, развитой в предыдущей главе, с техникой гиперкасательных дивизоров позволяет доказывать бирациональную (сверх)жесткость общих многообразий Фано и расслоений Фано для многих семейств. Именно таким образом получены основные результаты настоящей и двух последующих глав.

В § 2.1 техника гиперкасательных дивизоров сначала объясняется на конкретном примере гиперповерхностей Фано индекса 1, а затем формализуется в общем случае. В § 2.2 содержится доказательство бирациональной сверхжесткости общих полных пересечений Фано индекса 1 размерности M в $\mathbb{P}^{M+k}$, где $M \geqslant 2k+1$. Обоснованию условий регулярности, обеспечивающих применимость техники гиперкасательных дивизоров, посвящен § 2.3.

§ 2.1. Гиперповерхности Фано

В этом параграые доказывается бирациональная сверхжесткость общих гиперповерхностей Фано индекса 1. Для этого вводится общая конструкция гиперкасательных дивизоров (п. 2.1.1), которая для гиперповерхностей вполне элементарна. Затем эта конструкция формализуется для произвольных многообразий. Другой вариант этой конструкции, более удобный в некоторых задачах, – это гиперкасательные линейные системы (п. 2.1.2). В заключение (п. 2.1.3) показано, что общая (в смысле топологии Зарисского) гиперповерхность Фано удовлетворяет условию регулярности (в частности, через каждую точку проходит не более конечного числа прямых).

2.1.1. Гиперкасательные дивизоры. Техника гиперкасательных дивизоров и ее модификация – техника гиперкасательных линейных систем – являются наиболее эффективными инструментами исключения бесконечно близких максимальных особенностей. Чтобы показать, как они работают, докажем бирациональную сверхжесткость общей гладкой гиперповерхности Фано $V = V_M \subset \mathbb{P}^M$ степени M [1]. Как было показано в п. 1.2.1, подвижная линейная система на V не может иметь максимальных подмногообразий. Поэтому для доказательства бирациональной сверхжесткости достаточно исключить бесконечно близкий случай. В силу $4n^2$-неравенства (§ 1.2) бесконечно близкая максимальная особенность исключается следующим утверждением.

Предложение 2.1.1. (i) *Пусть $o \in V$ – такая точка, что имеется не более конечного числа прямых $L \subset V$, проходящих через точку o. Тогда для любого неприводимого подмногообразия $Y \subset V$ коразмерности 2 выполнена оценка*

$$\frac{\mathrm{mult}_o Y}{\deg Y} \leqslant \frac{4}{M}. \tag{2.1.1}$$

(ii) *Существует открытое (по Зарисскому) подмножество U в пространстве параметров $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^M, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(M)))$ гиперповерхностей степени M такое, что любое многообразие из этого множества удовлетворяет условию конечности* (i) *в каждой точке.*

Для упрощения обозначений в дальнейшем вместо

$$\frac{\mathrm{mult}_o Y}{\deg Y}$$

пишем
$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y$$
(и аналогично в других случаях), объединяя кратность и степень в один символ.

Замечание 2.1.1. Предложение 2.1.1 немедленно исключает бесконечно близкую максимальную особенность подвижной системы Σ на V: пусть $B \subset V$ – центр максимальной особенности, $o \in B$ – точка общего положения, $D_1, D_2 \in \Sigma$ – общие дивизоры, $Z = (D_1 \circ D_2)$ – алгебраический цикл их теоретико-схемного пересечения. Тогда
$$\deg Z = Mn^2, \qquad \mathrm{mult}_o Z > 4n^2,$$
причем Z – эффективный цикл коразмерности 2, что противоречит предложению 2.1.1.

Доказательство предложения 2.1.1. Пусть $(z_1, \ldots, z_M)$ – система аффинных координат на $\mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ с началом в точке o. Запишем уравнение гиперповерхности V:
$$f = q_1 + q_2 + \cdots + q_M,$$
где q_i однородны степени i по z_*. Отметим, что прямые, проходящие через точку x на гиперповерхности V, задаются системой уравнений
$$q_1 = q_2 = \cdots = q_M = 0. \tag{2.1.2}$$
Следовательно, множество общих нулей (2.1.2) самое большее одномерно. Обозначим через
$$f_i = q_1 + \cdots + q_i$$
левые отрезки уравнения f. Ясно, что алгебраическое множество
$$f_1 = f_2 = \cdots = f_M = 0$$
совпадает с (2.1.2) на открытом аффинном подмножестве $\mathbb{A} = \mathbb{A}^M_{(z_1,\ldots,z_M)} \subset \mathbb{P}$, а потому имеет размерность не больше 1. Отсюда следует в свою очередь, что алгебраическое множество
$$f_1|_{\mathbb{A}\cap V} = f_2|_{\mathbb{A}\cap V} = \cdots = f_{M-1}|_{\mathbb{A}\cap V} = 0$$
на аффинной части гиперповерхности V также не более чем одномерно: в теоретико-схемном смысле оно совпадает с (2.1.2), так что имеет носителем объединение прямых на V, проходящих через точку o.

Рассмотрим дивизоры
$$D_i = \overline{\{f_i|_{\mathbb{A}\cap V} = 0\}}, \qquad i = 1, \ldots, M-1.$$
Назовем их *гиперкасательными дивизорами*: пусть $H \in \mathrm{Pic}\, V$ – класс гиперплоского сечения; тогда, очевидно,
$$D_i \in |iH|$$
и
$$\mathrm{mult}_o D_i \geqslant i + 1,$$
поскольку на аффинной части V
$$D_i|_{\mathbb{A}\cap V} = \{(q_{i+1} + \cdots + q_M)|_V = 0\}.$$
Теперь по предположению
$$\dim_o(D_1 \cap \cdots \cap D_{M-1}) \leqslant 1,$$
где $\dim_o$ обозначает размерность в окрестности точки o.

Построим теперь последовательность, состоящую из $M-4$ различных индексов

$$i(1),\ i(2),\ \dots,\ i(M-4),$$

и последовательность неприводимых подмногообразий

$$Y_0 = Y,\ Y_1,\ \dots,\ Y_{M-4}$$

таких, что:

- $Y_{k+1} \subset Y_k$,
$$\dim Y_k = M-3-k, \qquad \operatorname{codim}_V Y_k = k+2;$$
- $Y_k \not\subset D_{i(k)}$, так что $(Y_k \circ D_{i(k)})$ есть эффективный цикл на V и Y_{k+1} – одна из его неприводимых компонент;
- имеет место оценка
$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y_{k+1} \geqslant \frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y_k \cdot \frac{i(k)+1}{i(k)} \tag{2.1.3}$$
для каждого $k = 1, \dots, M-4$.

Построение осуществляется по индукции: при $k=1$ по соображениям размерности найдется гиперкасательный дивизор $D_{i(1)} \not\supset Y$. Точно так же выбирается дивизор $D_{i(k)}$ на каждом шаге.

Поскольку $Y_k \not\subset D_{i(k)}$, имеем

$$\deg(Y_k \circ D_{i(k)}) = i(k) \deg Y_k$$

и

$$\operatorname{mult}_o(Y_k \circ D_{i(k)}) \geqslant (i(k)+1) \operatorname{mult}_o Y_k,$$

так что найдется неприводимая компонента Y_{k+1} цикла $(Y_k \circ D_{i(k)})$, удовлетворяющая оценке (2.1.3).

Теперь кривая $C = Y_{M-4}$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} C \geqslant \frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y \cdot \prod_{k=1}^{M-4} \frac{i(k)+1}{i(k)}.$$

Очевидно, минимум правой части достигается при $i(k) \equiv k+3$. Он равен

$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y \cdot \frac{M}{4}.$$

Левая часть не превосходит 1, что и завершает доказательство части (i). Доказательство части (ii) отложим до п. 2.1.3.

Формализуя проведенное доказательство, рассмотрим следующую общую ситуацию: X – неприводимое проективное многообразие, $o \in X$ – некоторая точка, причем либо o неособа, либо является изолированной особенностью. Пусть $\varphi\colon X^+ \to X$ – раздутие точки o, $E = \varphi^{-1}(o)$ – исключительный дивизор. Предполагаем, что E приведен и неприводим. Пусть H — некоторый обильный дивизор на X, причем линейная система $|H|$ свободна, т.е. задает конечный морфизм

$$\alpha = \alpha_{|H|}\colon X \to \mathbb{P}^{\dim |H|}.$$

Степени подмногообразий $Y \subset X$ понимаются в смысле дивизора H, т.е.

$$\deg Y = (Y \cdot H^{\dim Y});$$

в частности, степень самого многообразия X есть

$$\deg X = H^{\dim X} = \deg \alpha \cdot \deg \alpha(X).$$

Следующий факт хорошо известен.

Лемма 2.1.1. *Для любого подмногообразия $Y \subset X$ справедливо неравенство*

$$\mathrm{mult}_y Y \leqslant \deg Y,$$

где $y \in Y$ – произвольная точка.

Определение 2.1.1. Эффективный дивизор D на X называется *гиперкасательным* (относительно точки o), если

$$D^+ \in |kH - lE|,$$

где $l \geqslant k+1$, D^+ – собственный прообраз дивизора D на X^+. Число

$$\beta(D) = \frac{l}{k} > 1$$

назовем *наклоном* дивизора D.

Пример 2.1.1. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ – гиперповерхность степени $d \geqslant 2$,

$$f = q_1 + q_2 + \dots + q_d$$

– ее уравнение относительно системы аффинных координат $(z_1, \dots, z_N)$ с началом в точке o, q_i однородны степени i. Пусть D_i – замыкание множества

$$(q_1 + \dots + q_i)|_X = 0,$$

$i \leqslant d-1$, и предположим, что $q_{i+1}|_E \not\equiv 0$ (где $(z_1 : \dots : z_N)$ рассматриваются как однородные координаты на исключительном дивизоре раздутия точки o в $\mathbb{P}^N$). Тогда D_i – гиперкасательный дивизор с наклоном $(i+1)/i$. Если же

$$q_{i+1} \equiv \dots \equiv q_{k-1} \equiv 0,$$

но $q_k|_E \not\equiv 0$, то наклон равен k/i.

Пусть $\mathcal{D}$ – конечное множество гиперкасательных дивизоров, $\sharp\mathcal{D} = N \leqslant \dim X - 1$. Предположим, что имеет место равенство

$$\mathrm{codim}_o\Bigg(\bigcap_{D \in \mathcal{D}} D\Bigg) = \sharp\mathcal{D}, \tag{2.1.4}$$

где codim_o обозначает коразмерность в произвольно малой окрестности точки o.

Имеет место следующий факт.

Предложение 2.1.2. *Справедлива оценка*

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y \leqslant \Bigg(\min_{\mathcal{B} \subset \mathcal{D}}{}^{*} \prod_{D \in \mathcal{B}} \beta(D)\Bigg)^{-1},$$

где $\min^*$ означает, что минимум берется по всем подмножествам $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ мощности

$$\sharp\mathcal{B} = \min\{\dim Y - 1, N - \mathrm{codim}\, Y\} = b.$$

Доказательство. Оно повторяет приведенное выше рассуждение для гиперповерхности Фано $V_M \subset \mathbb{P}^M$: строим последовательность неприводимых многообразий

$$Y_0 = Y,\ Y_1,\ \ldots,\ Y_b$$

и гиперкасательных дивизоров

$$D_1, \ldots, D_b,$$

где $Y_i \not\subset D_{i+1}$ и Y_{i+1} – неприводимая компонента эффективного цикла $(Y_i \circ D_{i+1})$, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_{i+1} \geqslant \beta(D_{i+1}) \frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y_i.$$

Доказательство завершается применением леммы 2.1.1 к подмногообразию Y_b.

2.1.2. Гиперкасательные линейные системы. В некоторых случаях бывает удобнее работать не с гиперкасательными дивизорами, а с линейными системами, порожденными этими дивизорами. По аналогии с определением 2.1.1 дадим

Определение 2.1.2. Непустая линейная система Σ на X называется *гиперкасательной* (относительно точки o), если

$$\Sigma^+ \subset |kH - lE|,$$

где $l \geqslant k+1$, Σ^+ – собственный прообраз системы Σ на X^+. Число

$$\beta(\Sigma) = \frac{l}{k} > 1$$

назовем *наклоном* системы Σ.

Важнейшая характеристика гиперкасательной линейной системы Σ – коразмерность ее базисного множества в окрестности точки o, $\mathrm{codim}_o \mathrm{Bs}\,\Sigma$.

Множество гиперкасательных дивизоров $D \in \mathcal{D}$, $D^+ \in |k_D H - l_D E|$, порождает гиперкасательную систему $\Sigma_k = \Sigma_k(\mathcal{D})$ следующим образом. Пусть

$$f_D \in H^0(X, \mathcal{O}_X(k_D H))$$

– сечение, задающее дивизор D. Положим

$$\Sigma_k = \left| \sum_{k_D \leqslant k} f_D s_D = 0 \right|,$$

где суммирование ведется по всем гиперкасательным дивизорам $D \in \mathcal{D}$ таким, что $k_D \leqslant k$, $s_D \in \alpha^* H^0(\mathbb{P}^{\dim |H|}, \mathcal{O}(k - k_D))$ – подъем произвольного многочлена степени $k - k_D$, имеющего нуль порядка $k - k_D$ в точке $\alpha(o)$. Легко видеть, что

$$\beta(\Sigma_k) \geqslant \min_{D \in \mathcal{D},\, k_D \leqslant k} \left\{ \frac{k + l_D - k_D}{k} \right\}.$$

Кроме того, поскольку α – конечный морфизм, имеем равенство

$$\mathrm{codim}_o \mathrm{Bs}\,\Sigma_k = \sharp\{D \in \mathcal{D} \mid k_D \leqslant k\}.$$

Из этого равенства, в частности, видно, что целочисленная функция $\mathrm{codim}_o \mathrm{Bs}\,\Sigma_k$ возрастает при $k = k_D$ для некоторого $D \in \mathcal{D}$, и только при таких значениях k. Определим *упорядочивающую функцию*

$$\chi\colon \{1, \ldots, N\} \to \mathcal{K} = \{k_D \mid D \in \mathcal{D}\}$$

соотношением
$$\sharp\{D \in \mathcal{D} \mid k_D < \chi(i)\} < i \leqslant \sharp\{D \in \mathcal{D} \mid k_D \leqslant \chi(i)\}. \tag{2.1.5}$$
Например,
$$\chi(1) = \min\{k_D \mid D \in \mathcal{D}\}, \qquad \chi(N) = \max\{k_D \mid D \in \mathcal{D}\}.$$

Лемма 2.1.2. *Имеет место равенство*
$$\operatorname{codim}_o \operatorname{Bs} \Sigma_{\chi(i)} \geqslant i.$$

Утверждение леммы есть прямое следствие формулы (2.1.5) и явной конструкции гиперкасательной системы Σ_j.

Удобство работы с упорядочивающей функцией состоит в том, что для общего набора гиперкасательных дивизоров
$$\mathbb{D} = (D_1, \ldots, D_N) \in \prod_{i=1}^{N} \Sigma_{\chi(i)}$$
и произвольного подмногообразия Y коразмерности l, содержащего точку o, имеем
$$Y \not\subset \operatorname{Supp} D_i, \qquad i \geqslant l+1.$$
В частности, корректно определен эффективный цикл $(Y \circ D_{l+1})$ коразмерности $l+1$, удовлетворяющий неравенству
$$\operatorname{mult}_o(Y \circ D_{l+1}) \geqslant \beta(\Sigma_{l+1}) \frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y \deg(Y \circ D_{l+1}).$$
Ввиду линейности этого неравенства по циклу $(Y \circ D_{l+1})$ существует неприводимая компонента этого цикла – неприводимое подмногообразие Y_1 коразмерности $l+1$, удовлетворяющее неравенству
$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y_1 \geqslant \beta(\Sigma_{l+1}) \frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y.$$
Повторяя эту процедуру $b = \min\{\dim Y - 1, N - \operatorname{codim} Y\}$ раз, получаем неприводимое подмногообразие Y_b, удовлетворяющее неравенству
$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y_b \geqslant \frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y \prod_{i=1}^{b} \beta(\Sigma_{l+i}).$$
Применяя к подмногообразию Y_b лемму 2.1.1, получаем

Предложение 2.1.3. *Имеет место оценка*
$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y \leqslant \left(\prod_{i=1}^{b} \beta(\Sigma_{l+i}) \right)^{-1}.$$

Техника гиперкасательных дивизоров и линейных систем применяется в большинстве случаев к подмногообразиям малой коразмерности – в основном к дивизорам и подмногообразиям коразмерности 2, и в процессе образования последовательных пересечений участвуют почти все дивизоры (соответственно линейные системы). Более того, почти во всех конкретных ситуациях для каждого $D \in \mathcal{D}$ имеем $l_D = k_D + 1$, так что все наклоны имеют вид
$$\beta(D) = \frac{k_D + 1}{k_D},$$

и аналогично для гиперкасательных систем. Легко видеть, что для таких значений наклонов предложения 2.1.2 и 2.1.3 дают одинаковые оценки. Однако в наиболее трудных случаях требуется рассуждать тоньше, например, важно, чтобы первый пересекающий гиперкасательный дивизор был взят из системы Σ_l, а не из Σ_{l+1}; в некоторых случаях это можно обосновать, привлекая дополнительные соображения (см. [50]–[52] и § 2.2 ниже). Поэтому в более трудных случаях техника гиперкасательных линейных систем эффективнее и гибче техники гиперкасательных дивизоров.

2.1.3. Условия регулярности. Применение техники гиперкасательных дивизоров/линейных систем основано на предположении (2.1.4). Поэтому эта техника работает успешно только в том случае, когда можно доказать, что общее многообразие заданного семейства удовлетворяет условию (2.1.4) в каждой своей точке. Для завершения доказательства бирациональной сверхжесткости общей гиперповерхности Фано $V = V_M \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ проверим, что (2.1.4) действительно справедливо в каждой точке $o \in V$ при условии общности гиперповерхности V.

На самом деле выполнено несколько более сильное условие. Чтобы его сформулировать, рассмотрим систему аффинных координат $(z_1, \dots, z_M)$ с центром в точке $o \in V$. Пусть

$$f = q_1 + q_2 + \dots + q_M$$

– уравнение гиперповерхности V, где $q_i(z_*)$ – однородный многочлен степени i.

Определение 2.1.3. Точка $o \in V$ *регулярна*, если многочлены $q_1, \dots, q_{M-1}$ образуют регулярную последовательность в $\mathcal{O}_{o,\mathbb{P}}$, т.е. система уравнений

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{M-1} = 0$$

задает конечное множество прямых в $\mathbb{P}$, проходящих через $o \in \mathbb{P}$.

Очевидно, свойство регулярности не зависит от выбора системы координат. Очевидно, далее, что если точка $o \in V$ регулярна, то на V имеется не более конечного числа прямых, проходящих через точку o. Поэтому бирациональная сверхжесткость общей гиперповерхности Фано вытекает из следующего факта.

Предложение 2.1.4. *Общая гиперповерхность $V = V_M \subset \mathbb{P}$ регулярна в каждой точке $o \in V$.*

Замечание 2.1.2. Общность понимается в смысле топологии Зарисского на пространстве $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M)))$.

Доказательство предположения 2.1.4. Пусть $\mathcal{P}_{k,K}$ – пространство однородных многочленов степени k от K переменных, $\dim \mathcal{P}_{k,K} = \binom{k+K-1}{K-1}$. Рассмотрим пространство пар

$$S = \{(x, F) \mid x \in \mathbb{P},\ F \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M))\}$$

с естественными проекциями $p\colon S \to \mathbb{P}$ и $q\colon S \to H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M))$. Выделим в нем гиперповерхность инцидентности

$$I = \{(x, F) \mid F(x) = 0\}.$$

Пусть $Y \subset I$ состоит из таких пар (x, F), что точка x не является $(M-1)$-регулярной на гиперповерхности $F = 0$. Предложение 2.1.4 будет доказано, если мы установим, что $q(Y)$ – замкнутое собственное подмножество пространства однородных многочленов $\mathcal{P}_{M,M+1}$. Последнее утверждение в свою очередь вытекает из следующего факта.

Лемма 2.1.3. *Коразмерность $Y(x) = Y \cap p^{-1}(x)$ в слое $p^{-1}(x) = H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M))$ равна $M + 1$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $x \in \mathbb{P}$ и систему аффинных координат $(z_1, \dots, z_M)$ с началом в x. Пусть

$$Y_k(x) = \left\{ (q_1, \dots, q_k) \in \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{i,M} \;\middle|\; \operatorname{codim}\{q_1 = \dots = q_k = 0\} < k \right\}.$$

Очевидно,

$$Y(x) = Y_{M-1}(x),$$

так что достаточно установить, что $\operatorname{codim} Y_k(x) = M+1$ для $k = 1, \dots, M-1$ (имеется в виду коразмерность относительно слоя $p^{-1}(x)$). Сделаем это индукцией по k.

Для $k=1$ утверждение очевидно (гладкие гиперповерхности существуют!).

В предположении, что $\operatorname{codim} Y_k(x) = M+1$ для некоторого $k \in \{1, \dots, M-2\}$, докажем, что то же самое справедливо и для $k+1$. Положим

$$R_k = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{i,M} \setminus Y_k.$$

Пусть

$$\pi\colon \prod_{i=1}^{k+1} \mathcal{P}_{i,M} = \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{i,M} \times \mathcal{P}_{k+1,M} \to \prod_{i=1}^{k} \mathcal{P}_{i,M}$$

– естественная проекция. Поскольку коразмерность пересечения $I \cap p^{-1}(x)$ относительно слоя $p^{-1}(x)$ есть 1, нам достаточно показать, что

$$\operatorname{codim} Y_{k+1} \cap \pi^{-1}(R_k) \geqslant M,$$

где коразмерность берется относительно пространства многочленов $\prod_{i=1}^{k+1} \mathcal{P}_{i,M}$. В свою очередь это следует из неравенства

$$\mu_{k+1} = \operatorname{codim}_{\pi^{-1}(q_*)}(\pi^{-1}(q_*) \cap Y_{k+1}) \geqslant M,$$

где $q_* = (q_1, \dots, q_k) \in R_k$ – произвольная регулярная последовательность. Это последнее неравенство мы и будем доказывать.

Естественно,

$$\pi^{-1}(q_*) \cong \mathcal{P}_{k+1,M}.$$

Условие

$$q_{k+1} \in \pi^{-1}(q_*) \cap Y_{k+1}$$

означает, что q_{k+1} обращается в нуль на одной из компонент замкнутого алгебраического множества

$$\{q_1 = \dots = q_k = 0\} \subset \mathbb{A}^M.$$

Поскольку последовательность q_* регулярна, все компоненты этого множества – конусы коразмерности k с вершинами в точке $x = (0, \dots, 0)$. Проективизируя, получаем замкнутое проективное множество $Q = \bigcup Q_i \subset \mathbb{P}^{M-1}$, все компоненты которого имеют коразмерность k.

Пусть $S \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – $(k-1)$-плоскость общего положения, так что ограничение соответствующей линейной проекции $\pi_S\colon \mathbb{P}^{M-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{M-1-k}$ на каждую компоненту Q_i множества Q есть конечный морфизм. Очевидно, что ограничение пространства однородных многочленов

$$\pi_S^* H^0(\mathbb{P}^{M-1-k}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{M-1-k}}(k+1))$$

на каждую компоненту Q_i инъективно. Таким образом, мы явно построили пространство однородных многочленов $W_{k+1} \subset \mathcal{P}_{k+1,M}$, пересекающееся с Y_{k+1} только по нулю. Следовательно,

$$\mu_{k+1} \geqslant \dim W_{k+1} = \binom{M}{k+1} \geqslant M.$$

Лемма 2.1.3, а вместе с ней и предложение 2.1.4 доказаны.

§ 2.2. Полные пересечения Фано

Основной результат данного параграфа – доказательство бирациональной сверхжесткости общих по Зарисскому полных пересечений Фано $V \subset \mathbb{P}^{M+k}$ коразмерности k при $M \geqslant 2k+1$. В п. 2.2.1 сформулирована основная теорема и начато ее доказательство. В п. 2.2.2 построены гиперкасательные линейные системы и завершено доказательство теоремы. В п. 2.2.3 объясняется, как строить гиперкасательные дивизоры для циклических накрытий.

2.2.1. Теорема о бирациональной сверхжесткости. Рассмотрим полное пересечение Фано

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}^{M+k} \supset V = V_{d_1 \cdots d_k} = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k,$$

где $F_i \subset \mathbb{P}$ – гиперповерхности степени $d_i \geqslant 2$, причем целые числа d_i, $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_k$, удовлетворяют соотношению

$$d_1 + \cdots + d_k = M + k, \qquad M \geqslant 4, \quad k \geqslant 2.$$

Многообразие V предполагается гладким M-мерным, так что

$$\operatorname{Pic} V = \mathbb{Z}H$$

по теореме Лефшеца, где H – класс гиперплоского сечения, $K_V = -H$, так что V – многообразие Фано индекса 1.

Теорема 2.2.1. *При $M \geqslant 2k+1$ общее (в смысле топологии Зарисского) многообразие V является бирационально сверхжестким.*

В данном пункте будет точно сформулировано условие общности положения для V, в следующем – построены гиперкасательные системы и доказана бирациональная сверхжесткость.

Пусть $(z_1, \ldots, z_{M+k})$ – система аффинных координат на $\mathbb{P}$ с началом в точке $o \in V$. Запишем

$$\begin{aligned} f_1(z_*) &= q_{1,1} + q_{1,2} + \cdots + q_{1,d_1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_i(z_*) &= q_{i,1} + q_{i,2} + \cdots + q_{i,d_i}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_k(z_*) &= q_{k,1} + q_{k,2} + \cdots + q_{k,d_k} \end{aligned}$$

– уравнения гиперповерхностей $F_1, \ldots, F_k$, разложенные на однородные по z_* компоненты $q_{i,j}$.

Определение 2.2.1. Точка $o \in V$ *регулярна*, если набор однородных многочленов

$$\{q_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant d_i,\ (i,j) \neq (k, d_k)\},$$

состоящий из всех многочленов $q_{i,j}$, кроме q_{k,d_k}, образует регулярную последовательность в $\mathcal{O}_{o,\mathbb{P}}$, т.е. система уравнений

$$\{q_{i,j} = 0 \mid (i,j) \neq (k, d_k)\}$$

задает конечное число прямых в $\mathbb{P}$, проходящих через точку o.

В частности, на V лежит самое большое конечное число прямых, проходящих через регулярную точку $o \in V$.

Пусть
$$\mathcal{H} = \prod_{i=1}^{k} (H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d_i)) \setminus \{0\})$$
– множество упорядоченных наборов k ненулевых однородных многочленов $(f_1, \ldots, f_k)$ степеней $d_1, \ldots, d_k$ соответственно.

Предложение 2.2.1. *Существует непустое открытое по Зарисскому множество*
$$U_{\mathrm{reg}} \subset \mathcal{H}$$
такое, что для $(f_1, \ldots, f_k) \in U_{\mathrm{reg}}$ *полное пересечение* $V = V(f_1, \ldots, f_k) \subset \mathbb{P}$ *регулярно в каждой точке.*

Доказательство дано ниже, в § 2.3.

Доказательство теоремы 2.2.1. В силу предложения 2.2.1 достаточно показать, что полное пересечение V, регулярное в каждой точке, бирационально сверхжесткое. Зафиксируем такое многообразие V.

В силу § 1.2 бирациональная сверхжесткость следует из неравенства
$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y \leqslant \frac{4}{\deg V} = \frac{4}{d_1 \cdots d_k}, \tag{2.2.1}$$
которое должно быть выполнено для любого неприводимого подмногообразия $Y \subset V$ и любой точки $o \in Y$. Зафиксировав пару $o \in Y$, будем доказывать (2.2.1). Отметим, что оценка (2.2.1) точна: подмногообразие $H_1 \cap H_2 \cap V$, где H_i – различные касательные гиперплоскости к V в точке o, имеет степень $\deg V$ и кратность 4 в точке o.

Пусть
$$\Lambda_1^{\mathbb{P}} = \overline{\{\lambda_1 q_{1,1} + \cdots + \lambda_k q_{k,1} = 0\}}$$
– линейная система касательных гиперплоскостей к V в точке o (черта сверху означает проективное замыкание в $\mathbb{P}$). Пусть $\Lambda_1 = \Lambda_1^{\mathbb{P}}|_V$ – ее ограничение на V.

Лемма 2.2.1. *Имеет место равенство*
$$\mathrm{codim}_V \,\mathrm{Bs}\, \Lambda_1 = \mathrm{codim}_{\mathbb{P}} \,\mathrm{Bs}\, \Lambda_1^{\mathbb{P}} = k.$$

Доказательство. Легко видеть, что
$$q_{i,1}|_V = -(q_{1,2} + \cdots + q_{i,d_i})|_V.$$
Положим
$$\mathbb{T} = T_o V = \{q_{1,1} = q_{2,1} = \cdots = q_{k,1} = 0\} \cong \mathbb{C}^M.$$
Квадратичные компоненты функций $q_{i,1}|_V$ суть $(-q_{i,2})|_{\mathbb{T}}$ (относительно любой системы локальных параметров в точке o). Поскольку последовательность
$$q_{1,1}, \ldots, q_{k,1}, q_{1,2}, \ldots, q_{k,2}$$
регулярна, заключаем, что $\mathrm{Bs}\, \Lambda_1 = \mathbb{T} \cap V$ есть замкнутое множество коразмерности точно k в окрестности точки o. Положим $T_i = \{q_{i,1} = 0\}$, так что
$$\mathbb{T} = T_1 \cap \cdots \cap T_k.$$

Мы утверждаем, что для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, замкнутое алгебраическое множество

$$R_i = T_1 \cap \cdots \cap T_i \cap V$$

есть неприводимое подмногообразие коразмерности i в V. Это верно при $i = 1$ по теореме Лефшеца, поскольку V гладкое и группа $\operatorname{Pic} V$ порождена классом гиперплоского сечения, так что $T_1 \cap V$ должно быть неприводимо. Предположим, что наше утверждение справедливо для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant i$, где $i \leqslant k-1$. Имеем $R_i \not\subset T_{i+1}$, поскольку это верно в окрестности точки $x \in R_i$ и R_i неприводимо. Следовательно, теоретико-схемное пересечение R_i и T_{i+1} есть эффективный цикл $(R_i \circ T_{i+1})$ коразмерности $i+1$. Однако по теореме Лефшеца группа циклов коразмерности $i+1 < M/2$ по модулю численной эквивалентности порождена классом $(R_i \circ T_{i+1})$. Следовательно,

$$(R_i \circ T_{i+1}) = R_i \cap T_{i+1} = R_{i+1}$$

есть неприводимый цикл, что нам и нужно.

В итоге получаем, что $\operatorname{Bs} \Lambda_1$ есть неприводимое подмногообразие коразмерности k. Лемма доказана.

Следствие 2.2.1. *Предположим, что неприводимое подмногообразие $Y \subset V$ коразмерности 2 не удовлетворяет неравенству (2.2.1). Тогда существует неприводимое подмногообразие $R \subset V$ коразмерности $k+1$, удовлетворяющее неравенству*

$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} R \geqslant 2^{k-1} \frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y. \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Рассуждая по образцу п. 2.1.1, строим последовательность неприводимых подмногообразий $Y_0 = Y, Y_1, \ldots, Y_{k-2}$, $\operatorname{codim} Y_i = i+2$, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y_i \geqslant 2^i \frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y,$$

Y_{i+1} – неприводимая компонента цикла $(Y_i \circ T_{j(i)})$ для некоторого $j(i) \in \{1, \ldots, k\}$. Такое построение возможно в силу предыдущей леммы. Теперь имеется альтернатива: либо

$$Y_{k-2} = \operatorname{Bs} \Lambda_1,$$

либо

$$Y_{k-2} \neq \operatorname{Bs} \Lambda_1.$$

В первом случае в силу условия регулярности Y_{k-2} – неприводимое подмногообразие степени $\deg V$, имеющее в точке o кратность в точности 2^k, так как касательный конус $T_o Y_{k-2}$ есть пересечение квадрик

$$q_{1,2}|_{\mathbb{T}} = \cdots = q_{k,2}|_{\mathbb{T}} = 0,$$

так что

$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y \leqslant \frac{4}{\deg V}$$

вопреки предположению. Значит, реализуется второй случай, т.е. найдется дивизор $T_{j(k-2)} \not\supset Y_{k-2}$. В качестве R возьмем неприводимую компоненту эффективного цикла $(Y_{k-2} \circ T_{j(k-2)})$, удовлетворяющую неравенству

$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} R \geqslant 2 \frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y_{k-2}.$$

Следствие доказано.

2.2.2. Построение гиперкасательных дивизоров. Зафиксируем неприводимое многообразие R коразмерности $k+1$, удовлетворяющее неравенству (2.2.2).

Пусть $\mathbb{A} \subset \mathbb{P}$ – аффинная карта с координатами $(z_1, \ldots, z_{M+k})$, $o = (0, \ldots, 0)$. Положим

$$f_{i,\alpha} = q_{i,1} + \cdots + q_{i,\alpha}.$$

Символ s_a, $a \in \mathbb{Z}_+$, обозначает произвольный однородный многочлен степени a от (z_*). Рассмотрим линейные системы

$$\Lambda^{\mathbb{A}}_{i,j} = \left| \sum_{\alpha=1}^{\min\{j, d_i - 1\}} f_{i,\alpha} s_{j-\alpha} \right|$$

на $\mathbb{A}$. Беря замыкание общего дивизора системы $\Lambda^{\mathbb{A}}_{i,j}$ в $\mathbb{P}$, получаем линейную систему $\Lambda^{\mathbb{P}}_{i,j}$ на $\mathbb{P}$. Очевидно,

$$\operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{A}}_{i,j} = \{q_{i,\alpha} = 0 \mid 1 \leqslant \alpha \leqslant \min\{j, d_i - 1\}\}, \qquad \operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{P}}_{i,j} = \overline{\operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{A}}_{i,j}}.$$

Положим $\Lambda^{\mathbb{P}}_j = \sum_{i=1}^k \Lambda^{\mathbb{P}}_{i,j}$. Для этой линейной системы имеем

$$\operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{P}}_j = \overline{\{q_{i,\alpha} = 0 \mid 1 \leqslant \alpha \leqslant \min\{j, d_i - 1\}\}}$$

и

$$c(j) = \operatorname{codim}_{\mathbb{P}} \operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{P}}_j = \sum_{i=1}^k \min\{j, d_i - 1\}. \tag{2.2.3}$$

Получаем

$$\operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{P}}_{d_k-1} = \operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{P}}_{d_k} = \cdots = \operatorname{Bs}^{\mathbb{P}}_{\infty}$$

и $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}} \operatorname{Bs}^{\mathbb{P}}_{\infty} = M$.

Определение 2.2.2. Линейная система

$$\Lambda_j = \Lambda^{\mathbb{P}}_j|_V$$

называется *j-й гиперкасательной системой* в точке o.

Например, Λ_1 есть $(k-1)$-мерная линейная система на V, высекаемая на V касательными гиперплоскостями в точке o.

Теперь получим оценку для коразмерности базисного множества гиперкасательных систем. Априорно можно лишь утверждать, что выполнено неравенство

$$\operatorname{codim}_V \operatorname{Bs}\Lambda_j \geqslant \operatorname{codim}_{\mathbb{P}} \operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{P}}_j - k,$$

так как когда ограничение системы переходит с $\mathbb{P}$ на V, коразмерность базисного множества может уменьшиться. Однако в нашем случае условие регулярности улучшает положение.

Система Λ_1 была построена и использована выше.

Лемма 2.2.2. (i) *При $j \in \{2, \ldots, d_k - 2\}$*

$$\operatorname{codim}_V \operatorname{Bs}\Lambda_j = \operatorname{codim}_{\mathbb{P}} \operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{P}}_j = c(j) \tag{2.2.4}$$

в окрестности точки o.

(ii) *Для каждого j имеет место оценка*

$$\operatorname{codim}_V \operatorname{Bs}\Lambda_j \geqslant \operatorname{codim}_{\mathbb{P}} \operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{P}}_j - 1.$$

Доказательство. Легко видеть, что при $\alpha \leqslant d_i - 1$

$$f_{i,\alpha}|_{V\cap\mathbb{A}} = -(q_{i,\alpha+1} + \dots + q_{i,d_i})|_{V\cap\mathbb{A}}. \tag{2.2.5}$$

Напомним, что $\mathbb{T} = T_oV \cong \mathbb{C}^M$ – касательное пространство. Введем вспомогательные линейные системы

$$\Lambda^{\mathbb{T}}_{i,j} = \left|\sum_{\alpha=1}^{\min\{j,d_i-1\}} q_{i,\alpha+1}s_{j-\alpha}\right|_{\mathbb{T}}, \qquad \Lambda^{\mathbb{T}}_j = \sum_{i=1}^k \Lambda^{\mathbb{T}}_{i,j}.$$

Это линейные системы конусов степени $j+1$ на касательном пространстве $\mathbb{T}$.

Заменяя общий дивизор линейной системы его касательным конусом в заданной точке, получаем касательную линейную систему. Эта простая операция всегда имеет смысл. Однако на уровне явных уравнений имеется потенциальный источник неприятностей: заменяя уравнение его первой однородной компонентой, необходимо проследить, чтобы последняя не являлась тождественным нулем.

Мы утверждаем, что

$$\Lambda^{\mathbb{T}}_j = T_o\Lambda_j. \tag{2.2.6}$$

В самом деле, в силу (2.2.5) уравнение касательного конуса к дивизору $(f_{i,\alpha}|_{V\cap\mathbb{A}})$ в точке o есть $q_{i,\alpha+1}|_{\mathbb{T}}$, если последнее отлично от нуля. Поэтому в диаграмме равенств

$$\begin{tikzcd} T_o\Lambda_j \arrow[r, equal, "?"] \arrow[d, equal] & \Lambda^{\mathbb{T}}_j \arrow[d, equal] \\ T_o(\Lambda^{\mathbb{P}}_j|_V) \arrow[r, equal, "?"] & (T_o\Lambda^{\mathbb{P}}_j)|_{\mathbb{T}} \end{tikzcd}$$

мы вправе стереть вопросительные знаки и получить желаемое равенство (2.2.6) при условии, что система $\Lambda^{\mathbb{T}}_j$ ненулевая. Но последнее верно в силу условия регулярности. (Условие $\Lambda^{\mathbb{T}}_j \neq 0$ существенно слабее, чем условие регулярности; ниже условие регулярности используется в полную силу.) Очевидно,

$$\operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{T}}_j = \bigl\{q_{i,\alpha+1}|_{\mathbb{T}} = 0,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant \min\{j, d_i-1\}\bigr\} \subset \mathbb{T}.$$

Снова в силу условия регулярности получаем

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{T}}\operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{T}}_j = \sum_{i=1}^k \min\{j, d_i-1\} = \operatorname{codim}_{\mathbb{P}}\operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{P}}_j, \qquad j \in \{1, \dots, d_k-2\}.$$

Случай $j = d_k - 1$ невозможен, потому что многочлен q_{k,d_k} исключен из условия регулярности. Поскольку, очевидно, для любой линейной системы Σ имеем

$$T_o\operatorname{Bs}\Sigma \subset \operatorname{Bs}T_o\Sigma,$$

получаем утверждение (i).

Докажем (ii). Базисное множество системы $\Lambda^{\mathbb{P}}_j$ задается системой $c(j)$ уравнений и имеет коразмерность $c(j)$ (см. (2.2.3)). Базисное множество системы Λ_j задается теми же самыми уравнениями, ограниченными на V, и $c(j) \leqslant \dim V$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{codim}_V\operatorname{Bs}\Lambda_j - \operatorname{codim}_{\mathbb{P}}\operatorname{Bs}\Lambda^{\mathbb{P}}_j$$

есть невозрастающая функция параметра j. (При $a \geqslant b$ коразмерность $\operatorname{codim}_V\operatorname{Bs}\Lambda_a$ превышает $\operatorname{codim}_V\operatorname{Bs}\Lambda_b$ самое большее на число новых уравнений, т.е. $c(a)-c(b)$.) Поэтому достаточно доказать (ii) для $j = \infty$:

$$\dim(\operatorname{Bs}^{\mathbb{P}}_{\infty})|_V \leqslant 1.$$

В самом деле, базисная подсхема $(\mathrm{Bs}^{\mathbb{P}}_{\infty})|_V$ задается на V системой уравнений

$$\{q_{i,\alpha} = 0 \mid 1 \leqslant \alpha \leqslant d_i - 1\}.$$

Следовательно, как подсхема проективного пространства $\mathbb{P}$ подсхема $(\mathrm{Bs}^{\mathbb{P}}_{\infty})|_V$ задается системой $M + k$ уравнений

$$\{q_{i,\alpha} = 0 \mid 1 \leqslant \alpha \leqslant d_i\}.$$

В силу условия регулярности $\dim(\mathrm{Bs}^{\mathbb{P}}_{\infty})|_V \leqslant 1$, что нам и нужно. Лемма доказана.

Для $j \geqslant 1$ положим

$$w^+(j) = \sharp\{i, 1 \leqslant i \leqslant k \mid j \leqslant d_i - 1\}.$$

Далее, положим

$$w(j) = \begin{cases} w^+(j) - 1 & \text{при } j = 1, 2 \text{ и } d_k - 1, \\ w^+(j) & \text{для остальных значений } j. \end{cases}$$

Поскольку $d_i \geqslant 2$ для каждого $i = 1, \ldots, k$, получаем $w^+(1) = k$. Далее,

$$c(j) = \sharp\big\{(i, \alpha) \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant \min\{j, d_i - 1\}\big\} = \sum_{\alpha=1}^{j} w^+(\alpha)$$

для каждого $j \geqslant 1$. Для $1 \leqslant j \leqslant d_k - 1$ рассмотрим пространства

$$\Delta_j = \underbrace{\Lambda_j \times \cdots \times \Lambda_j}_{w(j)},$$

параметризующие упорядоченные наборы $(D_{j,1}, \ldots, D_{j,w(j)}) \in \Delta_j$, состоящие из $w(j)$ дивизоров линейных систем Λ_j. Положим

$$\Delta = \prod_{j=2}^{d_k - 1} \Delta_j.$$

Лемма 2.2.3. *Для общего набора $(D_{*,*}) \in \Delta$ теоретико-множественное пересечение*

$$R^* = R \cap \left(\bigcap_{j=2}^{d_k - 1} \bigcap_{a=1}^{w(j)} D_{j,a} \right)$$

одномерно в окрестности точки o.

Доказательство. Прежде всего отметим, что мы рассматриваем пересечение

$$w(2) + \cdots + w(d_k - 1) = c(d_k - 1) - k - 2 = M - k - 2$$

дивизоров с R, так что $\dim R^* \geqslant 1$. Для $b \in \{2, \ldots, d_k - 1\}$ положим

$$R_b = R \cap \left(\bigcap_{j=2}^{b} \bigcap_{a=1}^{w(j)} D_{j,a} \right).$$

Докажем (возрастающей) индукцией по b, что для общего набора дивизоров $(D_{*,*}) \in \prod_{j=2}^{b} \Delta_j$ имеем

$$\mathrm{codim}_o\, R_b = 2 + \sum_{j=2}^{b} w(j), \tag{2.2.7}$$

где codim_o обозначает коразмерность в окрестности точки o. Положим для $e \in \{0, 1, \ldots, w(b)\}$

$$R_{b,e} = R \cap \left(\bigcap_{j=2}^{b-1} \bigcap_{a=1}^{w(j)} D_{j,a} \right) \cap \left(\bigcap_{a=1}^{e} D_{b,a} \right).$$

В частности,

$$R_{b,w(b)} = R_{b+1,0} = R_b.$$

Докажем индукцией по e, что для общего набора $(D_{*,*})$ выполнено равенство

$$\operatorname{codim}_o R_{b,e} = k + 1 + \sum_{j=2}^{b-1} w(j) + e. \tag{2.2.8}$$

При $b = 2$, $e = 0$ равенство (2.2.8) выполнено по предположению, поскольку $R_{2,0} = R$. Возьмем $e \leqslant w(b) - 1$ и предположим, что (2.2.8) выполнено. В силу (2.2.4)

$$\operatorname{codim}_V \operatorname{Bs} \Lambda_b = c(b) = \sum_{j=1}^{b} w^+(j) = k + 1 + \sum_{j=2}^{b-1} w(j) + w(b),$$

так что общий дивизор $D_{b,e+1} \in \Lambda_b$ не содержит компонент множества $R_{b,e}$, содержащих точку o. Это доказывает (2.2.8).

Из равенства (2.2.8) сразу следует (2.2.7). Лемма доказана.

Применим теперь построенную последовательность гиперкасательных дивизоров к оценке кратности $\operatorname{mult}_o R$.

Лемма 2.2.4. *В каждом из замкнутых алгебраических множеств $R_{b,e}$ имеется такая неприводимая компонента $Y_{b,e}$, что последовательность неприводимых подмногообразий*

$$\{Y_{b,e} \mid 2 \leqslant b \leqslant d_k - 1,\ 0 \leqslant e \leqslant w(b)\}$$

имеет следующие свойства:

(i) $Y_{2,0} = R$;

(ii) $Y_{b,e} \ni o$ *и, в частности*,

$$\operatorname{codim}_V Y_{b,e} = k + 1 + \sum_{j=2}^{b-1} w(j) + e;$$

(iii) *при* $e \leqslant w(b) - 1$

$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y_{b,e+1} \geqslant \frac{b+1}{b} \cdot \frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} Y_{b,e}. \tag{2.2.9}$$

Доказательство повторяет рассуждения п. 2.1.2.

Следствие 2.2.2. *Справедлива оценка*

$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} R \leqslant \frac{3d_k}{2d_k - 2} \cdot 2^{w^+(2)} \cdot \left(\prod_{d_i \geqslant 3} d_i \right)^{-1}.$$

Доказательство. Рассуждаем, как в п. 2.1.2.

Последнее подмногообразие $Y_{b,e}$ в построенной последовательности есть неприводимая кривая. Ее кратность в точке o не превосходит ее степень. Применяя часть (iii) леммы 2.2.4, получаем оценку

$$\frac{\operatorname{mult}_o}{\deg} R \cdot \prod_{b=2}^{d_k - 1} \left(\frac{b+1}{b} \right)^{w(b)} \leqslant 1.$$

Вспоминая определение чисел $w(b)$ и $w^+(b)$, получаем

$$\prod_{b=2}^{d_k-1}\left(\frac{b+1}{b}\right)^{w(b)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{d_k-1}{d_k}\cdot\prod_{b=2}^{d_k-1}\left(\frac{b+1}{b}\right)^{w^+(b)} = \frac{2d_k-2}{3d_k}\cdot 2^{-w^+(2)}\cdot\left(\prod_{b=3}^{d_k} b^{w^+(b-1)-w^+(b)}\right).$$

Однако

$$w^+(b-1)-w^+(b) = \sharp\{i \mid 1\leqslant i\leqslant k,\, d_i=b\}.$$

Следовательно, произведение в скобках равно

$$\prod_{d_i\geqslant 3} d_i,$$

что и требуется. Следствие доказано.

Вспоминая, что подмногообразие R удовлетворяет неравенству (2.2.2), получаем оценку

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} C \leqslant \frac{3d_k}{4d_k-4}\cdot\frac{4}{\deg V}.$$

Из неравенства $M\geqslant 2k+1$ следует, что $d_k\geqslant 4$. Этим неравенство (2.2.1) и бирациональная сверхжесткость многообразия V полностью доказаны.

2.2.3. Циклические накрытия. Опишем для полноты картины метод построения гиперкасательных дивизоров для многообразия Фано V, реализованного в виде циклического накрытия степени $K\geqslant 2$,

$$\sigma\colon V \xrightarrow{K:1} X\subset\mathbb{P},$$

где $\mathbb{P}=\mathbb{P}^M$ – проективное пространство, X – гладкое многообразие Фано, σ разветвлено над гладким дивизором $W\cap X$, $W=W_{Kl}\subset\mathbb{P}$ – гиперповерхность степени Kl, заданная уравнением $g(x_*)=0$, $(x_*)=(x_0:\cdots:x_M)$ – однородные координаты на $\mathbb{P}$, g – многочлен степени Kl. Вводя новую координату u веса l, можно реализовать V как подмногообразие во взвешенном проективном пространстве

$$V\subset\mathbb{P}(\underbrace{1,\ldots,1}_{M+1},l),$$

добавляя к уравнениям многообразия X уравнение

$$u^K = g(x_0,\ldots,x_M).$$

Гиперкасательные дивизоры в точке $o\in V$ строятся по-разному в зависимости от того, лежит точка $p=\sigma(o)\in X$ на дивизоре ветвления или нет.

Предположим, что $p\notin W$. Выберем некоторую систему аффинных координат $(z_1,\ldots,z_M)$ с началом в этой точке. Без ограничения общности считаем, что $z_i=x_i/x_0$. Положим $y=u/x_0^l$. Теперь стандартное аффинное множество $\mathbb{A}^{M+1}_{(z_1,\ldots,z_M,y)}$ является картой для $\mathbb{P}(1,\ldots,1,l)$. Злоупотребляя обозначениями, используем для неоднородного многочлена, соответствующего g, тот же самый символ:

$$g=w_0+w_1+\cdots+w_{Kl},$$

где $w_i(z_*)$ – однородный многочлен степени i, и без ограничения общности полагаем $w_0=1$. Можно считать, что $y(o)=1$ ($o\in V$, так что $y(o)^K=1$). Положим

$$g^{1/K}=(1+w_1+\cdots+w_{Kl})^{1/K}=1+\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i(w_1+\cdots+w_{Kl})^i=1+\sum_{i=1}^{\infty}\Phi_i(w_1,\ldots,w_{Kl}),$$

где $\gamma_i \in \mathbb{Q}$ определяются рядом Тейлора функции $(1+s)^{1/K}$ в нуле, s – переменная:

$$(1+s)^{1/K} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i s^i,$$

и $\Phi_i(w_1(z_*), \dots, w_{Kl}(z_*))$ суть однородные многочлены степени $i \geqslant 1$ от переменных z_*. Легко видеть, что при $i \in \{1, \dots, Kl\}$ имеем

$$\Phi_i(w_*(z_*)) = \frac{1}{K} w_i + \Phi_i^\sharp(w_1, \dots, w_{i-1}).$$

Теперь множество гиперкасательных дивизоров строится таким образом: к имеющимся гиперкасательным дивизорам на многообразии X в точке p (точнее, к их σ-прообразам) добавляются новые дивизоры, заданные уравнениями

$$L_j = \overline{\left\{ \left(y - 1 - \sum_{i=1}^{j} \Phi_i(w_1, \dots, w_j) \right)\Bigg|_V = 0 \right\}}, \qquad j = l, l+1, \dots, Kl-1.$$

Черта сверху означает проективное замыкание в $\mathbb{P}(1, \dots, 1, l)$. Очевидно, L_j высекается на V гиперповерхностью степени j и имеет в точке o кратность $\geqslant j+1$. (При $j < l$ ввиду присутствия координаты y уравнение L_j во взвешенном проективном пространстве имеет степень l, поэтому дивизоры L_j не являются гиперкасательными.) Для использования новых гиперкасательных дивизоров требуются соответствующие условия регулярности: пересечение полного набора дивизоров должно иметь правильную размерность. Описанная выше конструкция (извлечение корня) позволила доказать бирациональную жесткость многих классов многообразий Фано (см. [14], [15] и следующую главу).

Если точка $p \in W$ лежит на дивизоре ветвления накрытия σ, то к гиперкасательным дивизорам многообразия X в точке p добавляются первые $K-1$ гиперкасательных дивизоров гиперповерхности W, т.е. дивизоры

$$\sigma^*((w_1 + \dots + w_j)|_X = 0), \qquad j = 1, \dots, K-1.$$

Детали см. в следующей главе и в [14], [15].

§ 2.3. Регулярные многообразия Фано

Выше, в п. 2.1.3, было доказано, что общая гиперповерхность Фано удовлетворяет условиям регулярности. Однако приведенный в п. 2.1.3 метод доказательства не работает для полных пересечений Фано. Ниже приводится другой метод, позволяющий обосновать условия регулярности для полных пересечений. В п. 2.3.1 ставится общая задача оценки коразмерности множества наборов многочленов, задающих алгебраическое множество “неправильной” размерности. В п. 2.3.2 описан индуктивный метод решения этой задачи. В п. 2.3.3 этот метод применяется к полным пересечениям Фано.

2.3.1. Метод оценки коразмерности. Пусть $z_1, \dots, z_{N+1}$ – некоторое множество переменных. Через $\mathcal{P}_a$ обозначим пространство однородных многочленов степени a от переменных z_*. Пусть

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{l+1} \mathcal{P}_{m_i} = \{(p_1, \dots, p_{l+1})\}$$

– множество всех наборов, состоящих из $l+1$ многочленов от переменных z_*, $0 \leqslant l \leqslant N-1$. Каждому набору из $l+1$ многочленов $(p_*) \in \mathcal{L}$ поставим в соответствие проективизированное множество его нулей

$$Z(p_*) = \{p_1 = \dots = p_{l+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{N+1}) = X.$$

Пишем $Z(p_*)$, а не $V(p_*)$, чтобы избежать путаницы и отличить этот объект от полного пересечения $V=V(f_*)$. Пусть

$$Y=\{(p_*)\in\mathcal{L}\mid \operatorname{codim}_X Z(p_*)\leqslant l\}$$

– множество “нерегулярных” наборов длины $l+1$. Нужно оценить коразмерность множества Y. Случай $l=N-1$, когда “правильная” размерность множества $Z(p_*)$ равна нулю, особенно важен для приложений к многообразиям Фано. Однако по техническим соображениям удобнее рассмотреть общий случай произвольного $l\in\{0,\ldots,N-1\}$. Положим $I=\{1,\ldots,l+1\}$ и

$$\mu_j=\min_{S\subset I,\,\sharp S=j}\left\{\sum_{i\in S}m_i\right\},\qquad j=1,\ldots,l+1.$$

Предположим, что

$$m=\mu_1=\min\{m_1,\ldots,m_{l+1}\}\geqslant 2.$$

Предложение 2.3.1. *Для любого $l\in\{1,\ldots,N-1\}$ справедлива следующая оценка*:

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}} Y\geqslant \min_{j\in\{0,\ldots,l\}}\{(\mu_{j+1}-j)(N-j)+1\}. \tag{2.3.1}$$

Замечание 2.3.1. При $l=0$ получаем тривиальную оценку

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}} Y=\dim\mathcal{P}_m.$$

Доказательство предложения 2.3.1. Положим

$$\mathcal{L}_a=\prod_{i=1}^{a}\mathcal{P}_{m_i}=\{(p_1,\ldots,p_a)\}.$$

Для каждого нерегулярного набора $(p_1,\ldots,p_{l+1})$ длины $l+1$ зафиксируем первый (считая слева направо) момент, когда коразмерность множества нулей $p_1=\cdots=p_a=0$ принимает неправильное значение. Рассмотрим множества

$$Y_a=\bigl\{(p_*)\in\mathcal{L}_a\mid \operatorname{codim}_X Z(p_1,\ldots,p_a)=\operatorname{codim}_X Z(p_1,\ldots,p_{a-1})=a-1\bigr\}.$$

Очевидным образом,

$$Y=\coprod_{a=1}^{l+1}\left(Y_a\times\prod_{i=a+1}^{l+1}\mathcal{P}_{m_i}\right).$$

В частности,

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}} Y=\min\{\operatorname{codim}_{\mathcal{L}_a} Y_a\mid 1\leqslant a\leqslant l+1\}.$$

Положим $I_a=\{1,\ldots,a\}\subset I$ и

$$\mu_{a,j}=\min_{S\subset I_a,\,\sharp S=j}\left\{\sum_{i\in S}m_i\right\},\qquad j=1,\ldots,a.$$

Очевидно, $\mu_{a,j}\geqslant\mu_j$. Поэтому достаточно доказать оценку

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}_a} Y_a\geqslant\min_{j\in\{0,\ldots,a-1\}}\{(\mu_{a,j+1}-j)(N-j)+1\},\qquad a=2,\ldots,l+1. \tag{2.3.2}$$

Тривиальный случай $a=1$ опускаем, потому что тогда

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}_1} Y_1=\dim\mathcal{P}_{m_1}\geqslant\dim\mathcal{P}_m,$$

что заведомо больше, чем правая часть неравенства (2.3.1).

Пространство $\mathcal{L}_a$, множество Y_a и неравенство (2.3.2) не зависят от l. Следовательно, можем упростить обозначения, полагая $a = l+1$ и $\mu_{a,j} = \mu_j$. Другими словами, докажем неравенство (2.3.1) для Y_{l+1} вместо Y.

Обозначим Y_{l+1} через Y^*. Мы свели исходную проблему к более простой задаче оценки коразмерности множества Y^* в $\mathcal{L}$, где Y^* состоит изо всех таких наборов многочленов $(p_1, \ldots, p_{l+1})$ длины $l+1$, что множество $p_1 = \cdots = p_l = 0$ имеет правильную размерность и существует неприводимая компонента $B \subset Z(p_1, \ldots, p_l)$, на которой многочлен p_{l+1} обращается в нуль.

2.3.2. Учет размерности линейной оболочки. Пусть $\langle B \rangle$ – линейная оболочка множества B. Положим $b = \operatorname{codim}\langle B \rangle \leqslant l$.

Определим $Y^*(b)$ как множество всех таких наборов $(p_*) \in Y^*$ длины $l+1$, для которых существует компонента $B \subset Z(p_1, \ldots, p_l)$ такая, что

$$\operatorname{codim}_X \langle B \rangle = b, \qquad p_{l+1}|_B \equiv 0.$$

Очевидно,

$$Y^* = \bigcup_{b=0}^{l} Y^*(b).$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}} Y^*(b) \geqslant (\mu_{b+1} - b)(N - b) + 1 \tag{2.3.3}$$

для каждого $b = 0, \ldots, l$. Установим справедливость неравенства (2.3.3).

Случай $b = 0$. Здесь $\langle B \rangle = \mathbb{P}^N$, и поэтому каждый ненулевой моном степени $m_{l+1} \geqslant m$ от линейных форм от переменных $z_1, \ldots, z_{N+1}$ не обращается в нуль на B. Пространство таких мономов

$$\left\{ \prod_{i=1}^{m_{l+1}} (a_{i,1} z_1 + \cdots + a_{i,N+1} z_{N+1}) \right\} \subset \mathcal{P}_{m_{l+1}}$$

замкнуто. Его размерность есть

$$m_{l+1} N + 1 \geqslant \mu_1 N + 1.$$

С другой стороны, множество многочленов $p_{l+1} \in \mathcal{P}_{m_{l+1}}$, обращающихся в нуль на B, замкнуто. Эти два замкнутых множества пересекаются только по нулю. Следовательно, коразмерность множества $Y(0)$ в $\mathcal{L}$ не меньше чем $\mu_1 N + 1$. Это дает оценку (2.3.3) для $b = 0$.

Случай $b \geqslant 1$. Здесь $\langle B \rangle = \mathbb{P}^{N-b}$. Наша стратегия состоит в том, чтобы свести этот случай к предыдущему ($b = 0$), ограничивая многочлены p_i на линейную оболочку $P = \langle B \rangle$. Хотя наши рассуждения довольно простые, они не совсем очевидны и требуют некоторой дополнительной работы.

Определение 2.3.1. Пусть $g_1, \ldots, g_e$ – однородные многочлены на проективном пространстве P, $e \leqslant \dim P - 1$, $\deg g_i \geqslant 2$ при $i = 1, \ldots, e$. Назовем неприводимое подмногообразие $C \subset P$ такое, что

$$\langle C \rangle = P, \qquad \operatorname{codim}_P C = e,$$

ассоциированным подмногообразием последовательности (g_*), если существует цепочка неприводимых подмногообразий $R_j \subset P$, $j = 0, \ldots, e$, удовлетворяющая следующим требованиям:

- $R_0 = P$;

- для каждого $j = 0, \dots, e-1$ подмногообразие R_{j+1} есть неприводимая компонента замкнутого алгебраического множества

$$\{g_{j+1} = 0\} \cap R_j,$$

где $g_{j+1}|_{R_j} \not\equiv 0$, так что $\operatorname{codim}_P R_j = j$ для всех j;
- $R_e = C$.

Если последовательность (g_*) имеет ассоциированное подмногообразие, то назовем ее *хорошей.*

Лемма 2.3.1. (i) *Свойство подпоследовательности быть хорошей является открытым.*
(ii) *Хорошая последовательность* (g_*) *может иметь самое большее*

$$\left[\frac{1}{e+1}\prod_{j=1}^{e}\deg g_j\right]$$

ассоциированных подмногообразий.

Доказательство. Оно легко получается индукцией по e. Для g_1 имеем условие $g_1 \not\equiv 0$, которое, очевидным образом, открытое. Далее, по крайней мере одна неприводимая компонента гиперповерхности $g_1 = 0$ должна иметь степень не меньше 2, и это условие также является открытым. Таких компонент может быть самое большее

$$\left[\frac{\deg g_1}{2}\right].$$

Предположим, что лемма справедлива для каждого $e = 1, \dots, j$, где $j \leqslant \dim P - 2$. Обозначим через G_j открытое множество хороших последовательностей длины j. Согласно (ii) для каждой последовательности $(g_*) \in G_j$ имеется самое большее

$$\left[\frac{1}{j+1}\prod_{\alpha=1}^{j}\deg g_\alpha\right]$$

ассоциированных подмногообразий. Многочлен g_{j+1} не должен обращаться в нуль по крайней мере на одном из них, скажем R_j, и, более того, пересечение

$$\{g_{j+1} = 0\} \cap R_j$$

должно содержать неприводимую компоненту, линейная оболочка которой есть P. Очевидно, это условие определяет открытое подмножество в

$$G_j \times H^0(P, \mathcal{O}_P(\deg g_{j+1})).$$

Каждое ассоциированное подмногообразие имеет коразмерность $j+1$ и не содержится в гиперплоскости; следовательно, его степень не меньше чем $j+2$. Лемма доказана.

Вернемся теперь к многочленам p_* и предположим, что $l > b$. Мы утверждаем, что среди них можно найти $l-b$ многочленов (после перенумерации можно считать, что это $p_1, \dots, p_{l-b}$) таких, что последовательность

$$p_1|_P, \dots, p_{l-b}|_P \tag{2.3.4}$$

является хорошей и подмногообразие B есть одно из ее ассоциированных подмногообразий.

Доказательство предложения 2.3.1 (продолжение). Предположим, что мы уже нашли j многочленов (пусть это $p_1, \ldots, p_j$) таких, что последовательность $(p_1|_P, \ldots, p_j|_P)$ является хорошей и одно из его ассоциированных подмногообразий, скажем R_j, содержит B. Если $j < l - b$, то $R_j \neq B$ и существует многочлен p_α, $\alpha \in \{j+1, \ldots, l\}$, такой, что

$$p_\alpha|_{R_j} \not\equiv 0.$$

В противном случае $R_j \subset Z(p_1, \ldots, p_l)$, и мы приходим к противоречию, поскольку

$$\dim R_j > \dim B.$$

После перенумерации можем считать, что $\alpha = j+1$. Теперь $p_{j+1}|_B \equiv 0$, так что существует такая неприводимая компонента R_{j+1} множества $\{p_{j+1} = 0\} \cap R_j$, что $R_{j+1} \supset B$. Продолжая таким образом, получим наше утверждение.

Теперь зафиксируем проективное подпространство $P \subset \mathbb{P}^N$ коразмерности b. Пусть $Y^*(P)$ – множество всех таких наборов $(p_1, \ldots, p_{l+1}) \in Y^*$ длины $l+1$, что существует компонента $B \subset Z(p_1, \ldots, p_l)$, линейная оболочка которой есть $\langle B \rangle = P$, и $p_{l+1}|_B \equiv 0$.

Согласно лемме 2.3.1 хорошие последовательности образуют открытое множество. Поэтому можно оценивать коразмерность множества $Y^*(P)$ в $\mathcal{L}$, предполагая, что $(p_1|_P, \ldots, p_{l-b}|_P)$ образуют хорошую последовательность. Пусть

$$B_1, \ldots, B_K$$

– все ее ассоциированные подмногообразия, линейная оболочка которых есть P. Если $(p_1, \ldots, p_{l+1}) \in Y^*(P)$, то многочлены

$$p_{l-b+1}|_P, \ldots, p_{l+1}|_P$$

должны все обращаться в нуль на одном из этих подмногообразий B_i. Рассуждая теперь, как в случае $b = 0$, получаем

$$N \sum_{j=l-b+1}^{l+1} \deg p_j + b + 1 \geqslant \mu_{b+1}(N-b) + b + 1$$

независимых условий на $p_{l-b+1}, \ldots, p_{l+1}$. Принимая во внимание, что размерность грассманиана есть

$$\dim G(N+1-b, N+1) = b(N+1-b),$$

получаем окончательно

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}} Y^*(b) \geqslant \mu_{b+1}(N-b) + b + 1 - b(N+1-b) = (\mu_{b+1} - b)(N-b) + 1,$$

что и требуется.

В процессе доказательства мы предполагали, что $l > b$. Если $l = b$, то $B \subset \mathbb{P}^N$ – прямая, $l = N-1$ и неравенство (2.3.3) получается простым подсчетом размерностей: для фиксированной прямой B условие $p|_B \equiv 0$ на многочлен p степени $e \geqslant 1$ определяет замкнутое алгебраическое множество многочленов коразмерности $e+1$ в $\mathcal{P}_e$. Следовательно,

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}} Y^*(N-1) \geqslant \sum_{i=1}^{N} (m_i + 1) - 2(N-1) = \mu_{l+1} - l + 1,$$

поскольку $\mu_{l+1} = m_1 + \cdots + m_N$.

Предложение 2.3.1 доказано полностью.

Следствие 2.3.1. *В обозначениях предложения 2.3.1 для $l \leqslant N-2$ справедлива следующая оценка*:
$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}} Y \geqslant mN+1, \tag{2.3.5}$$
в то время как для $l = N-1$ справедлива оценка
$$\operatorname{codim}_{\mathcal{L}} Y \geqslant \min\{mN+1,\, \mu_{l+1} - l + 1\}. \tag{2.3.6}$$

Доказательство. Очевидно, $\mu_j \geqslant jm$ для каждого $j = 1, \ldots, l+1$. Поэтому
$$(\mu_{j+1} - j)(N-j) + 1 \geqslant \varepsilon(j) + mN + 1,$$
где многочлен
$$\varepsilon(t) = -(m-1)t^2 + (Nm - N - m)t$$
имеет два корня:
$$t = 0 \quad \text{и} \quad t = N - 1 - \frac{1}{m-1}\,.$$
Значит, $\varepsilon(0) = 0$ и $\varepsilon(j) \geqslant 0$ при $j = 1, \ldots, N-2$. Следовательно, можно опустить в (2.3.1) значения $j = 1, \ldots, l-1$. Если $l \leqslant N-2$, можно опустить и значение $j = l$. Следствие доказано.

2.3.3. Доказательство предложения 2.2.1. Напомним, что $\mathcal{H}$ обозначает множество упорядоченных наборов k ненулевых однородных многочленов $(f_1, \ldots, f_k)$ на $\mathbb{P}$ степеней $d_1, \ldots, d_k$ соответственно.

Прежде всего, существует открытое по Зарисскому множество $U_{\mathrm{sm}} \subset \mathcal{H}$ такое, что для $(f_1, \ldots, f_k) \in U_{\mathrm{sm}}$ полное пересечение $V(f_*)$ есть гладкое подмногообразие коразмерности k в $\mathbb{P}$. Далее, рассмотрим подмножество
$$Y = \{(o, (f_*)) \mid o \in V(f_*) - \text{нерегулярная точка}\}$$
в $\mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}}$. Мы утверждаем, что замыкание
$$\overline{\pi(Y)} \subset U_{\mathrm{sm}}$$
есть собственное замкнутое подмножество положительной коразмерности в U_{sm}. Здесь $\pi \colon \mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}} \to U_{\mathrm{sm}}$ – проекция на второй сомножитель. В самом деле, положим
$$Y(o) = Y \cap (\{o\} \times U_{\mathrm{sm}}) \subset \mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}},$$
$$I = \{(o, (f_*)) \mid o \in V(f_*)\} \subset \mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}}, \qquad I(o) = I \cap (\{o\} \times U_{\mathrm{sm}}) \subset \mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}}.$$
Отождествляя $\{o\} \times U_{\mathrm{sm}} \cong U_{\mathrm{sm}}$, можем считать, что $Y(o)$ и $I(o)$ являются подмножествами в U_{sm}.

Лемма 2.3.2. *Справедлива оценка*
$$\operatorname{codim}_{I(o)} Y(o) \geqslant M + k + 1. \tag{2.3.7}$$

Доказательство. В самом деле, система уравнений
$$q_{1,1} = \cdots = q_{1,k} = 0$$
задает касательное пространство $T_o V(f_*)$, которое имеет размерность в точности M. Проективизируя, получаем набор многочленов
$$\mathcal{Q} = \{q_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\, 2 \leqslant j \leqslant d_i,\, (i,j) \neq (k, d_k)\}$$

степени $\geqslant 2$ на $\mathbb{P}^N$, $N = M - 1$. Очевидно,

$$\sharp \mathcal{Q} = N.$$

Применяя предложение 2.3.1 к набору $\mathcal{Q}$ с фиксированными $q_{1,1}, \ldots, q_{1,k}$, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}_{I(o)} Y(o) &\geqslant \min\left\{2M-1, \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=2}^{d_i} (j-1) + \sum_{j=2}^{d_k - 1} (j-1) + 2\right\} \\ &= \min\left\{2M-1, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} d_i(d_i-1) + \frac{1}{2}(d_k-1)(d_k-2)+2\right\}. \end{aligned}$$

Обозначим последнее выражение через $\xi = \xi(d_1, \ldots, d_k)$. Поскольку $M \geqslant 2k+1$, неравенство (2.3.7) вытекает из оценки

$$\xi(d_1, \ldots, d_k) \geqslant M + k + 1.$$

Вычислим минимум функции ξ вещественных аргументов $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}_+^k$, удовлетворяющих соотношению

$$a_1 + \cdots + a_k = M + k.$$

Очевидно, минимум достигается при

$$a_1 = \cdots = a_{k-1} = s \geqslant 0, \qquad a_k = M + k - (k-1)s \geqslant 0.$$

Легко подсчитать, что

$$\begin{aligned} &\xi(s, \ldots, s, M+k-(k-1)s) \\ &\quad = \frac{1}{2}(k-1)(ks^2 - 2(M+k-1)s) + \frac{1}{2}(M+k-1)(M+k-2) + 2 = \zeta(s). \end{aligned}$$

Функция $\zeta(s)$ достигает минимума при $s_* = (M+k-1)/k$. Это значение удовлетворяет всем ограничениям. Получаем

$$\zeta(s_*) = \frac{(M+k-1)(M-1)}{2k} + 2.$$

Поскольку $M \geqslant 2k+1$, получаем

$$\zeta(s_*) \geqslant M + k + 1,$$

что нам и требуется.

Поскольку, очевидно, $\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} I(o) = k$, получаем оценку

$$\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} Y(o) \geqslant M + k + (k+1).$$

Но множество $\pi(Y)$ покрывается подмножествами $Y(o)$ для всех $o \in \mathbb{P}$, откуда получаем

$$\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} \overline{\pi(Y)} \geqslant k + 1,$$

так что $\overline{\pi(Y)}$ – собственное подмножество множества U_{sm}. В частности, открытое множество

$$U_{\mathrm{reg}} = U_{\mathrm{sm}} \setminus \overline{\pi(Y)}$$

непусто. Предложение 2.2.1 доказано.

Замечание 2.3.2. В данной главе были приведены основные элементы техники гиперкасательных дивизоров. В наиболее трудных задачах (доступных на сегодняшний день) приходится сочетать ее с дополнительными методами (например, с принципом связности Шокурова–Коллара) или применять ее не только к самому многообразию V, но и к вспомогательным многообразиям (например, к исключительному дивизору раздутия особой точки $o \in V$) (см. гл. 4). Здесь отметим лишь, что в последние десять лет предпринималось несколько попыток предложить альтернативную технику, позволяющую исключать бесконечно близкие максимальные особенности на многообразиях Фано произвольной степени (кроме того, имелись препринты, содержавшие ошибки и не дошедшие до журнальных публикаций). Однако метод гиперкасательных дивизоров по эффективности далеко превосходит конструкции этих работ. В частности, ни один из перечисленных альтернативных подходов не позволяет доказать бирациональную сверхжесткость полных пересечений Фано (и тем более не работает в относительном случае – для расслоений Фано). Это обстоятельство, по-видимому, не является случайным. Основой метода гиперкасательных дивизоров является геометрия прямых, лежащих на данном многообразии Фано, а геометрия рациональных кривых малой (антиканонической) степени имеет исключительно важное значение для бирациональной геометрии самого многообразия.

Глава 3. Итерированные двойные накрытия

Цель данной главы – доказать бирациональную сверхжесткость итерированных двойных накрытий Фано. Это большой класс многомерных многообразий Фано, реализуемых как полные пересечения во взвешенных проективных пространствах. Доказательство использует технику, развитую в двух предыдущих главах, и особенно идею построения гиперкасательных дивизоров, кратко обсуждавшуюся в п. 2.3.3.

В § 3.1 дана явная конструкция итерированных двойных накрытий, сформулирован основной результат и начато его доказательство. Обоснованию условий регулярности, обеспечивающих построение гиперкасательных дивизоров, посвящен § 3.2. В § 3.3 доказана теорема о бирациональной сверхжесткости.

§ 3.1. Построение итерированных накрытий

В данном параграфе, итерируя операцию взятия двойного накрытия с заданным дивизором ветвления, мы строим большой класс многомерных многообразий Фано индекса 1 и формулируем основной результат о бирациональной сверхжесткости (п. 3.1.1). Явная конструкция многообразий затем используется для формулировки условий регулярности и уточнения основного результата (п. 3.1.2). После этого начато доказательство теоремы о бирациональной сверхжесткости.

3.1.1. Формулировка основного результата. Символ $\mathbb{P}$ обозначает проективное пространство $\mathbb{P}^{M+k}$, где $M \geqslant 4$, $2k \leqslant M-1$. Выберем систему однородных координат на $\mathbb{P}$, скажем $(x_0 : x_1 : \cdots : x_{M+k})$. Рассмотрим набор однородных многочленов

$$f_1, \ldots, f_k,\ g_1, \ldots, g_m$$

от переменных (x_*) степеней соответственно

$$d_1, \ldots, d_k,\ 2l_1, \ldots, 2l_m,$$

где $m \geqslant 1$, $l_i \geqslant 2$ и выполнено следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i + \sum_{i=1}^{m} l_i = M + k.$$

Пусть

$$Q(f_*) = Q(f_1, \ldots, f_k) = \bigcap_{i=1}^{k} \{f_i = 0\}$$

– полное пересечение гиперповерхностей $F_i = \{f_i = 0\}$ в $\mathbb{P}$. Положим также

$$W_i = \{g_i = 0\} \subset \mathbb{P}.$$

Построим последовательность двойных накрытий

$$\sigma_i \colon \mathbb{P}^{(i)} \to \mathbb{P}^{(i-1)},$$

где $\mathbb{P}^{(0)} = \mathbb{P}$, $i = 1, \ldots, m$, следующим образом. Накрытие σ_1 разветвлено над W_1. Предположим, что $\sigma_1, \ldots, \sigma_i$ уже построены. Для произвольного $j \in \{0, \ldots, i-1\}$ положим

$$\sigma_{i,j} = \sigma_{j+1} \circ \cdots \circ \sigma_i \colon \mathbb{P}^{(i)} \to \mathbb{P}^{(j)}.$$

В частности,
$$\sigma_i = \sigma_{i,i-1}.$$
Очевидно, $\sigma_{i,j}$ – конечный морфизм степени 2^{i-j}. Теперь двойное накрытие
$$\sigma_{i+1} \colon \mathbb{P}^{(i+1)} \to \mathbb{P}^{(i)}$$
определяется дивизором ветвления
$$\widetilde{W}_{i+1} = \sigma_{i,0}^{-1}(W_{i+1}) \subset \mathbb{P}^{(i)}.$$
В итоге получаем последовательность двойных накрытий
$$\mathbb{P}^{(m)} \xrightarrow{\sigma_m} \mathbb{P}^{(m-1)} \xrightarrow{\sigma_{m-1}} \dots \xrightarrow{\sigma_1} \mathbb{P}^{(0)} = \mathbb{P}.$$
Наконец, положим
$$\sigma = \sigma_{m,0} \colon \mathbb{P}^{(m)} \to \mathbb{P}.$$
Это конечный морфизм степени 2^m.

Наборы однородных многочленов $(f_*; g_*)$ параметризуются пространством
$$\mathcal{H} = \prod_{i=1}^{k} [H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d_i)) \setminus \{0\}] \times \prod_{i=1}^{m} [H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2l_i)) \setminus \{0\}].$$
Для общего набора $(f_*; g_*) \in \mathcal{H}$ все многообразия
$$Q = Q(f_*), \qquad \mathbb{P}^{(i)}, \qquad \widetilde{W}_i, \qquad \widetilde{W}_i \cap \sigma_{i-1,0}^{-1}(Q(f_*)),$$
очевидным образом, гладкие. Положим
$$V = V(f_*; g_*) = \sigma^{-1}(Q) \subset \mathbb{P}^{(m)}.$$
Это гладкое подмногообразие коразмерности k в $\mathbb{P}^{(m)}$. Очевидно,
$$V = \bigcap_{i=1}^{k} \sigma^{-1}(F_i)$$
– гладкое полное пересечение в $\mathbb{P}^{(m)}$. Нетрудно видеть, что
$$K_V = \left[-(M+k+1) + \sum_{i=1}^{k} d_i + \sum_{i=1}^{m} l_i \right] \sigma^* H = -\sigma^* H,$$
где $H \in \operatorname{Pic} \mathbb{P}$ – класс гиперплоскости. По теореме Лефшеца получаем $\operatorname{Pic} V = \mathbb{Z}\sigma^* H$, так что V – гладкое многообразие Фано индекса 1 и размерности M.

Вот основной результат настоящей главы.

Теорема 3.1.1. *Существует непустое открытое по Зарисскому подмножество $U \subset \mathcal{H}$ такое, что для любого набора многочленов $(f_*; g_*) \in U$ многообразие $V = V(f_*; g_*)$ есть (гладкое) бирационально сверхжесткое многообразие.*

Непустое подмножество $U \subset \mathcal{H}$ определяется явными условиями регулярности, выполнение которых требуется в каждой точке многообразия V. Для формулировки условий регулярности удобно пользоваться представлением итерированных двойных накрытий в виде полных пересечений во взвешенных проективных пространствах. Точнее, пусть $\mathbb{P}^\sharp$ – взвешенное проективное пространство

$$\mathbb{P}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{M+k+1}, l_1, \ldots, l_m),$$

где весам $l_i \geqslant 2$ соответствуют новые однородные координаты y_i, $i = 1, \ldots, m$. Многообразие $\mathbb{P}^{(m)}$ может быть реализовано как полное пересечение типа $2l_1 \cdots 2l_m$ в $\mathbb{P}^\sharp$:

$$\mathbb{P}^{(m)} = \bigcap_{i=1}^{m} \{y_i^2 = g_i\} \subset \mathbb{P}^\sharp.$$

Аналогичным образом, многообразие $V \subset \mathbb{P}^{(m)} \subset \mathbb{P}^\sharp$ есть полное пересечение типа

$$d_1 \cdots d_k \cdot 2l_1 \cdots 2l_m.$$

Пусть $p \in Q$ – произвольная точка, $(z_1, \ldots, z_{M+k})$ – система аффинных координат с началом в точке p. Пусть

$$f_i = g_{i,1} + \cdots + g_{i,d_i},$$
$$g_i = w_{i,0} + w_{i,1} + \cdots + w_{i,2l_i}$$

– разложения Тейлора (неоднородных) многочленов f_i, g_i в координатах z_*. Здесь

$$\deg q_{i,j} = j, \qquad \deg w_{i,j} = j.$$

Если $w_{i,0} \neq 0$, т.е. $p \notin W_i$, то для удобства вычислений всегда предполагаем, что $w_{i,0} = 1$.

Определение 3.1.1. Точка $p \in Q$ *имеет класс* $e \in \{0, 1, \ldots, m\}$, если

$$e = \sharp\{i \mid p \in W_i\}.$$

Множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(p) = \{i \mid p \in W_i\}$ будем записывать как

$$\{i_1 < \cdots < i_e\}.$$

Зададим удобную систему координат в точке $p \in Q$ класса e. Для простоты считаем, что $z_i = x_i/x_0$, $i = 1, \ldots, M+k$. Положим

$$u_i = \frac{y_i}{x_0^{l_i}} \qquad \text{при} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Множество регулярных функций (z_*, u_*) есть система аффинных координат на открытом аффинном подмножестве $U \subset \mathbb{P}^\sharp$, $U \cong \mathbb{C}^{M+k+m}$. Относительно этих координат многообразие V задается системой уравнений

$$\begin{cases} f_i(1, z_1, \ldots, z_{M+k}) = 0, & i = 1, \ldots, k, \\ u_i^2 = g_i(1, z_1, \ldots, z_{M+k}), & i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

С настоящего момента будем отождествлять однородные многочлены f_i, g_i и их неоднородные представления вида $f(1, z_*)$.

Если точка $p \in Q$ имеет класс 0, то для всех $i = 1, \ldots, m$ имеем $g_i(p) \neq 0$, т.е. $w_{i,0} = 1$. В этом случае для любой точки $q \in \sigma^{-1}(p)$ линейные отображения

$$\sigma_*\colon T_q\mathbb{P}^{(m)} \to T_p\mathbb{P},$$
$$\sigma_*\colon T_qV \to T_pQ$$

суть изоморфизмы, так что σ-прообраз любой системы локальных координат на $\mathbb{P}$ и Q образует систему локальных координат на $\mathbb{P}^{(m)}$ (например, $(z_1, \ldots, z_{M+k})$) и V соответственно.

Если точка $p \in Q$ имеет класс $e \geqslant 1$, то считаем, что $\mathcal{L}(p) = \{1, \ldots, e\}$. В этом случае естественная система локальных координат на $\mathbb{P}^{(m)}$ дается набором функций

$$(z_{j_1}, \ldots, z_{j_{M+k-e}}, u_1, \ldots, u_e),$$

где $z_{j_1}, \ldots, z_{j_{M+k-e}}$ образуют систему локальных координат на полном пересечении

$$W_1 \cap \cdots \cap W_e \subset \mathbb{P}.$$

Лемма 3.1.1. *При $i \in \{1, \ldots, e\}$ прообраз гиперплоскости $\{w_{i,1} = 0\}$ касается многообразия V в точке $q \in \sigma^{-1}(p)$. В частности, имеет место следующий изоморфизм:*

$$T_q V \cong T_p(Q \cap W_1 \cap \cdots \cap W_e) \oplus \langle u_1, \ldots, u_e \rangle^*.$$

Относительно этого изоморфизма касательный конус к пересечению $V \cap \{w_{i,1} = 0\}$ задается квадратичным уравнением

$$u_i^2 = w_{i,2}|_{T_p(Q \cap W_1 \cap \cdots \cap W_e)}.$$

Доказательство очевидно в силу системы уравнений (3.1.1).

3.1.2. Условия регулярности. Пусть $g(z_*) = 1 + w_1 + \cdots + w_{2l}$ – некоторый многочлен. Рассуждая, как в п. 2.3.3, рассмотрим формальный ряд

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i t^i = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \cdots$$

и построим следующий формальный ряд от переменных z_*:

$$\sqrt{g} = (1 + w_1 + \cdots + w_{2l})^{1/2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i (w_1 + \cdots + w_{2l})^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(w_1, \ldots, w_{2l}),$$

где $\Phi_i(w_1(z_*), \ldots, w_{2l}(z_*))$ – однородные многочлены степени i от переменных z_*. Очевидно,

$$\Phi_i(w_*) = \frac{1}{2}\, w_i + (\text{многочлен от } w_1, \ldots, w_{i-1}).$$

Например, $\Phi_1(w_*) = \frac{1}{2} w_1$. Далее, для $j \geqslant 1$ положим

$$[\sqrt{g}]_j = 1 + \sum_{i=1}^{j} \Phi_i(w_*(z_*))$$

и

$$g^{(j)} = g - [\sqrt{g}]_j^2.$$

Легко видеть, что первая ненулевая однородная компонента многочлена $g^{(j)}$ имеет степень $j+1$. Обозначим ее через $h_{j+1}[g]$. Очевидно,

$$h_{j+1}[g] = w_{j+1} + A_j(w_1, \ldots, w_j), \tag{3.1.2}$$

где конкретный вид многочлена A_j нас не интересует.

Сформулируем теперь условие регулярности. Положим $h_{i,j} = h_j[g_i]$.

Определение 3.1.2. (i) Точка $p \in Q$ класса $e = 0$ регулярна относительно набора $(f_*; g_*)$, если множество однородных многочленов

$$\{q_{i,j} \mid (i,j) \in \mathcal{J}_q\} \cup \{h_{i,j} \mid (i,j) \in \mathcal{J}_h\}, \tag{3.1.3}$$

где

$$\mathcal{J}_q = \{(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant d_i\},$$
$$\mathcal{J}_h = \{(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ l_i + 1 \leqslant j \leqslant 2l_i,\ (i,j) \neq (m, 2l_m)\},$$

регулярно в точке $p = o = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{M+k}$, т.е. образует регулярную последовательность в кольце $\mathcal{O}_{p,\mathbb{P}}$, или, иными словами, множество общих нулей набора (3.1.3) одномерно.

(ii) Точка $p \in Q$ класса $e \geqslant 1$ регулярна относительно набора многочленов $(f_*; g_*)$, если множество однородных многочленов

$$\{q_{i,j} \mid (i,j) \in \mathcal{J}_q\} \cup \{w_{i,1} \mid 1 \leqslant i \leqslant e\} \cup \{h_{i,j} \mid (i,j) \in \mathcal{J}_e\} \tag{3.1.4}$$

образует регулярную последовательность в кольце $\mathcal{O}_{p,\mathbb{P}}$. Здесь для упрощения обозначений считаем, что

$$\mathcal{L}(p) = \{1, \ldots, e\},$$

множество $\mathcal{J}_q$ было определено выше и

$$\mathcal{J}_e = \{(i,j) \mid e + 1 \leqslant i \leqslant m,\ l_i + 1 \leqslant j \leqslant 2l_i\}.$$

Теорема 3.1.2. *Существует непустое открытое по Зарисскому множество $U^* \subset \mathcal{H}$ такое, что для любого набора $(f_*; g_*) \in U^*$ любая точка $p \in Q(f_*)$ регулярна.*

Доказательство теоремы отложим до § 3.2.

Теперь можно уточнить наш основной результат.

Теорема 3.1.3. *Для любого набора $(f_*; g_*) \in U^*$ соответствующее итерированное двойное накрытие $V(f_*, g_*)$ бирационально сверхжесткое.*

Иными словами, в обозначениях теоремы 3.1.1 можно взять $U = U^*$. Для простоты обозначений будем везде писать просто U.

3.1.3. План доказательства теоремы 3.1.3. В силу теоремы Лефшеца для гладкого итерированного двойного накрытия V имеем равенство

$$A^2 V = \mathbb{Z} K_V^2,$$

а потому подвижная линейная система $\Sigma \subset |-nK_V|$ не может иметь максимальных подмногообразий коразмерности 2. Следовательно, бирациональная сверхжесткость многообразия V вытекает из оценки

$$\frac{\mathrm{mult}_o}{\deg} Y \leqslant \frac{4}{\deg V} = \frac{4}{2^m d_1 \cdots d_k}, \tag{3.1.5}$$

которая должна быть справедлива для любого неприводимого подмногообразия Y коразмерности 2 и любой точки $o \in V$. Эту оценку мы и докажем в § 3.3. В отличие от построений § 2.1, мы будем пользоваться техникой гиперкасательных дивизоров в чистом виде, не переходя к гиперкасательным линейным системам. Пересекая Y с подходящими гиперкасательными дивизорами (операцию образования пересечения нужно обосновывать, т.е. пересекаемое подмногообразие не должно целиком содержаться в соответствующем гиперкасательном дивизоре), построим кривую, имеющую очень высокую кратность в точке o и, тем самым, получим требуемую оценку (3.1.5) для исходной кратности.

Отличие итерированных двойных накрытий от полных пересечений, рассмотренных в § 2.2, состоит в том, что процедура построения гиперкасательных дивизоров, связанных с точкой o, существенно зависит от того, лежит ли эта точка на дивизорах ветвления двойных накрытий. Необходимость учитывать это обстоятельство делает конструкцию несколько более громоздкой, однако она успешно доводится до конца. Этому и посвящен § 3.3.

§ 3.2. Регулярные итерированные накрытия

В данном параграфе доказана теорема 3.1.2. Основной инструмент доказательства – метод оценки коразмерности "неправильных" наборов многочленов, развитый в § 2.3. Одна из трудностей, связанных именно с итерированными двойными накрытиями, состоит в том, что необходимо оценить коразмерность множества наборов многочленов, которые по построению зависят друг от друга, что не позволяет применить непосредственно метод из § 2.3. Эта трудность преодолевается в п. 3.2.1, где показано, как свести задачу к оценке коразмерности наборов независимых многочленов. После этого теорема 3.1.2 доказывается соответственно для точек класса $e \geqslant 2$ (п. 3.2.2), $e = 1$ (п. 3.2.3) и $e = 0$ (п. 3.2.4).

3.2.1. Начало доказательства. Взаимозависимость многочленов h_{ij}. Пусть $U_{\mathrm{sm}} \subset \mathcal{H}$ – непустое открытое по Зарисскому подмножество, состоящее из всех таких наборов $(f_*; g_*)$, что:

(i) $Q = Q(f_*) \subset \mathbb{P}$ – гладкое полное пересечение;

(ii) все дивизоры $W_i|_Q$ гладкие и дивизор

$$(W_1 + \cdots + W_m)|_Q$$

имеет нормальные пересечения; в частности, точки класса $e \geqslant 1$ образуют гладкое квазипроективное многообразие коразмерности e (его замыкание – множество точек класса $\geqslant e$) и само многообразие $V = V(f_*; g_*)$ неособо.

Пусть $e \in \{0, \ldots, m\}$ фиксировано. Рассмотрим замкнутое подмножество

$$Y_e = \{(x, (f_*; g_*)) \in \mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}} \mid x \in Q(f_*) \text{ нерегулярна класса } e\}.$$

Пусть $\pi \colon \mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}} \to U_{\mathrm{sm}}$ – проекция на второй сомножитель. Теперь теорема 3.1.2 вытекает из следующего факта.

Предложение 3.2.1. *Замыкание*

$$\overline{\pi(Y_e)} \subset U_{\mathrm{sm}}$$

есть собственное замкнутое подмножество для любого $e \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Доказательство. Покажем, что замыкание $\overline{\pi(Y_e)}$ имеет положительную коразмерность в U_{sm}. Положим

$$Y_e(x) = Y_e \cap (\{x\} \times U_{\mathrm{sm}}) \subset \mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}},$$
$$I = \{(x, (f_*)) \mid x \in Q(f_*)\} \subset \mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}},$$
$$I_e = \{(x, (f_*)) \mid x \in Q(f_*) \text{ – точка класса } e\} \subset \mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}},$$
$$I_e(x) = I_e \cap (\{x\} \times U_{\mathrm{sm}}) \subset \mathbb{P} \times U_{\mathrm{sm}}.$$

Отождествляя $\{x\} \times U_{\mathrm{sm}} \cong U_{\mathrm{sm}}$, считаем $Y_e(x)$ и $I_e(x)$ подмножествами в U_{sm}.

В неоднородном представлении относительно системы аффинных координат $(z_1, \ldots, z_{M+k})$ набор $(f_*; g_*)$ можно отождествить с набором однородных многочленов $q_{i,j}$, $w_{i,j}$. Среди многочленов (3.1.3), (3.1.4), фигурирующих в условии регулярности, имеется в точности $k + e$ линейных форм: это

$$q_{1,1}, \ldots, q_{k,1}, \ w_{1,1}, \ldots, w_{e,1}.$$

Поскольку $(f_*; g_*) \in U_{\mathrm{sm}}$, эти линейные формы линейно независимы. Положим

$$P = P(f_*; g_*) = \{v \in \mathbb{C}^{M+k} \mid q_{1,1} = \dots = w_{e,1} = 0\}, \qquad P \cong \mathbb{C}^{M-e}.$$

Если точка x нерегулярна, то множество общих нулей остальных многочленов в наборе (3.1.3) или (3.1.4) имеет “неправильную” коразмерность. Легко подсчитать, что в списке (3.1.3) или (3.1.4) имеется не более чем $M - e - 1$ многочленов степени $\geqslant 2$. Применим к ним следствие 2.3.1.

Как мы отметили выше, имеется трудность: многочлены $h_{i,j}$ формально зависят друг от друга, так что, вообще говоря, мы не имеем права применить следствие 2.3.1. Однако явный вид многочленов $h_{i,j}$ (3.1.2) позволяет обойти это препятствие. В самом деле, предположим, что многочлены

$$w_{i,1}, \dots, w_{i,l_i}$$

фиксированы при $i \geqslant 1$.

Построим по индукции последовательность однородных многочленов

$$\xi_{i,l_i+0}, \dots, \xi_{i,2l_i},$$

полагая

$$\begin{aligned} \xi_{i,l_i+1} &= -A_{l_i}(w_{i,1}, \dots, w_{i,l_i}), \\ \xi_{i,j+1} &= -A_j(w_{i,1}, \dots, w_{i,l_i}, \xi_{i,l_i+1}, \dots, \xi_{i,j}), \qquad j = l_i + 1, \dots, 2l_i - 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что многочлены $\xi_{i,j}$ зависят только от $w_{i,1}, \dots, w_{i,l_i}$ и потому также фиксированы.

Лемма 3.2.1. *Для любого замкнутого подмножества $T \subset P$ следующие два условия эквивалентны*:

(i) *все многочлены $h_{i,j}$ обращаются в нуль на T, $j = l_i + 1, \dots, a \leqslant 2l_i$;*

(ii) *все многочлены $w_{i,j} - \xi_{i,j}$ обращаются в нуль на T, $j = l_i + 2, \dots, a \leqslant 2l_i$.*

Доказательство. В самом деле,

$$h_{i,l_i+1} \equiv w_{i,l_i+1} - \xi_{i,l_i+1},$$

так что для $a = l_i + 1$ утверждение леммы очевидно. Теперь будем рассуждать индукцией по $a \geqslant l_i + 2$. Если лемма выполнена для $a \leqslant c \leqslant 2l_i - 1$ и одно из условий (i), (ii) справедливо при $a = c + 1$, то в любом случае

$$(w_{i,j} - \xi_{i,j})|_T \equiv 0$$

при $j = l_i + 1, \dots, c$. Следовательно,

$$w_{i,j}|_T \equiv \xi_{i,j}|_T$$

при $j = l_i + 0, \dots, c$, так что условия

$$[w_{i,c+1} + A_c(l_{i,1}, \dots, w_{i,l_i}, w_{i,l_i+5}, \dots, w_{i,c})]|_T \equiv 0$$

и

$$[w_{i,c+0} + A_c(w_{i,1}, \dots, w_{i,l_i}, w_{i,l_i+1}, \dots, w_{i,c})]|_T \equiv 0,$$

где

$$A_c(w_{i,1}, \dots, w_{i,l_i}, w_{i,l_i+1}, \dots, w_{i,c}) = -\xi_{i,c+1},$$

эквивалентны. Лемма доказана.

Таким образом, для любого фиксированного набора многочленов $w_{i,1}, \ldots, w_{i,l_i}$ многочлены $h_{i,j}$ в условии регулярности можно заменить на $w_{i,j} - \xi_{i,j}$. Однако многочлены $w_{i,j}$, $j = l_i + 1, \ldots, 2l_i$, произвольны и потому многочлены $w_{i,j} - \xi_{i,j}$ также произвольны: по сути мы просто сдвигаем начало координат в пространстве однородных многочленов степени j от переменных z_*. Поэтому, оценивая коразмерность $\operatorname{codim}_{I(x)} Y(x)$, происходящую из того, что не выполнено условие регулярности, можем применять следствие 2.3.1 так, как если бы все многочлены $q_{i,j}$, $h_{i,j}$ были независимыми друг от друга однородными многочленами. Оценим, наконец, эту коразмерность.

3.2.2. Оценка коразмерности. Случай $e \geqslant 2$. Положим

$$Y_1(x) = Y^+(x) \cup Y^\sharp(x),$$

где $(f_*; g_*) \in Y^+(x)$ тогда и только тогда, когда $l_1 \geqslant 3$, а $(f_*; g_*) \in Y^\sharp(x)$ тогда и только тогда, когда $l_1 = 2$.

Очевидно,

$$\pi(Y_e) = \bigcup_{x \in \mathbb{P}} Y_e(x). \tag{3.2.1}$$

Достаточно показать, что

$$\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} \pi(Y_e) \geqslant 1. \tag{3.2.2}$$

Согласно (3.2.1) эта оценка немедленно вытекает из неравенства

$$\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} Y_e(x) \geqslant M + k + 1,$$

которое мы и будем доказывать. Рассмотрим по очереди все возможные случаи, начиная со случая $e \geqslant 2$.

Здесь в силу определения 3.1.2, (ii) имеем

$$\sum_{i=1}^{k} (d_i - 1) + \sum_{i=e+3}^{m} l_i = M - \sum_{i=1}^{e} l_i \leqslant M - e - 2$$

однородных многочленов степени $\geqslant 2$ на $P \cong \mathbb{C}^{M-e}$. В силу следствия 2.3.1

$$\operatorname{codim}_{I_e(x)} Y_e(x) \geqslant 2M - 2e - 1.$$

Поскольку, очевидным образом,

$$\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} I_e(x) = k + e,$$

получаем окончательно оценку

$$\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} Y_e(x) \geqslant 2M + k - e - 1.$$

Беря объединение по всем $x \in \mathbb{P}$, получаем

$$\overline{\bigcup_{x \in \mathbb{P}} Y_e(x)} = \overline{Y_e}$$

и

$$\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} \overline{Y_e} \geqslant M - e - 0.$$

Поскольку $e < M/2$, неравенство (3.2.2) доказано, так что $\overline{Y_e} \subset U_{\mathrm{sm}}$ – собственное замкнутое подмножество.

3.2.3. Оценка коразмерности в случае $e = 1$. В $+$-подслучае рассуждаем, как выше при $e \geqslant 2$. Рассмотрим $\sharp$-подслучай. Тут мы имеем в точности $M-2$ многочленов на $\mathbb{C}^{M-1}$, так что

$$\operatorname{codim}_{I(x)} Y^{\sharp}(x) \geqslant \min(2M-3, \beta), \tag{3.2.3}$$

где

$$\beta = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=2}^{d_i}(j-1) + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=l_i+1}^{2l_i}(j-1) + 2 = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k} d_i(d_i-1) + \sum_{i=2}^{m} l_i(3l_i-1)\right] + 2.$$

Если минимум в (3.2.3) достигается на $2M-3$, то рассуждаем, как выше в $+$-случае. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда минимум достигается на β. Оценим β как функцию неотрицательных вещественных переменных d_i, l_i, подчиняющихся ограничениям

$$\sum_{i=1}^{k} d_i + \sum_{i=2}^{m} l_i = M+k-2, \qquad d_i \geqslant 2, \quad l_i \geqslant 2.$$

Лемма 3.2.2. *Справедлива следующая оценка*:

$$\beta \geqslant M.$$

Прежде всего завершим рассмотрение $\sharp$-случая, предполагая утверждение леммы доказанным. Имеем

$$\operatorname{codim}_{I_1(x)} Y^{\sharp}(x) \geqslant M, \qquad \operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} I_1(x) = k+1,$$

так что

$$\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} Y^{\sharp}(x) \geqslant M+k+1,$$

и, беря объединение по всем точкам $x \in \mathbb{P}$, получаем

$$\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}} \overline{Y^{\sharp}} \geqslant 1,$$

что и требуется.

Доказательство леммы 3.2.2. Для удобства вычислений начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 3.2.3. (i) *При $s_i \geqslant 2$, $\sum_{i=1}^{c} s_i = B \geqslant 2c$, где $c \in \mathbb{Z}_+$ – фиксированное положительное число, выполнено следующее неравенство*:

$$\sum_{i=1}^{c} s_i(3s_i-1) \geqslant 5B.$$

(ii) *При $s_i \geqslant 2$, $\sum_{i=1}^{k} s_i = A \geqslant 2k$, где $k \in \mathbb{Z}_+$ – фиксированное положительное число, выполнено следующее неравенство*:

$$\sum_{i=1}^{k} s_i(s_i-1) \geqslant A\left(\frac{A}{k}-1\right).$$

Доказательство проводится элементарными вычислениями. Легко видеть, что в обоих случаях минимум достигается при $s_1 = \cdots = s_c$ (или $= s_k$).

Полагая

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = A, \qquad \sum_{i=2}^{m} l_i = B,$$

получаем в силу леммы 3.2.3 оценку

$$\beta \geqslant \frac{1}{2}\left(A\left(\frac{A}{k}-1\right)+5B\right)+2.$$

Теперь, чтобы доказать лемму 3.2.2, достаточно проверить, что неравенство

$$\varepsilon(A,B)=A\left(\frac{A}{k}-1\right)+5B+4\geqslant 2M$$

справедливо при ограничениях

$$1\leqslant k\leqslant\frac{M-1}{2},\qquad A\geqslant 2k,\quad B\geqslant 0,\quad A+B=M+k-2.$$

Заменяя B на $M+k-2-A$, рассмотрим функцию вещественной переменной $A\in\mathbb{R}_+$

$$\zeta(A)=A\left(\frac{A}{k}-6\right).$$

Ее минимум на отрезке $I=[2k,M+k-2]$ достигается либо при $A=3k$ (если $2k\leqslant M-2$), либо при $A=M+k-2$ (если $2k=M-1$). В первом случае получаем

$$\varepsilon(A,B)\geqslant 2A+5B+6=2(M+k-2)+3B+6\geqslant 2M+4.$$

Во втором случае $B=0$ и элементарные вычисления дают

$$\varepsilon(A,B)\geqslant (M+k-2)\frac{2k-1}{k}+6\geqslant 2M.$$

Это завершает доказательство леммы 3.2.2.

3.2.4. Оценка коразмерности в случае $e=0$. Здесь, чтобы доказать неравенство (3.2.2), достаточно показать, что

$$\beta=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k}d_i(d_i-1)+\sum_{i=1}^{m-1}l_i(3l_i-1)+l_m(3l_m-5)\right]+2\geqslant M+1, \tag{3.2.4}$$

поскольку если это так, то выполнено неравенство

$$\operatorname{codim}_{U_{\mathrm{sm}}}Y_0(x)\geqslant M+k+1,$$

и, рассуждая, как выше, видим, что $\overline{Y_0}\subset U_{\mathrm{sm}}$ – собственное замкнутое подмножество.

Рассмотрим β как функцию неотрицательных вещественных переменных d_i, l_i и положим

$$\sum_{i=1}^{k}d_i=A,\qquad \sum_{i=1}^{m-1}l_i=B.$$

Предполагая A,B фиксированными, по лемме 3.2.3 получаем оценку

$$\beta\geqslant\frac{1}{2}(A\left(\frac{A}{k}-1\right)+5B+l_m(3l_m-5))+2.$$

Поэтому чтобы доказать неравенство (3.2.4), достаточно проверить справедливость неравенства

$$A\left(\frac{A}{k}-1\right)+5B+l_m(3l_m-5)+2\geqslant 2M. \tag{3.2.5}$$

Прежде всего избавимся от l_m. Поскольку

$$A + B + l_m = M + k, \qquad l_m \geqslant 2,$$

считаем A и $B + l_m$ фиксированными. Поскольку производная

$$[-5t + t(3t - 5)]' = 6t - 10$$

положительна при $t \geqslant 2$, минимум левой части неравенства (3.2.5) достигается при $l_m = 2$. Поэтому достаточно доказать неравенство

$$A\left(\frac{A}{k} - 1\right) + 5B + 4 \geqslant 2M$$

для $A + B = M + k - 2$ при стандартных ограничениях на A, B и k. Но это уже было сделано при рассмотрении $\sharp$-случая.

Доказательство теоремы 3.1.2 закончено. Таким образом, для общего набора $(f_*; g_*) \in \mathcal{H}$ каждая точка $x \in Q(f_*)$ регулярна.

§ 3.3. Гиперкасательные дивизоры

В данном параграфе доказана теорема 3.1.3. В п. 3.3.1 напоминается техника гиперкасательных дивизоров. В п. 3.3.2 мы явно строим гиперкасательные дивизоры и изучаем их свойства. В п. 3.3.3 доказано ключевое неравенство (3.1.5).

3.3.1. Общий формализм гиперкасательных дивизоров. Пусть X – гладкое проективное многообразие, $H \in \operatorname{Pic} X$ – обильный класс. Для неприводимого подмногообразия $Y \subset X$ его H-степенью (или просто степенью, когда понятно, о каком классе идет речь) называется целое число

$$\deg_H Y = (Y \cdot H^{\dim Y}).$$

По линейности H-степень определяется для любого цикла (который предполагается равноразмерным).

Через

$$\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg_H} Y$$

обозначим отношение $(\operatorname{mult}_x Y)/\deg_H Y$, где $x \in X$ – некоторая точка. Положим

$$\lambda_e(x) = \sup_{\substack{T \subset X \\ \operatorname{codim}_X T = e}} \left\{\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg_H} T\right\},$$

где верхняя грань берется по всем неприводимым подмногообразиям коразмерности $e \geqslant 1$.

Предположим, что на X существует такой набор эффективных дивизоров

$$D_i \in |a_i H|, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

что теоретико-множественное пересечение

$$D_1 \cap \cdots \cap D_N$$

имеет коразмерность $N \leqslant \dim X$ в окрестности точки x. Положим

$$\mu_i = \operatorname{mult}_x D_i \geqslant 1.$$

Пусть $T \subset X$ – неприводимое подмногообразие коразмерности $e \geqslant 1$, где $N \geqslant e + 1$ и $T \ni x$.

Лемма 3.3.1. *Существуют подмножество* $\mathcal{L} \subset \{1, \ldots, N\}$ *мощности* $N - e$ (*после перенумерации можно считать для упрощения обозначений, что* $\mathcal{L} = \{1, \ldots, N - e\}$) *и последовательность неприводимых подмногообразий* T_i, $i = 0, 1, \ldots, N - e$, *такие, что*:

(i) $\operatorname{codim} T_i = e + i$;

(ii) $T_0 = T$, $T_i \not\subset D_i$ *и* T_{i+1} – *неприводимая компонента эффективного цикла* $T_i \cap D_i$;

(iii) $T_i \ni x$ *и выполнено неравенство*

$$\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg_H} T_i \geqslant \frac{\mu_i}{a_i} \cdot \frac{\operatorname{mult}_x}{\deg_H} T_{i-1} \tag{3.3.1}$$

для всех $i = 1, \ldots, N - e$.

Доказательство. Существование $\mathcal{L}$ и набора подмногообразий T_i докажем индукцией по $i \in \{0, 1, \ldots, N - e\}$. При $i = 0$ доказывать нечего.

Лемма 3.3.2. *Существует такой дивизор* D_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, *что* $T \not\subset D_i$.

Доказательство. Предположим противное: $T \subset D_i$ для всех $i = 1, \ldots, N$. Тогда

$$T \subset D_1 \cap \cdots \cap D_N,$$

так что

$$\operatorname{codim}_x(D_1 \cap \cdots \cap D_N) \leqslant \operatorname{codim} T = e \leqslant N - 1$$

вопреки нашему предположению о наборе $D_1, \ldots, D_N$. Лемма доказана.

Чтобы упростить обозначения, считаем, что $T \not\subset D_1$. Очевидно,

$$\operatorname{mult}_x(T \circ D_1) \geqslant \operatorname{mult}_x T \cdot \operatorname{mult}_x D_1,$$
$$\deg_H(T \circ D_1) = a_1 \deg_H T.$$

Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg_H}(T \circ D_1) \geqslant \frac{\mu_1}{a_1} \cdot \frac{\operatorname{mult}_x}{\deg_H} T.$$

Неравенство

$$\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg_H} Y \geqslant \gamma, \tag{3.3.2}$$

естественно, не является линейным по Y. Однако оно эквивалентно линейному неравенству

$$\operatorname{mult}_x Y \geqslant \gamma \deg_H Y.$$

Поэтому если (3.3.2) справедливо для эффективного цикла Y, то существует такая компонента Y^+ этого цикла, т.е. такое неприводимое подмногообразие в X, что

$$\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg_H} Y^+ \geqslant \gamma$$

(поскольку H-степень неприводимого подмногообразия всегда строго положительна). Итак, получаем, что существует такая неприводимая компонента T_1 эффективного цикла $(T \circ D_1)$, т.е. такое неприводимое подмногообразие коразмерности $e + 1$, что

$$\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg_H} T_1 \geqslant \frac{\mu_1}{a_1} \cdot \frac{\operatorname{mult}_x}{\deg_H} T,$$

что нам и нужно при $i = 1$.

Предположим, что подмножество $\{1, \ldots, j\}$, $j \leqslant N - e - 1$, и последовательность неприводимых подмногообразий $T_1, \ldots, T_j$ удовлетворяют условиям (i)–(iii).

Лемма 3.3.3. *Существует такой дивизор* D_i, $j+1 \leqslant i \leqslant N$, *что* $T_j \not\subset D_i$.

Доказательство. Предположим противное: $T_j \subset D_i$ для всех $i = j+1, \ldots, N$. Тогда

$$T_j \subset D_{j+1} \cap \cdots \cap D_N.$$

Учитывая, что по построению

$$T_j \subset D_1 \cap \cdots \cap D_j,$$

получаем

$$T_j \subset D_1 \cap \cdots \cap D_N.$$

Однако $x \in T_j$ и коразмерность подмногообразия T_j есть

$$e + j \leqslant N - 1,$$

что снова (как в доказательстве леммы 3.3.2) дает противоречие с нашими предположениями о наборе $D_1, \ldots, D_N$.

После перенумерации можно предполагать, что $T_j \not\subset D_{j+1}$. Теперь рассуждаем, как выше:

$$\frac{\mathrm{mult}_x}{\deg_H}(T_j \circ D_{j+1}) \geqslant \frac{\mu_{j+1}}{a_{j+1}} \cdot \frac{\mathrm{mult}_x}{\deg_H} T_j$$

и потому найдется неприводимая компонента T_{j+1} эффективного цикла $(T_j \circ D_{j+1})$, удовлетворяющая неравенству (3.3.1). Доказательство леммы завершено.

Следствие 3.3.1. *Справедливо следующее неравенство*:

$$\lambda_e(x) \cdot \min_{\substack{\mathcal{L} \subset \{1,\ldots,N\} \\ \sharp\mathcal{L} = N-e}} \left(\prod_{i \in \mathcal{L}} \frac{\mu_i}{a_i} \right) \leqslant \lambda_N(x). \tag{3.3.3}$$

Доказательство. В принятых выше обозначениях

$$\lambda_N(x) \geqslant \frac{\mathrm{mult}_x}{\deg_H} T_N \geqslant \left(\prod_{i \in \mathcal{L}} \frac{\mu_i}{a_i} \right) \frac{\mathrm{mult}_x}{\deg_H} T.$$

Здесь $\mathcal{L} \subset \{1, \ldots, N\}$ – подмножество мощности $N - e$, которое, вообще говоря, зависит от T. Тем более

$$\lambda_N(x) \geqslant \min_{\substack{\mathcal{L} \subset \{1,\ldots,N\} \\ \sharp\mathcal{L} = N-e}} \left(\prod_{i \in \mathcal{L}} \frac{\mu_i}{a_i} \right) \cdot \frac{\mathrm{mult}_x}{\deg_H} T.$$

Первый сомножитель в правой части не зависит от T. Поскольку многообразие $T \subset X$ абсолютно произвольное, получаем неравенство (3.3.3). Следствие доказано.

Следствие 3.3.2. *Предположим, что линейная система* $|H|$ *свободна и задает (конечный) морфизм* $\varphi_{|H|} \colon X \to \mathbb{P}^k$. *Тогда справедлива следующая оценка*:

$$\lambda_e(x) \leqslant \left(\min_{\substack{\mathcal{L} \subset \{1,\ldots,N\} \\ \sharp\mathcal{L} = N-e}} \left(\prod_{i \in \mathcal{L}} \frac{\mu_i}{a_i} \right) \right)^{-1}. \tag{3.3.4}$$

Доказательство. Для любого неприводимого подмногообразия $T \subset X$ коразмерности $e \geqslant 1$ существуют такие дивизоры $D_i \in |H|$, $i = 1, \ldots, \dim T$, что:

- $D_i \ni x$, в частности $\mathrm{mult}_x D_i \geqslant 1$;

- пересечение
$$T^\sharp = T \cap D_1 \cap \dots \cap D_{\dim T}$$
нульмерно.

Очевидно,
$$\deg T^\sharp = \deg T$$
и
$$\operatorname{mult}_x T^\sharp \geqslant \operatorname{mult}_x T \cdot \prod_{i=1}^{\dim T} \operatorname{mult}_x D_i \geqslant \operatorname{mult}_x T.$$
Однако $T^\sharp$ – нульмерная схема, так что
$$\deg T^\sharp \geqslant \operatorname{mult}_x T^\sharp.$$
Из этого неравенства видим, что $\lambda_e(x) \leqslant 1$ для всех x и e. Теперь, применяя предыдущее следствие, завершаем доказательство.

3.3.2. Построение и свойства гиперкасательных дивизоров. Чтобы реализовать метод, описанный в п. 3.3.1, для итерированных двойных накрытий, прежде всего зафиксируем некоторые обозначения. Как и выше, имеем систему аффинных координат $(z_1, \dots, z_{M+k})$ с началом в точке $p \in Q$. Для $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant d_i - 1$ положим
$$f_{i,j} = q_{i,1} + \dots + q_{i,j}, \qquad D^{\mathbb{P}}_{i,j} = \overline{\{f_{i,j} = 0\}}$$
(замыкание берется в $\mathbb{P}$),
$$D^Q_{i,j} = D^{\mathbb{P}}_{i,j}|_Q, \qquad D^f_{i,j} = \sigma^{-1}(D^Q_{i,j}).$$
Предположим, что точка $p \in Q$ имеет класс $e \geqslant 0$, и, более того, если $e \geqslant 1$, то $p \in W_1 \cap \dots \cap W_e$. Положим
$$D^+_i = \overline{\{w_{i,1} = 0\}}|_Q, \quad D_i = \sigma^{-1}(D^+_i), \qquad i \in \{1, \dots, e\}.$$
Наконец, для точки $x \in V$ такой, что $\sigma(x) = p$, определим относительно системы координат u_i, $i \geqslant e+1$ (см. п. 3.2.1), следующие дивизоры:
$$D^g_{i,j} = \overline{\{u_i - [\sqrt{g_i}]_j = 0\}}|_V, \quad D^+_{i,j} = \sigma(D_{i,j}), \qquad j = l_i, \dots, 2l_i - 1.$$
Легко видеть, что
$$D^?_{i,j} \in |jH|, \qquad D_i \in |H|$$
для любых i, j, перечисленных выше, где $? \in \{f, g\}$.

Лемма 3.3.4. (i) *Для любых i, j справедливо следующее неравенство*:
$$\operatorname{mult}_x D_{i,j} \geqslant j + 1. \tag{3.3.5}$$
(ii) *Для любых $i \in \{1, \dots, e\}$, где $e \geqslant 1$, справедливо следующее неравенство*:
$$\operatorname{mult}_x D_i \geqslant 2.$$

Доказательство. (i) Прежде всего, возьмем $1 \leqslant i \leqslant k$. Очевидно,
$$f_{i,j}|_Q = (-q_{i,j+1} - \dots - q_{i,d_i})|_Q,$$

поскольку $f_i|_Q \equiv 0$, откуда следует оценка (3.3.5). Теперь предположим, что $i \geqslant e+1$. По определению класса точки $g_i(p) \neq 0$. В открытом аффинном подмножестве $U \subset \mathbb{P}^\sharp$, $U \cong \mathbb{C}^{M+k+m}$ с координатами (z_*, u_*) получаем

$$[u_i^2 - g_i(1, z_1, \ldots, z_{M+k})]|_V \equiv 0.$$

Поскольку, очевидным образом,

$$(y_i + [\sqrt{g_i}]_j)(x) \neq 0,$$

получаем, что локально дивизор $D_{i,j}$ задается уравнением

$$g_i^{(j)}|_V = 0.$$

Как мы видели выше, первая ненулевая однородная компонента в $g_i^{(j)}$ есть $h_{j+1}[g_i]$; она имеет степень $j+1$.

Это завершает доказательство части (i) леммы.

(ii) Предположим, что $e \geqslant 1$. Гиперплоскость $\{w_{i,1} = 0\}$ касается гиперповерхности W_i в точке p. Значит, дивизор D_i имеет особенность в точке x. Именно это нам и нужно. Доказательство леммы закончено.

Чтобы применить технику из п. 3.3.1, недостаточно знать только кратности гиперкасательных дивизоров в точке x. Необходима более точная информация о касательных конусах к этим дивизорам. Положим

$$E = T_p(Q \cap W_1 \cap \cdots \cap W_e), \qquad U = \langle u_1, \ldots, u_e \rangle^*.$$

Как мы видели выше (лемма 3.2.1), имеет место следующий изоморфизм:

$$T_q V \cong E \oplus U. \tag{3.3.6}$$

Подпространство $E \subset T_p\mathbb{P} = \mathbb{C}^{M+k}_{(z_*)}$ задается системой линейных уравнений

$$q_{1,1} = \cdots = q_{k,1} = w_{1,1} = \cdots = w_{e,1} = 0.$$

Локальные вычисления, проделанные в процессе доказательства предыдущей леммы, показывают, что относительно изоморфизма (3.3.6) касательные конусы к гиперкасательным дивизорам даются следующими уравнениями:

- к дивизорам $D^f_{i,j}$ –
$$q_{i,j+1}|_E = 0 \tag{3.3.7}$$
при $1 \leqslant i \leqslant k$;
- к дивизорам $D^g_{i,j}$ –
$$h_{j+1}[g_i]|_E = 0 \tag{3.3.8}$$
при $i \geqslant e+1$;
- к дивизорам D_i –
$$u_i^2 = w_{i,2}|_E \tag{3.3.9}$$
при $1 \leqslant i \leqslant e$, если $e \geqslant 1$.

В самом деле, уравнения (3.3.7) получены выше. Уравнения (3.3.8) и (3.3.9) вытекают из локальных вычислений, проделанных выше, если учесть, что любая линейная форма $L(z_*)$, обращающаяся на E в нуль, определяет элемент в квадрате максимального идеала $\mathcal{M}_{x,V}$ точки x в локальном кольце $\mathcal{O}_{x,V}$:

$$\sigma^*(L(z_*)|_Q) \in \mathcal{M}^2_{x,V}.$$

Поэтому если пара однородных многочленов $P^+(z_*)$, $P^-(z_*)$ степени $a \geqslant 1$ совпадает на E, т.е. $(P^+ - P^-)|_E \equiv 0$, то

$$\sigma^*(P^+(z_*)|_Q) \equiv \sigma^*(P^-(z_*)|_Q) \pmod{\mathcal{M}_{x,V}^{a+1}}.$$

Отсюда немедленно получаются уравнения (3.3.8) и (3.3.9).

Лемма 3.3.5. *Множество $\mathcal{D} = \{D_{i,j}^f, D_i, D_{i,j}^g\}$ всех гиперкасательных дивизоров удовлетворяет условию регулярности*

$$\operatorname{codim}_x \bigcap_{D \in \mathcal{D}} D = \sharp\mathcal{D}.$$

Доказательство. Достаточно подсчитать коразмерность

$$\operatorname{codim}_{T_xV} \bigcap_{D \in \mathcal{D}} T_xD. \tag{3.3.10}$$

Поскольку

$$T_xV = U \oplus E$$

и координаты u_i входят только в уравнения (3.3.9) – каждая в свое, – коразмерность (3.3.10) равна

$$\operatorname{codim}_E\{q_{i,j+1}|_E = 0,\ h_{j+1}[g_i] = 0\}, \tag{3.3.11}$$

где индексы i, j пробегают множества

$$\{1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant d_i - 1\}$$

и

$$\{e+1 \leqslant i \leqslant m,\ l_i + 1 \leqslant j \leqslant 2l_i\}$$

соответственно. Добавляя уравнения гиперплоскости E, видим, что коразмерность (3.3.11) есть в точности коразмерность множества, определяемого всеми многочленами, входящими в условие регулярности (3.1.3) или (3.1.4) относительно $\mathbb{C}^{M+k}$. Утверждение леммы 3.3.5 немедленно следует из этого факта. Доказательство закончено.

3.3.3. Доказательство бирациональной сверхжесткости. Предположим, что точка $p = \sigma(x)$ имеет класс $e = 0$.

Лемма 3.3.6. *Теоретико-множественное пересечение*

$$T = D_{1,1} \cap \cdots \cap D_{k,1} \subset V$$

имеет коразмерность k, совпадает с теоретико-схемным пересечением

$$T = (D_{1,1} \circ \cdots \circ D_{k,1})$$

и удовлетворяет равенствам

$$\deg T = \deg V, \qquad \operatorname{mult}_x T = 2^k.$$

Доказательство. Покажем индукцией по $i = 1, \ldots, k$, что теоретико-множественное пересечение

$$T_i = \bigcap_{j=1}^{i} D_{j,1} \subset V$$

имеет коразмерность i, совпадает с теоретико-схемным пересечением:

$$T_i = (D_{1,1} \circ \cdots \circ D_{i,1}),$$

и удовлетворяет равенствам

$$\deg T_i = \deg V, \qquad \operatorname{mult}_x T_i = 2^i.$$

В самом деле, при $i = 1$ это верно очевидным образом: касательный конус

$$T_x D_{1,1} \subset T_x V \cong T_p Q$$

задается квадратичным уравнением

$$q_{1,2}|_{\{q_{1,1}=\cdots=q_{k,1}=0\}} = 0,$$

которое нетривиально в силу условия регулярности. Чтобы перейти от i к $i+1$, воспользуемся теоремой Лефшеца: в силу условия регулярности множество общих нулей системы уравнений

$$q_{1,1} = \cdots = q_{k,1} = q_{1,2} = \cdots = q_{i,2} = q_{i+1,2} = 0 \qquad (3.3.12)$$

имеет коразмерность точно $i+1$ в $T_x V$. Значит,

$$T_x T_i \not\subset T_x D_{i+1,1}$$

и потому

$$T_i \not\subset D_{i+1,1}.$$

Но $T_i \subset V$ – неприводимое подмногообразие коразмерности i. Поэтому теоретико-схемное пересечение

$$T^+_{i+1} = (T_i \circ D_{i+1,1})$$

– эффективный цикл коразмерности $i+1$. Однако

$$\deg T_i = \deg T^+_{i+1} = \deg V$$

и $i+1 < \dim V/2$, так что по теореме Лефшеца получаем, что $T^+_{i+1} = T_{i+1}$ – неприводимое подмногообразие, класс которого порождает $A^{i+1}V$. Наконец, система уравнений (3.3.12) задает в точности касательный конус $T_x T_{i+1}$ (как эффективный алгебраический цикл, т.е. с учетом кратностей компонент). Отсюда получаем

$$\operatorname{mult}_x T_{i+1} = 2^{i+1},$$

что и требовалось.

Определение 3.3.1. Неприводимое подмногообразие $x \in Y \subset V$ коразмерности 2 назовем *правильным в точке* x (где $p = \sigma(x)$ – точка класса 0), если существует неприводимое подмногообразие $R \subset Y$ коразмерности

$$\operatorname{codim}_V R = k+1,$$

удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\operatorname{mult}_x}{\deg} R \geqslant 2^{k-1} \cdot \frac{\operatorname{mult}_x}{\deg} Y. \qquad (3.3.13)$$

Лемма 3.3.7. *Если подмногообразие $Y \ni x$ не является правильным в точке x, то справедливо следующее неравенство*:

$$\frac{\mathrm{mult}_x}{\deg} Y \leqslant \frac{4}{\deg V}.$$

Доказательство. Применим лемму 3.3.1 к неприводимому подмногообразию Y и множеству гиперплоских сечений $\{D_{i,1}\}$. Получим, что существует такое неприводимое подмногообразие $R^\sharp \subset Y$ коразмерности k (относительно V), что

$$\frac{\mathrm{mult}_x}{\deg} R^\sharp \geqslant 2^{k-2} \cdot \frac{\mathrm{mult}_x}{\deg} Y.$$

Теперь возможны два случая. Если

$$R^\sharp \neq T = D_{1,1} \cap \dots \cap D_{k,1},$$

то найдется гиперплоское сечение $D_{a,1}$, $1 \leqslant a \leqslant k$, не содержащее $R^\sharp$. Значит,

$$\mathrm{codim}_V (R^\sharp \cap D_{a,1}) = k+1,$$

так что $(R^\sharp \circ D_{a,1})$ – эффективный цикл коразмерности $k+1$, удовлетворяющий неравенству

$$\frac{\mathrm{mult}_x}{\deg} (R^\sharp \circ D_{a,1}) \geqslant 2^{k-1} \cdot \frac{\mathrm{mult}_x}{\deg} Y.$$

Следовательно, найдется неприводимая компонента R эффективного цикла $(R^\sharp \circ D_{a,1})$, удовлетворяющая неравенству (3.3.13). Значит, Y – правильное подмногообразие, что противоречит нашему предположению.

Поэтому

$$R^\sharp = T = D_{1,1} \cap \dots \cap D_{k,1}.$$

Следовательно, по лемме 3.3.6 получаем неравенство

$$\frac{\mathrm{mult}_x}{\deg} Y \leqslant 2^{2-k} \cdot \frac{\mathrm{mult}_x}{\deg} T = \frac{4}{\deg V},$$

как и утверждалось. Лемма доказана.

Докажем, наконец, неравенство (3.1.5) для точки $x \in V$, образ которой $p = \sigma(x) \in \mathbb{P}$ имеет класс 0. Для этого применим конструкцию леммы 3.3.1 к произвольному подмногообразию $R \subset V$ коразмерности $k+1$, $R \ni x$, и к набору из $M-1$ дивизоров, который получается объединением f-набора

$$\{D^f_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant d_i - 1\}$$

и g-набора

$$\big\{D^g_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ l_i \leqslant j \leqslant 2l_i - 1,\ (i,j) \neq (m, 2l_m - 1)\big\}.$$

Поскольку линейная система $|H|$ по построению свободна (и определяет в точности накрытие $\varphi_{|H|} = \sigma \colon V \to \mathbb{P}$), согласно следствию 3.3.2 (неравенство (3.3.4)) имеем

$$\lambda_{k+1}(x) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=2}^{d_i-1} \frac{j+1}{j}\right)^{-1} \cdot \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=l_i}^{2l_i-1} \frac{j+1}{j}\right)^{-1} \cdot \frac{2l_m}{2l_m-1} \cdot \frac{a+1}{a}, \tag{3.3.14}$$

где

$$a = \begin{cases} 2, & \text{если } \max_i\{d_i\} \geqslant 3, \\ \min_i\{l_i\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В самом деле, взять минимум в неравенстве (3.3.4) означает в обозначениях следствия 3.3.2 удалить из произведения

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{\mu_i}{a_i}$$

в точности e наибольших сомножителей. В нашем случае эти сомножители суть k двоек (соответствующих касательным гиперплоским сечениям $D^f_{i,1}$) и следующий сомножитель $(a+1)/a$. Сомножитель $2l_m/(2l_m-1)$ появляется в (3.3.14) просто потому, что дивизор $D^g_{m,2l_m-1}$ отсутствует в нашем наборе. Произведя в (3.3.14) очевидные сокращения, получаем

$$\lambda_{k+1}(x) \leqslant \frac{2^k}{\deg V} \cdot \frac{2l_m}{2l_m-1} \cdot \frac{3}{2},$$

поскольку в любом случае $a \geqslant 2$. Наконец, для правильного подмногообразия Y имеем

$$\frac{\mathrm{mult}_x}{\deg} Y \leqslant 2^{1-k} \cdot \frac{\mathrm{mult}_x}{\deg} R \leqslant \frac{4}{\deg V} \cdot \frac{3l_m}{4l_m-2} \leqslant \frac{4}{\deg V},$$

что и требуется. Доказательство ключевого неравенства (3.1.5) для точки $x \in V$, образ которой $p = \sigma(x) \in Q$ имеет класс 0, закончено.

Теперь предположим, что образ точки $x \in V$ – точка $p = \sigma(x) \in Q$ – имеет класс $e \geqslant 1$, т.е.

$$p = \sigma(x) \in Q \cap W_1 \cap \cdots \cap W_e.$$

В силу условия регулярности теоретико-множественное пересечение

$$\Big(\bigcap_{i,j} D^f_{i,j}\Big) \cap \Big(\bigcap_{i} D_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i,j} D^g_{i,j}\Big)$$

имеет в окрестности точки x правильную коразмерность

$$\sum_{i=1}^{k}(d_i-1) + e + \sum_{i=e+1}^{m} l_i \geqslant 1$$

(коразмерность берется относительно V). Теперь применим следствие 3.3.2 и получим оценку сверху для $\lambda_2(x)$. Учитывая, что

$$\min_{\substack{\mathcal{L}\subset\{1,\ldots,N\}\\ \sharp\mathcal{L}=N-c}} \prod_{i\in\mathcal{L}} \beta_i \times \max_{\substack{\mathcal{L}\subset\{1,\ldots,N\}\\ \sharp\mathcal{L}=c}} \prod_{i\in\mathcal{L}} \beta_i = \prod_{i=1}^{N} \beta_i,$$

получаем

$$\lambda_2(x) \leqslant \left(\prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{d_i-1} \frac{j+1}{j}\right)^{-1} \cdot 2^{-e} \cdot \left(\prod_{i=e+1}^{m} \prod_{j=l_i}^{2l_i-1} \frac{j+1}{j}\right)^{-1} \cdot 4 = \frac{4}{\deg V},$$

что и требовалось. Доказательство ключевого неравенства (3.1.5) (и, тем самым, теоремы 3.1.3) завершено.

Глава 4. Особые гиперповерхности Фано

В данной главе доказана бирациональная (сверх)жесткость общих гиперповерхностей Фано индекса 1 с изолированными особенностями. В § 4.1 сформулирован основной результат, выводящий бирациональную (сверх)жесткость из локальных условий регулярности для особых и неособых точек и начато его доказательство; в частности, рассмотрена процедура откручивания максимальных точек кратности $M-2$ на гиперповерхности степени M. В § 4.2 доказана теорема о бирациональной (сверх)жесткости путем исключения бесконечно близкой максимальной особенности, лежащей над особой точкой гиперповерхности. Эта работа требует некоторой модификации техники подсчета кратностей, развитой в § 1.2. В § 4.3 доказано, что общие особые гиперповерхности Фано удовлетворяют необходимым условиям регулярности.

§ 4.1. Теорема о бирациональной жесткости

В данном параграфе сформулирован основной результат главы – теорема о бирациональной (сверх)жесткости общих гиперповерхностей Фано индекса 1 размерности 4 и выше с изолированными особенностями – и приведена часть его доказательства. В п. 4.1.1 сформулированы условия регулярности и теорема о бирациональной (сверх)жесткости. В п. 4.1.2 начато доказательство теоремы: показано, что достаточно исключить максимальные особенности подвижной линейной системы, центр которых – особая точка гиперповерхности. Затем доказано, что при $\mu \leqslant M-3$ особая точка не может быть максимальной особенностью, а при $\mu = M-2$ эта максимальная особенность может быть откручена бирациональным автоморфизмом. В п. 4.1.3 сформулирован ключевой технический факт и исключены квадратичные особенности (случай $\mu = 2$).

4.1.1. Условия регулярности. Пусть $W = W_m \subset \mathbb{P}^N$ – гиперповерхность степени $m \leqslant N$ в N-мерном комплексном проективном пространстве. Для точки $x \in W$ выберем систему аффинных координат $(z_1, \ldots, z_N)$ на $\mathbb{C}^N \subset \mathbb{P}^N$ с центром в x и запишем уравнение гиперповерхности W в виде

$$f = q_1 + q_2 + \cdots + q_m,$$

где $q_i(z_*)$ – однородные многочлены степени i.

Определение 4.1.1. Гиперповерхность W *регулярна* в гладкой точке $x \in W$, если последовательность

$$q_1, \ldots, q_k, \qquad k = \min\{m, N-1\},$$

регулярна в $\mathcal{O}_{x,\mathbb{P}^N}$, т.е. система уравнений

$$q_1 = \cdots = q_k = 0$$

задает в $\mathbb{P}^N$ алгебраическое подмножество коразмерности k.

Подсчет размерностей, аналогичный рассуждениям § 2.1, показывает, что общая (в смысле топологии Зарисского на $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m))$) гиперповерхность W регулярна в каждой своей точке.

Пусть $V = V_M \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ – гиперповерхность степени M, имеющая самое большее изолированные особые точки,

$$f = q_1 + q_2 + \cdots + q_M$$

– ее уравнение относительно системы аффинных координат $(z_1, \ldots, z_M)$ с центром в точке $x \in V$. Пусть

$$\mu = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid q_k \not\equiv 0\} = \mathrm{mult}_x V$$

– кратность V в точке x. Предположим, что $M - 2 \geqslant \mu \geqslant 2$, т.е.

$$x \in \mathrm{Sing}\, V.$$

Определение 4.1.2. Гиперповерхность V *регулярна* в точке x, если выполнены следующие условия:

(i) последовательность $q_\mu, \ldots, q_M$ регулярна в $\mathcal{O}_{x,\mathbb{P}}$;

(ii) гиперповерхность

$$T_x V = \{q_\mu = 0\} \subset \mathbb{T} = \mathbb{P}(T_x\mathbb{P}) \cong \mathbb{P}^{M-1}$$

неособа и регулярна в каждой своей точке $y \in T_x V$;

(iii) при $\mu = 3, 4$ и $M \geqslant 7$ для любой точки $y \in T_x V$ ни одна из неприводимых компонент замкнутого множества

$$\{q_\mu = q_{\mu+1} = \cdots = q_6 = 0\} \cap T_y(T_x V) \subset \mathbb{T} \tag{4.1.1}$$

не содержится в квадратичной гиперповерхности

$$T_y(T_y(T_x V) \cap T_x V) \subset \mathbb{T}; \tag{4.1.2}$$

при $\mu = 3$, $M = 6$ достаточно условия (4.1.1) с q_5 вместо q_6.

Условие (iii) нуждается в комментариях, тем более, что мы несколько злоупотребляем обозначениями: через $T_y(T_x V)$ мы обозначаем гиперплоскость в $\mathbb{T}$, касательную к $T_x V$ в точке y. В силу регулярности гиперповерхности $T_x V$ пересечение

$$T_y(T_x V) \cap T_x V$$

есть гиперповерхность в гиперплоскости $T_y(T_x V)$, имеющая изолированную особую точку кратности 2. Замкнутое множество (4.1.1) имеет размерность $\geqslant 1$, так что мы требуем, чтобы ни одна из его компонент не содержалась в квадрике (4.1.2). Это условие можно сформулировать и по-другому: пересечение цикла

$$T_x V \cap T_y(T_y(T_x V) \cap T_x V)$$

с полным пересечением

$$\{q_{\mu+1} = \cdots = q_6 = 0\}$$

имеет коразмерность точно $9 - \mu$ в $\mathbb{T}$.

Предложение 4.1.1. *Пусть $\mathcal{V}_\mu(x) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_\mathbb{P}(M)))$ – пространство гиперповерхностей степени $M \geqslant 5$, имеющих в фиксированной точке $x \in \mathbb{P}$ особенность кратности μ, $2 \leqslant \mu \leqslant M - 2$. Тогда общая (по Зарисскому) гиперповерхность $V \in \mathcal{V}_\mu(x)$ регулярна в каждой своей точке.*

Очевидно, для общей $V \in \mathcal{V}_\mu(x)$ имеем

$$\mathrm{Sing}\, V = \{x\}.$$

Отметим следующий вопрос: для каких наборов целых чисел

$$(\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \{2, \ldots, M - 2\}^k$$

существует регулярная в каждой точке гиперповерхность V, имеющая k точек $x_1,\dots,x_k$ кратностей $\mu_1,\dots,\mu_k$ соответственно? Для

$$\mu_1=\dots=\mu_k=2 \qquad \text{при} \quad k\leqslant M+1$$

ответ утвердителен. Точнее, пусть точки $p_0,\dots,p_M\in\mathbb{P}$ линейно независимы и

$$\mathcal{X}(p_0,\dots,p_M)\subset H^0(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M))\setminus\{0\}$$

– множество однородных многочленов f степени M, обращающихся в нуль в этих $M+1$ точках вместе со всеми первыми частными производными $\partial f/\partial x_i$. Для общего многочлена $f\in\mathcal{X}(p_*)$ имеем

$$\operatorname{Sing}V(f)=\{p_0,\dots,p_M\}.$$

Предложение 4.1.2. *Для общего многочлена $f\in\mathcal{X}(p_*)$ соответствующая гиперповерхность $V(f)$ регулярна.*

Доказательство обоих предложений дано в § 4.3.

Сформулируем теперь основной результат данной главы.

Теорема 4.1.1. *Пусть гиперповерхность V регулярна в каждой точке.*

(i) *Если для любой точки $x\in V$ имеет место оценка*

$$\operatorname{mult}_x V\leqslant M-3,$$

то V – бирационально сверхжесткое многообразие.

(ii) *Если $x\in V$ – (единственная) точка кратности $M-2$, то проекция из этой точки*

$$\pi\colon V \dashrightarrow \mathbb{P}^{M-1}$$

имеет степень 2 и существует бирациональная инволюция (инволюция Галуа) $\tau\in\operatorname{Bir}V$, переставляющая точки в слоях π. Многообразие V бирационально жесткое и имеет место точная последовательность

$$1\to\operatorname{Aut}V\to\operatorname{Bir}V\to\langle\tau\rangle=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to 1.$$

Для общей V имеем $\operatorname{Aut}V=\{1\}$, так что

$$\operatorname{Bir}V=\langle\tau\rangle\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

4.1.2. Начало доказательства. Рассмотрим подвижную линейную систему $\Sigma\subset|nH|$, где H – класс гиперплоского сечения гиперповерхности V. Предположим, что Σ обладает максимальной особенностью $E^+\subset V^+$, где $\varphi\colon V^+\to V$ – бирациональный морфизм, а многообразие V^+ неособо.

Предложение 4.1.3. *Центр $B=\varphi(E^+)$ особенности E^+ на V есть особая точка $B=p\in V$ гиперповерхности V.*

Доказательство. Если $\dim B\geqslant 2$, то возьмем кривую $C\subset B$, не содержащую особых точек гиперповерхности V. Согласно § 1.1 справедливо неравенство $\operatorname{mult}_C\Sigma\leqslant n$, так что тем более $\operatorname{mult}_B\Sigma\leqslant n$, и подмногообразие B не может быть центром максимальной особенности. Значит, B – кривая или точка.

Если $B\ni p$, где p – неособая точка гиперповерхности V, то справедливо $4n^2$-неравенство

$$\operatorname{mult}_p Z>4n^2,$$

где $Z=(D_1\circ D_2)$ – самопересечение системы Σ. Однако рассуждения § 2.1 немедленно дают противоречие. Следовательно, $B=p$ – особая точка гиперповерхности V. Предложение доказано.

Пусть $\varphi\colon V_0 \to V$ – раздутие особой точки p с исключительным дивизором $E = E_0 = \varphi_0^{-1}(p)$. Имеем

$$\operatorname{Pic} V_0 = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}E,$$

так что для собственного прообраза линейной системы Σ на V_0 получим

$$\Sigma^0 \subset |nH - \nu_0 E|.$$

Напомним, что $E \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – регулярная гиперповерхность степени $\mu \geqslant 2$.

Предложение 4.1.4. (i) *При $\mu \leqslant M-3$ дивизор E не может быть максимальной особенностью.*

(ii) *При $\mu = M-2$ бирациональная инволюция $\tau \in \operatorname{Bir} V$ задается линейной системой*

$$|(M-1)H - ME|$$

на V_0. Если точка p максимальна для системы Σ, т.е. $\nu_0 > n$, то

$$\frac{\nu_0}{n} \leqslant \frac{M}{M-1}$$

и $\tau_*\Sigma$ – подвижная линейная система на V, для которой точка p не максимальна.

Доказательство. (i) Предположим противное: точка p максимальна для Σ. Тогда

$$\nu_0 > (M-\mu-1)n \geqslant 2n.$$

Пусть $D_1, D_2 \in \Sigma$ – общие дивизоры. Для эффективного цикла $Z = (D_1 \circ D_2)$ на V коразмерности 2 имеем оценку

$$\operatorname{mult}_p Z \geqslant (M-\mu-1)^2 n^2 \mu > Mn^2 = \deg Z$$

(поскольку $(M-\mu-1)^2\mu > M$), что невозможно. Противоречие доказывает часть (i).

(ii) Рассмотрим τ как элемент группы $\operatorname{Bir} V_0 \cong \operatorname{Bir} V$. Легко видеть, что вне инвариантного замкнутого подмножества коразмерности 2 инволюция τ бирегулярна на V_0 и действует на $\operatorname{Pic} V_0$ следующим образом:

$$\tau^* H = (M-1)H - ME,$$
$$\tau^* E = \mu H - (\mu+1)E.$$

Если Σ имеет точку p максимальной особенностью, т.е. $\nu_0 > n$, то

$$\tau^*|nH - \nu_0 E| \subset |(n(M-1) - \nu_0\mu)H - (nM - \nu_0(\mu+1))E|,$$

где $\mu = M-2$. Очевидно,

$$nM - \nu_0(\mu+1) \leqslant n(M-1) - \nu_0\mu,$$

так что точка p уже не максимальна для системы $\tau^*\Sigma$.

Пусть $T = T_pV \cap V$: это неприводимый дивизор на V. Очевидно,

$$T \sim (M-2)H - (M-1)E.$$

Если система Σ подвижна, то для общего дивизора $D \in \Sigma$ цикл $Z = (T \circ D)$ эффективен, так что получаем

$$\nu_0(M-1)(M-2) = \nu_0 \operatorname{mult}_p T \leqslant \operatorname{mult}_p Z \leqslant \deg Z = M(M-2)n,$$

откуда

$$\frac{\nu_0}{n} \leqslant \frac{M}{M-1},$$

как и утверждалось.

Предложение 4.1.4 доказано полностью.

Следуя общей логике метода максимальных особенностей, теперь нужно исключить бесконечно близкую особенность E^+ с центром в точке p в предположении, что сама точка p не является максимальной точкой линейной системы Σ, т.е. выполнено неравенство

$$\nu_0 \leqslant (M-\mu-1)n.$$

Допустим, что существует максимальная особенность $E^+ \subset V^+$ с центром $B=p$, и приведем это предположение к противоречию. Этим теорема 4.1.1 будет полностью доказана.

Рассмотрим сначала случай $\mu = M-2$. Поскольку пара

$$\left(V_0, \frac{1}{n}\,\Sigma^0\right)$$

не канонична и, более того, имеет не каноническую особенность E^+ (в силу того, что точка p не является максимальной), можно применить обращение присоединения и заключить, что пара

$$\left(E, \frac{1}{n}\,\Sigma^0_E\right)$$

не лог-канонична. Теперь предложенное в [53] рассуждение показывает, что это невозможно. В самом деле, $E \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – регулярная гиперповерхность степени $\mu = M-2$. Пусть $L \in \operatorname{Pic} E$ – класс гиперплоского сечения. Очевидно,

$$\Sigma^0_E \subset |\nu_0 L|,$$

где по предположению $\nu_0 \leqslant n$. Как было показано в § 1.2, для любой кривой $C \subset E$ имеет место оценка

$$\operatorname{mult}_C \Sigma^0_E \leqslant \nu_0 \leqslant n,$$

так что если $\gamma \in \mathcal{N}(E)$ удовлетворяет лог-неравенству Нётера–Фано

$$\gamma(\Sigma^0_E) > n \cdot \operatorname{discrepancy}(\gamma) + n,$$

то $\operatorname{centre}(\gamma) \subset E$ есть точка. Пусть $D \in \Sigma^0_E$ – некоторый дивизор,

$$\pi\colon E \to \mathbb{P}^{M-2}$$

– общая проекция из точки. Очевидно, $F = \pi(D)$ есть дивизор степени

$$\nu_0(M-2)$$

в $\mathbb{P}^{M-2}$. Более того, точка $y = \pi(\operatorname{centre}(\gamma)) \in \mathbb{P}^{M-2}$ есть центр не лог-канонической особенности пары

$$\left(\mathbb{P}^{M-2}, \frac{1}{n}\,F\right), \tag{4.1.3}$$

и в малой окрестности точки y центры всех не лог-канонических особенностей этой пары суть точка y. Покажем, что этого не может быть.

Заменим прежде всего n^{-1} на чуть меньшее рациональное число $s \in \mathbb{Q}$, $s \approx n^{-1}$, такое, что лог-пара

$$(\mathbb{P}^{M-2}, sF)$$

обладает теми же свойствами, что и (4.1.3). Пусть

$$\rho\colon Y \to \mathbb{P}^{M-2}$$

– разрешение особенностей F и $T \subset \mathbb{P}^{M-2}$ – общая гиперплоскость, $T \not\ni y$. Запишем

$$K_Y = \rho^*(K_{\mathbb{P}^{M-2}} + sF + T) + (-1)\widetilde{T} + \sum_{i \in I} e_i E_i - s\widetilde{F},$$

где $\widetilde{T}$, $\widetilde{F}$ – собственные прообразы T, F на Y, $E_i \subset Y$ – исключительные дивизоры. Очевидно, $\mathbb{Q}$-дивизор $-(K_{\mathbb{P}^{M-2}} + sF + T)$ численно эффективный и объемный. Следовательно, согласно [18; п. 17.4] дивизор

$$\widetilde{T} + \sum_{e_i \leqslant -1} E_i$$

связен. Однако этого не может быть, ибо по доказанному выше точка y является связной компонентой замкнутого алгебраического множества

$$\bigcup_{e_i \leqslant -1} \rho(E_i),$$

а по предположению $y \notin T$. Это противоречие завершает доказательство теоремы 4.1.1 в случае $\mu = M - 2$.

4.1.3. Разрешение максимальной особенности. Исключение квадратичных точек. Пусть

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i,i-1}\colon V_i & \longrightarrow & V_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, K, \\ \bigcup & & \bigcup \\ E_i & \longrightarrow & B_{i-1} \end{array}$$

– разрешение особенности E^+ (см. § 1.2). Здесь первые L раздутий соответствуют циклам B_{i-1} коразмерности $\geqslant 3$ (нижняя часть), а последующие $K - L$ раздутий соответствуют циклам B_{i-1} коразмерности 2 (верхняя часть; возможно, $K = L$ и верхняя часть пуста). Пусть $p_i = p_{Ki}$ – число путей из E_K в E_i, $i = 0, \ldots, K$, в ориентированном графе Γ разрешения особенности E^+. Положим

$$\delta_i = \operatorname{codim} B_{i-1} - 1, \quad i = 1, \ldots, K, \qquad \delta_0 = M - \mu - 1.$$

Для неприводимого подмногообразия $Y \subset V$ коразмерности 2 положим

$$m(Y) = \operatorname{mult}_p Y, \qquad m_i(Y) = \operatorname{mult}_{B_{i-1}} Y^{i-1}, \quad i = 1, \ldots, L,$$

где верхний индекс j означает взятие собственного прообраза данного подмногообразия на V_j. Технической основой доказательства является

Теорема 4.1.2. *В сделанных выше предположениях существует неприводимое подмногообразие $Y \subset V$ коразмерности 2, для которого выполнена оценка*

$$\frac{2}{\mu} p_0 m(Y) + \sum_{i=1}^{L} p_i m_i(Y) > \frac{\left(\sum_{i=0}^{K} p_i \delta_i\right)^2}{(1/2)p_0 + \sum_{i=1}^{K} p_i} \frac{\deg Y}{M}. \tag{4.1.4}$$

Доказательство дано в § 4.2.

Замечание 4.1.1. Как будет показано в гл. 5, коэффициенты p_i можно подправить таким образом, что выполнена оценка

$$p_0 \leqslant \sum_{i=1}^{L} p_i, \tag{4.1.5}$$

если только $L \geqslant 1$. Для этого достаточно убрать в графе Γ стрелки, соединяющие E_i, $i \geqslant L+1$, с $E = E_0$, если таковые имеются (иначе нечего доказывать). Неравенство Нётера–Фано при этом только усилится, а доказательство теоремы 4.1.2 сохраняет свою силу. В дальнейшем, если $L \geqslant 1$, будем предполагать, что неравенство (4.1.5) выполнено без специальных оговорок.

Зафиксируем неприводимое подмногообразие $Y \subset V$ коразмерности 2, удовлетворяющее оценке (4.1.4). Наша цель – получить противоречие. Этим предположение о существовании максимальной особенности E^+ с центром в точке p будет опровергнуто и бирациональная жесткость многообразия V доказана.

В качестве первого приложения теоремы 4.1.2 исключим возможность $\mu = 2$. Полагая

$$m_0 = m(Y), \qquad m_i = m_i(Y)$$

и используя стандартные обозначения

$$\Sigma_l = \sum_{i=1}^{L} p_i, \qquad \Sigma_u = \sum_{i=L+1}^{K} p_i,$$

получаем оценку

$$p_0 m_0 + \sum_{i=1}^{L} p_i m_i > \frac{((M-3)p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{(1/2)p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u} \cdot \frac{\deg Y}{M}\,.$$

Учитывая, что $m_0 \geqslant m_i$ для $i = 1, \ldots, L$, имеем

$$\frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y > \frac{\alpha}{M}\,,$$

где

$$\alpha = \frac{((M-3)p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{(p_0 + \Sigma_l)(\frac{1}{2}p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u)}\,.$$

Лемма 4.1.1. *Имеет место неравенство $\alpha > 4$.*

Доказательство. Неравенство $\alpha > 4$ эквивалентно оценке

$$\begin{aligned}(M-3)^2 p_0^2 + 4(M-3)p_0\Sigma_l + 2(M-3)p_0\Sigma_u + 4\Sigma_l^2 + 4\Sigma_l\Sigma_u + \Sigma_u^2 \\ > 2p_0^2 + 6p_0\Sigma_l + 4p_0\Sigma_u + 4\Sigma_l^2 + 4\Sigma_l\Sigma_u,\end{aligned}$$

которая выполнена очевидным образом. Лемма доказана.

Следовательно, неприводимое подмногообразие $Y \subset V$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y > \frac{4}{M}\,.$$

Теперь противоречие достигается дословно теми же рассуждениями, что были использованы при доказательстве предложения 2.1.1, (i). Этим случай $\mu = 2$ исключен.

Начиная с этого момента предполагаем, что $\mu \geqslant 3$.

§ 4.2. Бесконечно близкие особенности

В данном параграфе исключена максимальная особенность, лежащая над особой точкой $p \in V$. Основным инструментом доказательства является теорема 4.1.2, доказанная в п. 4.2.3 с помощью слегка модифицированной техники подсчета кратностей, аналогичной (но не тождественной) технике § 2.2. Максимальная особенность исключается с помощью техники гиперкасательных линейных систем в пп. 4.2.1 и 4.2.3: предполагая существование неприводимого подмногообразия $Y \subset V$, удовлетворяющего неравенству (4.1.4), мы получаем противоречие.

4.2.1. Гиперкасательные линейные системы. Покажем, прежде всего, что нижняя часть разрешения максимальной особенности непуста.

Предложение 4.2.1. *Имеет место неравенство*

$$L \geqslant 1.$$

Доказательство. Допустим, что $L = 0$. Оценка (4.1.4) превращается в неравенство

$$m(Y) > \frac{\mu}{2} \frac{((M-\mu-1)p_0 + \Sigma_u)^2}{p_0((1/2)p_0 + \Sigma_u)} \frac{\deg Y}{M}.$$

Здесь для удобства обозначено

$$\Sigma_u = \sum_{i=L+1}^{K} p_i = \sum_{i=1}^{K} p_i.$$

В силу определения чисел p_i имеем очевидную оценку

$$p_0 \leqslant \Sigma_u.$$

Нетрудно проверить, что при любых s, t верно неравенство

$$\frac{(2s+t)^2}{2s(s/2+t)} \geqslant 3,$$

откуда получаем оценку

$$\operatorname{mult}_p Y > \frac{3\mu}{M} \deg Y.$$

Пусть

$$f_i = q_\mu + \dots + q_i, \qquad \mu \leqslant i \leqslant M,$$

обозначает левый отрезок уравнения гиперповерхности V.

Определение 4.2.1. Линейная система

$$\Lambda_i = \left| \sum_{j=\mu}^{i} f_j s_{i-j} \right|_V,$$

где $s_k(z_*)$ есть произвольный однородный многочлен степени k от z_*, называется *i-й гиперкасательной линейной системой* в точке p.

Очевидно, для любого дивизора $D \in \Lambda_i$ имеем

$$\frac{\operatorname{mult}_p}{\deg} D \geqslant \frac{i+1}{i} \frac{\mu}{M}. \tag{4.2.1}$$

В силу условия регулярности

$$\operatorname{codim}_V \operatorname{Bs} \Lambda_i = i - \mu + 1 \qquad \text{для всех} \quad i = \mu, \dots, M-1. \tag{4.2.2}$$

Теперь пусть $D_\mu, D_{\mu+1}, \dots, D_{M-1}$ – общие дивизоры гиперкасательных систем $\Lambda_\mu, \dots, \Lambda_{M-1}$ соответственно. Легко видеть, что в силу (4.2.2) теоретико-множественное пересечение

$$Y \cap D_{\mu+2} \cap D_{\mu+3} \cap \dots \cap D_{M-1}$$

имеет в V коразмерность точно $M-\mu$. Рассмотрим эффективный цикл

$$Y^* = (Y \circ D_{\mu+2} \circ D_{\mu+3} \circ \dots \circ D_{M-1})$$

соответствующего теоретико-схемного пересечения. В силу (4.2.1) имеем оценку

$$\frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y^* \geqslant \frac{3\mu}{M} \cdot \frac{\mu+3}{\mu+2} \cdots \frac{M}{M-1} = \frac{3\mu}{\mu+2} > 1,$$

что невозможно. Противоречие доказывает предложение 4.2.1.

Пусть

$$R = \{q_\mu = q_{\mu+1} = 0\} \cap V.$$

Это неприводимый цикл коразмерности 2 (в силу условия регулярности). Для гиперповерхности V общего положения его собственный прообраз $\widetilde{R}$ на V_0 неособ в окрестности исключительного дивизора.

Предложение 4.2.2. *Неприводимые циклы Y и R различны*:

$$Y \neq R.$$

Доказательство. В силу условия регулярности имеем

$$\mathrm{mult}_p R = \frac{\mu+2}{M} \deg R, \qquad \mathrm{mult}_{B_{i-1}} R^{i-1} \leqslant 1.$$

Теперь если $Y = R$, то из (4.1.4) получаем

$$2\,\frac{\mu+2}{\mu}\,p_0 + \Sigma_l > \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{(1/2)p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u}\,,$$

где для удобства положим $\Sigma_l = \sum_{i=1}^{L} p_i$. Элементарными вычислениями легко убедиться, что это неравенство ложно. Предложение доказано.

После этой подготовительной работы перейдем к изучению общего случая.

Пусть $y \in E \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – произвольная точка на исключительном дивизоре. В силу условия регулярности $T_y^{(1)} = T_y E \cap E$ есть гиперповерхность (степени μ) в гиперплоскости $T_y E \cong \mathbb{P}^{M-2}$, имеющая точку y изолированной квадратичной особенностью. Положим

$$T = T_y(T_y^{(1)}) \cap T_y^{(1)}.$$

Это неприводимый цикл коразмерности 2 на E, причем

$$\deg T = 2\mu, \qquad \mathrm{mult}_y T = 6.$$

Лемма 4.2.1. *Пусть $W \neq T$ – неприводимое подмногообразие коразмерности 2 на E. При $\mu \geqslant 4$ имеет место оценка*

$$\frac{\mathrm{mult}_y}{\deg} W \leqslant \frac{8}{3\mu}\,.$$

Доказательство. Применим технику гиперкасательных систем к $E \subset \mathbb{P}^{M-1}$. Это возможно благодаря условию регулярности. Точнее, пусть $(u_1, \dots, u_{M-1})$ – система аффинных координат на $\mathbb{P}^{M-1}$ с центром в точке y,

$$e(y) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\mu$$

– уравнение гиперповерхности E, $e_i = \xi_1 + \dots + \xi_i$ – его левый отрезок. Здесь ξ_i однородны степени i по u_*. Положим

$$\Delta_i = \left|\sum_{j=1}^{i} e_j s_{i-j}\right|_E, \qquad i = 1, \dots, \mu - 1,$$

s_k – произвольный однородный многочлен степени k. Очевидно, в силу условия регулярности

$$\operatorname{codim} \operatorname{Bs} \Delta_i \geqslant i,$$

так что для общего дивизора $D_i \in \Delta_i$ и произвольного цикла $B \subset E$ коразмерности $i-1$ имеем $B \not\subset D_i$. Поскольку $W \neq T = \operatorname{Bs} \Delta_2$, имеем

$$\operatorname{codim} W \cap D_2 = 3,$$

так что $(W \circ D_2)$ – эффективный цикл коразмерности 3 на E. Поэтому

$$W \cap D_2 \cap D_4 \cap D_5 \cap \dots \cap D_{\mu-1}$$

имеет коразмерность $\mu - 1$ на E, так что

$$W^* = (W \circ D_2 \circ D_4 \circ D_5 \circ \dots \circ D_{\mu-1})$$

есть эффективный цикл на E. Имеем оценку

$$1 \geqslant \frac{\operatorname{mult}_y}{\deg} W^* \geqslant \frac{\operatorname{mult}_y}{\deg} W \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{\mu}{\mu - 1}\right) = \frac{\operatorname{mult}_y}{\deg} W \cdot \frac{3\mu}{8},$$

откуда немедленно получаем утверждение леммы.

Лемма 4.2.2. *Пусть $\mu = 3$. Для любого неприводимого подмногообразия $W \neq T$ коразмерности 2 имеем*

$$\frac{\operatorname{mult}_y}{\deg} W \leqslant \frac{2}{3}.$$

Доказательство. В обозначениях доказательства предыдущей леммы имеем

$$\operatorname{codim}(W \cap D_2) = 3,$$

так что $(W \circ D_2)$ – эффективный цикл коразмерности 3 и

$$1 \geqslant \frac{\operatorname{mult}_y}{\deg} (W \circ D_2) \geqslant \frac{\operatorname{mult}_y}{\deg} W \cdot \frac{3}{2},$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Пусть $Y^0 \subset V_0$ – собственный прообраз цикла Y и $(Y^0 \circ E) = \mathbb{P}(T_p Y)$ – его проективизированный касательный конус в точке p. Для эффективного цикла $(Y^0 \circ E)$ коразмерности 2 на E имеем представление

$$(Y^0 \circ E) = aT + W, \tag{4.2.3}$$

где $a \in \mathbb{Z}_+$ и эффективный цикл W не содержит T компонентой.

Лемма 4.2.3. *Имеет место оценка*

$$a \geqslant 1.$$

Доказательство. Предположим противное: $a=0$. Рассмотрим сначала случай $\mu \geqslant 4$. Согласно лемме 4.2.1 имеем

$$\frac{m_1(Y)}{m(Y)} \leqslant \frac{\mathrm{mult}_y(Y^0 \circ E)}{\deg(Y^0 \circ E)} \leqslant \frac{8}{3\mu},$$

где $y \in B_0$ – произвольная точка, ибо

$$m(Y) = \mathrm{mult}_p Y = \deg(Y^0 \circ E), \qquad m_1(Y) \leqslant \mathrm{mult}_y Y^0 \leqslant \mathrm{mult}_y(Y^0 \circ E).$$

Поэтому, учитывая, что $m_i(Y) \leqslant m_1(Y)$, можно $m_i(Y)$ в (4.1.4) заменить на $(8/3\mu)m(Y)$ при $i \geqslant 1$. Теперь из (4.1.4) получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{mult}_p Y &> \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{((2/\mu)p_0 + (8/3\mu)\Sigma_l)((1/2)p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u)} \cdot \frac{\deg Y}{M} \\ &= \mu \, \frac{4p_0^2 + 4p_0(2\Sigma_l + \Sigma_u) + 4\Sigma_l(\Sigma_l + \Sigma_u) + \Sigma_u^2}{p_0^2 + 2p_0((5/3)\Sigma_l + \Sigma_u) + (8/3)\Sigma_l(\Sigma_l + \Sigma_u)} \cdot \frac{\deg Y}{M},\end{aligned}$$

откуда получаем окончательно

$$\frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y > \frac{3}{2M}\,\mu. \tag{4.2.4}$$

С другой стороны, как в доказательстве леммы 4.2.1, для общих $D_i \in \Lambda_i$ теоретико-множественное пересечение

$$Y \cap D_{\mu+2} \cap D_{\mu+3} \cap \dots \cap D_{M-1}$$

имеет коразмерность в точности $M-\mu$, так что, рассматривая эффективный цикл

$$Y^* = (Y \circ D_{\mu+2} \circ \dots \circ D_{M-1}),$$

получаем оценку

$$\frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y \leqslant \frac{\mu+2}{M}. \tag{4.2.5}$$

Сравнивая это неравенство с (4.2.4), видим, что

$$\frac{3}{2}\,\mu < \mu + 2,$$

так что $\mu < 4$; противоречие.

Пусть теперь $\mu = 3$. Согласно лемме 4.2.2 в этом случае

$$\frac{m_1(Y)}{m(Y)} \leqslant \frac{2}{\mu},$$

так что, рассуждая, как выше, получим оценку

$$\frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y > 3\,\frac{4p_0^2 + 4p_0(2\Sigma_l + \Sigma_u) + 4\Sigma_l(\Sigma_l + \Sigma_u) + \Sigma_u^2}{p_0^2 + p_0(3\Sigma_l + 2\Sigma_u) + 2\Sigma_l(\Sigma_l + \Sigma_u)} \cdot \frac{1}{M},$$

откуда

$$\frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y > \frac{6}{M}.$$

Оценка (4.2.5) справедлива и при $\mu = 3$, так что немедленно получаем противоречие:

$$6 < \mu + 2 = 5.$$

Лемма 4.2.3 доказана полностью.

Следствие 4.2.1 (из леммы 4.2.3). *Подмногообразие Y не содержится в T_pV.*

Доказательство. Допустим противное: $Y \subset T_pV$. Тогда $Y \subset T_pV \cap V$ и потому

$$T_pY \subset T_p(T_pV \cap V).$$

Однако это невозможно, потому что $\mathbb{P}(T_pY)$ содержит компонентой подмногообразие T, а

$$\mathbb{P}(T_p(T_pV \cap V)) = \{q_\mu = q_{\mu+1} = 0\} \subset \mathbb{P}^{M-1}$$

не содержит T в силу условия регулярности. Следствие доказано.

4.2.2. Исключение максимальной особенности. Сначала приведем предположение о существовании максимальной особенности к противоречию в случае $\mu \geqslant 5$. Для любого неприводимого подмногообразия $W \subset E$ коразмерности 2 согласно лемме 4.2.1 имеем

$$\frac{\mathrm{mult}_y}{\deg} W \leqslant \frac{3}{\mu},$$

причем равенство достигается только на $W = T$. Рассуждая, как выше, получаем из (4.1.4)

$$\frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y > \mu \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{M(2p_0 + 3\Sigma_l)((1/2)p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u)} \geqslant \frac{4}{3M}\mu. \tag{4.2.6}$$

Поскольку $Y \not\subset T_pV$, пересечение $Y \cap D_\mu$ имеет коразмерность 3, так что в силу условия регулярности

$$Y^* = (Y \circ D_\mu \circ D_{\mu+3} \circ \dots \circ D_{M-1})$$

есть эффективный цикл коразмерности $M - \mu$. Имеем

$$1 \geqslant \frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y^* \geqslant \frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y \cdot \left(\frac{\mu+1}{\mu} \cdot \frac{\mu+4}{\mu+3} \cdots \frac{M}{M-1}\right) = \frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y \cdot \frac{(\mu+1)M}{\mu(\mu+3)}, \tag{4.2.7}$$

так что, комбинируя (4.2.6) и (4.2.7), получаем

$$\frac{\mu(\mu+3)}{\mu+1} > \frac{4}{3}\mu,$$

откуда $\mu < 5$; противоречие. Максимальная особенность исключена при $\mu \geqslant 5$.

Осталось рассмотреть два наиболее трудных случая: $\mu = 3$ и $\mu = 4$. Мы подробно рассмотрим второй. Необходимы более тонкие рассуждения, чем те, которые использовались выше.

Напомним, что T_pY содержит T нетривиальной компонентой и потому $Y \not\subset D_\mu$, как выше. Тем более, $Y \not\subset D_{\mu+1}$ для общего дивизора $D_{\mu+1} \in \Lambda_{\mu+1}$. Однако в силу условия регулярности можно сказать больше:

$$T \cap \{q_{\mu+1} = q_{\mu+2} = 0\}$$

имеет коразмерность 2 в T. В частности, линейная система $\Lambda^0_{\mu+1}|_T$ подвижна. Поэтому ни одна из компонент замкнутого алгебраического множества $D^0_{\mu+1} \cap T$ не содержится в носителе цикла W (см. (4.2.3)). Пусть $Y_{\mu+1} = (Y \circ D_{\mu+1})$ – эффективный цикл коразмерности 3 на V. Имеем представление

$$Y_{\mu+1} = Y^\sharp_{\mu+1} + Y^+_{\mu+1},$$

где неприводимая компонента X цикла $Y_{\mu+1}$ входит в $Y^\sharp_{\mu+1}$ (и не входит в $Y^+_{\mu+1}$) тогда и только тогда, когда ее собственный прообраз $X^0 \subset V_0$ содержит неприводимую компоненту множества $D^0_{\mu+1} \cap T$. В силу сказанного выше

$$(\widetilde{Y}^\sharp_{\mu+1} \circ E) = a^\sharp(T \circ D^0_{\mu+1}) + (\sharp), \qquad a^\sharp \geqslant a \geqslant 1.$$

Для цикла $Y^+_{\mu+1}$ имеем оценку
$$\frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y^+_{\mu+1} \leqslant \frac{\mu+3}{M}, \tag{4.2.8}$$
получаемую обычным способом. Однако про цикл $Y^\sharp_{\mu+1}$ можно сказать гораздо больше: по построению
$$Y^\sharp_{\mu+1} \not\subset D_\mu.$$
Следовательно, $(Y^\sharp_{\mu+1} \circ D_\mu)$ – эффективный цикл коразмерности 4, так что получаем
$$\frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} Y^\sharp_{\mu+1} \leqslant \frac{\mu}{\mu+1} \frac{\mathrm{mult}_p}{\deg} (Y^\sharp_{\mu+1} \circ D_\mu) \leqslant \frac{\mu(\mu+4)}{(\mu+1)M}. \tag{4.2.9}$$
Положим
$$d^\sharp = \deg Y^\sharp_{\mu+1}, \qquad d^+ = \deg Y^+_{\mu+1},$$
$$b^\sharp = a \deg T, \qquad b^+ = \deg W,$$
$$\deg(\widetilde{Y}^\sharp_{\mu+1} \circ E) = b^\sharp(\mu+2) + \delta^\sharp, \qquad \deg(\widetilde{Y}^+_{\mu+1} \circ E) = \delta^+.$$
Получаем систему неравенств
$$(b^\sharp + b^+)(\mu+2) \leqslant (\mu+2)b^\sharp + \delta^\sharp + \delta^+,$$
$$(\mu+2)b^\sharp + \delta^\sharp \leqslant d^\sharp \frac{\mu(\mu+4)}{M(\mu+1)},$$
$$\delta^+ \leqslant d^+ \frac{\mu+3}{M},$$
причем
$$d^+ + d^\sharp = (\mu+1)\deg Y$$
и
$$b^+ + b^\sharp = \mathrm{mult}_p Y = m_0.$$
Прежде всего заметим, что, поскольку неравенство (4.2.9) сильнее, чем (4.2.8), можно считать, что $\delta^\sharp = 0$; иначе заменим δ^+ на $\delta^+ + \delta^\sharp$, $\delta^\sharp$ на 0, $d^\sharp$ на
$$d^\sharp - \delta^\sharp \frac{M(\mu+1)}{\mu(\mu+4)}$$
и d^+ на
$$d^+ + \delta^\sharp \frac{M(\mu+1)}{\mu(\mu+4)}.$$
При этом все соотношения сохранятся, так как
$$\delta^\sharp \leqslant \delta^\sharp \frac{(\mu+1)(\mu+3)}{\mu(\mu+4)}.$$
Далее, для $m_1(Y)$ имеем согласно лемме 4.2.1 оценку
$$m_1(Y) \leqslant \frac{3}{\mu} b^\sharp + \frac{8}{3\mu} b^+.$$
Отсюда получаем в силу (4.1.4)
$$b^\sharp\left(\frac{2}{\mu}p_0 + \frac{3}{\mu}\Sigma_l\right) + b^+\left(\frac{2}{\mu}p_0 + \frac{8}{3\mu}\Sigma_l\right) > \frac{(2p_0 + 2\Sigma_l + \Sigma_u)^2}{((1/2)p_0 + \Sigma_l + \Sigma_u)} \frac{\deg Y}{M}.$$

Используя полученные выше оценки, получаем

$$\frac{\mu(\mu+4)}{(\mu+1)(\mu+2)}d^\sharp\left(\frac{2}{\mu}p_0+\frac{3}{\mu}\Sigma_l\right)+\frac{\mu+3}{\mu+2}d^+\left(\frac{2}{\mu}p_0+\frac{8}{3\mu}\Sigma_l\right)>\frac{(2p_0+2\Sigma_l+\Sigma_u)^2}{((1/2)p_0+\Sigma_l+\Sigma_u)}\frac{(d^\sharp+d^+)}{\mu+1}.$$

Следовательно, в силу линейности либо

$$\frac{\mu+4}{\mu+2}>\frac{(2p_0+2\Sigma_l+\Sigma_u)^2}{(2p_0+3\Sigma_l)((1/2)p_0+\Sigma_l+\Sigma_u)}\geqslant\frac{4}{3},$$

откуда $\mu<4$ – противоречие, – либо

$$\frac{(\mu+3)(\mu+1)}{\mu(\mu+2)}>\frac{(2p_0+2\Sigma_l+\Sigma_u)^2}{(2p_0+(8/3)\Sigma_l)((1/2)p_0+\Sigma_l+\Sigma_u)}\geqslant\frac{3}{2},$$

откуда $\mu^2<2\mu+6$ – снова противоречие. Случай $\mu=4$ разобран полностью.

Отметим, что полученные оценки достаточны для исключения точки кратности $\mu=3$ на пятимерной секстике. Если $M\geqslant 7$ и $\mu=3$, то для исключения максимальной особенности необходимо начать с цикла $(Y\circ D_{\mu+1})$, выделить в нем компоненты, содержащие компоненты цикла $(T\cap D^0_{\mu+1})$, пересечь их с $D_{\mu+2}$, выделить компоненты, содержащие компоненты цикла $(T\cap D^0_{\mu+1}\cap D^0_{\mu+2})$, и пересечь их с D_μ (это все еще возможно в силу условия регулярности). Получающиеся оценки уже достаточно сильные для исключения случая $\mu=3$. Однако они весьма громоздки, и мы их не приводим.

Теорема 4.1.1 полностью доказана.

4.2.3. Техника подсчета кратностей. Поскольку развитая в гл. 1 техника подсчета кратностей относилась к неособому многообразию, в рассматриваемой здесь ситуации необходима ее модификация. Цель данного пункта – доказать теорему 4.1.2.

Пусть $x\in X$ – росток изолированной терминальной $\mathbb{Q}$-факториальной особенности и

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i,i-1}\colon V_i & \longrightarrow & V_{i-1}, \\ \cup & & \cup \\ E_i & \longrightarrow & B_{i-1} \end{array}\qquad i=1,\dots,K,$$

– последовательность раздутий с центрами

$$B_{i-1}\subset X_{i-1},\qquad B_0=x,$$

$E_i=\varphi^{-1}_{i,i-1}(B_{i-1})\subset X_i$ – исключительные дивизоры. Предполагаем, что выполнены следующие условия:

(i) $\varphi_{i,i-1}(B_i)=B_{i-1}$, т.е. $B_i\subset E_i$;

(ii) исключительные дивизоры $E_i\subset X_i$ неприводимы, приведены и X_i $\mathbb{Q}$-факториально над общей точкой цикла B_{i-1}.

Положим

$$\delta_i=\operatorname{codim}B_{i-1}-1.$$

Очевидно, имеем

$$(F_i\cdot(-E_i)^{\delta_i})=\mu_i\geqslant 1,$$

где

$$\mu_i=\operatorname{mult}_{B_{i-1}}V_{i-1},$$

F_i – слой морфизма $\varphi_{i,i-1}\colon E_i\to B_{i-1}$.

Для цикла $Y_i \subset X_i$ через $Y^j \subset X_j$ обозначим его собственный прообраз, если он определен. На множестве исключительных дивизоров $\{E_i\}$ зададим структуру ориентированного графа обычным способом:

$$E_j \to E_i \qquad \text{или} \qquad i \to j,$$

если $j > i$ и $B_{j-1} \subset E_i^{j-1}$ (см. гл. 1). При $j \to i$ положим

$$\beta_{i,j} = \sup_{Y \subset E_j} \frac{\operatorname{mult}_{B_{i-1}} Y^{i-1}}{\deg Y} \in \mathbb{R}_+,$$

где sup берется по всем простым дивизорам $Y \subset E_i$, накрывающим B_{j-1} (впрочем, если $\varphi_{j,j-1}(Y) \neq B_{j-1}$, то $\operatorname{mult}_{B_{i-1}} Y^{i-1} = 0$), и

$$\deg Y = (Y \cdot F_j \cdot (-E_j)^{\delta_j - 1})$$

есть "степень" пересечения $Y \cap F_t$, $F_t = \varphi_{i,i-1}^{-1}(s)$, $s \in B_{i-1}$ – общая точка.

Для пути $\pi \in P(i,j)$, соединяющего i с j, определим его *вес* формулой

$$\beta(\pi) = \prod_{\alpha=1}^{k} \beta_{i_\alpha, i_{\alpha-1}},$$

где

$$\pi = \{i = i_k \to i_{k-1} \to \cdots \to i_\alpha \to i_{\alpha-1} \to \cdots \to i_0 = j\}.$$

Определим коэффициенты

$$w_{i,j} = \sum_{\pi \in P(i,j)} \beta(\pi), \qquad w_{i,i} = 1.$$

Лемма 4.2.4. *Имеет место соотношение*

$$w_{i,j} = \sum_{k \to j} w_{i,k} \beta_{k,j}.$$

Доказательство. Имеем дизъюнктное объединение

$$P(i,j) = \coprod_{k \to j} P(i,k) \circ \{k \to j\},$$

где $\circ\{k \to j\}$ обозначает продолжение пути из i в k до пути из i в j добавлением стрелки $k \to j$. Теперь утверждение леммы очевидно по определению чисел $w_{i,j}$. Лемма доказана.

Пусть теперь Σ – линейная система без неподвижных компонент на X, Σ^i – ее собственный прообраз на X_i, $D \in \Sigma$ – общий дивизор. Имеем

$$D^i = \varphi_{i,i-1}^*(D^{i-1}) - \nu_i E_i,$$

так что

$$D^K = \varphi_{K,0}^*(D) - \sum_{i=1}^{K} \nu_i \varphi_{K,i}^* E_i.$$

Пусть $D_1, D_2 \in \Sigma$ – два общих дивизора. Определим последовательность циклов коразмерности 2 на X_i, полагая

$$\begin{aligned} D_1 \circ D_2 &= Z_0, \\ D_1^1 \circ D_2^2 &= Z_0^1 + Z_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&D_1^i \circ D_2^i = (D_1^{i-1} \circ D_2^{i-1})^i + Z_i,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

где $Z_i \subset E_i$. Отсюда для $i \leqslant L$, где L определено условием $\operatorname{codim} B_{i-1} \geqslant 3$ при $i \leqslant L$, получаем

$$D_1^i \circ D_2^i = Z_0^i + Z_1^i + \dots + Z_{i-1}^i + Z_i.$$

Для любых $j > i, j \leqslant L$ положим

$$m_{i,j} = \operatorname{mult}_{B_{j-1}}(Z_i^{j-1}).$$

Положим также

$$d_i = \deg Z_i = (Z_i \cdot F_i \cdot (-E_i)^{\delta_i - 1}).$$

Получаем следующую систему равенств:

$$\begin{aligned}
\mu_1\nu_1^2 + d_1 &= m_{0,1},\\
\mu_2\nu_2^2 + d_2 &= m_{0,2} + m_{1,2},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\mu_i\nu_i^2 + d_i &= m_{0,i} + \dots + m_{i-1,i},\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\mu_L\nu_L^2 + d_L &= m_{0,L} + \dots + m_{L-1,L}.
\end{aligned}$$

Теперь

$$d_L \geqslant \sum_{i=L+1}^{K} \mu_i\nu_i^2.$$

Умножим i-е уравнение на $w_{L,i}$ и сложим их все. Справа для любого $i \geqslant 1$ получаем выражение

$$\sum_{j=i+1}^{L} w_{L,j} m_{i,j} = \sum_{j \to i}^{L} w_{L,j} m_{i,j}. \tag{4.2.10}$$

Однако по определению чисел $\beta_{j,i}$ имеем оценку

$$m_{i,j} \leqslant \beta_{j,i} d_i,$$

так что (4.2.10) можно оценить сверху числом

$$d_i \sum_{j \to i} w_{L,j} \beta_{i,j} = d_i w_{L,i}.$$

Слева для любого $i \geqslant 1$ присутствует $d_i w_{L,i}$, так что, выбрасывая все $m_{i,*}$, $i \geqslant 1$, из правой части и все d_i, $i \geqslant 1$, из левой, получаем окончательно

$$\sum_{j=1}^{L} w_{L,j} m_{0,j} \geqslant \sum_{j=1}^{L} w_{L,j} \mu_j \nu_j^2 + \sum_{i=L+1}^{K} \mu_i \nu_i^2. \tag{4.2.11}$$

Докажем, наконец, теорему 4.1.2.

Вернемся к особой точке $p \in V$, рассматриваемой в настоящей работе. Имеем, очевидно,

$$w_{i,j} = 1 \qquad \text{при} \quad i, j \geqslant 1,$$

где в соответствии с принятыми в данной статье обозначениями последовательность раздутий $\varphi_{i,i-1}$ начинается с φ_0, а не с $\varphi_{1,0}$. Для любого дивизора $Y\subset E$ и точки $y\in Y$ имеем оценку

$$\frac{\operatorname{mult}_y}{\deg} Y \leqslant \frac{2}{\mu},$$

причем равенство достигается на единственном дивизоре $T_yE\cap E$. В самом деле, в силу условия регулярности для общих дивизоров $R_i\in\Delta_i$ гиперкасательных линейных систем на E получаем при $Y\neq R_1=T_yE\cap E$ следующее: пересечение

$$Y\cap R_1\cap R_3\cap\cdots\cap R_{\mu-1}$$

имеет коразмерность точно $\mu-1$ на E, откуда следует, что цикл

$$Y^*=(Y\circ R_1\circ R_3\circ\cdots\circ R_{\mu-1})$$

эффективен, так что

$$1\geqslant\frac{\operatorname{mult}_y}{\deg}Y^*\geqslant\frac{\operatorname{mult}_y}{\deg}Y\cdot\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{\mu}{\mu-1}\right)=\frac{\operatorname{mult}_y}{\deg}Y\cdot\frac{2\mu}{3}$$

и потому

$$\frac{\operatorname{mult}_y}{\deg}Y\leqslant\frac{3}{2\mu}<\frac{2}{\mu}.$$

Следовательно, $\beta_{i,0}\leqslant 2/\mu$ для всех $i\to 0$. Теперь из (4.2.11) получаем

$$\frac{2}{\mu}p_{L,0}m_0+\sum_{i=1}^{L}p_{L,i}m_i\geqslant 2p_0\nu_0^2+\sum_{i=1}^{L}p_{L,i}\nu_i^2+\sum_{i=L+1}^{K}\nu_i^2. \tag{4.2.12}$$

Из определения чисел $p_{i,j}$ следует, что (4.2.12) влечет оценку

$$\frac{2}{\mu}p_0m_0+\sum_{i=1}^{L}p_im_i\geqslant 2p_0\nu_0^2+\sum_{i=1}^{K}p_i\nu_i^2, \tag{4.2.13}$$

где $p_i=p_{K,i}$. Оценим снизу правую часть (4.2.13). Согласно неравенству Нётера–Фано имеем

$$\sum_{i=0}^{K}p_i\nu_i>n\biggl(\sum_{i=0}^{K}p_i\delta_i\biggr). \tag{4.2.14}$$

Поскольку

$$\inf_{\sum_{i=0}^K p_i\nu_i=C}\left\{2p_0\nu_0^2+\sum_{i=1}^{K}p_i\nu_i^2\right\}=\frac{C^2}{(1/2)p_0+\sum_{i=1}^K p_i},$$

получаем окончательно (с учетом того, что $\deg Z=Mn^2$, $Z=(D_1\circ D_2)$)

$$\frac{2}{\mu}p_0\operatorname{mult}_x Z+\sum_{i=1}^{L}p_i\operatorname{mult}_{B_{i-1}}Z^{i-1}>\frac{\left(\sum_{i=0}^K p_i\delta_i\right)^2}{(1/2)p_0+\sum_{i=1}^K p_i}\cdot\frac{\deg Z}{M}.$$

Осталось заметить, что это неравенство линейно по Z. Следовательно, существует неприводимая компонента Y этого цикла, которая удовлетворяет (4.1.4).

Доказательство теоремы 4.1.2 завершено.

§ 4.3. Регулярные гиперповерхности

Данный параграф посвящен доказательству предложений 4.1.1 и 4.1.2.

4.3.1. Регулярные неособые точки. Пусть $\mathcal{V}_\mu(x) \subset \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_\mathbb{P}(M)))$ – пространство гиперповерхностей степени $M \geqslant 5$, имеющих особенность кратности μ, $2 \leqslant \mu \leqslant M-2$, в фиксированной точке $x \in \mathbb{P}$. Нетрудно видеть, что общая гиперповерхность $V \in \mathcal{V}_\mu(x)$ регулярна в особой точке x, так как ее уравнение относительно системы координат $z_1, \ldots, z_M$ с центром в точке x есть

$$q_\mu + \cdots + q_M = 0,$$

где многочлены q_i произвольны. Также очевидно, что гиперповерхность V гладкая в любой точке $y \in V \setminus \{x\}$. Поэтому для доказательства предложения 4.1.1 остается проверить, что V регулярна в любой (гладкой) точке $y \in V \setminus \{x\}$ в смысле определения 4.1.1.

Положим для любой точки $y \in \mathbb{P} \setminus \{x\}$

$$Y(y) = \{V \in \mathcal{V}_\mu(x) \mid y \in V,\ V \text{ не регулярна в } y\}.$$

Предложение 4.3.1. *Имеет место оценка*

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{V}_\mu(x)} Y(y) \geqslant M+1. \tag{4.3.1}$$

Доказательство предложения 4.1.1. Пусть $Y \subset \mathcal{V}_\mu(x)$ – множество гиперповерхностей, нерегулярных хотя бы в одной точке $y \in \mathbb{P} \setminus \{x\}$. Очевидно,

$$Y = \bigcup_{y \in \mathbb{P} \setminus \{x\}} Y(y),$$

так что согласно предложению 4.3.1

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{V}_\mu(x)} Y \geqslant 1$$

и поэтому замыкание $\overline{Y} \subset \mathcal{V}_\mu(x)$ есть собственное замкнутое подмножество положительной коразмерности. Поскольку, как было отмечено выше, общая (по Зарисскому) гиперповерхность $V \in \mathcal{V}_\mu(x)$ регулярна в точке x, предложение 4.1.1 доказано полностью.

Доказательство предложения 4.3.1. Пусть $z_1, \ldots, z_M$ – такая система аффинных координат на $\mathbb{C}^M \subset \mathbb{P}$, что $x = (0, \ldots, 0)$ – ее начало, $y \in \mathbb{C}^M$ и координаты точки y суть $(1, 0, \ldots, 0)$. Таким образом, замена

$$z_1 = 1 + u$$

дает новую систему аффинных координат

$$(u, z_2, \ldots, z_M)$$

на $\mathbb{C}^M$ с центром в точке $y \in \mathbb{C}^M$. Положим

$$q_i = \sum_{j=0}^{i} z_1^{i-j} q_{i,j},$$

где $q_{i,j} = q_{i,j}(z_2, \ldots, z_M)$ – однородные многочлены степени j от переменных $z_2, \ldots, z_M$. Положим

$$w_k = \sum_{e=0}^{k} u^e \Biggl(\sum_{i=\max(\mu,k)}^{M} \binom{i+e-k}{e} q_{i,k-e} \Biggr). \tag{4.3.2}$$

Очевидно,

$$w_0 + w_1 + \cdots + w_M = 0$$

есть уравнение гиперповерхности V в точке y.

Пусть $Y_l \subset \{(q_\mu, \ldots, q_M)\}$ состоит из таких наборов $(q_\mu, \ldots, q_M)$, что регулярность последовательности w_* впервые нарушается на l-м шаге, $l = 1, \ldots, M-1$:

- $w_0 = 0$;
- $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}}\{w_1 = \cdots = w_{l-1} = 0\} = l-1$;
- существует компонента B множества $\{w_1 = \cdots = w_{l-1} = 0\}$ такая, что $w_l|_B \equiv 0$.

Ввиду однородности всех многочленов w_i по $(u, z_2, \ldots, z_M)$ можно рассмотреть проективизацию $\mathbb{P}^{M-1} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^M \ni y)$ (где за нуль аффинного пространства $\mathbb{C}^M$ принята именно точка y) и считать $B \subset \mathbb{P}^{M-1}$ проективным множеством.

Очевидно,

$$Y(y) = \coprod_{l=1}^{M-1} Y_l,$$

так что оценка (4.3.1) вытекает из неравенства

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{V}_\mu(x)} Y_l \geqslant M+1 \tag{4.3.3}$$

для каждого $l = 1, \ldots, M-1$. Рассуждая таким же образом, как в § 2.1, положим

$$Y_l = Y_l^\circ \cup Y_l^+,$$

где открытое в Y_l подмножество $Y_l^\circ \subset Y_l$ выделяется условием: существует компонента B множества

$$\{w_1 = \cdots = w_{l-1} = 0\},$$

не являющаяся конусом с вершиной в точке $p = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{P}^{M-1}$, такая, что $w_l|_B \equiv 0$. Здесь $p \in \mathbb{P}^{M-1}$ есть образ точки $x \in \mathbb{C}^M \setminus \{y\}$ при проективизации. Очевидно, это условие является открытым. Наоборот, замкнутое подмножество $Y_l^+ \subset Y_l$ выделяется условием: существует компонента

$$B \subset \{w_1 = \cdots = w_{l-1} = 0\}$$

– конус с вершиной в точке p, – на которой w_l обращается в нуль. Множества Y_l° и Y_l^+ имеют непустое пересечение.

Очевидно, достаточно доказать оценку (4.3.3) для Y_l° и Y_l^+ по отдельности.

Рассмотрим сначала случай общего положения: пусть $B \subset \mathbb{P}^{M-1}$ не является конусом с вершиной p. Наши рассуждения почти дословно повторяют § 2.1. Возьмем общее подпространство $L \subset \mathbb{P}^{M-1}$, $\operatorname{codim} L = \dim B$, содержащее точку p. Пусть

$$\pi_L \colon \mathbb{P}^{M-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{\dim B}$$

– соответствующая проекция. По предположению $\pi_L(B) = \mathbb{P}^{\dim B}$, и легко видеть, что для любой линейной функции $s \in H^0(\mathbb{P}^{\dim B}, \mathcal{O}(1))$

$$\pi_L^* s \in \langle z_2, \ldots, z_M \rangle$$

(именно потому, что $p \in L$). В частности, имеется подпространство

$$W_l = \pi_L^* H^0(\mathbb{P}^{\dim B}, \mathcal{O}(l))$$

однородных многочленов степени l от $z_2, \ldots, z_M$ такое, что для любого $g \in W \setminus \{0\}$ получаем

$$g|_B \not\equiv 0.$$

Отметим, что многочлен w_j есть линейная комбинация многочленов вида $u^e q_{i,j-e}$, так что многочлены $q_{i,l}$ не входят в $w_0, \ldots, w_{l-1}$. Фиксируя многочлены $q_{i,j}$, $j \leqslant l-1$, и, тем самым, B, мы получаем

$$\dim W_l = \binom{M}{l} \geqslant M$$

независимых условий на $q_{i,l}$, ибо

$$w_l = \sum_{i=\max(\mu,l)}^{M} q_{i,l} + (\sharp),$$

где в $(\sharp)$ входят только многочлены $q_{i,j}$, $j \leqslant l-1$. Кроме того, имеется еще одно независимое условие, а именно точка y лежит на гиперповерхности V:

$$q_{\mu,0} + \cdots + q_{M,0} = 0,$$

откуда получаем окончательно

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{V}_\mu(x)} Y_l^\circ \geqslant M+1,$$

что и требовалось.

4.3.2. Случай необщего положения. Теперь рассмотрим случай, когда B – конус с вершиной p. Теперь предыдущие рассуждения дают более слабую оценку

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{V}_\mu(x)} Y_l^+ \geqslant \binom{M-1}{l} + 1, \tag{4.3.4}$$

ибо здесь имеем проекцию из подпространства $L \ni p$, $\operatorname{codim} L = \dim B - 1$,

$$\pi_L \colon B \dashrightarrow \mathbb{P}^{\dim B-1}.$$

Оценка (4.3.4) достаточна для наших целей во всех случаях, кроме трех:

$$l = 1, M-2, M-1.$$

Разберем их по отдельности. Пусть сначала $l = 1$.

В этом случае имеем следующие (очевидно, независимые) условия:

- $w_0 = 0$, т.е. $q_{\mu,0} + \cdots + q_{M,0} = 0$ (одно условие);
- коэффициент при u в w_1 обращается в нуль:

$$\sum_{i=\mu}^{M} i q_{i,0} = 0$$

(еще одно условие);
- $(z_2, \ldots, z_M)$-часть w_1 обращается в нуль:

$$q_{\mu,1} + \cdots + q_{M,1} \equiv 0$$

($M-1$ условий).

В итоге получаем, как и требуется, $M+1$ условий (выражающих просто негладкость V в точке y).

Пусть теперь $l = M-1$. Здесь B – прямая, проходящая через точку $p = (1, 0, \ldots, 0)$. Все многочлены

$$w_0, w_1, \ldots, w_{M-1}$$

обращаются на B в нуль. Но поскольку B проходит через точку p (является “конусом с вершиной” p), отсюда следует, что все коэффициенты при степенях u в (4.3.2), т.е. все многочлены

$$w_{k,k-e} = \sum_{i=\max(\mu,k)}^{M} \binom{i+e-k}{e} q_{i,k-e}, \qquad k = 0,1,\ldots,M-1, \quad e = 0,1,\ldots,k, \tag{4.3.5}$$

обращаются на B в нуль. Все эти многочлены зависят только от $z_2,\ldots,z_M$. Таким образом, получаем следующую задачу в $\mathbb{P}^{M-2}$. Пусть

$$\mathcal{Q} = \{q_{i,j} = q_{i,j}(z_2,\ldots,z_M) \mid \mu \leqslant i \leqslant M,\ 0 \leqslant j \leqslant M-1,\ \deg q_{i,j} = j\}$$

– пространство всех наборов однородных многочленов $q_{i,j}$ и

$$\mathcal{W} = \{w_{k,e} = w_{k,e}(z_2,\ldots,z_M) \mid 0 \leqslant k \leqslant M-1,\ 0 \leqslant e \leqslant k,\ \deg w_{k,e} = e\}$$

– аналогичное пространство наборов $w_{k,e}$. Пусть

$$\xi \colon \mathcal{Q} \to \mathcal{W}$$

– линейное отображение, заданное формулами (4.3.5). Пусть $\mathcal{W}^\sharp \subset \mathcal{W}$ есть подмножество наборов $(w_{k,e})$, имеющих непустое множество нулей в $\mathbb{P}^{M-2}$. Необходимо оценить коразмерность

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\sharp).$$

Очевидно,

$$\mathcal{W}^\sharp = \bigcup_{a \in \mathbb{P}^{M-2}} \mathcal{W}^\sharp(a),$$

где

$$\mathcal{W}^\sharp(a) = \{(w_{k,e}) \mid w_{k,e}(a) = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant M-1,\ 0 \leqslant e \leqslant k\}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\sharp) \geqslant \operatorname{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\sharp(a)) + 2 - M. \tag{4.3.6}$$

Оценим теперь коразмерность $\operatorname{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\sharp(a))$. Прежде всего, очевидно,

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{W}} \mathcal{W}^\sharp(a) = \frac{M(M+1)}{2}\,.$$

Отображение ξ не сюръективно, и поэтому искомая коразмерность $\operatorname{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\sharp(a))$ меньше этого числа.

Положим для каждого $j = 0,\ldots,M-1$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_j &= \{q_{i,j} \mid \mu \leqslant i \leqslant M,\ \deg q_{i,j} = j\}, \\ \mathcal{W}_j &= \{w_{k,j} \mid j \leqslant k \leqslant M-1,\ \deg w_{k,j} = j\}. \end{aligned}$$

Имеются естественные вложения $\mathcal{Q}_j \subset \mathcal{Q}$, $\mathcal{W}_j \subset \mathcal{W}$, дающие разложения в прямые суммы

$$\mathcal{Q} = \bigoplus_{j=0}^{M-1} \mathcal{Q}_j, \qquad \mathcal{W} = \bigoplus_{j=0}^{M-1} \mathcal{W}_j,$$

причем

$$\xi = \bigoplus_{j=0}^{M-1} \xi_j,$$

где $\xi_j\colon \mathcal{Q}_j \to \mathcal{W}_j$ дается формулой (4.3.5). Положим

$$\mathcal{W}_j^\sharp(a) = \{(w_{k,j}) \mid w_{k,j}(a) = 0,\ j \leqslant k \leqslant M-1\}.$$

Очевидно,

$$\mathcal{W}^\sharp(a) = \bigoplus_{j=0}^{M-1} \mathcal{W}_j^\sharp(a),$$

и поэтому

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\sharp(a)) = \sum_{j=0}^{M-1} \operatorname{codim}_{\mathcal{Q}_j} \xi_j^{-1}(\mathcal{W}_j^\sharp(a)). \tag{4.3.7}$$

Лемма 4.3.1. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{Q}_j} \xi_j^{-1}(\mathcal{W}_j^\sharp(a)) = \min(M - \max(\mu, j) + 1, M - j).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{Q}_{i,j}$, $\mathcal{W}_{k,j}$ – пространства однородных многочленов от $z_2, \dots, z_M$ степени j, так что

$$\mathcal{Q}_j = \bigoplus_{i=\max(\mu,j)}^{M} \mathcal{Q}_{i,j}, \qquad \mathcal{W}_j = \bigoplus_{k=j}^{M-1} \mathcal{W}_{k,j}.$$

В терминах этих прямых разложений отображение ξ_j задается матрицей линейных отображений

$$\Theta^{(j)}\mathrm{id} = \|\theta_{ik}^{(j)}\mathrm{id}\|, \qquad \theta_{ik}^{(j)} = \binom{i-j}{k-j} \tag{4.3.8}$$

(все пространства $\mathcal{Q}_{i,j}$, $\mathcal{W}_{k,j}$ естественно изоморфны и id обозначает естественный изоморфизм). В формуле (4.3.8) предполагается, что

$$i \geqslant \max(\mu, j), \qquad k = j, \dots, M-1.$$

Если коэффициент

$$\binom{i-j}{k-j}$$

не имеет смысла ($i < k$ или одно из двух целых чисел отрицательно), то его значение полагается равным нулю. Например, при $j \leqslant \mu$ матрица $\Theta^{(j)}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}
\binom{\mu-j}{0} & \binom{\mu+1-j}{0} & \cdots & \binom{M-1-j}{0} & \binom{M-j}{0} \\
\binom{\mu-j}{1} & \binom{\mu+1-j}{1} & \cdots & \binom{M-1-j}{1} & \binom{M-j}{1} \\
 & & \cdots & & \\
\binom{\mu-j}{\mu-j} & \binom{\mu+1-j}{\mu-j} & \cdots & \binom{M-1-j}{\mu-j} & \binom{M-j}{\mu-j} \\
0 & \binom{\mu+1-j}{\mu+1-j} & \cdots & \binom{M-1-j}{\mu+1-j} & \binom{M-j}{\mu+1-j} \\
 & & \cdots & & \\
0 & 0 & \cdots & \binom{M-1-j}{M-1-j} & \binom{M-j}{M-1-j}
\end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $\Theta^{(j)}$ имеет максимальный ранг

$$\min(M - \max(\mu, j) + 1, M - j).$$

Поэтому существуют такие квадратные невырожденные матрицы A_j, C_j размеров

$$M - \max(\mu, j) + 1, \qquad M - j$$

соответственно, что отображение

$$(C_j \mathrm{id})^{-1}(\Theta^{(j)}\mathrm{id})(A_j \mathrm{id})$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \mathrm{id} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{id} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \mathrm{id} \\ 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

причем автоморфизм $C_j\mathrm{id}$ пространства $\mathcal{W}_j$, очевидно, сохраняет подпространство $\mathcal{W}_j^\sharp(a)$. Лемма доказана.

Применяя лемму 4.3.1, соотношения (4.3.6) и (4.3.7), получаем

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{Q}} \xi^{-1}(\mathcal{W}^\sharp) \geqslant \frac{(M+\mu-1)(M-\mu)}{2} + 2 \geqslant M+\mu+1,$$

что завершает рассмотрение случая $l = M-1$.

В случае $l = M-2$ получаются гораздо более сильные оценки, так как набор многочленов $(w_{i,j})$ (здесь $i \leqslant M-2$) обязан иметь уже одномерное множество общих нулей. Несложные вычисления, полностью аналогичные проведенным выше, здесь приводить не будем. Доказательство предложения 4.3.1 завершено.

4.3.3. Гиперповерхности с несколькими квадратичными точками. Докажем предложение 4.1.2.

Пусть $p \in \mathbb{P} \setminus \{p_0, \dots, p_M\}$ – произвольная точка, (z_*) – такая система линейных координат на $\mathbb{C}^M \subset \mathbb{P}$, что $p = (0, \dots, 0)$. Предполагаем, что все точки p_i лежат в аффинной части $\mathbb{C}^M$. Положим

$$\mathcal{X}_p = \{f \in \mathcal{X} \mid f(p) = 0\}.$$

Пусть

$$\mathcal{X}_p \ni f = q_1 + \dots + q_M$$

– разложение уравнения f на однородные компоненты.

Лемма 4.3.2. *Проекция*

$$\pi\colon \mathcal{X}_p \to \mathcal{L} = \{(q_1, \dots, q_{M-1})\}, \qquad \mathcal{X}_p \ni f = q_1 + \dots + q_M \mapsto (q_1, \dots, q_{M-1}),$$

сюрьективна и все ее слои имеют одну и ту же размерность.

Доказательство. Это утверждение становится очевидным, если выбрать подходящую систему координат (z_*). Например, предположим, что точки p_i имеют следующий вид:

$$p_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad p_M = (0, 0, \dots, 1), \quad p_0 = (1, 1, \dots, 1).$$

Тогда слой

$$\pi^{-1}(q_1, \dots, q_{M-1}) = \{f = q_1 + \dots + q_{M-1} + q_M \in \mathcal{X}_p\}$$

определен соотношениями

$$q_M(p_i) = a_i, \quad \frac{\partial q_M}{\partial z_j}(p_i) = b_{ij}, \qquad i = 0, \dots, M, \quad j = 1, \dots, M.$$

Легко видеть, что для любых значений a_i, b_{ij} эти уравнения задают аффинную плоскость коразмерности $(M+1)^2$ в $\mathcal{P}_M$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{X}_p^{\mathrm{irr}} \subset \mathcal{X}_p$ – подмножество уравнений, задающих гиперповерхности $V(f)$, нерегулярные в точке p. В силу леммы коразмерность

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{X}_p} \mathcal{X}_p^{\mathrm{irr}}$$

равна коразмерности множества гиперповерхностей степени M, проходящих через точку p и нерегулярных в этой точке относительно пространства $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M)))$. Иными словами, условие $f \in \mathcal{X}$ не играет никакой роли. Теперь, повторяя дословно рассуждения из § 2.1, получаем регулярность общей гиперповерхности $\{f = 0\}$ в каждой гладкой точке.

Докажем, наконец, что общая гиперповерхность $\{f = 0\}$, $f \in \mathcal{X}$, регулярна в каждой двойной точке p_j. Для этого рассмотрим аффинное подмножество $\mathbb{C}^M \subset \mathbb{P}$, содержащее все точки $p_0, \ldots, p_M$, и выберем такую систему линейных координат (z_*), что

$$p_0 = (0, 0, \ldots, 0), \quad p_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad p_M = (0, 0, \ldots, 1).$$

Теперь уравнения

$$f = \sum_{|I| \leqslant M} a_I z^I \in \mathcal{X}$$

удовлетворяют следующим условиям:

- $a_I = 0$ при $|I| \leqslant 1$;
- $a_{(2p_i)} + a_{(3p_i)} + \cdots + a_{(Mp_i)} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, M$;
- $a_{(p_i+p_j)} + a_{(2p_i+p_j)} + \cdots + a_{((M-1)p_i+p_j)} = 0$ для всех $i \neq j \in \{1, \ldots, M\}$;

здесь точки $p_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ рассматриваются как целочисленные векторы и, тем самым, как мультииндексы, так что $a_{(kp_i)}$ есть коэффициент при мономе

$$x_i^k,$$

а $a_{((kp_i+p_j)}$ есть коэффициент при мономе

$$x_i^k x_j$$

в многочлене f. Понятно, что эти уравнения линейно независимы и коэффициенты

$$a_{(Mp_i)}, \qquad a_{((M-1)p_i+p_j)} \tag{4.3.9}$$

можно выбрать в качестве ведущих. Таким образом, в терминах разложения

$$f = q_1 + q_2 + \cdots + q_M$$

компонента q_1 равна нулю, а компоненты $q_2, \ldots, q_{M-1}$ могут быть совершенно произвольными, так как выписанные выше линейные уравнения удовлетворяются за счет коэффициентов (4.3.9). Однако остальные коэффициенты однородного многочлена q_M могут быть совершенно произвольными. Поэтому для общего многочлена $f \in \mathcal{X}$ ни одна компонента поверхности

$$\{q_2 = \cdots = q_{M-1} = 0\}$$

не содержится в гиперповерхности $\{q_M = 0\}$. Это завершает доказательство предложения 4.1.2.

Глава 5. Двойные пространства индекса 2

В данной главе изучается бирациональная геометрия алгебраических многообразий, реализуемых как двойные накрытия проективного пространства $\mathbb{P}^M$, разветвленные над достаточно общей (в частности, гладкой) гиперповерхностью степени $2(M-1)$. Доказано, что любая структура рационально связного расслоения на таких многообразиях задается пучком полуантиканонических дивизоров, в частности база расслоения одномерна. Отсюда следует, что эти многообразия нерациональны, а их группа бирациональных автоморфизмов совпадает с группой бирегулярных автоморфизмов и для общего члена семейства есть циклическая группа порядка 2.

В § 5.1 сформулирован основной результат главы и начато его доказательство: задача описания рационально связных структур сведена к изучению (главным образом исключению) максимальных особенностей подвижных линейных систем, затем изучены максимальные подмногообразия коразмерности 2. В § 5.2 доказана основная теорема в предположении, что максимальные особенности подвижных линейных систем исключены, чему посвящены §§ 5.3–5.6. А именно, в § 5.3 исключены максимальные особенности, имеющие центр коразмерности 3, в §§ 5.4–5.5 развита новая локальная техника, существенно усиливающая $4n^2$-неравенство (см. § 1.2). На этой основе в § 5.6 исключены все оставшиеся типы бесконечно близких максимальных особенностей. В § 5.7 обоснованы условия общности положения для дивизора ветвления двойного пространства.

§ 5.1. Максимальные особенности подвижнх системы

В этом параграфе сформулирован основной результат главы – теорема о бирациональной геометрии двойных пространств – и начато его доказательство. Описание структур рационально связных расслоений выводится из ключевого технического факта о максимальных особенностях подвижных линейных систем. Затем показано, что если неприводимое подмногообразие коразмерности 2 является максимальным для подвижной линейной системы, то оно есть прообраз линейного подпространства коразмерности 2 в $\mathbb{P}^M$.

5.1.1. Формулировка основного результата. Целочисленный параметр $M \geqslant 4$ фиксирован на протяжении всей главы. Символ $\mathbb{P}$ обозначает комплексное проективное пространство $\mathbb{P}^M$. Пусть $W = W_{2(M-1)} \subset \mathbb{P}$ – гладкая гиперповерхность степени $2(M-1)$. Существует и однозначно определено двойное накрытие

$$\sigma\colon V \to \mathbb{P},$$

разветвленное над W. Его можно явно определить как гиперповерхность, заданную уравнением

$$x_{M+1}^2 = f(x_0, \dots, x_M)$$

во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}^{M+1}(1, \dots, 1, M-1)$, где $f(x_*)$ – уравнение гиперповерхности W.

Многообразие V есть многообразие Фано индекса 2:

$$\operatorname{Pic} V = \mathbb{Z}H, \qquad K_V = -2H,$$

где H – обильная образующая, σ – подъем гиперплоскости в $\mathbb{P}$. На многообразии V имеются следующие естественные структуры рационально связного расслоения: пусть $\alpha_P\colon \mathbb{P} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ –

линейная проекция из произвольного линейного подпространства P коразмерности 2; тогда отображение

$$\pi_P = \alpha_P \circ \sigma \colon V \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$

расслаивает V на $(M-1)$-мерные многообразия Фано индекса 1. Сформулируем теперь основной результат.

Напомним (см. гл. 1), что (нетривиальное) рационально связное расслоение – это сюръективный морфизм $\lambda \colon Y \to S$ проективных многообразий, где $\dim S \geqslant 1$, а многообразие S и слой общего положения $\lambda^{-1}(s)$, $s \in S$, рационально связны (и само многообразие Y автоматически рационально связно по теореме Грабера, Харриса и Старра [54]).

Теорема 5.1.1. *Предположим, что $M \geqslant 5$ и гиперповерхность ветвления $W \subset \mathbb{P}$ достаточно общая. Пусть $\chi \colon V \dashrightarrow Y$ – бирациональное отображение на пространство рационально связного расслоения $\lambda \colon Y \to S$. Тогда $S = \mathbb{P}^1$ и для некоторого изоморфизма $\beta \colon \mathbb{P}^1 \to S$ и некоторого подпространства $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 имеем*

$$\lambda \circ \chi = \beta \circ \pi_P,$$

т.е. коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "\chi"] \arrow[d, "\pi_P"'] & Y \arrow[d, "\lambda"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "\beta"] & S \end{tikzcd}$$

Следствие 5.1.1. *Для общего двойного пространства V размерности $\dim V \geqslant 5$ справедливы следующие утверждения.*

(i) *На многообразии V нет структур рационально связного расслоения с базой размерности $\geqslant 2$. В частности, на V нет структур расслоения на коники и поверхности дель Пеццо, а само многообразие V нерационально.*

(ii) *Предположим, что имеется бирациональное отображение $\chi \colon V \dashrightarrow Y$, где Y – многообразие Фано индекса $r \geqslant 2$ с факториальными терминальными особенностями такое, что $\operatorname{Pic} Y = \mathbb{Z}H_Y$, где $K_Y = -rH_Y$, причем линейная система $|H_Y|$ непуста и свободна. Тогда $r = 2$ и отображение χ есть бирегулярный изоморфизм.*

(iii) *Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов многообразия V совпадают:*

$$\operatorname{Bir} V = \operatorname{Aut} V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Утверждение (i) и равенство $r = 2$ в (ii) очевидны (любая линейная подсистема проективной размерности $\leqslant r-1$ в полной линейной системе $|H_Y|$ определяет структуру рационально связного расслоения на Y). Далее, χ-прообраз общего дивизора в системе $|H_Y|$ есть дивизор в линейной системе $|H|$ по теореме 1.1, что завершает доказательство утверждения (ii). Часть (iii) очевидным образом следует из (ii). Доказательство закончено.

Цель настоящей главы – доказать теорему 5.1.1; как обычно, ее утверждение будет выведено из другого факта – гораздо более технической и менее наглядной теоремы 5.1.2 о порогах канонического присоединения подвижных линейных систем на многообразии V.

5.1.2. План доказательства теоремы 5.1.1. Как и для бирационально жестких многообразий, в основе теоремы 5.1.1 лежит некоторое утверждение о виртуальном пороге канонического присоединения подвижной линейной системы на V. Для произвольного линейного подпространства $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 пусть V_P – раздутие подмногообразия $\sigma^{-1}(P) \subset V$ (оно неприводимо в силу условий общности положения (см. п. 5.1.3)). Для подвижной линейной системы Σ на V через Σ_P обозначим ее собственный прообраз на V_P.

Теорема 5.1.1 является следствием более технического факта.

Теорема 5.1.2. *Предположим, что $M \geqslant 5$ и для подвижной линейной системы Σ справедливо неравенство*

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) < c(\Sigma, V). \tag{5.1.1}$$

Тогда существует однозначно определенное линейное подпространство $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2, удовлетворяющее неравенству

$$\operatorname{mult}_{\sigma^{-1}(P)} \Sigma > c(\Sigma, V),$$

а для собственного прообраза Σ_P имеет место равенство

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma) = c_{\mathrm{virt}}(\Sigma_P) = c(\Sigma_P, V_P).$$

Теорема 5.1.1 выводится из теоремы 5.1.2 в несколько строк (см. § 5.2). Почти вся глава посвящена доказательству теоремы 5.1.2. Зафиксируем подвижную линейную систему Σ, удовлетворяющую неравенству (5.1.1). Переходя, если нужно, к симметрической степени системы Σ, можно считать, что

$$\Sigma \subset |2nH| = |-nK_V|,$$

где $n \geqslant 1$ – целое положительное число. Система Σ и число n фиксированы на протяжении всей работы, за исключением нескольких технических разделов (прежде всего, §§ 5.4–5.5), в которых используются независимые обозначения; это, как правило, специально оговаривается и всегда ясно из контекста. Очевидно,

$$c(\Sigma, V) = n.$$

Предложение 5.1.1 (неравенство Нётера–Фано). *Существуют бирациональный морфизм $\varphi \colon \widetilde{V} \to V$ и неприводимый исключительный дивизор $E \subset \widetilde{V}$, удовлетворяющие оценке*

$$\operatorname{ord}_E \varphi^* \Sigma > n a(E, V). \tag{5.1.2}$$

Доказательство было дано в гл. 1.

Напомним, что дивизор E (или соответствующее ему дискретное нормирование поля рациональных функций многообразия V) называется *максимальной особенностью* линейной системы Σ. Если φ есть раздутие неприводимого подмногообразия $B \subset V$ (и тогда $E = \varphi^{-1}(B)$), то последнее называется *максимальным подмногообразием* системы Σ. В этом случае (5.1.2) эквивалентно неравенству

$$\operatorname{mult}_B \Sigma > n(\operatorname{codim} B - 1).$$

В любом случае подмногообразие $B = \varphi(E)$ называется *центром* максимальной особенности E (см. гл. 1).

Эквивалентная формулировка предложения 5.1.1: пара

$$\left(V, \frac{1}{n}\Sigma\right) \tag{5.1.3}$$

не канонична, а простой дивизор $E \subset \widetilde{V}$ есть не каноническая особенность этой пары. Если вместо (5.1.2) выполнено более сильное неравенство

$$\operatorname{ord}_E \varphi^* \Sigma > n(a(E) + 1), \tag{5.1.4}$$

то E есть *лог-максимальная особенность*, пара (5.1.3) не лог-канонична, а оценка (5.1.4) есть лог-неравенство Нётера–Фано. Основная часть главы посвящена доказательству следующего факта.

Предложение 5.1.2. *Существует единственное линейное подпространство $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 такое, что подмногообразие $\sigma^{-1}(P)$ есть максимальное подмногообразие системы Σ.*

Предложение 5.1.2 доказано в §§ 5.3–5.6 в “отрицательном” варианте: предполагая, что система Σ не имеет максимальных подмногообразий вида $\sigma^{-1}(P)$, где $P \subset \mathbb{P}$ – линейное подпространство коразмерности 2, исключим последовательно все возможности для максимальной особенности системы Σ и, тем самым, придем к противоречию с предложением 5.1.1. Рассуждения, приводимые ниже, исключают и возможность того, что система Σ имеет два максимальных подмногообразия, $\sigma^{-1}(P_1)$ и $\sigma^{-1}(P_2)$, где $P_1 \neq P_2$ – различные линейные подпространства коразмерности 2.

Теперь раздуем максимальное подмногообразие $\sigma^{-1}(P)$ и на полученном (вообще говоря, особом) многообразии завершим доказательство теоремы 5.1.2, из которой теорема 5.1.1 легко следует. Эта, по смыслу рассуждения в целом заключительная, часть работы опирается лишь на предложение 5.1.2 и от содержания §§ 5.3–5.6 независима. Она помещена в § 5.2 (в предположении, что предложение 5.1.2 справедливо).

Обоснованию условий общности положения, которым должно удовлетворять двойное пространство V (предложения 5.1.3–5.1.5 ниже), посвящен § 5.7. Нет сомнений в том, что эти условия являются излишними, т.е. в том, что теоремы 5.1.1 и 5.1.2 справедливы для произвольного гладкого двойного пространства индекса 2. Однако условия общности положения существенно используются в доказательстве. Некоторые из этих условий можно было бы по крайней мере ослабить, однако это привело бы к усложнению и без того трудного и длинного доказательства. С другой стороны, мы обходимся совсем без условий общности положения или используем их не в полную силу там, где это не слишком усложняет доказательство. Некоторые типы максимальных особенностей исключены в предположении лишь гладкости многообразия V.

Отметим, что в данной главе проделана значительная часть работы и для двойных пространств размерности $M = 4$ (исключено большинство типов максимальных особенностей). Для $M = 5$ опущено рассмотрение одного из случаев при исключении бесконечно близких максимальных особенностей (см. § 5.6). Для $M \geqslant 6$ рассмотрены все возможности.

5.1.3. Формулировка условий общности положения. Основной результат настоящей главы получен в предположении, что двойное пространство V достаточно общее (т.е. дивизор ветвления $W \subset \mathbb{P}$ – достаточно общая гиперповерхность степени $2(M-1)$). Будут использованы несколько условий общности положения, три главных из которых сформулированы ниже и обоснованы в § 5.7 (показано, что общая гиперповерхность W действительно им удовлетворяет). Некоторые другие, менее значительные, условия приводятся непосредственно там, где используются.

Первое, основное, условие связано с прямыми на V. Как обычно, кривую $C \subset V$ назовем *прямой*, если выполнено равенство $(C \cdot H) = 1$. В частности, прямая есть гладкая неприводимая рациональная кривая. Имеет место

Предложение 5.1.3. *На общем многообразии V через каждую точку проходит конечное число прямых.*

Второе и третье условия связаны с линейными подпространствами (плоскостями) в $\mathbb{P}$ коразмерности 2. Рассмотрим произвольную плоскость $P \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ коразмерности 2. Пересечение $P \cap W$, вообще говоря, имеет особенности:

$$p \in \operatorname{Sing} P \cap W$$

тогда и только тогда, когда

$$P \subset T_p W.$$

Хорошо известно, что (без предположения об общности гиперповерхности W) множество $\operatorname{Sing} P \cap W$ самое большее одномерно (см., например, [12]).

Предположение об общности W позволяет усилить это утверждение.

Предложение 5.1.4. *Для общей гиперповерхности W и произвольной плоскости $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 множество $\operatorname{Sing} P \cap W$ конечно (или пусто). В частности, замкнутое множество $R = \sigma^{-1}(P)$ неприводимо, т.е. является подмногообразием, а множество его особых точек самое большее конечно.*

Третье условие характеризует особенности многообразия $\sigma^{-1}(P)$ и особенности раздутия этого многообразия на V. Если имеется квадратичная особая точка, т.е. гиперповерхностная особенность с локальным уравнением

$$0 = w_2(u_1, \ldots, u_N) + w_3(u_*) + \cdots ,$$

где $w_i(u_*)$ – однородный многочлен степени i, то скажем, что эта точка *имеет ранг* $\operatorname{rk} w_2$. При раздутии такой особенности исключительный дивизор есть квадрика $\{w_2 = 0\} \subset \mathbb{P}^{N-1}$ ранга $\operatorname{rk} w_2$.

Пусть V_P – раздутие (неприводимого согласно предложению 5.1.4) подмногообразия $\sigma^{-1}(P)$ на V.

Предложение 5.1.5. *Для общей гиперповерхности W и произвольной плоскости $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2:*

(i) *при $M \geqslant 6$ любая особенность многообразия V_P есть изолированная квадратичная точка ранга $\geqslant 4$;*

(ii) *при $M \geqslant 4$ любая особенность многообразия V_P есть изолированная квадратичная точка ранга $\geqslant 3$;*

(iii) *при $M \geqslant 6$ любая особенность многообразия $\sigma^{-1}(P)$ есть изолированная квадратичная точка ранга $\geqslant 2$.*

Свойства, сформулированные в предложениях 5.1.3–5.1.5, будут предполагаться выполненными (иногда об этом напоминается в ходе рассуждений).

5.1.4. Максимальные подмногообразия коразмерности 2. Начнем доказательство предложения 5.1.2 с того, что установим следующий факт: никакое подмногообразие коразмерности 2, кроме прообраза линейного подпространства коразмерности 2 в $\mathbb{P}$, не может быть максимальным подмногообразием системы Σ. Точнее, имеет место

Предложение 5.1.6. *Если неприводимое подмногообразие $B \subset V$ коразмерности 2 является максимальным для подвижной линейной системы $\Sigma \subset |2nH|$, т.е. имеет место неравенство $\operatorname{mult}_B \Sigma > n$, то $B = \sigma^{-1}(\overline{B})$, где $\overline{B} \subset \mathbb{P}$ – линейное подпространство коразмерности 2.*

Доказательство. Самопересечение $Z = (D_1 \circ D_2)$, $D_i \in \Sigma$, линейной системы Σ имеет H-степень $8n^2$ и содержит подмногообразие B с кратностью, строго большей чем n^2. Поэтому $\deg B \leqslant 7$. Необходимо показать, что реализуется только одна из этих возможностей: $\deg B = 2$, причем $\overline{B} = \sigma(B)$ есть $(M-2)$-плоскость в $\mathbb{P}$, т.е. двойное накрытие $\sigma^{-1}(\overline{B}) \to \overline{B}$ не распадается.

Отметим, что при $\dim V = M \geqslant 5$ имеем $A^2 V = \mathbb{Z}H^2$, так что имеются только три возможности: $B \sim H^2$ или $B \sim 2H^2$, или $B \sim 3H^2$. В частности, $\deg B \in \{2, 4, 6\}$. Однако мы исключаем ниже максимальные подмногообразия коразмерности 2 и для $M = 4$.

Исключим прежде всего случай $\deg B = 1$. Здесь $M = 4$, так что $\overline{B} \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}^4$ есть 2-плоскость, причем двойное накрытие $\sigma^{-1}(\overline{B}) \to \overline{B}$ распадается. Следовательно, кривая $\overline{B} \cap W$ всюду неприведена (это кубическая кривая с кратностью 2). Такого не может быть в силу общности гиперповерхности W (см. п. 5.1.3).

Если $B = \sigma^{-1}(\overline{B})$, то $\deg B \in \{2, 4, 6\}$. Предположим, что $\deg B \in \{4, 6\}$, т.е. $\deg \overline{B} \in \{2, 3\}$. Покажем, что эти возможности не реализуются. В самом деле, пусть $L \subset \mathbb{P}$ – общая секущая подмногообразия $\overline{B} \subset \mathbb{P}$. В силу общности кривая $C = \sigma^{-1}(L)$ неособа и неприводима, и такие кривые заметают по меньшей мере дивизор на V, так что $C \not\subset \operatorname{Bs}\Sigma$. Для общего дивизора $D \in \Sigma$ имеем $C \not\subset D$ и $(C \cdot D) = 4n$. С другой стороны, пусть $p_1 \neq p_2$ – точки пересечения $L \cap \overline{B}$; тогда (в силу общности)

$$\sigma^{-1}(p_i) = \{p_{i1}, p_{i2}\}, \qquad i = 1, 2,$$

где p_{ij} – четыре различных точки на B. Поэтому

$$4n = (C \cdot D) \geqslant \sum_{i,j} (C \cdot D)_{p_{ij}} > 4n.$$

Противоречие.

Таким образом, если $B = \sigma^{-1}(\overline{B})$, то $\overline{B} \subset \mathbb{P}$ есть $(M-2)$-плоскость, т.е. в точности то, что нам нужно.

Начиная с этого момента предполагаем, что $\sigma^{-1}\overline{B} = B \cup B'$ распадается на две неприводимые компоненты и

$$\deg B = \deg \overline{B} \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Ниже будет показано, что ни одна из этих возможностей не реализуется. Опишем прежде всего основные технические приемы, которые будут использованы для их исключения.

5.1.5. Коники на многообразии $\overline{B}$. Пусть $C \subset \overline{B}$ – неприводимая коника, $P = \langle C \rangle$ – ее линейная оболочка (2-плоскость). Предположим, что $C \not\subset W$, кривая $W \cap P$ приведена и два конечных множества

$$C \cap W \quad \text{и} \quad \operatorname{Sing}(W \cap P)$$

не пересекаются. Положим $S = \sigma^{-1}(P)$; это неприводимая поверхность с конечным множеством особых точек $\sigma^{-1}(\operatorname{Sing}(W \cap P))$. Пусть C_+ и C_- – компоненты кривой $\sigma^{-1}(C) = C_+ \cup C_-$, где $C_+ \subset B$, $C_- \subset B'$.

Лемма 5.1.1. *Поверхность S содержится в базисном множестве* $\operatorname{Bs}\Sigma$.

Доказательство. Предположим противное. Для общего дивизора $D \in \Sigma$ имеем тогда $S \not\subset D$, так что $(D \circ S)$ – эффективная кривая на S, содержащая C_+ с некоторой кратностью

$$\nu_+ \geqslant \operatorname{mult}_B \Sigma > n$$

и C_- с некоторой кратностью $\nu_- \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $H_S = H|_S$ – класс гиперплоского сечения S. В силу сказанного

$$((2nH_S - \nu_+ C_+ - \nu_- C_-) \cdot C_\pm) \geqslant 0. \tag{5.1.5}$$

Заметим, что по предположению кривые $C_\pm$ не содержат особых точек поверхности S, так что локальные индексы пересечения $(C_+ \cdot C_-)_x$ суть $(1/2)(C \cdot W)_{\sigma(x)}$ и потому

$$(C_+ \cdot C_-) = \frac{1}{2}(C \cdot W) = 2(M-1).$$

Далее, $C_+ + C_- \sim 2H_S$, откуда получаем

$$(C_+^2) = (C_-^2) = 2(3-M).$$

Таким образом, неравенства (5.1.5) принимают вид линейных неравенств

$$\begin{aligned} &4n + 2(M-3)\nu_+ - 2(M-1)\nu_- \geqslant 0, \\ &4n - 2(M-1)\nu_+ + 2(M-3)\nu_- \geqslant 0, \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

откуда получаем $\nu_\pm \leqslant n$. Противоречие. Лемма доказана.

Следствие 5.1.2. *Справедливо неравенство*

$$\deg B \geqslant 4.$$

Доказательство. Необходимо исключить два случая: $\deg B = 2$ и $\deg B = 3$. Пусть сначала $\deg B = 2$. Применяя лемму 5.1.1 к неприводимой конике $C = \overline{B} \cap P$, где $P \subset \langle \overline{B} \rangle$ – общая 2-плоскость в линейной оболочке $\overline{B}$, получаем, что

$$\sigma^{-1}(P) \subset \operatorname{Bs} \Sigma.$$

Следовательно,

$$\sigma^{-1}(\langle \overline{B} \rangle) \subset \operatorname{Bs} \Sigma,$$

что невозможно, потому что $\langle \overline{B} \rangle$ – дивизор в $\mathbb{P}$. Если $\deg B = 3$, рассуждения аналогичны: многообразие $\overline{B}$ заметается кониками, причем общая коника $C \subset \overline{B}$ удовлетворяет предположениям леммы 5.1.1. Линейные оболочки $P = \langle C \rangle$ этих коник заметают по меньшей мере дивизор в $\mathbb{P}$, что снова дает противоречие с подвижностью линейной системы Σ. Следствие доказано.

5.1.6. Секущие прямые многообразия $\overline{B}$. Пусть $C \subset \overline{B}$ – неприводимая кривая, не содержащаяся в W. Пусть $x \in \mathbb{P}$ – точка, удовлетворяющая следующим условиям общности положения:

- $x \notin C$;
- для любой точки $p \in C \cap W$ прямая $L = \langle x, p \rangle$, соединяющая точки x и p, трансверсально пересекает гиперповерхность W в точке p и не является секущей кривой C, т.е. $C \cap L = \{p\}$.

Рассмотрим конус $\Delta = \Delta(x, C)$ с вершиной в точке x и базой C. Положим $S = \sigma^{-1}(\Delta)$; это неприводимая поверхность. Пусть C_+ и C_- – опять компоненты кривой $\sigma^{-1}(C) = C_+ \cup C_-$, где $C_+ \subset B$, $C_- \subset B'$. В силу сделанных предположений все точки пересечения кривых C_+ и C_- суть гладкие точки поверхности S. Очевидно,

$$(C_+ \cdot C_-) = \frac{1}{2}(C \cdot W) = (M-1)\deg C.$$

Далее, хорошо известно (см. § 1.2), что на конусе Δ кривая C численно эквивалентна гиперплоскому сечению. Поэтому на поверхности S

$$C_+ + C_- \equiv H_S = \sigma^* H_\Delta,$$

где H_Δ – гиперплоское сечение конуса Δ. Отсюда получаем, что

$$(C_+^2) = (C_-^2) = -(M-2)\deg C.$$

Ограничение $\Sigma_S = \Sigma|_S$ системы Σ на S есть непустая линейная система кривых, содержащая $C_\pm$ с кратностью $\nu_\pm$, причем $\nu_+ \geqslant \operatorname{mult}_B \Sigma > n$. Следовательно,

$$((2nH_S - \nu_+ C_+ - \nu_- C_-) \cdot C_\pm) \geqslant 0,$$

что дает систему линейных неравенств

$$\begin{aligned} 2n - (M-1)\nu_+ + (M-2)\nu_- &\geqslant 0,\\ 2n + (M-2)\nu_+ - (M-1)\nu_- &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Отсюда немедленно получаем

Предложение 5.1.7. *Имеет место оценка*

$$\operatorname{mult}_{B'} \Sigma > \frac{M-3}{M-2} n \geqslant \frac{n}{2}. \qquad (5.1.8)$$

Доказательство. При общем выборе вершины x конуса Δ имеем $\nu_+ = \operatorname{mult}_B \Sigma$, $\nu_- = \operatorname{mult}_{B'} \Sigma$, а неравенство

$$\nu_- > \frac{M-3}{M-2} n$$

сразу следует из (5.1.7). Предложение доказано.

Отметим, что оценка (5.1.8) тем сильнее, чем выше M. Предложение 5.1.7 позволяет сразу исключить случай $\deg B = 7$.

Предложение 5.1.8. *Случай* $\deg B = 7$ *не реализуется.*

Доказательство. Предположим противное: $\deg B = 7$. Пусть $D_1, D_2 \in \Sigma$ – общие дивизоры, $Z = (D_1 \circ D_2)$ – самопересечение системы Z. Имеем неравенство

$$8n^2 = \deg Z \geqslant 7((\operatorname{mult}_B \Sigma)^2 + (\operatorname{mult}_{B'} \Sigma)^2) > 7 \cdot \frac{5}{4} n^2,$$

что невозможно. Противоречие. Предложение доказано.

Отметим, что дословное повторение этого рассуждения исключает случай $\deg B = 6$ при $M \geqslant 5$: для кратности подмногообразия B' предложение 5.1.7 дает оценку $\operatorname{mult}_{B'} \Sigma > 2n/3$, так что

$$8n^2 > 6 \cdot \left(1 + \frac{4}{9}\right) n^2 = \frac{26}{3} n^2,$$

что снова невозможно.

5.1.7. Трисекущие прямые многообразия $\overline{B}$. Осталось исключить три случая: $\deg B = 4, 5, 6$, причем в двух последних случаях $\dim V = M = 4$. Нам потребуется еще одна простая конструкция. Пусть $L \subset \mathbb{P}$ – 3-секущая многообразия $\overline{B}$, т.е. прямая, пересекающая $\overline{B}$ (по крайней мере) в трех точках вне W.

Предложение 5.1.9. *Если кривая* $\sigma^{-1}(L) = C$ *неприводима, то* $C \subset \operatorname{Bs} \Sigma$. *Если* $C = C_+ \cup C_-$ *приводима, то по крайней мере одна из компонент* $C_\pm$ *содержится в* $\operatorname{Bs} \Sigma$.

Доказательство. Пусть $D \in \Sigma$ – произвольный дивизор. Кривая C пересекает D по крайней мере в шести точках. Суммарная кратность D в этих точках не меньше чем

$$3(\operatorname{mult}_B \Sigma + \operatorname{mult}_{B'} \Sigma) > \frac{9}{2} n,$$

в то время как $C \cdot D = 4n$. Поэтому $L \subset \sigma(D)$, что и требовалось. Предложение доказано.

Таким образом, если подмногообразие $\overline{B} \subset \mathbb{P}$ имеет достаточно много 3-секущих (точнее, если они заметают по крайней мере дивизор на $\mathbb{P}$), то подмногообразие $B \subset V$ не может быть максимальным в силу подвижности линейной системы Σ.

Замечание 5.1.1. Утверждение предложения 5.1.9 (и его доказательство) остаются в силе, если прямая L пересекает $\overline{B}$ в двух различных точках вне W, причем в одной из них, скажем $\overline{x} \in L \cap \overline{B}$, касается $\overline{B}$. В этом случае кривая $C = \sigma^{-1}(L)$ касается B и B' в точках x,

x' соответственно, где $\sigma^{-1}(\overline{x}) = \{x, x'\}$, $x \in B$, $x' \in B'$, и легко видеть, что локальные индексы пересечения удовлетворяют неравенствам

$$(C \cdot D)_x \geqslant 2 \operatorname{mult}_B \Sigma,$$
$$(C \cdot D)_{x'} \geqslant 2 \operatorname{mult}_{B'} \Sigma,$$

что позволяет рассуждать дословно так же, как в случае трех различных точек. В дальнейшем, говоря о 3-секущих, будем без специальных оговорок включать и предельный случай касания.

В качестве первого приложения конструкции предложения 5.1.9 исключим случай $\deg B = 4$ (размерность $M \geqslant 4$ произвольна).

Предложение 5.1.10. *Случай* $\deg B = 4$ *не реализуется.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $P \subset \mathbb{P}$ – общая 3-плоскость. Для неприводимой кривой $B_P = \overline{B} \cap P$ в $\mathbb{P}^3$ имеются четыре возможности:

1) $B_P \subset R$ – плоская кривая, $R = \mathbb{P}^2$ – некоторая плоскость в P;
2) $B_P = Q_1 \cap Q_2$ – гладкая эллиптическая кривая, пересечение квадрик Q_1 и Q_2;
3) B_P – гладкая рациональная кривая;
4) B_P имеет двойную точку.

Возможность 1) не реализуется, потому что любая прямая $L \subset R$ есть 4-секущая. Из предложения 5.1.9 вытекает, что вся поверхность $\sigma^{-1}(R)$ содержится в базисном множестве $\operatorname{Bs} \Sigma$. Этого не может быть, потому что P – общая 3-плоскость.

В случае 2) приходим к противоречию точно так же, как в доказательстве леммы 5.1.1. А именно, пусть Q – общая квадрика, содержащая кривую B_P. На поверхности Q имеем $B_P \sim 2H_Q$, где H_Q – плоское сечение. Полагаем

$$S = \sigma^{-1}(Q), \qquad \sigma^{-1}(B_P) = C_+ \cup C_-, \quad C_+ \subset B, \quad C_- \subset B',$$

так что на S имеем

$$C_+ + C_- \sim 2H_S,$$

где $H_S = H|_S$ – класс гиперплоского сечения. Далее, рассуждаем дословно так же, как в лемме 5.1.1, и получаем неравенства (5.1.5), которые дают систему линейных неравенств (5.1.6). Этим противоречием случай 2) исключен. Отметим, что ключевую роль (как и в лемме 5.1.1) играет тот факт, что кривая B_P эквивалентна двум гиперплоским сечениям поверхности Q. В общем случае кривую можно вложить в поверхность в качестве гиперплоского сечения (с кратностью 1), что дает лишь некоторую оценку на кратность второй компоненты B', но не позволяет сразу получить противоречие.

Рассмотрим случай 3). Пусть $x \in B_P$ – точка общего положения, $\pi_x \colon B_P \to \mathbb{P}^2$ – проекция из точки x. Образ $\pi_x(B_P) \subset \mathbb{P}^2$ есть рациональная кубическая кривая, которая имеет двойную точку. Следовательно, кривая B_P имеет 3-секущую, проходящую через точку x. Поскольку P – 3-плоскость, а $x \in B_P$ – общая точка, применяем предложение 5.1.9 и получаем противоречие.

Рассмотрим случай 4). Кривая B_P имеет, конечно, единственную двойную точку. Отсюда следует, что многообразие $\overline{B}$ содержит $(M-3)$-плоскость Π двойных точек. Пусть $L \subset \Pi$ – общая прямая, $\Lambda \supset L$ – общая 3-плоскость, содержащая L. Теперь кривая $B_\Lambda = B \cap \Lambda$ есть квартика в $\mathbb{P}^3$, содержащая прямую L с кратностью 2. Следовательно,

$$B_\Lambda = C_\Lambda + 2L,$$

где C_Λ – коника (в общем случае неприводимая). Многообразие $\overline{B}$ заметается кониками C_Λ. Теперь применяем лемму 5.1.1 и получаем противоречие.

Предложение 5.1.10 доказано.

5.1.8. Исключение случаев $\deg B = 5, 6$. Напомним, что можно предполагать, что $\dim V = M = 4$ (хотя наши рассуждения работают в произвольной размерности). Пусть $P \subset \mathbb{P}$ – общая гиперплоскость (т.е. 3-плоскость), $B_P = \overline{B} \cap P$ – неприводимая кривая. Можно предполагать, что линейная оболочка кривой B_P есть $P = \mathbb{P}^3$ (иначе рассуждаем, как в случае 1) при $\deg B = 4$). Кроме того, кривая B_P не содержит особых точек кратности $\geqslant 3$ при $\deg B = 5$ и кратности $\geqslant 4$ при $\deg B = 6$ (иначе рассуждаем, как в случае 4) при $\deg B = 4$).

Пусть $\deg B = 5$. Нетрудно проверить, что через общую точку $x \in B_P$ проходит 3-секущая. В самом деле, если кривая B_P гладкая, то проекция из точки x реализует B_P как плоскую квартику $Q \subset \mathbb{P}^2$, которая не может быть гладкой: если бы кривая Q была гладкой, то по теореме Римана–Роха имели бы

$$h^0(l_Q + x) - h^1(l_Q + x) = 5 + 1 - 3 = 3,$$

где $l_Q = L \cap Q$ – сечение Q прямой $L \subset \mathbb{P}^2$. Далее,

$$h^1(l_Q + x) = h^0(-x) = 0,$$

откуда $h^0(l_Q + x) = 3$, в то время как $l_Q + x$ есть плоское сечение гладкой кривой $B_P \subset \mathbb{P}^3$ и потому $h^0(l_Q + x) \geqslant 4$. Противоречие. Значит, квартика Q имеет особенности, а B_P – 3-секущую, проходящую через точку x. Теперь предложение 5.1.9 дает противоречие.

Следовательно, кривая B_P имеет $\delta \geqslant 1$ двойных точек. Пусть $p \in \operatorname{Sing} B_P$ – двойная точка. Проекция $\pi_p \colon B_P \to \mathbb{P}^2$ из точки p реализует B_P как плоскую кубику с $\geqslant (\delta - 1) \geqslant 0$ двойными точками, т.е. кривую рода $\leqslant 2 - \delta$. С другой стороны, проекция $\pi_x \colon B_P \to \mathbb{P}^2$ из общей точки $x \in B_P$ реализует B_P как плоскую квартику с $\delta^* \geqslant \delta$ двойными точками, т.е. кривую рода $3 - \delta^*$. Следовательно, имеем неравенство $\delta^* \geqslant \delta + 1$, т.е. через точку x проходит 3-секущая $L \subset P$, не содержащая двойных точек кривой B_P. Теперь можно применить предложение 5.1.9 и получить противоречие. Этим случай $\deg B = 5$ исключен.

Пусть $\deg B = 6$. Тот факт, что кривая B_P не может быть гладкой, доказывается, как аналогичный факт для $\deg B = 5$. Предположим, что точка $p \in B_P$ имеет кратность 3. Сравнивая кривые

$$\pi_p(B_P) \subset \mathbb{P}^2 \quad \text{и} \quad \pi_x(B_P) \subset \mathbb{P}^2,$$

где x – общая точка, исключаем эту возможность такими же рассуждениями, как в случае кривой степени 5 с особенностями. Поэтому можно предполагать, что кривая B_P содержит $\delta \geqslant 1$ двойных точек и не содержит точек более высокой кратности.

Теперь рассуждаем дословно так же, как при $\deg B = 5$: сравниваем кривую $\pi_p(B_P) \subset \mathbb{P}^2$ степени 4 с $\geqslant (\delta - 1) \geqslant 0$ двойными точками ($p \in \operatorname{Sing} B_P$ – одна из особых точек) с кривой $\pi_x(B_P) \subset \mathbb{P}^2$ степени 5 с $\delta^* \geqslant \delta$ двойными точками. Получаем, что у B_P имеется 3-секущая, проходящая через точку $x \in B_P$ общего положения и не содержащая особых точек кривой B_P. (Если кривая $\pi_p(B_P) \subset \mathbb{P}^2$ есть коника, т.е. $\deg \pi_p = 2$, то B_P содержится в квадратичном конусе с вершиной p, причем можно предполагать, что B_P не имеет других двойных точек. В этом случае род кривой B_P легко вычисляется и устанавливается существование 3-секущей, проходящей через точку общего положения.) Применяя предложение 5.1.9, получаем противоречие. Случай $\deg B = 6$ исключен.

Этим доказательство предложения 5.1.6 завершено.

§ 5.2. Структуры рационально связного расслоения

В этом параграфе доказаны основные результаты работы – теоремы 5.1.1 и 5.1.2 – в предположении, что справедливо предложение 5.1.2 о максимальном подмногообразии коразмерности 2.

5.2.1. Расслоение Фано над $\mathbb{P}^1$. Согласно предложению 5.1.2 существует (и единственно) линейное подпространство $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2, удовлетворяющее оценке

$$\operatorname{mult}_R \Sigma > n,$$

где $R = \sigma^{-1}(P)$ – неприводимое многообразие самое большее с нульмерными особенностями (предложение 5.1.4). Пусть $\varphi\colon V^+ \to V$ – раздутие (возможно, особого) подмногообразия $R = \sigma^{-1}(P)$, $E = \varphi^{-1}(R)$ – исключительный дивизор.

Лемма 5.2.1. (i) *Многообразие V^+ факториально и имеет самое большее конечное число изолированных двойных точек (не обязательно невырожденных).*

(ii) *Линейная проекция $\pi_{\mathbb{P}}\colon \mathbb{P} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ из плоскости P порождает регулярную проекцию*

$$\pi = \pi_{\mathbb{P}} \circ \sigma \circ \varphi\colon V^+ \to \mathbb{P}^1,$$

общий слой которой $F_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{P}^1$ – неособое многообразие Фано индекса 1, а конечное число особых слоев имеют изолированные двойные точки.

(iii) *Имеют место равенства*

$$\operatorname{Pic} V^+ = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}E = \mathbb{Z}K^+ \oplus \mathbb{Z}F,$$

где $H = \varphi^* H$ для упрощения обозначений, $K^+ = K_{V^+}$ – канонический класс многообразия V^+, F – класс слоя проекции π, причем

$$K^+ = -2H + E, \qquad F = H - E.$$

Доказательство. Эти утверждения непосредственно вытекают из определения раздутия φ, предложения 5.1.4 и хорошо известного факта: изолированная гиперповерхностная особенность многообразия размерности $\geqslant 4$ факториальна (см. [55]).

Пусть Σ^+ – собственный прообраз системы Σ на раздутии V^+ подмногообразия R.

Предложение 5.2.1. *Имеет место равенство*

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma^+) = c(\Sigma^+, V^+).$$

Доказательство теоремы 5.1.2 получается простым объединением предложения 5.1.2 и предложения 5.2.1.

Следствие 5.2.1. *Предположим, что $c_{\mathrm{virt}}(\Sigma^+) = 0$. Тогда система Σ^+ составлена из пучка $|H - R|$, т.е.*

$$\Sigma^+ \subset |2nF|.$$

Доказательство. Предположим противное:

$$\Sigma^+ \subset |-mK^+ + lF|,$$

где $m \geqslant 1$. В силу части (iii) леммы 5.2.1

$$m = 2n - \nu, \qquad l = 2\nu - 2n \geqslant 2,$$

так что для порога канонического присоединения имеем

$$c(\Sigma^+, V^+) = m.$$

Поскольку $c_{\mathrm{virt}}(\Sigma^+) = 0$, в силу предложения 5.2.1 получаем $m = 0$, что и утверждалось. Следствие доказано.

Доказательство теоремы 5.1.1. В качестве линейной системы Σ возьмем собственный прообраз относительно χ любой линейной системы вида $\lambda^*\Lambda$, где Λ – подвижная система на базе S. Применение теоремы 5.1.2 (или следствия 5.2.1) завершает доказательство.

5.2.2. Подвижные линейные системы на многообразии V^+. Начнем доказательство предложения 5.2.1 с хорошо известного шага: предположим, что справедливо неравенство

$$c_{\mathrm{virt}}(\Sigma^+) < c(\Sigma^+, V^+) = m.$$

Тогда пара

$$\left(V^+, \frac{1}{m}\Sigma^+\right) \tag{5.2.1}$$

не канонична, так что линейная система Σ^+ обладает максимальной особенностью, т.е. для некоторого бирационального морфизма $\psi\colon \widetilde{V} \to V^+$ и неприводимого исключительного дивизора $E^+ \subset \widetilde{V}$ выполнено неравенство Нётера–Фано

$$\nu_E(\Sigma^+) > ma(E^+, V^+).$$

Лемма 5.2.2. *Центр максимальной особенности E^+ содержится в некотором слое $F_t = \pi^{-1}(t)$, т.е.*

$$B = \pi \circ \psi(E^+) = t \in \mathbb{P}^1.$$

Доказательство. Предположим противное: $\pi \circ \psi(E^+) = \mathbb{P}^1$. Ограничивая линейную систему Σ^+ на слой общего положения $F = F_s$, получим, что пара

$$\left(F, \frac{1}{m}\Sigma_F\right)$$

не канонична, где $\Sigma_F \subset |-mK_F|$. Однако F – гладкое двойное пространство индекса 1, и хорошо известно [13], что это невозможно. Лемма доказана.

Для упрощения обозначений пусть $F = F_t$ – слой, содержащий центр особенности E^+.

Предложение 5.2.2. *Центр B есть особая точка слоя F.*

Доказательство. Поскольку антиканоническая степень дивизора $D_F \in \Sigma_F$ есть $2m$, а в силу общности дивизора ветвления антиканоническая степень любого подмногообразия коразмерности 1 на F не меньше 2, имеем неравенство $\operatorname{codim}_F B \geqslant 2$, так что

$$\operatorname{codim}_{V^+} B \geqslant 3.$$

В обозначениях п. 5.2.1 пусть $\Pi = \sigma \circ \varphi(F) \subset \mathbb{P}$ – гиперплоскость, соответствующая слою F. Легко видеть, что

$$\sigma_F = \sigma \circ \varphi\colon F \to \Pi = \mathbb{P}^{M-1}$$

есть двойное накрытие, разветвленное над $W_\Pi = W \cap \Pi$: раздутие φ не изменяет дивизоры – элементы пучка $|H - R|$. Теперь необходимо рассмотреть два случая:

1) $\sigma_F(B) \not\subset W_\Pi$;
2) $\sigma_F(B) \subset W_\Pi$, но общая точка подмногообразия B есть неособая точка слоя F.

Случай 1) исключается рассуждениями из [51]. Пусть $o \in B$ – точка общего положения,

$$\lambda\colon F^\sharp \to F$$

– ее раздутие, $E^\sharp = \lambda^{-1}(o) \subset F^\sharp$ – исключительный дивизор, $E^\sharp \cong \mathbb{P}^{M-2}$. В силу обращения присоединения для общего дивизора $D \in \Sigma^+$ пара

$$\left(F, \frac{1}{m}D_F\right) \tag{5.2.2}$$

не лог-канонична в B, так что согласно [51; предложение 3] найдется гиперплоскость $\Lambda\subset E^\sharp$, удовлетворяющая неравенству

$$\mathrm{mult}_o D_F + \mathrm{mult}_\Lambda D_F^\sharp > 2m,$$

где $D_F^\sharp$ – собственный прообраз дивизора D_F на $F^\sharp$. Теперь рассуждения из [51; п. 2.2] дают противоречие.

Рассмотрим случай 2). Если $\dim B\geqslant 1$, то для точки $o\in B$ общего положения пересечение дивизоров

$$T_pW_\Pi \quad \text{и} \quad \sigma_F(D_F),$$

где $p=\sigma_F(o)$, имеет коразмерность 2 (в силу условия общности положения для любой гиперплоскости $\Lambda\subset\Pi$ имеем $\dim\mathrm{Sing}\,\Lambda\cap W=0$, так что касательные гиперплоскости T_pW_Π, $p\in B$, образуют $\dim B$-мерное семейство). В частности, теоретико-схемное пересечение

$$(\sigma_F^{-1}(T_pW_\Pi)\circ D_F)$$

есть эффективный цикл коразмерности 2 на F, имеющий H-степень $2m$ и кратность в точке o, не меньшую чем

$$2\,\mathrm{mult}_o D_F > 2m,$$

что невозможно.

Итак, осталось рассмотреть случай, когда $B=o$ есть гладкая точка на дивизоре ветвления морфизма σ_F. Поскольку условие не лог-каноничности пары (5.2.2) линейно по дивизору $D_F\in|-mK_F|$, можно предполагать, что D_F – простой дивизор. Положим $\Lambda=T_pW_\Pi$. Если

$$D_F\neq\sigma_F^{-1}(\Lambda),$$

то рассуждаем, как выше в случае $\dim B\geqslant 1$. Покажем, что равенство $D_F=\sigma_F^{-1}(\Lambda)$ невозможно. Это можно сделать, анализируя возможные особенности пересечения $W_\Pi\cap\Lambda$ для гиперповерхности W общего положения. Мы приведем более простое рассуждение. А именно, если пара (5.2.2) не лог-канонична для $D_F=\sigma_F^{-1}(\Lambda)$, то согласно [18], [56] не лог-канонична и пара

$$\left(\Pi, \Lambda+\frac{1}{2}W_\Pi\right),$$

откуда, в свою очередь, следует, что пара

$$\left(\Lambda, \frac{1}{2}W_\Lambda\right)$$

не лог-канонична, $W_\Lambda=(W\circ\Lambda)=W\cap\Lambda$. Однако, как отмечено выше, ограничение W_Λ имеет лишь изолированные двойные точки в качестве особенностей. Полученное противоречие доказывает предложение 5.2.2.

Пусть $B=o$ – центр максимальной особенности E^+.

Предложение 5.2.3. *Точка o есть особенность многообразия V^+.*

Доказательство. Предположим противное: точка $o\in V^+$ неособа. Поскольку пара (5.2.1) не канонична, имеем неравенство

$$\mathrm{mult}_o\Sigma^+ > m,$$

откуда в силу предложения 5.2.2 следует, что

$$\mathrm{mult}_o D_F > 2m$$

(потому что $o\in F$ – особая точка слоя). Как отмечено выше, это невозможно, что и доказывает предложение.

5.2.3. Центр максимальной особенности – особая точка многообразия V^+. Выше было показано, что центр максимальной особенности E^+ есть особая точка $o \in V^+$, что и будем предполагать. Пусть теперь

$$\lambda\colon V^\sharp \to V^+$$

– раздутие точки o, $E^\sharp = \lambda^{-1}(o) \subset V^\sharp$ – исключительный дивизор, который можно рассматривать как квадратичную гиперповерхность в $\mathbb{P}^M$.

Напомним (предложение 5.1.5), что при $M \geqslant 6$ можно предполагать, что для общей гиперповерхности $W \subset \mathbb{P}$, произвольной плоскости $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 и любой особенности $o \in V^+$ ранг квадрики $E^\sharp$ не меньше 4.

Определим число $\beta \in \mathbb{Z}_+$ соотношением

$$D^\sharp \sim \lambda^* D - \beta E^\sharp,$$

где $D \in \Sigma^+$ – общий дивизор, $D^\sharp$ – его собственный прообраз на $V^\sharp$. Согласно доказываемому ниже предложению 5.2.4 из предложения 5.1.5 следует неравенство

$$\beta > m.$$

Далее, дивизор

$$\lambda_F^* D_F - \beta E_F^\sharp$$

на собственном прообразе $F^\sharp \subset V^\sharp$ эффективен (здесь λ_F и $E_F^\sharp$ означают раздутие точки $o \in F$ и исключительный дивизор $\lambda_F^{-1}(o)$ соответственно). Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\operatorname{mult}_o D_F \geqslant 2\beta > 2m,$$

что невозможно. Предложение 5.2.1 для $M \geqslant 6$ полностью доказано.

5.2.4. Максимальная особенность над квадратичной точкой. Рассмотрим следующую локальную ситуацию. Пусть $o \in X$ – росток изолированной квадратичной особенности, $\dim X \geqslant 3$. Раздуем точку o:

$$\lambda\colon X^+ \to X,$$

через E обозначим исключительный дивизор $\lambda^{-1}(o)$, который будем рассматривать как квадратичную гиперповерхность

$$E \subset \mathbb{P}^{\dim X}.$$

Пусть, далее, D – эффективный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор на многообразии X, D^+ – его собственный прообраз на X^+. Предполагая исключительную квадрику E неприводимой, определим число $\beta \in \mathbb{Q}_+$ соотношением

$$D^+ \sim \lambda^* D - \beta E.$$

Предложение 5.2.4. *Предположим, что ранг квадратичной гиперповерхности E не меньше 4, а пара*

$$(X, D)$$

имеет точку o изолированным центром не канонической особенности, т.е. она не канонична, но канонична вне точки o. Тогда имеет место неравенство

$$\beta > 1.$$

Доказательство. Если $\dim X = 3$, то в силу предположения точка $o \in X$ есть невырожденная квадратичная особенность, и этот факт хорошо известен [41]. (Если $\beta \leqslant 1$, то пара (X^+, D^+) не канонична, так что в силу обращения присоединения пара (E, D_E^+) не лог-канонична, но $E\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ и D_E^+ – эффективная кривая бистепени (β,β), что невозможно [38].) Если $\dim X\geqslant 4$, то, ограничивая D на общее гиперплоское сечение $Y\ni o$ многообразия X относительно какого-нибудь вложения $X\hookrightarrow\mathbb{P}^N$ и повторяя эту процедуру $\dim X-3$ раз, сводим задачу (в силу обращения присоединения) к уже разобранному случаю $\dim X=3$. Предложение полностью доказано.

5.2.5. Двойные пространства размерности 5. Предположим, что $M=\dim V=5$. Пусть особая точка $o\in V^+$ является изолированным центром не лог-канонических особенностей пары $(V^+,(1/m)\Sigma^+)$. Слой $F\ni o$ есть дивизор Картье, так что точка o является центром не лог-канонической особенности пары

$$\left(F,\frac{1}{m}D_F\right), \tag{5.2.3}$$

где $D_F\in\Sigma^+|_F$ – общий дивизор, $D_F\sim -mK_F$. В силу рассуждений п. 5.2.2 точка o есть изолированный центр не лог-канонических особенностей этой пары. Если квадратичная особенность $o\in F$ имеет ранг 4 или 5, то рассуждаем, как при $M\geqslant 6$, и приходим к противоречию. Поскольку в силу условий общности положения ранг квадратичной точки $o\in F$ не меньше 3, предполагаем, что он равен 3.

Многообразие F реализуется как двойное накрытие

$$\sigma_F\colon F\to\mathbb{P}^4,$$

порожденное морфизмом σ. Согласно доказываемому ниже предложению 5.2.8 в силу условий общности положения (см. предложение 5.2.7) пара (5.2.3) лог-канонична при $m=1$. Теперь предложение 5.2.1 для $M=5$ вытекает из следующего утверждения.

Предложение 5.2.5. *Для любого эффективного дивизора Картье $D\sim -mK_F$ на F пара*

$$\left(F,\frac{1}{m}D\right) \tag{5.2.4}$$

лог-канонична.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $m\geqslant 2$ (как отмечено выше, при $m=1$ утверждение предложения справедливо). Достаточно показать, что из не лог-каноничности пары (5.2.4) следует не лог-каноничность аналогичной пары с меньшим значением параметра $m\geqslant 2$.

Можно предполагать, что точка o является изолированным центром не лог-канонических особенностей пары (5.2.4). Для общей поверхности $S\ni o$ (сечения ростка $o\in F$ двумя общими гиперплоскостями относительно какого-либо проективного вложения) пара

$$\left(S,\frac{1}{m}D_S\right),$$

где $D_S=D|_S$, не лог-канонична в точке o в силу обращения присоединения. С другой стороны, точка o есть изолированный центр не лог-канонических особенностей этой пары: в противном случае на F имеется дивизор T такой, что

$$D=aT+D_1,$$

где $a>m$ и D_1 эффективен, что невозможно. Особенность $o\in S$ – невырожденная квадратичная точка.

Пусть

$$\psi\colon F^\sharp\to F,\qquad \overline{\psi}\colon\mathbb{P}^\sharp\to\mathbb{P}^4$$

– раздутия точек $o \in F$ и $p = \sigma_F(o) \in \mathbb{P}^4$. Обозначим исключительные дивизоры раздутий ψ и $\overline{\psi}$ через $E^\sharp$ и $\overline{E}^\sharp$ соответственно. Очевидно, $\overline{E}^\sharp \cong \mathbb{P}^3$, а σ_F продолжается до двойного накрытия

$$\sigma_\sharp \colon F^\sharp \to \mathbb{P}^\sharp,$$

которое на уровне исключительных дивизоров дает двойное накрытие

$$\sigma_E = \sigma_\sharp|_{E^\sharp} \colon E^\sharp \to \overline{E}^\sharp.$$

Положим

$$\psi^* D = D^\sharp + \nu E^\sharp,$$

где $D^\sharp$ – собственный прообраз. Если $\nu > m$, то, как и выше, имеем $\operatorname{mult}_o D > 2m$, что невозможно. Поэтому предполагаем, что $\nu \leqslant m$. Применяя доказываемое ниже предложение 5.2.6 к паре $(S, (1/m)D_S)$, заключаем, что на квадрике $E^\sharp$ имеется плоскость $P \cong \mathbb{P}^2$ такая, что центр любой не лог-канонической особенности пары $(S, (1/m)D_S)$ на собственном прообразе $S^\sharp \subset F^\sharp$ есть точка $P \cap S^\sharp$. Очевидно, $\sigma_E(P)$ – плоскость в $\overline{E}^\sharp \cong \mathbb{P}^3$.

Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – единственная гиперплоскость такая, что

$$Q^\sharp \cap \overline{E}^\sharp = \sigma_E(P)$$

(как всегда, $Q^\sharp \subset \mathbb{P}^\sharp$ – собственный прообраз). Положим

$$\Pi = \sigma_F^{-1}(Q) \subset F.$$

Дивизор Π неприводим, причем

$$\Pi^\sharp \cap E^\sharp \supset P.$$

Запишем теперь

$$D = a\Pi + D^*,$$

где $a \in \mathbb{Z}_+$ и D^* эффективен и не содержит Π компонентой.

Лемма 5.2.3. *Справедливо неравенство $a \geqslant 1$. Пара*

$$\left(F, \frac{1}{m^*} D^*\right) \tag{5.2.5}$$

не лог-канонична в точке o, где $m^* = m - a$.

Доказательство. В силу условий общности положения пара (F, Π) лог-канонична. Теперь по линейности заключаем, что пара (5.2.5) не лог-канонична в точке o, причем в силу рассуждений п. 5.2.2 имеет эту точку изолированным центром не лог-канонических особенностей. Этим второе утверждение леммы доказано.

Однако при $a = 0$ оно тривиальным образом справедливо: $m^* = m$ и $D^* = D$. Покажем, что на самом деле $a \geqslant 1$. Действительно, согласно предложению 5.2.6 (которое, напомним, доказывается ниже) имеет место неравенство

$$\operatorname{mult}_P D^\sharp + 2\nu > 2m. \tag{5.2.6}$$

Если $a = 0$, то Π не содержится в носителе дивизора D, так что корректно определен эффективный цикл

$$Y = (\Pi \circ D)$$

коразмерности 2 на F. В силу (5.2.6) имеем

$$\operatorname{mult}_o Y > 2m,$$

но в то же время $\deg Y = 2m$. Противоречие. Лемма доказана.

Поскольку пара (5.2.5), где $D^* \sim -m^* K_F$, имеет точку $o \in F$ изолированным центром не лог-канонической особенности и $m^* < m$, применяем предположение индукции и завершаем доказательство предложения 5.2.5.

Теперь и предложение 5.2.1 доказано для $M = 5$.

5.2.6. Не лог-каноническая особенность над особой точкой поверхности. Рассмотрим следующую локальную ситуацию. Пусть $o \in S$ – росток невырожденной двойной точки на поверхности S (т.е. росток, аналитически изоморфный ростку

$$(0,0,0) \in \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^3).$$

Пусть

$$\varphi\colon S^+ \to S$$

– раздутие двойной точки o, $E = \varphi^{-1}(o)$ – исключительная коника. Предположим, что C – эффективный 1-цикл на S, причем для некоторого положительного m пара

$$\left(S, \frac{1}{m} C\right) \tag{5.2.7}$$

не лог-канонична в точке o, но лог-канонична вне этой точки. Определим число $\nu \in \mathbb{Z}_+$ соотношением

$$C^+ \sim \varphi^* C - \nu E,$$

C^+ – собственный прообраз 1-цикла C на S^+. Аналогом предложения 3 в [51] для двойной точки является

Предложение 5.2.6. *Существует точка $q \in E$ такая, что*

$$2\nu + \operatorname{mult}_q C^+ > 2m. \tag{5.2.8}$$

Доказательство. Отметим, что если исключительная коника E реализует не лог-каноническую особенность пары $(S, (1/m)C)$, то выполнено неравенство $\nu > m$, т.е. (5.2.8) справедливо для любой точки $q \in E$. Если же $\nu \leqslant m$, то из принципа связности следует, что центр любой не лог-канонической особенности пары (5.2.7) есть некоторая однозначно определенная (этой парой) точка $q \in E$. Мы докажем, что неравенство (5.2.8) выполнено для этой точки.

Пусть

$$\varphi_i\colon S_i \to S_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{5.2.9}$$

– последовательность раздутий точек – центров фиксированной не лог-канонической особенности пары (5.2.7). Точнее, пусть

$$\beta\colon \widetilde{S} \to S^+$$

– некоторый бирациональный морфизм, $E^+ \subset \widetilde{S}$ – неприводимая исключительная кривая, реализующая не лог-каноническую особенность пары (5.2.7), т.е. справедливо лог-неравенство Нётера–Фано

$$\nu_{E^+}(C) > m(a(E^+, S) + 1).$$

По предположению $\beta(E^+)$ есть точка $q \in E$. Определим последовательность раздутий (5.2.9), полагая

$$S_0 = S, \qquad S_1 = S^+,$$

φ_i раздувает точку

$$x_{i-1} = \operatorname{centre}(E^+, S_{i-1}), \qquad i = 1, \ldots, N$$

(так что $x_0 = o$, $x_1 = q$), и последняя исключительная кривая

$$E_N = \varphi_N^{-1}(x_{N-1}) \subset S_N$$

реализует E^+. Исключительные кривые обозначим, как обычно, через

$$E_i = \varphi_i^{-1}(x_{i-1}) \subset S_i,$$

так что $E_1 = E$. Пусть

$$\nu_i = \operatorname{mult}_{x_{i-1}} C^{i-1} \in \mathbb{Z}_+,$$

где C^{i-1} – собственный прообраз цикла C на S_{i-1}, $i = 2, \ldots, N$, и $\nu_1 = \nu$. Лог-неравенство Нётера–Фано переписывается в традиционном виде:

$$p_1\nu + \sum_{i=2}^{N} p_i\nu_i > m\left(\sum_{i=2}^{N} p_i + 1\right), \tag{5.2.10}$$

где $p_i = p_{Ni}$ – число путей из вершины N в вершину i в графе последовательности раздутий (5.2.9). Обратим внимание на то, что в (5.2.10) в правой части отсутствует компонента с $i = 1$, потому что дискрепантность E равна нулю. Кратности ν_i удовлетворяют системе линейных неравенств

$$\nu_i \geqslant \sum_{j \to i} \nu_j, \qquad i = 2, \ldots, N, \tag{5.2.11}$$

и, кроме того,

$$2\nu \geqslant \sum_{j \to 1} \nu_j. \tag{5.2.12}$$

Наконец, $\nu_N \geqslant 0$. Неотрицательность остальных чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{N-1}$ следует из (5.2.11), (5.2.12). Для простоты записи обозначим через (5.2.10)* *нестрогое* лог-неравенство Нётера–Фано, т.е. неравенство (5.2.10), в котором знак $>$ заменен на $\geqslant$. Наконец, через $\mathcal{L}$ обозначим систему нестрогих линейных неравенств (5.2.10)*, (5.2.11), (5.2.12) и $\nu_N \geqslant 0$.

Покажем, что если набор вещественных чисел

$$\nu_1, \ldots, \nu_N$$

удовлетворяет системе $\mathcal{L}$, то справедлива оценка

$$2\nu_1 + \nu_2 \geqslant 2m. \tag{5.2.13}$$

Отсюда немедленно вытекает неравенство (5.2.8).

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ – выпуклое подмножество, задаваемое системой $\mathcal{L}$. Очевидно, линейная функция $2\nu_1 + \nu_2$ ограничена снизу на Λ, причем точная нижняя грань есть минимум, который достигается в точке

$$v = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Можно считать, что точка v – одна из вершин множества Λ, т.е. N неравенств из системы $\mathcal{L}$ в этой точке являются равенствами.

Лемма 5.2.4. *Предположим, что $\theta_N = 0$. Тогда существует $K \in \{2, \ldots, N-1\}$ такое, что выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^{K} p_{Ki}\theta_i > m\left(\sum_{i=2}^{K} p_{Ki} + 1\right). \tag{5.2.14}$$

Рассуждая по индукции по длине N разрешения особенности E^+, получаем оценку (5.2.13) в случае $\theta_N = 0$.

Доказательство леммы 5.2.4. Поскольку кривая

$$\bigcup_{i=1}^{N} E_i^N$$

есть дивизор с нормальными пересечениями на неособой поверхности, вершина N соединена стрелками с одной или двумя вершинами: всегда

$$N \to N-1$$

и, возможно, $N \to L$ для некоторого $L \leqslant N-2$. Первая возможность – тривиальный случай; мы разберем вторую (из наших рассуждений с упрощениями следует и утверждение леммы в первом случае). Полагая $p_{ij} = 0$ при $i < j$, по определению графа инцидентности получаем

$$p_{Ni} = p_{N-1,i} + p_{L,i}$$

для любого $i \leqslant N-1$. Теперь неравенство (5.2.10)* с учетом того, что $\theta_N = 0$, можно переписать в следующем виде:

$$\left(\sum_{i=1}^{N-1} p_{N-1,i}\theta_i - m\left(\sum_{i=2}^{N-1} p_{N-1,i} + 1\right)\right) + \left(\sum_{i=1}^{L} p_{Li}\theta_i - m\left(\sum_{i=2}^{L} p_{Li} + 1\right)\right) \geqslant 0,$$

откуда следует, что неравенство (5.2.14) справедливо либо при $K = N-1$, либо при $K = L$ (либо для обоих этих значений). Лемма доказана.

Таким образом, можно считать, что $\theta_N > 0$, и поэтому для вектора v неравенства (5.2.10)*, (5.2.11) и (5.2.12) являются равенствами. Отсюда следует, что для $\theta = \theta_N$

$$\theta_i = p_i\theta, \qquad i = 2, \ldots, N,$$

и

$$\theta_1 = \frac{1}{2} p_1 \theta,$$

так что θ находится из уравнения

$$\left(\frac{1}{2} p_1^2 + \sum_{i=2}^{N} p_i^2\right)\theta = \left(\sum_{i=2}^{N} p_i + 1\right) m.$$

Значение линейной функции $2\nu_1 + \nu_2$ на векторе v есть $(p_1 + p_2)\theta$, так что неравенство (5.2.13) вытекает из следующего комбинаторного факта.

Лемма 5.2.5. *Имеет место неравенство*

$$(p_1 + p_2)\left(\sum_{i=2}^{N} p_i + 1\right) \geqslant p_1^2 + 2\sum_{i=2}^{N} p_i^2. \tag{5.2.15}$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу N вершин в графе инцидентности. Если $N = 2$, то $p_1 = p_2 = 1$ и (5.2.15) справедливо. Далее, неравенство

$$(p_2 + p_3)\left(\sum_{i=3}^{N} p_i + 1\right) \geqslant p_2^2 + 2\sum_{i=3}^{N} p_i^2$$

справедливо по предположению индукции. Чтобы получить (5.2.15), достаточно установить оценку

$$(p_1+p_2)p_2+(p_1-p_3)\left(\sum_{i=3}^{N}p_i+1\right)\geqslant p_1^2+p_2^2. \tag{5.2.16}$$

В § 1.2 было доказано, что справедливо неравенство

$$\sum_{i=3}^{N}p_i+1\geqslant p_1,$$

так что (5.2.16) вытекает из оценки

$$(p_1+p_2)p_2+(p_1-p_3)p_1\geqslant p_1^2+p_2^2,$$

которая очевидна, так как $p_2\geqslant p_3$.

Лемма 5.2.5 и предложение 5.2.6 полностью доказаны.

5.2.7. Дополнительные условия общности положения для $M=5$. Предполагаем, что $M=5$. Для произвольной точки $p\in W$ положим

$$T(p)=\sigma^{-1}(T_pW).$$

Пусть

$$\varphi\colon T^+(p)\to T(p)$$

– раздутие изолированной особой точки $o=\sigma^{-1}(p)$ с исключительным дивизором $E(p)$ – трехмерной квадрикой в $\mathbb{P}^4$. Положим

$$Y_i=\{p\in W\mid \operatorname{rk}E(p)=i\}\subset W.$$

Предложение 5.2.7. *Для общего многообразия V имеем*

$$\operatorname{rk}E(p)\geqslant 3,$$

т.е. $Y_1=Y_2=\varnothing$. Далее, $\dim Y_3=1$. Для точки $p\in Y_3$ особенности многообразия $T(p)$ имеют следующий вид:

1) *для точки $p\in Y_3$ общего положения на прямой $L=\operatorname{Sing}E(p)$ лежат три различные особые точки многообразия $T^+(p)$, которые суть невырожденные квадратичные точки, и других особенностей на $E(p)$ многообразие $T^+(p)$ не имеет*;
2) *для конечного множества точек $p\in Y_3$, для которых не выполнено условие 1), на прямой $L=\operatorname{Sing}E(p)$ лежат две различные особые точки p_1 и p_2 многообразия $T(p)$. Других особеностей на $E(p)$ многообразие $T(p)$ не имеет. Одна из этих точек (скажем, p_1) – невырожденная квадратичная особенность. Точка p_2 – изолированная квадратичная точка ранга 4. Ее раздутие*

$$\varphi_\sharp\colon T^\sharp(p)\to T^+(p)$$

имеет единственную особую точку p_3 на исключительном дивизоре $E^\sharp=\varphi_\sharp^{-1}(p_2)$ – вершину конуса $E^\sharp$, причем $p_3\in T^\sharp(p)$ – невырожденная квадратичная точка.

Доказательство. Проведем несложный подсчет размерностей для локального уравнения

$$y^2=q_2(z_1,z_2,z_3,z_4)+q_3(z_*)+\cdots$$

многообразия $T(p)$ в точке o. Для точки $p \in Y_3$ особенности многообразия $T^+(p)$ соответствуют нулям многочлена

$$q_3(z_*)|_L$$

на вершинной прямой L квадрики $E(p)$. Если три корня различны, получаем случай 1). Если один из корней двойной, то получаем случай 2), где точка $p_2 \in L$ соответствует двойному корню. Простые вычисления оставляем читателю. Доказательство закончено.

Предложение 5.2.8. *Для общего многообразия V, произвольной точки $p \in Y_3$ и произвольной гиперплоскости $R \subset T_pW$, $R \ni p$, пара*

$$(T(p), \Pi = \sigma^{-1}(R))$$

канонична в точке o.

Доказательство. Поскольку

$$\mathrm{mult}_o \Pi = a(E, T) = 2,$$

где $E = E(p)$, $T = T(p)$ для простоты обозначений, достаточно доказать каноничность пары

$$(T^+, \Pi^+),$$

где $\Pi^+ \subset T^+$ – собственный прообраз дивизора Π.

Пусть

$$y^2 = q_2^*(z_1, z_2, z_3) + q_3^*(z_*) + \cdots$$

– локальное уравнение многообразия Π. Если $\mathrm{rk}\, q_2^* = 3$, то $o \in \Pi$ – обыкновенная двойная точка, и доказывать нечего. Если $\mathrm{rk}\, q_2^* = 2$, то нетрудно проверить, что особенности Π над точкой o разрешаются последовательностью $k \leqslant 6$ раздутий изолированных квадратичных точек ранга $\geqslant 3$. В этом случае каноничность пары (T, Π) также очевидна.

Предположим, что $\mathrm{rk}\, q_2^* = 1$. Это накладывает три независимых условия на Π (точнее, на многочлен $f|_R$), так что имеется 4-мерное семейство подпространств $R \subset \mathbb{P}$, для которых Π обладает этим свойством. Пусть

$$E_\Pi = \Pi^+ \cap E$$

– исключительная квадрика ранга 2 в $\mathbb{P}^3$, т.е. пара плоскостей, $L = \mathrm{Sing}\, E_\Pi$ – прямая их пересечения.

Если

$$q_3^*|_L \equiv 0$$

(это накладывает дополнительные четыре независимых условия на Π, так что имеется лишь конечное число таких пар), то пусть

$$\varphi_L \colon \Pi_L \to \Pi^+$$

– раздутие прямой L. Легко проверяется, что Π_L имеет конечное число изолированных двойных точек, разрешаемых одним раздутием. Каноничность пары (T, Π) теперь очевидна с учетом того, что

$$\mathrm{mult}_L \Pi^+ = a(L, T^+) = 2.$$

Предположим, что $q_3^*|_L \not\equiv 0$, т.е. в общей точке прямой L многообразие Π^+ неособо. Достаточно проверить каноничность пары (T^+, Π^+) в особых точках многообразия Π^+ на прямой L. Явные вычисления в локальных координатах (они элементарны, но громоздки, и мы их не приводим) показывают, что особенности дивизора Π^+ разрешаются последовательностью раздутий изолированных квадратичных точек (ранга $\geqslant 2$), откуда следует каноничность пары (T^+, Π^+).

Предположим, наконец, что $q_2^* \equiv 0$. Это накладывает шесть независимых условий на Π, так что имеется одномерное семейство таких подмногообразий на V. Квадрика E_Π есть двойная плоскость $2\Lambda = \{y = 0\}$, однако из соображений общности положения вытекает, что $\operatorname{mult}_\Lambda \Pi^+ = 1$ и, более того,

$$C = \operatorname{Sing} \Pi^+ = \{q_3^*|_\Lambda = 0\}$$

(имеются в виду особенности над точкой o) – неприводимая кубическая кривая, причем если она особая, то единственная особая точка этой кривой лежит вне прямой $L = \operatorname{Sing} E(p)$. Имеем

$$\operatorname{mult}_C \Pi^+ = a(C, T^+) = 2.$$

Раздутие кубики C приводит к многообразию Π_C, неособому над общей точкой C. Легко проверить, что и для любой точки $p \in C \setminus L$ пара (T^+, Π^+) канонична (даже терминальна) в этой точке. Наконец, многообразие Π_C имеет лишь изолированные квадратичные точки ранга $\geqslant 3$, так что легко проверить каноничность пары (T^+, Π^+) и над точками $q \in C \cap L$. Отметим, что для раздутия

$$\varphi_q \colon T_q \to T^+$$

точки $q \in C \cap L$, $E_q = \varphi_q^{-1}(q)$ – исключительный дивизор, имеем

$$\operatorname{mult}_q \Pi^+ = a(E_q, T^+) = 2,$$

E_q – квадрика ранга $\geqslant 4$, так что E_q реализует еще одну каноническую, но не терминальную особенность пары (T, Π). Этим доказательство предложения 5.2.8 завершено.

Замечание 5.2.1. Поскольку кратности особых точек и подмногообразий равны 2, доказательство предложения 5.2.8 сводится к проверке того факта, что если собственный прообраз дивизора Π имеет кривую особенностей, то собственный прообраз T неособ в общей точке этой кривой, и что особенности собственного прообраза Π не более чем одномерны.

§ 5.3. Исключение максимальных особенностей с центром коразмерности 3

В этом параграфе продолжено доказательство предложения 5.1.2: доказано, что линейная система Σ не имеет максимальных особенностей, центр которых есть подмногообразие коразмерности 3 на V.

5.3.1. Постановка задачи. Исключение центров степени $\geqslant 2$. Напомним, что линейная система Σ имеет максимальную особенность, центр которой есть неприводимое подмногообразие $B \subset V$. В § 5.1 было доказано, что, если Σ не имеет максимального подмногообразия вида $\sigma^{-1}(P)$, где $P \subset \mathbb{P}$ – линейное подпространство коразмерности 2, то Σ вообще не имеет максимальных подмногообразий коразмерности 2. Следовательно, можно считать, что $\operatorname{codim} B \geqslant 3$.

Предложение 5.3.1. *Подмногообразие B имеет коразмерность $\geqslant 4$.*

Доказательство. Предположим противное. В силу предложения 5.1.6 тогда $\operatorname{codim} B = 3$. Случай $\deg B = 1$ исключен ниже, в пп. 5.3.2–5.3.3. Следовательно, можно считать, что $\deg B \geqslant 2$.

Отметим сразу, что морфизм

$$\sigma|_B \colon B \to \sigma(B) = \overline{B}$$

бирационален. В самом деле, пусть $Z = (D_1 \circ D_2)$ – самопересечение системы Σ; тогда

$$\operatorname{mult}_B Z > 4n^2,$$

откуда следует, что если $\sigma|_B$ – двойное накрытие, то

$$\operatorname{mult}_{\overline{B}} \sigma_* Z > 8n^2.$$

Однако $\sigma_* Z$ – эффективный цикл коразмерности 2 на $\mathbb{P}$ степени $8n^2$. Получаем противоречие.

Следовательно, $\deg \overline{B} = \deg_H B \geqslant 2$ (поскольку дивизор ветвления W не содержит линейных подпространств коразмерности 3). Пусть $p, q \in \overline{B}$ – точки общего положения, $L \subset \mathbb{P}$ – прямая, соединяющая эти точки, $\Pi \supset L$ – общая (двумерная) плоскость, $\Lambda = \sigma^{-1}(\Pi)$ – неприводимая поверхность на V. Если $L \not\subset \operatorname{Supp} \sigma_* Z$, то пересечение $\Pi \cap \operatorname{Supp} \sigma_* Z$, а следовательно, и пересечение $\Lambda \cap \operatorname{Supp} Z$, нульмерно, так что имеем

$$8n^2 = (\Lambda \cdot Z) \geqslant \sum_{x \in \sigma^{-1}(L) \cap B} (\Lambda \cdot Z)_x \geqslant \sum_{x \in \sigma^{-1}(L) \cap B} \operatorname{mult}_x Z > 8n^2.$$

Противоречие. Следовательно, $L \subset \operatorname{Supp} \sigma_* Z$.

Пусть $Q \subset \mathbb{P}$ – неприводимое подмногообразие, заметаемое всеми секущими многообразия $\overline{B}$. По доказанному $\operatorname{codim} Q = 2$, так что Q есть подпространство коразмерности 2, а $\overline{B} \subset Q$ – некоторая гиперповерхность.

Запишем теперь

$$Z = a\sigma^{-1}(Q) + Z^\sharp,$$

где $Z^\sharp$ не содержит подмногообразия $\sigma^{-1}(Q)$ компонентой и $a \geqslant 1$. Цикл Z удовлетворяет линейному неравенству

$$2 \operatorname{mult}_B Z > \deg Z.$$

Легко видеть, что любой эффективный цикл коразмерности 2, удовлетворяющий этому неравенству, содержит подмногообразие $\sigma^{-1}(Q)$ компонентой: как выше,

$$\deg Z = (\Lambda \cdot Z) \geqslant \sum_{x \in \sigma^{-1}(L) \cap B} \operatorname{mult}_B Z > \deg Z$$

для любой секущей L многообразия $\overline{B}$, которая не содержится в носителе цикла $\sigma_* Z$ (и общей плоскости $\Pi \supset L$). Однако

$$\operatorname{mult}_B \sigma^{-1}(Q) = 1, \qquad \deg \sigma^{-1}(Q) = 2$$

(напомним, что для общей гиперповерхности W пересечение $Q \cap W$ имеет самое большее нульмерные особенности, так что $\sigma^{-1}(Q)$ – неприводимое множество), откуда следует, что цикл $Z^\sharp$ удовлетворяет неравенству

$$2 \operatorname{mult}_B Z^\sharp > \deg Z^\sharp$$

и, следовательно, содержит подмногообразие $\sigma^{-1}(Q)$ компонентой. Противоречие.

Этим случай $\deg B \geqslant 2$ исключен.

5.3.2. Исключение бесконечно близких особенностей с $\deg B = 1$. Начиная с этого момента и до конца параграфа предполагаем, что $\deg B = 1$. В силу условий общности положения этот случай реализуется только для двойных пространств размерности 4. Пусть X – σ-прообраз общей 3-плоскости в $\mathbb{P}$ (в частности, пересекающей $\overline{B}$ ровно в одной точке). Тогда $\sigma_X \colon X \to \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие, разветвленное над гладкой гиперповерхностью $W_X \subset \mathbb{P}^3$ степени $2m_X \geqslant 8$, $o = X \cap B$ – точка, лежащая вне дивизора ветвления:

$$p = \sigma_X(o) \notin W_X,$$

H_X есть σ_X-подъем класса плоскости в $\mathbb{P}^3$. Для упрощения записи будем писать H вместо H_X. В силу предложения 5.1.3 можно предположить, что на X нет прямых, проходящих через точку o, т.е. для любой прямой $L \subset \mathbb{P}^3$, $L \ni p$, кривая $\sigma_X^{-1}(L)$ неприводима.

Через Σ_X обозначим ограничение системы Σ на X. Подвижная линейная система $\Sigma_X \subset |2nH|$ обладает максимальной особенностью с центром в точке o, т.е. пара $(X, (1/n)\Sigma_X)$ имеет точку o центром не канонической особенности. Предположим, что выполнено неравенство

$$\nu = \operatorname{mult}_o \Sigma_X \leqslant 2n,$$

т.е. сама точка o не максимальна (см. доказываемую ниже лемму 5.3.2). Раздуем эту точку:

$$\varphi\colon \widetilde{X} \to X,$$

$E = \varphi^{-1}(o) \cong \mathbb{P}^2$ – исключительный дивизор.

Предложение 5.3.2. *Центр максимальной особенности на $\widetilde{X}$ есть прямая в $E \cong \mathbb{P}^2$.*

Доказательство. Если центр максимальной особенности есть кривая $C \subset E$ степени $d_C \geqslant 1$, то выполнено неравенство

$$\nu > nd_C,$$

откуда в силу сделанных предположений получаем $d_C = 1$, т.е. C – прямая. Таким образом, достаточно исключить возможность того, что центр особенности есть точка $y \in E$. Предположим, что это так, и покажем, что это ведет к противоречию.

Лемма 5.3.1. *Для любой неприводимой кривой $C \subset X$ выполнено неравенство*

$$\operatorname{mult}_o C + \operatorname{mult}_y \widetilde{C} \leqslant \deg C = (C \cdot H), \tag{5.3.1}$$

где $\widetilde{C} \subset \widetilde{X}$ – собственный прообраз.

Доказательство. Пусть

$$\overline{\varphi}\colon \widetilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^3$$

– раздутие точки $p = \sigma_X(o)$, $\overline{E} = \overline{\varphi}^{-1}(o)$ – исключительный дивизор. Морфизм σ_X индуцирует изоморфизм

$$\sigma_E\colon E \to \overline{E}.$$

Пусть $\overline{y} = \sigma_E(y) \in \overline{E}$. Для любой плоскости $P \ni p$ такой, что ее собственный прообраз $\widetilde{P} \subset \widetilde{\mathbb{P}}$ содержит точку $\overline{y}$, ее прообраз $H = \sigma_X^{-1}(P)$ содержит точку o и $\widetilde{H} \ni y$. Через

$$|H - o - y|$$

обозначим линейную подсистему системы H, определяемую этим условием. Очевидно,

$$\operatorname{Bs}|H - o - y| = \sigma^{-1}(L),$$

где $L \ni p$ – прямая в $\mathbb{P}^3$ с касательным направлением $\overline{y}$ в точке p. Пусть $C \subset X$ – неприводимая кривая, $C \ni p$.

Напомним, что по предположению через точку o не проходят прямые, т.е. кривая $\sigma^{-1}(L)$ неприводима. Имеем

$$\operatorname{mult}_o \sigma^{-1}(L) = \operatorname{mult}_y \widetilde{\sigma^{-1}(L)} = 1$$

и $(H \cdot \sigma^{-1}(L)) = 2$, так что для кривой $\sigma^{-1}(L)$ неравенство (5.3.1) справедливо.

Пусть $C \neq \sigma^{-1}(L)$. Для общего дивизора $R \in |H - o - y|$ имеем

$$(C \cdot R) = (C \cdot H) \geqslant (C \cdot R)_o \geqslant \operatorname{mult}_o C + (\widetilde{C} \cdot \widetilde{R})_y \geqslant \operatorname{mult}_o C + \operatorname{mult}_y \widetilde{C},$$

что и требовалось ($\widetilde{R}$ – собственный прообраз R на $\widetilde{X}$). Лемма доказана.

Теперь доказательство предложения 5.3.2 завершается дословно такими же рассуждениями, как и доказательство $8n^2$-неравенства (лемма 5.4.2). В самом деле, пусть

$$\varphi_{i,i-1}: X_i \to X_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

– разрешение максимальной особенности, т.е. $\varphi_{i,i-1}$ раздувает ее центр B_{i-1} на X_{i-1}, $E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1})$ – исключительный дивизор. Для $i = 1, \ldots, L$ центры раздутий суть точки, для $i = L+1, \ldots, N$ – кривые, причем из неравенства $\nu \leqslant 2n$ следует, что эти кривые гладкие и рациональные: $B_L \subset E_L \cong \mathbb{P}^2$ – некоторая прямая, $B_i \subset E_i$ – сечение линейчатой поверхности $E_i \to B_{i-1}$ при $i = L+1, \ldots, N-1$. В силу того же неравенства $\nu \leqslant 2n$ имеем $N \geqslant L+1$ и

$$B_L \not\subset E_{L-1}^L,$$

т.е. $L+1 \nrightarrow L-1$ в ориентированном графе последовательности раздутий $\varphi_{i,i-1}$. Наконец, по предположению $L \geqslant 2$, точнее, $B_0 = o$ и $B_1 = y \in E_1$. Теперь дословное повторение доказательства леммы 4.2 дает неравенство

$$\operatorname{mult}_o Z + \operatorname{mult}_y \widetilde{Z} > 8n^2$$

для самопересечения $Z = (D_1 \circ D_2)$ подвижной линейной системы Σ. Однако Z – эффективный 1-цикл степени $\deg Z = (Z \cdot H) = 8n^2$. Полученное противоречие с леммой 5.3.1 завершает доказательство предложения 5.3.2.

5.3.3. Исключение последнего случая: предварительные построения. Для завершения доказательства предложения 5.3.1 осталось исключить ситуацию, описанную в предложении 5.3.2. Считаем, что $M \geqslant 4$.

Пусть $L \subset \mathbb{P}^4$ – прямая, порождающая прямую на V, т.е.

$$\sigma^{-1}(L) = C_+ \cup C_-,$$

где $C = C_+$ и C_- – гладкие рациональные кривые. Пусть

$$\varphi\colon \widetilde{V} \to V, \qquad \varphi_{\mathbb{P}}\colon \widetilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^4$$

– раздутия кривой C и прямой L соответственно с исключительными дивизорами

$$E = \varphi^{-1}(C) \subset \widetilde{V}, \qquad E_{\mathbb{P}} = \varphi_{\mathbb{P}}^{-1}(L) \subset \widetilde{\mathbb{P}}.$$

Морфизм σ индуцирует рациональное отображение

$$\sigma_E\colon E \dashrightarrow E_{\mathbb{P}},$$

которое является бирациональным изоморфизмом, отображающим $E \setminus \varphi^{-1}(C \cap \sigma^{-1}(W))$ изоморфно на $E_{\mathbb{P}} \setminus \sigma_{\mathbb{P}}^{-1}(L \cap W)$. В частности, для любой неприводимой поверхности $S \subset E$, накрывающей C, корректно определен ее образ

$$\sigma_E(S) \subset E_{\mathbb{P}} \cong L \times \mathbb{P}^2.$$

Предложение 5.3.3. *Подвижная линейная система $\Sigma \subset |2nH|$ не может иметь максимальной особенности, центр которой на V есть кривая C, а на $\widetilde{V}$ – некоторая поверхность $S \subset E$.*

Доказательство. Допустим противное: такая максимальная особенность существует.

Лемма 5.3.2. *Имеет место неравенство*

$$\operatorname{mult}_C \Sigma \leqslant 2n,$$

т.е. сама кривая C не является максимальным подмногообразием системы Σ.

Доказательство. Пусть $P \subset \mathbb{P}^4$ – общая плоскость, содержащая прямую L. Легко видеть, что пересечение $P \cap W$ есть неособая кривая, так что $Q = \sigma^{-1}(P)$ – неособая поверхность типа $K3$. Ограничение $\Sigma|_Q = \Sigma_Q$ есть линейная система кривых, имеющая, вообще говоря, две неподвижных компоненты C_+ и C_- кратностей ν_+ и ν_- соответственно. Следовательно, на Q имеют место неравенства

$$((2nH_Q - \nu_+ C_+ - \nu_- C_-) \cdot C_\pm) \geqslant 0,$$

где $H_Q = H|_Q$, или, в явном виде,

$$2n + 2\nu_+ - 3\nu_- \geqslant 0,$$
$$2n - 3\nu_+ + 2\nu_- \geqslant 0$$

(потому что $(C_\pm^2) = -2$ и $(C_+ \cdot C_-) = 3$). Умножая первое неравенство на 2, второе на 3 и складывая их, получим

$$10n - 5\nu_+ \geqslant 0,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Следствие 5.3.1. *Для точки $x \in L$*

$$S \cap \sigma^{-1}(x)$$

есть прямая в $\sigma^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^2$. Граф разрешения максимальной особенности есть цепь.

Доказательство. Имеет место неравенство

$$\operatorname{mult}_C \Sigma \geqslant n \deg(S \cap \sigma^{-1}(x)),$$

откуда следует первое утверждение. Второе очевидно.

Продолжим доказательство предложения 5.3.3.

Поверхность $\sigma_E(S)$ в $E_{\mathbb{P}} \cong L \times \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ имеет бистепень $(d, 1)$.

5.3.4. Трудный случай $d = 0$. Имеет место

Предложение 5.3.4. *Случай $d = 0$ невозможен.*

Доказательство. Это наиболее трудный случай, и его рассмотрение потребует разбора большого количества возможностей.

Прежде всего, заметим, что существует единственная гиперплоскость $\Pi \subset \mathbb{P}^4$, высекающая S на $E_{\mathbb{P}}$:

$$S = \widetilde{\Pi} \cap E_{\mathbb{P}},$$

где $\widetilde{\Pi} \subset \widetilde{\mathbb{P}}$ – собственный прообраз. Поскольку линейная система Σ подвижна, ее ограничение

$$\Sigma_\Pi = \Sigma|_{\sigma^{-1}(\Pi)}$$

есть непустая линейная система (возможно, имеющая неподвижные компоненты). Рассмотрим теперь общую плоскость $P \supset L$, $P \subset \Pi$ и будем рассуждать в точности так же, как в доказательстве леммы 5.1.1: ограничим эффективный дивизор в системе Σ_Π на поверхность $Q = \sigma^{-1}(P)$ и покажем, что полученная эффективная кривая Σ_Q не может содержать кривую C с кратностью строго большей чем $2n$.

К сожалению, рассуждать дословно так же, как в доказательстве леммы 5.1.1, нельзя, потому что поверхность Q, вообще говоря, имеет особые точки. Необходимо разрешить особенности, а для этого в свою очередь перечислить возможные случаи для общего дивизора ветвления W. Особенности могут возникать, потому что гиперплоскость Π (однозначно определенная системой Σ) может оказаться касательной гиперплоскостью к W в одной или нескольких точках пересечения прямой L и W.

Через T_xW для точки $x \in W$ обозначаем гиперплоскость в $\mathbb{P}^4$, касательную к W в точке x.

Для теоретико-схемного пересечения $(L \circ W)$ имеются три возможности:

1) $(L \circ W) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$, где x_1, x_2, x_3 – различные точки на прямой L;
2) $(L \circ W) = 4x_1 + 2x_2$, где $x_1 \neq x_2$ – две различные точки;
3) $(L \circ W) = 6x$, $x \in L$.

Возможность 1) реализуется для прямой общего положения (трехмерное семейство). Случай 2) реализуется для двумерного, случай 3) – для одномерного семейства прямых $C \subset V$.

Далее, гиперплоскость Π касается дивизора W в точках x, y тогда и только тогда, когда

$$\Pi = T_xW = T_yW.$$

Поэтому получаем следующую детализацию случаев 1) и 2):

1.1) три гиперплоскости $T_{x_i}W$ различны (случай общего положения);
1.2) $T_{x_1}W = T_{x_2}W \neq T_{x_3}W$ (этот случай реализуется для одномерного семейства прямых, потому что совпадение касательных гиперплоскостей накладывает два независимых условия на прямую C);
1.3) $T_{x_1}W = T_{x_2}W = T_{x_3}W$ (этот случай для общего дивизора W не реализуется, однако будет рассмотрен для полноты картины);

2.1) $T_{x_1}W \neq T_{x_2}W$ – разные гиперплоскости;
2.2) $T_{x_1}W = T_{x_2}W$ (этот случай реализуется для конечного числа прямых).

Стратегия дальнейших рассуждений такова. Предполагая, что Π касается W по крайней мере в одной точке (иначе проходит доказательство леммы 5.1.1 без каких-либо изменений), разрешим особенности поверхности $Q = \sigma^{-1}(P)$ для общей плоскости P, где $L \subset P \subset \Pi$. Пусть T_i, $i \in I$, – множество неприводимых исключительных кривых (это (-2)-кривые на $K3$-поверхности $\widetilde{Q}$). Пусть $\widetilde{C_\pm}$ – собственные прообразы кривых $C_\pm$ на $\widetilde{Q}$, $\widetilde{\Sigma}_Q$ – собственный прообраз линейной системы Σ_Q на $\widetilde{Q}$. Для некоторых неотрицательных чисел $a_i \in \mathbb{Z}_+$, $i \in I$, имеем

$$\Sigma_Q \subset \left| 2nH_Q - \sum_{i \in I} a_i T_i \right|,$$

где $H_Q = H|_Q$ (подъем этого класса на $\widetilde{Q}$ обозначаем тем же символом). Линейная система $\widetilde{\Sigma}_Q$ содержит кривые $C_\pm$ неподвижными компонентами кратности $\nu_\pm$, причем по крайней мере одна из этих двух кратностей по построению строго больше $2n$. Предполагаем, что $\nu_+ > 2n$. Следовательно, справедливы $\sharp I + 2$ линейных неравенства

$$\left(\left(2nH_Q - \nu_+ \widetilde{C}_+ - \nu_- \widetilde{C}_- - \sum_{i \in I} a_i T_i \right) \cdot R \right) \geqslant 0,$$

где

$$R \in \{\widetilde{C}_+, \widetilde{C}_-\} \cup \{T_i \mid i \in I\}.$$

В каждом из возможных случаев эта система линейных неравенств дает оценку $\nu_+ \leqslant 2n$, противоречащую исходному предположению. Этим доказательство предложения 5.3.4 завершается.

Реализуем описанную программу. Для этого перечислим все возможные типы особенностей поверхности Q для общей плоскости $P \subset \Pi$, $P \supset L$ (в предположении общности дивизора W).

Для произвольной плоскости вариантов гораздо больше, но нам нужны не все. Перечисленные ниже типы особенностей получаются элементарными вычислениями в аффинных координатах z_1, z_2, z_3, z_4 на $\mathbb{P}^4$, в которых гиперплоскость Π имеет уравнение $z_4 = 0$, а прямая L задается системой уравнений $z_1 = z_2 = 0$, так что плоскость P задается уравнением $z_1 + \beta z_2 = 0$, где $\beta \in \mathbb{C}$ – некоторое число. Прямые вычисления в координатах показывают, что если особенности поверхности Q хуже, чем в перечисленных ниже случаях, хотя бы для одной прямой $C \subset V$, то W не есть гиперповерхность общего положения. Вычисления совершенно элементарны, и мы их опустим.

Вот список возможных типов особенностей.

Тип A. Одна обыкновенная двойная точка, на $\widetilde{Q}$ имеется одна исключительная кривая E. Таблица умножения:

	$\widetilde{C}_+$	$\widetilde{C}_-$	E
$\widetilde{C}_+$	-2	2	1
$\widetilde{C}_-$	2	-2	1
E	1	1	-2

Этот тип реализуется в случаях 1.1), 2.1) и 3).

Тип B. Одна вырожденная двойная точка, разрешаемая одним раздутием, на $\widetilde{Q}$ имеются две исключительные прямые E_+ и E_-. Таблица умножения:

	$\widetilde{C}_+$	$\widetilde{C}_-$	E_+	E_-
$\widetilde{C}_+$	-2	2	1	0
$\widetilde{C}_-$	2	-2	0	1
E_+	1	0	-2	1
E_-	0	1	1	-2

Этот тип реализуется в случаях 1.1), 2.1).

Тип C. Вырожденная двойная точка на Q, исключительный дивизор ее раздутия – пара прямых, точка пересечения которых есть обыкновенная двойная точка поверхности (разрешаемая одним раздутием). На $\widetilde{Q}$ имеются три исключительные кривые E_+, E_-, E с таблицей умножения

	$\widetilde{C}_+$	$\widetilde{C}_-$	E_+	E_-	E
$\widetilde{C}_+$	-2	2	1	0	0
$\widetilde{C}_-$	2	-2	0	1	0
E_+	1	0	-2	0	1
E_-	0	1	0	-2	1
E	0	0	1	1	-2

Этот тип реализуется в случае 1.1).

Тип D. Поверхность Q имеет две обыкновенные двойные точки (разрешаемые одним раздутием). На $\widetilde{Q}$ имеются две исключительные кривые E_1 и E_2. Таблица умножения:

	$\widetilde{C}_+$	$\widetilde{C}_-$	E_1	E_2
$\widetilde{C}_+$	-2	1	1	1
$\widetilde{C}_-$	1	-2	1	1
E_1	1	1	-2	0
E_2	1	1	0	-2

Этот тип реализуется в случаях 1.2) и 2.2).

Этими четырьмя типами завершается список возможных особенностей поверхности Q для многообразий V общего положения. Однако условие общности положения несущественно. Автором разобраны примеры более сложных особенностей, и применяемый метод во всех случаях дает доказательство предложения 5.3.4. В качестве иллюстрации в дополнение к типам A–D приведем еще два примера (не реализующиеся на многообразии общего положения).

Тип E. Две особые точки – невырожденная и вырожденная, обе разрешаются одним раздутием. На $\widetilde{Q}$ имеются три исключительные кривые: E (соответствует невырожденной точке) и $E_\pm$ (они соответствуют исключительным прямым на раздутии вырожденной точки). Таблица умножения:

	$\widetilde{C}_+$	$\widetilde{C}_-$	E_+	E_-	E
$\widetilde{C}_+$	-2	1	1	0	1
$\widetilde{C}_-$	1	-2	0	1	1
E_+	1	0	-2	1	0
E_-	0	1	1	-2	0
E	1	1	0	0	-2

Этот тип реализуется на многообразии необщего положения в случае 1.2).

Тип F. На поверхности Q три невырожденные двойные точки. На $\widetilde{Q}$ имеются три исключительные кривые E_1, E_2, E_3. Таблица умножения:

	$\widetilde{C}_+$	$\widetilde{C}_-$	E_1	E_2	E_3
$\widetilde{C}_+$	-2	0	1	1	1
$\widetilde{C}_-$	0	-2	1	1	1
E_1	1	1	-2	0	0
E_2	1	1	0	-2	0
E_3	1	1	0	0	-2

Этот тип реализуется на многообразии необщего положения в случае 1.3).

Осталось осуществить описанную выше программу для каждого типа особенностей. Мы разберем два примера для типов A и C соответственно, а в остальных случаях вычисления аналогичны. Затем объясним сущность вычислений.

Рассмотрим тип A. Пусть ν_+, ν_- и α – кратности кривых $\widetilde{C}_+$, $\widetilde{C}_-$ и E в линейной системе Σ_Q, поднятой на $\widetilde{Q}$. Умножая класс

$$2nH_Q - \nu_+\widetilde{C}_+ - \nu_-\widetilde{C}_- - \alpha E$$

на $\widetilde{C}_+$, $\widetilde{C}_-$ и E, получаем систему линейных неравенств

$$\begin{aligned} 2n + 2\nu_+ - 2\nu_- - \alpha &\geqslant 0,\\ 2n - 2\nu_+ + 2\nu_- - \alpha &\geqslant 0,\\ -\nu_+ - \nu_- + 2\alpha &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Прибавляя к первому и второму неравенствам половину третьего, получаем систему

$$\begin{aligned} 4n + 3\nu_+ - 5\nu_- &\geqslant 0,\\ 4n - 5\nu_+ + 3\nu_- &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Умножая первое неравенство на 3, второе на 5 и складывая их, получаем

$$32n - 16\nu_+ \geqslant 0,$$

т.е. в точности то, что нам нужно.

Рассмотрим тип C. Обозначая кратности компонент $\widetilde{C}_+$, $\widetilde{C}_-$, E_+, E_-, E через ν_+, ν_-, α_+, α_-, α соответственно, умножим эффективный класс

$$2nH_Q - \nu_+\widetilde{C}_+ - \nu_-\widetilde{C}_- - \alpha_+E_+ - \alpha_-E_- - \alpha E$$

на $\widetilde{C}_+$, $\widetilde{C}_-$, E_+, E_-, E и получим систему неравенств

$$\begin{aligned} 2n + 2\nu_+ - 2\nu_- - \alpha_+ &\geqslant 0,\\ 2n - 2\nu_+ + 2\nu_- - \alpha_- &\geqslant 0,\\ -\nu_+ + 2\alpha_+ - \alpha &\geqslant 0,\\ -\nu_- + 2\alpha_- - \alpha &\geqslant 0,\\ -\alpha_+ - \alpha_- + 2\alpha &\geqslant 0. \end{aligned}$$

С помощью пятого неравенства элиминируем α в третьем и четвертом неравенствах, которые принимают вид

$$\begin{aligned} -\nu_+ + \frac{3}{2}\alpha_+ - \frac{1}{2}\alpha_- &\geqslant 0,\\ -\nu_- - \frac{1}{2}\alpha_+ + \frac{3}{2}\alpha_- &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Умножая одно из этих неравенств на $3/2$, другое на $1/2$ и складывая их, получаем неравенства

$$\begin{aligned} -3\nu_+ - \nu_- + 4\alpha_+ &\geqslant 0,\\ -\nu_+ - 3\nu_- + 4\alpha_- &\geqslant 0, \end{aligned}$$

которые позволяют элиминировать α_+, α_- в первых двух неравенствах и получить систему неравенств

$$\begin{aligned} 8n + 5\nu_+ - 9\nu_- &\geqslant 0,\\ 8n - 9\nu_+ + 5\nu_- &\geqslant 0, \end{aligned}$$

откуда, как и в случае A, получаем

$$112n - 56\nu_+ \geqslant 0$$

– в точности то, что нужно.

Остальные типы особенностей разбираются аналогично. Объясним теперь, почему все перечисленные выше типы приводят к неравенству $2n \geqslant \nu_+$. Рассмотрим пространство

$$\mathcal{L} = \mathbb{R}[\widetilde{C}_+] \oplus \mathbb{R}[\widetilde{C}_-] \oplus \mathcal{E},$$

где

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} T_i,$$

а $\{T_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ есть множество неприводимых исключительных кривых на $\widetilde{Q}$. На $\mathcal{L}$ имеется естественная билинейная форма, порожденная пересечением кривых. Пусть

$$\Theta = \|(T_i \cdot T_j)\|_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$$

– отрицательно определенная матрица формы пересечения на $\mathcal{E}$. Пусть $\Theta^{-1} = \|\lambda_{ij}\|$ – обратная матрица. Легко проверить, что в каждом из случаев A–F (и во всех других случаях особенностей необщего положения, разобранных автором) матрица Θ удовлетворяет условию

все коэффициенты $\lambda_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, обратной матрицы Θ^{-1} отрицательны.

Пусть $\mathcal{E}_+ = \{a_i T_i \mid a_i \in \mathbb{R}_+\}$ – положительный координатный конус. Поскольку матрица Θ невырожденна, существуют однозначно определенные векторы $e_\pm \in \mathcal{E}$ такие, что

$$R_\pm = \widetilde{C}_\pm + e_\pm \in \mathcal{E}^\perp.$$

Лемма 5.3.3. *Выполнено*

$$e_\pm \in \mathcal{E}_+.$$

Доказательство следует из неравенств $(C_\pm \cdot T_i) \geqslant 0$ и свойств матрицы Θ ($\lambda_{ij} < 0$).

Ввиду невырожденности формы пересечения на $\mathcal{L}$ класс H_Q можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{L}$, $H_Q \in \mathcal{E}^\perp$.

Лемма 5.3.4. *Имеет место равенство*

$$H_Q = R_+ + R_-.$$

Доказательство. Класс H_Q есть класс дивизора Картье на Q, состоящего из кривых C_+ и C_-. Следовательно, для некоторого $e \in \mathcal{E}$ имеем равенство

$$H_Q = \widetilde{C}_+ + \widetilde{C}_- + e.$$

Поскольку $H_Q \in \mathcal{E}^\perp$, из невырожденности квадратичной формы пересечения на $\mathcal{L}$ следует утверждение леммы.

Очевидно,

$$(R_\pm \cdot H_Q) = 1.$$

Легко проверяется, что $(R_\pm^2) = -a < 0$, так что форма пересечения на двумерном пространстве

$$\mathcal{R} = \mathbb{R}[R_+] \oplus \mathbb{R}[R_-]$$

задается матрицей

$$\begin{pmatrix} -a & 1+a \\ 1+a & -a \end{pmatrix},$$

для которой обратная матрица есть

$$\frac{1}{1+2a}\begin{pmatrix} a & 1+a \\ 1+a & a \end{pmatrix}.$$

В силу сказанного выше неотрицательность пересечений класса

$$2nH_Q - \nu_+\widetilde{C}_+ - \nu_-\widetilde{C}_- - \sum_{i=1}^{k} b_i T_i$$

(где $b_i \in \mathbb{Z}_+$) с классами $\widetilde{C}_+$, $\widetilde{C}_-$, T_i влечет неотрицательность пересечений класса

$$\beta_+ R_+ + \beta_- R_- = 2nH_Q - \nu_+ R_+ - \nu_- R_-$$

с классами R_+ и R_-, откуда следует, что $\beta_\pm \geqslant 0$. Однако

$$\beta_\pm = 2n - \nu_\pm,$$

что и требуется.

Приведенное общее рассуждение работает для любого типа особенностей поверхности Q, удовлетворяющего двум свойствам: элементы λ_{ij} матрицы Θ^{-1} все отрицательны и $(R_\pm^2) = -a < 0$. Эти свойства необходимо проверять непосредственно; например, для типа C матрица Θ^{-1} есть

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

как и требуется. По-видимому, однако, это – проявление какого-то общего факта.

Предложение 5.3.4 полностью доказано.

Вернемся к доказательству предложения 5.3.3.

5.3.5. Случай $d \geqslant 1$: завершение доказательства предложения 5.3.3. Предполагаем, что $d \geqslant 1$. Пусть

$$\varphi_{i,i-1}\colon V_i \to V_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, k+1,$$

– разрешение максимальной особенности. Здесь $V_0 = V$,

$$\varphi_{1,0}\colon V_1 \to V$$

– раздутие кривой C, т.е. $\widetilde{V} \cong V_1$, и $B_1 \subset E_1 = E$ есть поверхность S. Полагая, как обычно,

$$\nu_i = \operatorname{mult}_{B_{i-1}} \Sigma^{i-1},$$

запишем неравенство Нётера–Фано:

$$\nu_1 + \cdots + \nu_{k+1} > (k+2)n.$$

Рассмотрим общую плоскость $P\supset L$ и неособую поверхность $Q=\sigma^{-1}(P)$. В силу неравенства $d\geqslant 1$ сечение $\widetilde{P}\cap E_{\mathbb{P}}$ трансверсально пересекает поверхность $\sigma_E(S)$ по крайней мере в одной точке общего положения и поверхность $\widetilde{P}$ трансверсально пересекает $\sigma_E(S)$ в точке общего положения. Следовательно, поверхность $Q^1=\widetilde{Q}$ трансверсально пересекает поверхность S по крайней мере в одной точке общего положения, скажем

$$x\in S\cap Q^1,$$

и можно считать, что $x\notin C^1_-$.

Далее, в силу общности P ограничение $\Sigma^1|_{Q^1}$ может иметь неподвижной компонентой лишь кривую C^1_-. Пусть

$$\nu_-=\mathrm{mult}_{C^1_-}(\Sigma^1|_{Q^1})=\mathrm{mult}_{C_-}(\Sigma|_Q)=\mathrm{mult}_{C_-}\Sigma.$$

В силу трансверсальности пересечения $S\cap Q^1$ поверхности $B_2,\ldots,B_k$ порождают бесконечно близкие базисные точки

$$x_i\in B_i\cap Q^i$$

линейной системы кривых $\Sigma^1|_Q$ на неособой поверхности $Q^1=Q$, лежащие над точкой $x=x_1$. Поскольку точка x лежит вне неподвижной компоненты C_-, самопересечение подвижной части линейной системы $\Sigma^1|_Q$ не меньше чем

$$\nu_2^2+\cdots+\nu_{k+1}^2.$$

Это дает неравенство

$$\begin{aligned}f(\nu_-,\nu_1,\ldots,\nu_{k+1})&=(2nH_Q-\nu_1C_+-\nu_-C_-)^2-\sum_{i=2}^{k+1}\nu_i^2\\&=8n^2-4n\nu_1-4n\nu_--2\nu_1^2-2\nu_-^2+6\nu_1\nu_--\sum_{i=2}^{k+1}\nu_i^2\geqslant 0\end{aligned}$$

(по поводу индексов пересечения см. доказательство леммы 5.1.1). Кроме того, как установлено при доказательстве леммы 5.3.2, выполнено неравенство

$$\nu_-\geqslant\frac{3\nu_1-2n}{2}>\frac{n}{2}\,.$$

Оценим теперь функцию $f(\nu_-,\nu_1,\ldots,\nu_{k+1})$ сверху. Заменим неравенство Нётера–Фано равенством

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{k+1}=(k+2)n, \tag{5.3.2}$$

от этого $f(\,\cdot\,)$ только увеличится. Далее, фиксируя ν_- и ν_1, рассмотрим f как функцию от $\nu_2,\ldots,\nu_{k+1}$ при ограничении (5.3.2). Очевидно, ее максимум достигается при

$$\nu_2=\cdots=\nu_{k+1}=\frac{(k+2)n-\nu_1}{k}\,.$$

С другой стороны, максимум f как функции одного аргумента ν_- достигается, как легко проверить, при

$$\nu_-=\frac{3\nu_1-2n}{2}\,.$$

Подставляя значения $\nu_2,\ldots,\nu_{k+1},\nu_-$ в $f(\,\cdot\,)$, получим следующее выражение:

$$\frac{1}{k}[-(k^2+4)n^2+(4-2k)n\nu_1].$$

При $k \geqslant 2$ отрицательность очевидна. Пусть $k = 1$, тогда имеем

$$-5n^2 + 2n\nu_1.$$

Выше было показано, что $\nu_1 \leqslant 2n$. Следовательно, для любого $k \geqslant 1$ получаем оценку

$$f(\nu_-, \nu_1, \ldots, \nu_{k+1}) < -kn^2.$$

Полученное противоречие завершает доказательство предложения 5.3.3.

Предложение 5.3.1 полностью доказано.

§ 5.4. Локальное неравенство для самопересечения подвижной системы

В данном параграфе приведено доказательство $8n^2$-неравенства, усиливающего $4n^2$-неравенство, доказанное в § 1.2. Доказательство существенно использует как принцип связности, так и технику подсчета кратностей. Обозначения этого параграфа независимы от остальных частей статьи.

5.4.1. Постановка задачи и начало доказательства. Пусть $o \in X$ – росток гладкого многообразия размерности $\dim X \geqslant 4$. Пусть Σ – подвижная линейная система на X, а эффективный цикл

$$Z = (D_1 \circ D_2),$$

где $D_1, D_2 \in \Sigma$ – общие дивизоры, есть ее самопересечение. Раздуем точку o:

$$\varphi\colon X^+ \to X,$$

$E = \varphi^{-1}(o) \cong \mathbb{P}^{\dim X - 1}$ – исключительный дивизор. Собственный прообраз системы Σ и цикла Z на X^+ обозначаем через Σ^+ и Z^+ соответственно.

Предложение 5.4.1 ($8n^2$-неравенство). *Предположим, что пара*

$$\left(X, \frac{1}{n}\Sigma\right)$$

не канонична, но канонична вне точки o, где n – некоторое положительное число. Существует линейное подпространство $P \subset E$ коразмерности 2 (относительно E) такое, что выполнено неравенство

$$\operatorname{mult}_o Z + \operatorname{mult}_P Z^+ > 8n^2.$$

Эквивалентное, но громоздко формулируемое утверждение неоднократно публиковалось Чельцовым [29], [57], [58], однако в его доказательстве имеется существенный пробел (см. [59]).

Доказательство предложения 5.4.1. Первая часть наших рассуждений следует работам [57], [58]. Отметим, что если $\operatorname{mult}_o Z > 8n^2$, то в качестве P можно взять любое подпространство коразмерности 2 в E. Если же $\operatorname{mult}_o Z \leqslant 8n^2$, то подпространство P определено однозначно; это легко следует из принципа связности Шокурова–Коллара [18].

Ограничивая Σ на росток гладкого общего подмногообразия, содержащего точку o, можно считать, что $\dim X = 4$. Более того, можно предполагать, что $\nu = \operatorname{mult}_o \Sigma \leqslant 2\sqrt{2}n < 3n$, иначе

$$\operatorname{mult}_o Z \geqslant \nu^2 > 8n^2,$$

и доказывать нечего.

Лемма 5.4.1. *Пара*

$$\left(X^+, \frac{1}{n}\Sigma^+ + \frac{(\nu-2n)}{n}E\right) \tag{5.4.1}$$

не лог-канонична, и центр любой ее не лог-канонической особенности содержится в исключительном дивизоре E.

Доказательство. Пусть $\lambda\colon \widetilde{X}\to X$ – разрешение особенностей пары $(X,(1/n)\Sigma)$ и $E^*\subset \widetilde{X}$ – простой исключительный дивизор, реализующий неканоническую особенность этой пары. Тогда $\lambda(E^*)=o$ и выполнено неравенство Нётера–Фано

$$\nu_{E^*}(\Sigma) > na(E^*).$$

Для общего дивизора $D\in\Sigma$ имеем $\varphi^*D=D^+ +\nu E$, так что

$$\nu_{E^*}(\Sigma)=\nu_{E^*}(\Sigma^+)+\nu\cdot\nu_{E^*}(E)$$

и

$$a(E^*,X)=a(E^*,X^+)+3\nu_{E^*}(E).$$

Отсюда получаем

$$\nu_{E^*}\left(\frac{1}{n}\Sigma^+ + \frac{\nu-2n}{n}E\right)=\nu_{E^*}\left(\frac{1}{n}\Sigma\right)-2\nu_{E^*}(E) > a(E^*,X^+)+\nu_{E^*}(E)\geqslant a(E^*,X^+)+1,$$

что и доказывает лемму.

Пусть $R\ni o$ – общий трехмерный росток, $R^+\subset X^+$ – его собственный прообраз на раздутии точки o. Для малого $\varepsilon>0$ пара

$$\left(X^+, \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{1}{n}\Sigma^+ + \frac{\nu-2n}{n}E + R^+\right)$$

все еще удовлетворяет условию принципа связности (относительно морфизма $\varphi\colon X^+\to X$), так что множество центров не лог-канонических особенностей этой пары связно в окрестности исключительного дивизора E. Поскольку R^+ есть не лог-каноническая особенность, получаем, что найдется не лог-каноническая особенность пары (5.4.1), центр которой на X^+ имеет положительную размерность, так как пересекает R^+.

Пусть $Y\subset E$ – центр не лог-канонической особенности пары (5.4.1), имеющий максимальную размерность.

Если $\dim Y=2$, то рассмотрим общий двумерный росток S, трансверсально пересекающий Y в точке общего положения. Ограничение пары (5.4.1) на S не лог-канонично в этой точке, поэтому, применяя доказываемое ниже предложение 5.4.2, видим, что

$$\mathrm{mult}_Y(D_1^+\circ D_2^+) > 4\left(3-\frac{\nu}{n}\right)n^2,$$

так что

$$\mathrm{mult}_o Z\geqslant \nu^2+\mathrm{mult}_Y(D_1^+\circ D_2^+)\deg Y > (\nu-2n)^2+8n^2,$$

что и требовалось.

Если $\dim Y=1$, то поскольку пара

$$\left(R^+, \frac{1}{1+\varepsilon}\frac{1}{n}\Sigma_R^+ + \frac{\nu-2n}{n}E_R\right), \tag{5.4.2}$$

где $\Sigma^+_R = \Sigma^+|_{R^+}$ и $E_R = E|_{R^+}$, удовлетворяет условию принципа связности и R^+ пересекает Y в $\deg Y$ различных точках, заключаем, что $Y \subset E$ – прямая в $\mathbb{P}^3$.

Теперь необходимо различать два случая: когда $\nu \geqslant 2n$ и когда $\nu < 2n$. Методы доказательства $8n^2$-неравенства в этих двух случаях совершенно различны. Рассмотрим сначала случай $\nu \geqslant 2n$.

Выберем в качестве $R \ni o$ общий трехмерный росток, удовлетворяющий условию $R^+ \supset Y$. Поскольку пара (5.4.1) эффективная (напомним, $\nu \geqslant 2n$), можно применить обращение присоединения [18; гл. 17] и заключить, что пара (5.4.2) не лог-канонична в Y.

Теперь, применяя к паре (5.4.2) (где $R^+ \supset Y$) предложение 5.4.2 так, как это было сделано при $\dim Y = 2$, получаем неравенство

$$\mathrm{mult}_Y(D_1^+|_{R^+} \circ D_2^+|_{R^+}) > 4\left(3 - \frac{\nu}{n}\right)n^2.$$

Слева в скобках стоит самопересечение подвижной линейной системы Σ^+_R, которое раскладывается на две естественные компоненты:

$$(D_1^+|_{R^+} \circ D_2^+|_{R^+}) = Z^+_R + Z^{(1)}_R,$$

где Z^+_R – собственный прообраз цикла $Z_R = Z|_R$ на R^+ и носитель цикла $Z^{(1)}_R$ содержится в E_R. Прямая Y есть компонента эффективного 1-цикла $Z^{(1)}_R$.

С другой стороны, для самопересечения подвижной линейной системы Σ^+ имеем

$$(D_1^+ \circ D_2^+) = Z^+ + Z_1,$$

где носитель цикла Z_1 содержится в E. Из общности R следует, что вне прямой Y циклы $Z^{(1)}_R$ и $Z_1|_{R^+}$ совпадают, а для Y получаем равенство

$$\mathrm{mult}_Y Z^{(1)}_R = \mathrm{mult}_Y Z^+ + \mathrm{mult}_Y Z_1.$$

Однако $\mathrm{mult}_Y Z_1 \leqslant \deg Z_1$, так что

$$\mathrm{mult}_o Z + \mathrm{mult}_Y Z^+ = \nu^2 + \deg Z_1 + \mathrm{mult}_Y Z^+ \geqslant \nu^2 + \mathrm{mult}_Y Z^{(1)}_R > 8n^2,$$

что и требовалось. Этим разбор случая $\nu \geqslant 2n$ завершен.

Отметим, что эффективность пары (5.4.1) – ключевой момент в этом рассуждении. При $\nu < 2n$ обращение присоединения (так, как это сделано в [20]) применить нельзя. Дополнительные рассуждения в [29],[57], [58], обосновывающие обращение присоединения специально для этой пары при $\nu < 2n$, неверны (см. [59]).

5.4.2. Случай $\boldsymbol{\nu < 2n}$. Рассмотрим снова пару (5.4.2) для общего ростка $R \ni o$. Пусть $y = Y \cap R^+$ – точка (трансверсального) пересечения прямой Y и многообразия R^+. Поскольку $a(E_R, R) = 2$, не лог-каноничность пары (5.4.2) в точке y влечет не лог-каноничность пары

$$\left(R, \frac{1}{n}\Sigma_R\right)$$

в точке o, причем центр некоторой не лог-канонической (т.е. лог-максимальной) особенности на R^+ есть точка y.

Теперь $8n^2$-неравенство вытекает из следующего факта.

Лемма 5.4.2. *Имеет место неравенство*

$$\mathrm{mult}_o Z_R + \mathrm{mult}_y Z^+_R > 8n^2,$$

где Z_R – самопересечение подвижной линейной системы Σ_R и Z^+_R – его собственный прообраз на R^+.

Доказательство. Рассмотрим разрешение максимальной особенности системы Σ_R, центр которой на R^+ есть точка y:

$$\begin{array}{ccc} R_i & \xrightarrow{\psi_i} & R_{i-1} \\ \bigcup & & \bigcup \\ E_i & & B_{i-1} \end{array}$$

где B_{i-1} – центр особенности на R_{i-1}, $R_0 = R$, $R_1 = R^+$, $E_i = \psi_i^{-1}(B_{i-1})$ – исключительный дивизор, $B_0 = o$, $B_1 = y \in E_1$, $i = 1, \ldots, N$, причем первые L раздутий соответствуют точкам, при $i \geqslant L+1$ раздуваются кривые. Поскольку

$$\mathrm{mult}_o \Sigma_R = \mathrm{mult}_o \Sigma < 2n,$$

имеем $L < N$, $B_L \subset E_L \cong \mathbb{P}^2$ есть прямая и при $i \geqslant L+1$

$$\deg[\psi_i|_{B_i} \colon B_i \to B_{i-1}] = 1,$$

т.е. $B_i \subset E_i$ есть сечение линейчатой поверхности E_i. Рассмотрим граф последовательности раздутий ψ_i.

Лемма 5.4.3. *Вершины $L+1$ и $L-1$ не соединены стрелкой*:

$$L+1 \nrightarrow L-1.$$

Доказательство. Предположим противное: $L+1 \to L-1$. Это означает, что

$$B_L = E_L \cap E_{L-1}^L$$

есть исключительная прямая на поверхности E_{L-1}^L, а отображение

$$E_{L-1}^{L+1} \to E_{L-1}^L$$

есть изоморфизм. Как обычно, положим

$$\nu_i = \mathrm{mult}_{B_{i-1}} \Sigma_R^{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Ограничим подвижную линейную систему Σ_R^{L+1} на поверхность E_{L-1}^{L+1} (т.е. на плоскость $E_{L-1} \cong \mathbb{P}^2$ с раздутой точкой B_{L-1}). Получим непустую (но, конечно, не обязательно подвижную) линейную систему, которая есть подсистема полной линейной системы

$$|\nu_{L-1}(-E_{L-1}|_{E_{L-1}}) - (\nu_L + \nu_{L+1})B_L|.$$

Поскольку $(-E_{L-1}|_{E_{L-1}})$ есть класс прямой на плоскости E_{L-1}, отсюда следует, что

$$\nu_{L-1} \geqslant \nu_L + \nu_{L+1} > 2n,$$

так что тем более $\nu_1 = \nu > 2n$. Противоречие. Лемма доказана.

Аналогичным образом, из неравенства $\nu_1 \leqslant 2n$ выводится, что верхняя часть графа последовательности раздутий ψ_i, т.е. часть, соответствующая вершинам

$$L+1, \ldots, N,$$

есть цепь. Иными словами, сечение B_i линейчатой поверхности E_i, $i \geqslant L+1$, отлично от сечения $E_i \cap E_{i-1}^i$. Положим теперь, как обычно,

$$m_i = \mathrm{mult}_{B_{i-1}}(Z_R)^{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, L,$$

так что, в частности,

$$m_1 = \mathrm{mult}_o Z_R, \qquad m_2 = \mathrm{mult}_y Z_R^+.$$

Пусть для $1 \leqslant i \leqslant L-1$ число $p_i \geqslant 1$ есть число путей в графе последовательности раздутий ψ_i из вершины L в вершину i и

$$p_N = p_{N-1} = \dots = p_L = 1$$

по определению. Согласно технике подсчета кратностей (см. гл. 1 и § 5.5 ниже) имеем неравенство

$$\sum_{i=1}^{L} p_i m_i \geqslant \sum_{i=1}^{N} p_i \nu_i^2, \tag{5.4.3}$$

и, кроме того, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \nu_i > n\biggl(2\sum_{i=1}^{L} p_i + \sum_{i=L+1}^{N} p_i\biggr). \tag{5.4.4}$$

(На самом деле справедливо несколько более сильное неравенство – лог-неравенство Нётера–Фано, но нам это не нужно.) Неравенство (5.4.4) вытекает из неравенства Нётера–Фано для максимальной особенности E_N в силу предположения, что $\nu_1 \leqslant 2n$.

В самом деле, пусть p_i^* – число путей в графе последовательности раздутий $\{\psi_i\}$ из вершины N в вершину i. По доказанному

$$p_N^* = p_{N-1}^* = \dots = p_L^* = p_{L-1}^* = 1,$$

и для $i \leqslant L$ имеем $p_i \leqslant p_i^*$, так как p_i есть число путей из вершины N в вершину i, проходящих через вершину L. Неравенство Нётера–Фано может быть записано в виде

$$\sum_{i=L+1}^{N} p_i^*(\nu_i - n) > \sum_{i=1}^{L} p_i^*(2n - \nu_i),$$

где в правой части каждое слагаемое неотрицательно, так как $2n \geqslant \nu_i$ для всех $i = 1, \dots, N$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=L+1}^{N} p_i(\nu_i - n) > \sum_{i=1}^{L} p_i(2n - \nu_i)$$

(напомним, что $p_i = p_i^*$ для $i = L+1, \dots, N$, так что левая часть неравенства остается без изменений, а правая может только уменьшиться), как и утверждалось. Из оценок (5.4.3), (5.4.4) стандартным образом (см. § 1.2) выводится неравенство

$$\sum_{i=1}^{L} p_i m_i > \frac{(2\Sigma_0 + \Sigma_1)^2}{\Sigma_0 + \Sigma_1} n^2,$$

где

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^{L} p_i, \qquad \Sigma_1 = \sum_{i=L+1}^{N} p_i = N - L.$$

Учитывая, что при $i \geqslant 2$ имеем

$$m_i \leqslant m_2$$

и очевидное неравенство

$$(2\Sigma_0 + \Sigma_1)^2 > 4\Sigma_0(\Sigma_0 + \Sigma_1),$$

получаем следующую оценку:

$$p_1m_1 + (\Sigma_0 - p_1)m_2 > 4n^2\Sigma_0.$$

Предположим теперь, что утверждение леммы неверно:

$$m_1 + m_2 \leqslant 8n^2.$$

Лемма 5.4.4. *Имеет место неравенство*

$$\Sigma_0 \geqslant 2p_1.$$

Доказательство. По построению p_1 есть число путей из вершины L в вершину 1. Отмечая в каждом пути предпоследнюю вершину, имеем

$$p_1 = \sum_{L\geqslant i\to 1} p_i,$$

так что $p_1 \leqslant \Sigma_0 - p_1$, что и требуется. Лемма доказана.

Теперь, учитывая, что $m_2 \leqslant m_1$, получаем

$$p_1m_1 + (\Sigma_0 - p_1)m_2 = p_1(m_1 + m_2) + (\Sigma_0 - 2p_1)m_2 \leqslant 8p_1n^2 + (\Sigma_0 - 2p_1)\cdot 4n^2 = 4n^2\Sigma_0.$$

Противоречие. Лемма 5.4.2 доказана.

Доказательство предложения 5.4.1 завершено.

Замечание 5.4.1. Объясним ключевой момент в доказательстве $8n^2$-неравенства при $\nu_1 \leqslant 2n$. Как следует из техники подсчета кратностей, граф последовательности раздутий $\{\psi_i\}$ можно модифицировать с сохранением всех приложений, а именно стереть все стрелки, идущие из вершин

$$L+1,\ldots,N$$

верхней части графа в вершины

$$1,\ldots,L-1$$

нижней части (при этом и неравенство Нётера–Фано, и оценка на кратности самопересечения линейной системы сохранятся). Таким образом, модифицированный граф удовлетворяет свойству леммы 5.4.4.

5.4.3. Локальное неравенство для поверхности. Пусть $o \in X$ – росток гладкой поверхности, $C \ni o$ – гладкая кривая и Σ – подвижная линейная система на X. Пусть, далее, $Z = (D_1 \circ D_2)$ – самопересечение линейной системы Σ, т.е. некоторый эффективный 0-цикл. Ввиду локальности ситуации можно считать, что носитель цикла Z есть точка o, т.е.

$$\deg Z = (D_1 \cdot D_2)_o.$$

Предложение 5.4.2. *Предположим, что для некоторого вещественного числа $a < 1$ пара*

$$\left(X, \frac{1}{n}\Sigma + aC\right) \tag{5.4.5}$$

не лог-канонична (т.е. для общего дивизора $D \in \Sigma$ не лог-канонична пара $(X, (1/n)D + aC)$), где $n > 0$ – положительное число. Тогда имеет место оценка

$$\deg Z > 4(1-a)n^2. \tag{5.4.6}$$

Доказательство. Исходное рассуждение см. в [41]. Мы покажем, что неравенство (5.4.6) есть прямое следствие хорошо известных фактов о бесконечно близких особенностях кривой на неособой поверхности [38], [3]. Пусть последовательность раздутий

$$\varphi_{i,i-1}\colon X_i \to X_{i-1}, \qquad i=1,\ldots,N,$$

где $X_0 = X$, разрешает не лог-каноническую особенность пары (5.4.5). Мы пользуемся стандартными обозначениями и соглашениями: центр раздутия $\varphi_{i,i-1}$ есть точка $x_{i-1} \in X_{i-1}$, его исключительная прямая есть

$$E_i = \varphi^{-1}_{i,i-1}(x_{i-1}) \subset X_i,$$

первой раздувается точка $o = x_0$, раздуваемые точки x_i лежат друг над другом: $x_i \in E_i$. Последняя исключительная прямая E_N реализует не лог-каноническую особенность пары (5.4.5), т.е. выполнено лог-неравенство Нётера–Фано

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i p_i + an \sum_{x_{i-1}\in C^{i-1}} p_i > n\biggl(\sum_{i=1}^{N} p_i + 1\biggr), \tag{5.4.7}$$

где $\nu_i = \operatorname{mult}_{x_{i-1}} \Sigma^{i-1}$, через Σ^i и C^i обозначены собственные прообразы на X_i и p_i – число путей в графе Γ построенной последовательности раздутий из вершины E_N в E_i (см. § 1.1). Пусть

$$x_{i-1} \in C^{i-1}, \qquad i = 1,\ldots,k \leqslant N;$$

тогда неравенство (5.4.7) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i p_i > n\biggl(\sum_{i=1}^{k}(1-a)p_i + \sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\biggr). \tag{5.4.8}$$

Лемма 5.4.5. *Имеет место неравенство*

$$\deg Z \geqslant \sum_{i=1}^{N} \nu_i^2. \tag{5.4.9}$$

Доказательство очевидно.

Лемма 5.4.6. *Для любого $i \in \{1,\ldots,N-1\}$ выполнена оценка*

$$\nu_i \geqslant \sum_{j\to i} \nu_j. \tag{5.4.10}$$

Доказательство очевидно, так как это хорошо известное свойство кратностей кривых в бесконечно близких точках на неособой поверхности.

Лемма 5.4.7. *Имеет место оценка*

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i^2 > \frac{\Delta^2}{q}\, n^2,$$

где

$$\Delta = 1 + (1-a)\sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=k+1}^{N} p_i, \qquad q = \sum_{i=1}^{N} p_i^2$$

(*так что $n\Delta$ есть правая часть неравенства* (5.4.8)).

Доказательство. Минимум квадратичной формы в правой части неравенства (5.4.9) при ограничениях (5.4.10) и

$$\sum_{i=1}^{N} \nu_i p_i = \Delta n \tag{5.4.11}$$

достигается при $\nu_i = p_i\theta$, где $\theta = \Delta n/q$ вычисляется из (5.4.11). Лемма доказана.

Теперь утверждение предложения 5.4.2 вытекает из чисто комбинаторного факта о графе Γ, который мы и будем доказывать.

Лемма 5.4.8. *Предположим, что начальный отрезок графа* Γ *с вершинами* $1, \ldots, k$ *есть цепь. Тогда имеет место неравенство*

$$\Delta^2 \geqslant 4(1-a)q. \tag{5.4.12}$$

Доказательство. Проведем его индукцией по числу N вершин в графе Γ. Если $N = 1$, то неравенство (5.4.12) выполнено тривиальным образом:

$$(2-a)^2 \geqslant 4(1-a).$$

Рассмотрим неравенство (5.4.12) как утверждение о неотрицательности квадратичной функции аргумента a:

$$a^2\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right)^2 + 2a\left(2q - \left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} p_i + 1\right)\right) + \left(\left(\sum_{i=1}^{N} p_i + 1\right)^2 - 4q\right) \geqslant 0$$

на интервале $a \leqslant 1$. Поскольку при $a \to \pm\infty$ эта функция положительна, достаточно проверить, что ее минимум неотрицателен. Элементарные вычисления показывают, что с точностью до несущественного положительного множителя этот минимум дается формулой

$$\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\right) - \sum_{i=1}^{N} p_i^2. \tag{5.4.13}$$

Неотрицательность последнего выражения и будем доказывать индукцией по числу вершин N. Напомним, что единственное предположение, ограничивающее выбор числа $k \geqslant 1$, – это отсутствие стрелок $i \to j$ при $i \geqslant j+2$, $i \leqslant k$.

Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Предположим, что $l \geqslant 1$ вершин соединены стрелкой с 1, т.е.

$$2 \to 1, \ldots, l+1 \to 1, \qquad \text{но} \qquad l+2 \nrightarrow 1.$$

В этом случае $p_1 = p_2 + \cdots + p_{l+1}$ и подграф графа Γ с вершинами $\{2, \ldots, l+1\}$ либо состоит из одной вершины, либо есть цепь. Выражение (5.4.13) преобразуется к виду

$$\left(\sum_{i=2}^{l+1} p_i\right)\left(\sum_{i=l+2}^{N} p_i + 1\right) - \sum_{i=2}^{N} p_i^2,$$

так что можно применить предположение индукции к подграфу с вершинами $\{2, \ldots, N\}$. Этим случай $k = 1$ разобран.

Пусть $k \geqslant 2$. Согласно лемме 1.2.7 имеет место неравенство

$$p_i \leqslant \sum_{j=i+2}^{N} p_j + 1. \tag{5.4.14}$$

Согласно (5.4.14) имеет место неравенство

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{k-1} \leqslant \sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1.$$

Поэтому при $k \geqslant 2$ выражение (5.4.13) ограничено снизу числом

$$\left(\sum_{i=2}^{k} p_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{N} p_i + 1\right) - \sum_{i=2}^{N} p_i^2.$$

Теперь применяем предположение индукции к подграфу с вершинами $\{2, \ldots, N\}$ и завершаем доказательство леммы 5.4.8 и предложения 5.4.2.

§ 5.5. Техника подсчета кратностей

В этом параграфе приводится усиленная версия техники подсчета кратностей для самопересечения подвижной линейной системы. Полученный результат вместе с $8n^2$-неравенством является технической основой исключения максимальных особенностей, центр которых имеет коразмерность $\geqslant 4$. Обозначения данного параграфа независимы от остальных частей работы.

5.5.1. Постановка задачи. Пусть $o \in X$ – росток гладкого трехмерного многообразия, $\varphi\colon \widetilde{X} \to X$ – некоторый бирациональный морфизм, $E \subset \widetilde{X}$ – неприводимый исключительный дивизор над точкой o, т.е. $\varphi(E) = o$. Рассмотрим разрешение (§ 1.2) дискретного нормирования ν_E, т.е. последовательность раздутий

$$\varphi_{i,i-1}\colon X_i \to X_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

где $X_0 = X$, $\varphi_{i,i-1}$ раздувает неприводимое подмногообразие $B_{i-1} \subset X_{i-1}$ (точку или кривую),

$$E_i = \varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1}) \subset X_i$$

– исключительный дивизор, B_i однозначно определены условиями $B_0 = o$ и для $i = 1, \ldots, N-1$

$$B_i = \mathrm{centre}(E, X_i),$$

и, наконец, геометрические дискретные нормирования

$$\nu_E \quad \text{и} \quad \nu_{E_N}$$

поля рациональных функций многообразия X совпадают. Геометрически это означает, что бирациональное отображение

$$\varphi_{N,0}^{-1} \circ \varphi\colon \widetilde{X} \dashrightarrow X_N$$

бирегулярно в общей точке дивизора E и отображает E на E_N. Здесь

$$\varphi_{N,0} = \varphi_{1,0} \circ \cdots \circ \varphi_{N,N-1}\colon X_N \to X_0,$$

и, вообще, положим при $i > j$

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{j+1,j} \circ \cdots \circ \varphi_{i,i-1}\colon X_i \to X_j.$$

Собственный прообраз неприводимого подмногообразия (по линейности и эффективного цикла) $Y \subset X_j$ на X_i обозначаем, как обычно, добавлением верхнего индекса i: пишем Y^i.

Пусть для $i = 1, \ldots, L \leqslant N$ центры B_{i-1} раздутий суть точки, для $i \geqslant L+1$ – кривые. Пусть Γ – граф построенного разрешения, т.е. ориентированный граф с вершинами $1, \ldots, N$, где ориентированное ребро (стрелка) соединяет i и j при $i > j$ (обозначение: $i \to j$), если и только если

$$B_{i-1} \subset E_j^{i-1}.$$

В частности, по построению всегда $i+1 \to i$.

Опишем очевидные комбинаторные свойства графа Γ.

Лемма 5.5.1. *Пусть $i < j < k$ – три различные вершины. Если $k \to i$, то $j \to i$.*

Доказательство. По определению $k \to i$ означает, что $B_{k-1} \subset E_i^{k-1}$. В силу конструкции разрешения особенностей имеем

$$\varphi_{k-1,j-1}(B_{k-1}) = B_{j-1}$$

(центры раздутий с более высокими номерами накрывают центры предыдущих раздутий) и, кроме того,

$$\varphi_{k-1,j-1}(E_i^{k-1}) = E_i^{j-1}.$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение леммы. Доказательство закончено.

Определение 5.5.1. Скажем, что вершина i графа Γ имеет *класс* $e \geqslant 1$ (обозначение $\varepsilon(i) = e$), если из нее выходят ровно e стрелок, т.е.

$$\sharp\{j \mid i \to j\} = e.$$

Скажем, далее, что граф Γ имеет класс $e \geqslant 1$, если для любой его вершины i имеем $\varepsilon(i) \leqslant e$.

Например, граф класса 1 есть цепь:

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow \cdots \leftarrow N$$

(никаких стрелок, кроме $i+1 \to i$, нет). Граф последовательности раздутий точек на неособой поверхности имеет класс 2.

Лемма 5.5.2. *Граф разрешения нормирования ν_E имеет класс* 3. *Если для некоторой его вершины i имеем $\varepsilon(i) = 3$, то $i \leqslant L$, т.е. B_{i-1} – точка.*

Доказательство. По определению

$$B_{i-1} \subset E(i) = \bigcup_{\{j \mid i \to j\}} E_j^{i-1},$$

причем в общей точке B_{i-1} – гладкое многообразие, а $E(i)$ – дивизор с нормальными пересечениями, каждая компонента которого содержит B_{i-1}. Этим лемма доказана.

Замечание 5.5.1. Дословно те же рассуждения показывают, что в случае произвольной размерности $\dim X$ граф разрешения любого нормирования имеет класс не больше $\dim X$, и если

$$\sharp\{j \mid i \to j\} = a,$$

то

$$\operatorname{codim} B_{i-1} \geqslant a.$$

Пусть Σ – росток подвижной (т.е. не имеющей неподвижных компонент) линейной системы на X, Σ^i – его собственный прообраз на X_i,

$$\nu_i = \mathrm{mult}_{B_{i-1}} \Sigma^{i-1},$$

так что для общего дивизора $D \in \Sigma$ имеем

$$D^i = D - \sum_{j=1}^{i} \nu_j E_j,$$

где мы пишем D вместо $\varphi_{i,0}^* D$ и аналогично для исключительных дивизоров E_i.

Рассмотрим пару общих дивизоров $D_1, D_2 \in \Sigma$ и построим самопересечения линейных систем Σ^i – (неоднозначно определенные) эффективные 1-циклы

$$Z_i = (D_1^i \circ D_2^i)$$

на X_i. Эти циклы допускают естественное разложение

$$\begin{aligned}
&Z_1 = Z_0^1 + Z_{1,1},\\
&Z_2 = Z_1^2 + Z_{2,2} = Z_0^2 + Z_{1,2} + Z_{2,2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&Z_i = Z_{i-1}^i + Z_{i,i} = Z_0^i + Z_{1,i} + \dots + Z_{i,i},
\end{aligned}$$

где

$$Z_{a,i} = (Z_{a,i-1})^i = \dots = Z_{a,a}^i, \qquad i = 1, \dots, L.$$

Определение 5.5.2. Функция $a\colon \{1, \dots, L\} \to \mathbb{Z}_+$ называется *согласованной со структурой графа* Γ, если выполнены неравенства

$$a(i) \geqslant \sum_{j \to i} a(j).$$

По построению $B_L \subset E_L \cong \mathbb{P}^2$ – плоская кривая. Пусть $\beta_L = \deg B_L$ – ее степень в $\mathbb{P}^2$ и для произвольного $i \geqslant L+1$

$$\beta_i = \beta_L \deg[\varphi_{i,L}|_{B_i} \colon B_i \to B_L]. \tag{5.5.1}$$

Основной вычислительный инструмент теории бирациональной жесткости – локальный факт, доказанный в гл. 1 (предложение 1.2.4): для любой функции $a(\,\cdot\,)$, согласованной со структурой графа, имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{L} a(i) m_i \geqslant \sum_{i=1}^{L} a(i) \nu_i^2 + a(L) \sum_{i=L+1}^{N} \beta_i \nu_i^2, \tag{5.5.2}$$

где

$$m_i = \mathrm{mult}_{B_{i-1}} Z_0^{i-1}, \qquad i = 1, \dots, L.$$

Цель данного параграфа – доказать более сильную оценку, включающую (5.5.2) в качестве частного случая.

Определение 5.5.3. Вершину $i \in \{4, \dots, L\}$ графа Γ назовем *сложной*, если из нее выходят ровно три стрелки, т.е. для трех различных вершин $i_1 < i_2 < i_3$ имеем

$$i \to i_1, \qquad i \to i_2, \qquad i \to i_3.$$

Отметим, что в обозначениях определения 5.5.3 по лемме 5.5.1 всегда имеем

$$i_2 \to i_1, \qquad i_3 \to i_1, \qquad i_3 \to i_2.$$

Если в графе Γ нет сложных вершин, то он имеет класс $\leqslant 2$.

Определение 5.5.4. Назовем *упрощением* графа Γ ориентированный граф Γ^* класса $\leqslant 2$ со множеством вершин

$$1, \ldots, L,$$

стрелки в котором соединяют вершины по следующему правилу: если

$$\sharp\{j \mid i \to j\} \leqslant 2,$$

то $i \to j$ в Γ^* тогда и только тогда, когда $i \to j$ в Γ; если же i – сложная вершина, то в обозначениях определения 5.5.3 в Γ^* из вершины i выходят две стрелки,

$$i \to i_2, \qquad i \to i_3,$$

т.е. стрелка $i \to i_1$ отсутствует.

Таким образом, граф Γ^* получается из Γ удалением некоторых стрелок (и вершин, которые соответствуют раздутиям кривых).

Предложение 5.5.1. *Для любой функции* $a\colon \{1, \ldots, L\} \to \mathbb{Z}_+$, *согласованной со структурой графа* Γ^*, *имеет место неравенство* (5.5.2).

5.5.2. Доказательство усиленного неравенства. Если функция $a(\,\cdot\,)$ согласована со структурой Γ, то тем более она согласована с Γ^*, так что из предложения 5.5.1 вытекает предложение 1.2.4. Напомним общую схему доказательства неравенства (5.5.2) в § 1.2. Положим для $i = 1, \ldots, L$

$$d_i = \deg Z_{i,i},$$

где $Z_{i,i} \subset E_i \cong \mathbb{P}^2$ – плоская кривая, и для $i < j \leqslant L$

$$m_{i,j} = \operatorname{mult}_{B_{j-1}} Z_{i,j-1}.$$

Получаем систему равенств

$$\begin{aligned}
&\nu_1^2 + d_1 = m_1, \\
&\nu_2^2 + d_2 = m_2 + m_{1,2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\nu_i^2 + d_i = m_i + m_{1,i} + \cdots + m_{i-1,i}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\nu_L^2 + d_L = m_L + m_{1,L} + \cdots + m_{L-1,L}.
\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

Кроме того, имеем очевидное неравенство

$$d_L \geqslant \sum_{i=L+1}^{N} \beta_i \nu_i^2,$$

где числа β_i определены формулой (5.5.1). Умножим i-е равенство в (5.5.3) на $a(i)$ и сложим все получившиеся равенства. В левой части имеем

$$\sum_{i=1}^{L} a(i)\nu_i^2 + \sum_{i=1}^{L} a(i) d_i.$$

В правой части получаем
$$\sum_{i=1}^{L} a(i)m_i + \sum_{i=1}^{L-1}\Bigl(\sum_{j=i+1}^{L} a(j)m_{i,j}\Bigr).$$
Поэтому предложение 5.5.1 немедленно вытекает из следующего утверждения.

Лемма 5.5.3. *Для любого $i = 1, \ldots, L-1$ имеет место неравенство*
$$a(i)d_i \geqslant \sum_{j=i+1}^{L} a(j)m_{i,j}. \tag{5.5.4}$$

Доказательство. До этого момента наши рассуждения дословно повторяли соответствующие доказательства в § 1.2. Если функция $a(\,\cdot\,)$ согласована со структурой графа Γ (а не Γ^*), то, учитывая, что неравенство $m_{i,j} > 0$ возможно только при условии $j \to i$ и что всегда
$$d_i \geqslant m_{i,j},$$
выводим (5.5.4) из неравенства $a(i) \geqslant \sum_{j\to i} a(j)$ (этим доказано неравенство (5.5.2)). Для доказательства предложения 5.5.1 этого, однако, недостаточно, потому что функция $a(\,\cdot\,)$ согласована лишь со структурой графа Γ^*, в котором, вообще говоря, меньше стрелок, чем в Γ.

Для доказательства (5.5.4) вспомним, прежде всего, что целозначные функции
$$d_i = \deg Z_{i,i}, \qquad m_{i,j} = \operatorname{mult}_{B_{j-1}} Z_{i,j-1}$$
суть линейные функции эффективных 1-циклов $Z_{i,i}$ на исключительной плоскости $E_i \cong \mathbb{P}^2$. Поскольку неравенство (5.5.4) также линейное, утверждение леммы 5.5.3 следует из более простого факта.

Лемма 5.5.4. *Для любой неприводимой кривой $C \subset E_i$ имеет место неравенство*
$$a(i)\deg C \geqslant \sum_{j=i+1}^{L} a(j)\operatorname{mult}_{B_{j-1}} C^{j-1}. \tag{5.5.5}$$

Доказательство. Положим
$$d = \deg C, \qquad \mu_j = \operatorname{mult}_{B_{j-1}} C^{j-1}, \quad j = i+1, \ldots, L.$$
Как отмечено выше, если $\mu_j > 0$, то $j \to i$, так что необходимо доказать неравенство
$$a(i)d \geqslant \sum_{j\to i} a(j)\mu_j.$$
Это неравенство есть некоторое утверждение об особенностях плоских кривых. Рассмотрим два случая:

1) $C \subset E_i$ – прямая в $E_i \cong \mathbb{P}^2$;
2) C – кривая степени $d \geqslant 2$.

В случае 1) определим число $k \geqslant 1$ условием
$$\{j \mid B_{j-1} \in C^{j-1}\} = \{i+1, \ldots, i+k\}. \tag{5.5.6}$$
Чтобы различать стрелки в графах Γ и Γ^*, будем писать $a \overset{*}{\to} b$, если вершины a и b соединены стрелкой в Γ^*, оставляя обычную стрелку для Γ.

Следующий факт является ключевым.

Лемма 5.5.5. *Для любого* e, $1 \leqslant e \leqslant k$, *имеем*

$$i + e \xrightarrow{*} i.$$

Доказательство. Предположим, что $i+e$ – сложная вершина графа Γ (в противном случае $i + e \xrightarrow{*} i$ по определению). Напомним, что процедура упрощения удаляет из трех стрелок, выходящих из $i+e$, ту, которая идет в самую нижнюю вершину. Значит, можно предполагать, что $e \geqslant 3$. Однако точки

$$B_i, B_{i+1}, B_{i+2}, \ldots, B_{i+k-1}$$

лежат на собственном прообразе гладкой кривой C, и потому подграф

$$i+1 \leftarrow i+2 \leftarrow i+3 \leftarrow \cdots \leftarrow 1+k$$

есть цепь, т.е. между вершинами $i+1, \ldots, i+k$ в исходном графе Γ нет других стрелок, кроме последовательных. Из вершины $i+e$ заведомо выходят две стрелки:

$$i+e \to i+e-1. \qquad i+e \to i.$$

Из сказанного следует, что если из вершины $i+e$ выходит и третья стрелка, $i+e \to j$, то обязательно

$$j \leqslant i-1.$$

Именно эту стрелку и удалит процедура упрощения. Следовательно, стрелка $i+e \to i$ не будет удалена. Лемма доказана.

Вернемся к случаю 1). Неравенство (5.5.5) принимает вид оценки

$$a(i) \geqslant \sum_{j=i+1}^{i+k} a(j). \tag{5.5.7}$$

В силу только что доказанной леммы (5.5.7) верно, потому что функция $a(\,\cdot\,)$ согласована со структурой графа Γ^*. Лемма 5.5.4 в случае 1) доказана.

Обратимся к случаю 2). Снова определим $k \geqslant 1$ условием (5.5.6). Если $k=1$, то доказывать нечего, так как

$$i+1 \xrightarrow{*} i$$

и $\mu_j \leqslant d$ для любого j. Считаем поэтому, что $k \geqslant 2$.

Лемма 5.5.6. *Имеет место неравенство*

$$d \geqslant \mu_1 + \mu_2.$$

Доказательство. Пусть $L \subset E_i$ – прямая, проходящая через точку B_i в направлении бесконечно близкой точки $B_{i+1} \in E_i^{i+1}$. По предположению $C \neq L$. Теперь для индекса пересечения на поверхности E_i^{i+2} имеем

$$0 \leqslant (C^{i+2} \cdot L^{i+2}) = d - \mu_1 - \mu_2,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Пусть Γ_C – подграф графа Γ с вершинами $\{i+1, \dots, i+k\}$ (и теми же стрелками), Γ_C^* – подграф графа Γ^* с этим же множеством вершин. По определению процедуры упрощения стрелка

$$i+a \to i+b, \qquad a > b \leqslant 1,$$

не может быть удалена, потому что в Γ имеется стрелка, идущая в более низкую вершину:

$$i+a \to i. \tag{5.5.8}$$

Отсюда следует, что $\Gamma_C = \Gamma_C^*$. Далее, стрелка (5.5.8) удаляется процедурой упрощения в том и только том случае, когда $i+a$ – сложная вершина и стрелка (5.5.8) – самая нижняя. На языке графа Γ_C это означает, что вершина $i+a$ имеет класс 2 (как вершина этого графа). Имеет место очевидная

Лемма 5.5.7. *Целозначная функция*

$$i+a \mapsto \mu_{i+a} \in \mathbb{Z}_+$$

согласована со структурой графа Γ_C.

Доказательство очевидно, так как это хорошо известное свойство кратностей кривой в бесконечно близких точках (на неособой поверхности).

В силу всего сказанного доказательство неравенства (5.5.5) в случае 2) сводится к следующему комбинаторному факту. Пусть Δ – граф класса 2 со множеством вершин $\{1, \dots, k\}$ и $\varepsilon_\Delta(\,\cdot\,) \in \{0,1,2\}$ – функция класса вершины ($\varepsilon_\Delta(1) = 0$). Пусть $\mu(\,\cdot\,)$ и $a(\,\cdot\,)$ – $\mathbb{Z}_+$-значные функции, согласованные со структурой графа Δ.

Лемма 5.5.8. *Имеет место неравенство*

$$(\mu(1)+\mu(2)) \sum_{\varepsilon_\Delta(j)\leqslant 1} a(j) \geqslant \sum_{j=1}^{k} \mu(j)a(j). \tag{5.5.9}$$

Доказательство. Проведем его индукцией по числу вершин $k \geqslant 2$. Если $k=2$, то

$$\varepsilon_\Delta(1) = 0, \qquad \varepsilon_\Delta(2) = 1$$

и неравенство (5.5.9) имеет вид

$$(\mu(1)+\mu(2))(a(1)+a(2)) \geqslant \mu(1)a(1) + \mu(2)a(2),$$

так что доказывать нечего.

Предположим, что $k \geqslant 3$ и вершины 3 и 1 не соединены стрелкой: $3 \nrightarrow 1$, т.е. $\varepsilon_\Delta(3) = 1$. В этом случае применим предположение индукции к графу Δ_1 с вершинами $\{2, \dots, k\}$ и теми же стрелками, что и в Δ: для него неравенство (5.5.9) принимает вид

$$(\mu(2)+\mu(3)) \sum_{\varepsilon_\Delta(j)=1} a(j) \geqslant \sum_{j=2}^{k} \mu(j)a(j),$$

откуда с учетом неравенства $\mu(1) \geqslant \mu(2) \geqslant \mu(3)$ вытекает требуемое неравенство (5.5.9) для Δ.

Предположим, что $k \geqslant 3$ и имеются стрелки

$$3 \to 1, \dots, 2+l \to 1,$$

где $l \geqslant 1$. В этом случае распишем левую часть (5.5.9) как

$$(\mu(1)+\mu(2))\Bigg(a(1)+a(2)+\sum_{\substack{j\geqslant l+3\\ \varepsilon_\Delta(j)=1}} a(j)\Bigg)$$

и правую часть (5.5.9) как

$$\mu(1)a(1)+\mu(2)a(2)+\sum_{j=3}^{l+2}\mu(j)a(j)+\sum_{j=l+3}^{k}\mu(j)a(j).$$

Поскольку функции $\mu(\,\cdot\,)$ и $a(\,\cdot\,)$ согласованы со структурой графа, имеем неравенство

$$\mu(2)a(1)\geqslant \mu(2)(a(2)+a(3)+\dots+a(l+2))$$

и симметричное неравенство для $\mu(1)a(2)$. Применяя предположение индукции к подграфу Δ_{l+3} с вершинами $\{l+3,\dots,k\}$, завершаем доказательство леммы.

Этим предложение 5.5.1 доказано.

5.5.3. Подсчет кратностей самопересечения для не лог-канонической особенности. Пусть $o\in X$ – неособый трехмерный росток, Σ – подвижная линейная система такая, что

$$\operatorname{mult}_o\Sigma\leqslant 2n,$$

но точка o является изолированным центром не лог-канонических особенностей пары

$$\left(X,\frac{1}{n}\Sigma\right), \tag{5.5.10}$$

где $n>0$ – некоторое число. Пусть $Z=(D_1\circ D_2)$ – самопересечение системы Σ (эффективный 1-цикл на X). Пусть

$$\varphi_{i,i-1}\colon X_i\to X_{i-1},\qquad i=1,\dots,K,$$

– последовательность раздутий центров некоторой не лог-канонической особенности пары (5.5.10), $X_0=X$, $\varphi_{i,i-1}$ раздувает неприводимое подмногообразие $B_{i-1}\subset X_{i-1}$ – точку или кривую, $B_0=o$,

$$E_i=\varphi_{i,i-1}^{-1}(B_{i-1})\subset X_i$$

– исключительный дивизор, наконец, $E_K\subset X_K$ реализует не лог-каноническую особенность пары (5.5.10), т.е. имеет место лог-неравенство Нётера–Фано

$$\sum_{i=1}^{K}p_{Ki}\nu_i>n\Bigg(\sum_{i=1}^{K}p_{Ki}\delta_i+1\Bigg), \tag{5.5.11}$$

где $\delta_i=\operatorname{codim}B_{i-1}-1$, p_{K_i} – число путей из E_K в E_i и, как обычно,

$$\nu_i=\operatorname{mult}_{B_{i-1}}\Sigma^{i-1}\leqslant 2n,$$

Σ^i – собственный прообраз подвижной системы Σ на X_i. Пусть

$$\{1,\dots,L\}=\{j\mid \dim B_{j-1}=0\}.$$

Поскольку по предположению $\nu_i\leqslant 2n$, из (5.5.11) следует, что $K\geqslant L+1$, т.е. среди центров раздутий имеется по крайней мере одна кривая.

Обозначим через Γ ориентированный граф последовательности раздутий

$$\varphi_{i,i-1}, \qquad i = 1, \dots, K,$$

и через Γ^* – его упрощение, граф класса $\leqslant 2$. Число путей из вершины i в вершину j, $i > j$, в графе Γ^* обозначим через p^*_{ij}. По определению $p^*_{ii} = 1$. Положим также

$$m_i = \operatorname{mult}_{B_{i-1}} Z^{i-1}, \qquad i = 1, \dots, L.$$

Следующий факт усиливает классическое $4n^2$-неравенство для случая не лог-канонической особенности пары (5.5.10).

Предложение 5.5.2. *Имеет место оценка*

$$\sum_{i=1}^{L} p^*_{Li} m_i > 4n^2 \biggl(\sum_{i=1}^{L} p^*_{Li} + 1\biggr).$$

Доказательство. Положим

$$N = \min\biggl\{e \biggm| \sum_{i=1}^{e} p_{ei}(\nu_i - \delta_i n) > 0\biggr\},$$

т.е. E_N – не каноническая особенность пары (5.5.10) с минимальным номером. В частности, пара (5.5.10) канонична в $E_1, \dots, E_{N-1}$. Из неравенства $\nu_1 \leqslant 2n$ легко следует (см. § 5.4), что отрезок графа Γ с вершинами

$$L-1, L, L+1, \dots, N$$

есть цепь. Определим число a, $0 \leqslant a \leqslant 1$, равенством

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N-1} p_{Ni}(\delta_i n - \nu_i)$$

(числа путей p_{N_i} и $p_{N-1,i}$ совпадают в силу сказанного выше). Если $a = 1$, то легко убедиться, что

$$\nu_1 = \dots = \nu_N = 2n,$$

откуда утверждение предложения следует непосредственно. Считаем поэтому, что $a < 1$.

Предположим сначала, что $N = K$. В этом случае техника подсчета кратностей с учетом неравенства (5.5.11) дает

$$\sum_{i=1}^{L} p^*_{Li} m_i > \frac{(2\Sigma^*_0 + \Sigma^*_1 + 1)^2}{\Sigma^*_0 + \Sigma^*_1} n^2 = 4(\Sigma^*_0 + 1)n^2 + \frac{(\Sigma^*_1 - 1)^2}{\Sigma^*_0 + \Sigma^*_1} n^2,$$

где

$$\Sigma^*_{2-\alpha} = \sum_{\delta_i = \alpha} p^*_{Ni}, \qquad \alpha = 1, 2,$$

что и требовалось (отметим, что лог-неравенство Нётера–Фано лишь усиливается при замене p_{Ki} на p^*_{Ki}, поскольку эти коэффициенты изменяются лишь при $i = 1, \dots, L-1$ и $\nu_i \leqslant 2n$ для этих значений i – это хорошо известный феномен).

Итак, при $N = K$ предложение 5.5.2 справедливо.

Предположим, что $K \geqslant N+1$.

Лемма 5.5.9. *Пара*

$$\left(X_{N-1}, \frac{1}{n}\Sigma^{N-1} - aE_{N-1}\right)$$

не лог-канонична в кривой $B_{N-1} \subset E_{N-1}$.

Доказательство. Учитывая стандартные свойства чисел p_{ij}, перепишем неравенство (5.5.11) в виде

$$\left(\sum_{\alpha\to N-1} p_{K\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{N-1} p_{Ni}(\nu_i - \delta_i n)\right) + \sum_{i=N}^{K} p_{Ki}(\nu_i - \delta_i n) > n$$

(очевидно, для $i \leqslant N-1$ имеет место равенство $p_{Ni} = p_{N-1,i}$). Теперь утверждение леммы вытекает непосредственно из определения числа a и того, что $N \to N-1$. Лемма доказана.

Теперь, полагая

$$\Sigma_0^* = \sum_{i=1}^{L} p_{Li}^*, \qquad \Sigma_1^* = \sum_{i=L+1}^{N-1} p_{Ni}^*,$$

согласно предложениям 5.4.2 и 5.5.1 имеем

$$\sum_{i=1}^{L} p_{Li}^* m_i > \sum_{i=1}^{N-1} p_{Ni}^* \nu_i^2 + 4(1+a)n^2,$$

откуда с учетом неравенства Нётера–Фано получаем

$$\sum_{i=1}^{L} p_{Li}^* m_i > \left[\frac{(2\Sigma_0^* + \Sigma_1^* - a)^2}{\Sigma_0^* + \Sigma_1^*} + 4(1+a)\right] n^2 = 4(\Sigma_0^* + 1)n^2 + \frac{(\Sigma_1^* + a)^2}{\Sigma_0^* + \Sigma_1^*} n^2. \tag{5.5.12}$$

Предложение 5.5.2 доказано.

§ 5.6. Исключение бесконечно близких максимальных особенностей

В данном параграфе завершается доказательство предложения 1.2: в предположении, что система Σ не имеет максимального подмногообразия вида $\sigma^{-1}(P)$, где $P \subset \mathbb{P}$ — линейное подпространство коразмерности 2, доказано, что Σ не имеет максимальных особенностей с центром B коразмерности $\geqslant 4$.

5.6.1. Центр особенности не содержится в дивизоре ветвления. В силу предложений 5.1.6 и 5.3.1 можно считать, что центр B максимальной особенности линейной системы Σ имеет коразмерность $\geqslant 4$ (и то же самое справедливо для любой другой максимальной особенности). Пусть $P \subset \mathbb{P}$ – общее линейное подпространство размерности $\operatorname{codim} B$ и $o \in \sigma^{-1}(P) \cap B$ – некоторая точка. Положим $V_P = \sigma^{-1}(P)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\sigma(B) \not\subset W$. В этом случае $p = \sigma(o) \notin W$. Многообразие V_P гладкое,

$$\sigma_P = \sigma|_{V_P} \colon V_P \to P$$

– двойное накрытие, разветвленное над $W_P = W \cap P$,

$$\operatorname{Pic} V_P = \mathbb{Z} H_P,$$

где $H_P = H|_{V_P}$. Пусть Σ_P – ограничение системы Σ на V_P. Это подвижная линейная система, причем пара

$$\left(V_P, \frac{1}{n}\Sigma_P\right)$$

не лог-канонична и имеет точку o изолированным центром не лог-канонической особенности. Пусть

$$\varphi\colon V_P^+ \to V_P$$

— раздутие точки o, $E = \varphi^{-1}(o)$ – исключительный дивизор. Пусть

$$Z_P = (D_1 \circ D_2)$$

– самопересечение линейной системы Σ_P и Z_P^+ – его собственный прообраз на V_P^+. Согласно предложению 5.4.1 для некоторой плоскости $\Pi \subset E$ коразмерности 2 имеет место неравенство

$$\operatorname{mult}_o Z_P + \operatorname{mult}_\Pi Z_P^+ > 8n^2. \tag{5.6.1}$$

Пусть теперь

$$\varphi_P\colon P^+ \to P$$

– раздутие точки $p = \sigma(o)$ и $E_P = \varphi_P^{-1}(p)$ – исключительный дивизор, E естественно отождествляется с E_P. Пусть $\Lambda \subset P$ – единственная плоскость коразмерности 2, содержащая точку p и высекающая Π на $E_P = E$:

$$\Lambda^+ \cap E_P = \Pi,$$

где $\Lambda^+ \subset P^+$ – собственный прообраз. Подмногообразие $Q = \sigma_P^{-1}(\Lambda) \subset V_P$ неприводимо, имеет коразмерность 2 (относительно V_P), причем

$$\deg Q = 2, \qquad \operatorname{mult}_o Q = \operatorname{mult}_\Pi Q^+ = 1, \tag{5.6.2}$$

где $Q^+ \subset V_P^+$ – собственный прообраз. Поскольку цикл Z_P удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mult}_o Z_P + \operatorname{mult}_\Pi Z_P^+ > \deg Z_P = 8n^2,$$

то, записывая

$$Z_P = aQ + Z_P^\sharp,$$

где $a \in \mathbb{Z}_+$ и $Z_P^\sharp$ не содержит Q компонентой, получаем

$$\operatorname{mult}_o Z_P^\sharp + \operatorname{mult}_\Pi (Z_P^\sharp)^+ > \deg Z_P^\sharp,$$

$(Z_P^\sharp)^+$ – собственный прообраз. Наконец, пусть R есть σ-прообраз общей гиперплоскости в P, содержащей точку p и высекающей Π на $E_P = E$, т.е.

$$\sigma(R)^+ \cap E_P = \Pi.$$

Дивизор R не содержит ни одной компоненты эффективного цикла $Z_P^\sharp$, так что для теоретико-схемного пересечения

$$Z_R^\sharp = (Z_P^\sharp \circ R)$$

имеем неравенство

$$\operatorname{mult}_o Z_R^\sharp \geqslant \operatorname{mult}_o Z_P^\sharp + \operatorname{mult}_\Pi (Z_P^\sharp)^+ > \deg Z_R^\sharp,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает предложение 5.1.2 в случае, когда $\sigma(B) \not\subset W$.

5.6.2. Центр особенности содержится в дивизоре ветвления: простой случай. Рассмотрим, наконец, последний случай, когда $\sigma(B) \subset W$. Снова работаем на многообразии $V_P = \sigma^{-1}(P)$; линейная система Σ_P подвижна и точка o есть изолированный центр лог-максимальной особенности этой линейной системы. Положим $p = \sigma(o)$. Для раздутий

$$\varphi\colon V_P^+ \to V_P, \qquad \varphi\colon P^+ \to P$$

точек o и p соответственно с исключительными дивизорами

$$E = \varphi^{-1}(o), \qquad E_P = \varphi_P^{-1}(p)$$

отображение двойного накрытия $\sigma_P\colon V_P \to P$ не продолжается до изоморфизма исключительных дивизоров E и E_P. Пусть $T_P = T_p W_P$ – касательная гиперплоскость к дивизору ветвления $W_P = W \cap P$ в точке p, $\mathbb{T}_P$ – соответствующая гиперплоскость в E_P. Легко видеть, что существуют гиперплоскость $\mathbb{T} \subset E$ и точка $\xi \in E \setminus \mathbb{T}$ такие, что σ_P индуцирует изоморфизм $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}_P$ и рациональное отображение

$$\sigma_E\colon E \dashrightarrow E_P$$

есть композиция проекции $\mathrm{pr}_\xi\colon E \dashrightarrow \mathbb{T}$ из точки ξ и изоморфизма $\mathbb{T} \cong \mathbb{T}_P$. В частности, $\sigma_E(E) = \mathbb{T}_P$ (все это легко проверить в подходящих локальных координатах $z_1, \dots, z_k$ в точке p на P, в которых V_P задается локальным уравнением $y^2 = z_1$).

Пусть, как и выше, Z_P и Z_P^+ – самопересечение линейной системы Σ_P и его собственный прообраз на V_P^+ соответственно. Пусть $\Pi \subset E$ – плоскость коразмерности 2, удовлетворяющая неравенству (5.6.1),

$$\Pi_P = \sigma_E(\Pi) \subset \mathbb{T}_P \subset E_P$$

– образ плоскости Π. Очевидно, Π_P есть линейное подпространство в $\mathbb{T}_P$ коразмерности 1 или 2. В последнем случае для общей гиперплоскости $R \ni p$, $R \subset P$, такой, что $R^+ \supset \Pi_P$, ни одна компонента эффективного цикла $(\sigma_P)_* Z_P$ коразмерности 2 не содержится в R. В силу неравенства (5.6.1) получаем

$$\mathrm{mult}_o(\sigma^{-1}(R) \circ Z_P) \geqslant \mathrm{mult}_o Z_P + \mathrm{mult}_\Pi Z_P^+ > 8n^2 = \deg Z_P = \deg(\sigma^{-1}(R) \circ Z_P),$$

что невозможно. Следовательно, Π_P есть гиперплоскость в $\mathbb{T}_P$. Пусть $\Lambda \subset P$ – единственная плоскость коразмерности 2 такая, что $\Lambda \ni p$ и $\Lambda^+ \cap E_P = \Pi_P$. Подмногообразие $Q = \sigma_P^{-1}(\Lambda)$ неприводимо. Если Q^+ не содержит Π, то имеем

$$\mathrm{mult}_o Q = 2, \qquad \mathrm{mult}_\Pi Q^+ = 0,$$

так что

$$\mathrm{mult}_o Q + \mathrm{mult}_\Pi Q^+ = \deg Q$$

и можно рассуждать так же, как выше. Напомним, что согласно условиям общности положения (и с учетом общности подпространства P) точка $o \in Q$ есть изолированная квадратичная особенность. Если ранг этой особенности не меньше 3, то квадрика $Q^+ \cap E$ неприводима (и приведена), так что $\Pi \not\subset Q^+$. Несложный подсчет размерностей (аналогичный проведенному ниже, в п. 5.7.3) показывает, что при $M \geqslant 8$ для достаточно общей гиперповерхности W, общего подпространства P и общего подпространства $\Lambda \subset P$, $\Lambda \ni p$ коразмерности 2 в P, где $p \in P \cap W$ – произвольная точка, ранг соответствующей квадратичной особенности $o \in Q$ не меньше 3.

Однако при $M \leqslant 7$ возможность $\Pi \subset Q^+$ реализуется для любой гиперповерхности W. Теперь рассуждать так же, как в случае, когда точка o не лежит на дивизоре ветвления, нельзя:

$$\mathrm{mult}_o Q = 2, \qquad \mathrm{mult}_\Pi Q^+ = 1,$$

так что рассуждения, как при $\sigma(o) \notin W$, не проходят. Для исключения этой возможности необходима усиленная техника подсчета кратностей (§ 5.5). Мы завершим доказательство во всех деталях для $M \geqslant 6$.

5.6.3. Центр особенности содержится в дивизоре ветвления: трудный случай. Справедлива

Лемма 5.6.1. *Верна оценка*

$$\nu = \operatorname{mult}_o \Sigma \leqslant 2n.$$

Доказательство. Рассмотрим дивизор $T = \sigma^{-1}(T_pW)$, где $T_pW \subset \mathbb{P}$ – касательная гиперплоскость. Система Σ подвижна, так что корректно определен эффективный цикл $(D \circ T)$, где $D \in \Sigma$ – общий дивизор. Теперь имеем

$$2\nu \leqslant \operatorname{mult}_o(D \circ T) \leqslant \deg(D \circ T) = \deg D = 4n,$$

что и утверждалось.

Пусть $\Delta \subset P$, $\Delta \ni p$, – общая 3-плоскость, так что $V_\Delta = \sigma^{-1}(\Delta)$ – гладкое многообразие, $\sigma_\Delta \colon V_\Delta \to \Delta$ – двойное накрытие, Σ_Δ – ограничение системы Σ на V_Δ. Пара

$$\left(V_\Delta, \frac{1}{n}\Sigma_\Delta\right) \tag{5.6.3}$$

не лог-канонична в точке o, причем o – изолированный центр не лог-канонических особенностей этой пары.

Пусть

$$C = Q \cap V_\Delta = \sigma^{-1}(L),$$

где $L = \Delta \cap \Lambda$ – прямая, проходящая через точку p и касательная к W в этой точке (определение плоскости Λ см. выше, в конце п. 5.6.2). Положим также

$$y = \Pi \cap V_\Delta^+,$$

где V_Δ^+ – собственный прообраз V_Δ на V^+, т.е.

$$\varphi_\Delta = \varphi|_{V_\Delta^+} \colon V_\Delta^+ \to V_\Delta$$

– раздутие точки o с исключительной плоскостью E_Δ, $y = \Pi \cap E_\Delta$. Имеется не лог-каноническая особенность пары (5.6.3), центр которой на V_Δ^+ есть точка y.

Рассмотрим самопересечение

$$Z_\Delta = (D_1 \circ D_2) = Z|_{V_\Delta}$$

подвижной линейной системы Σ_Δ и запишем

$$Z_\Delta = bC + Z_1,$$

где $b \in \mathbb{Z}_+$, эффективный 1-цикл Z_1 не содержит кривую C компонентой и потому удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mult}_o Z_1 + \operatorname{mult}_y Z_1^+ \leqslant \deg Z_1 = 8n^2 - 2b. \tag{5.6.4}$$

Предположим теперь, что в точке o кривая C имеет две различные ветви:

$$C^+ \cap E_\Delta = \{y, y^*\},$$

где $y, y^* \in E_\Delta$ – различные точки. Это предположение оправданно при $M \geqslant 6$ в силу условий общности положения, так как для любого подпространства $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2, $\mathcal{U} \ni p$, квадратичная точка $o \in \sigma^{-1}(\mathcal{U})$ имеет ранг не меньше 2 (см. предложение 5.1.5, (iii)), так что это же верно и для квадратичной точки $o \in \sigma^{-1}(L) = C$, так как $L = \mathcal{U} \cap \Delta$, где Δ – общая

3-плоскость, содержащая точку p. При $M=5$ необходимо рассматривать и случай, когда $o\in C$ есть каспидальная особая точка порядка 1 (см. ниже).

В обозначениях п. 5.5.3 пусть

$$\varphi_{i,i-1}\colon X_i\to X_{i-1},\qquad i=1,\ldots,N,$$

$X_0=V_\Delta$, – разрешение не лог-канонической особенности, центр которой на $X_1=V_\Delta^+$ есть точка $B_1=y$. Пусть

$$\{1,\ldots,k\}=\{i\mid 1\leqslant i\leqslant L,\ B_{i-1}\in C^{i-1}\}.$$

В силу сделанного предположения о ветвях кривой C имеем $k\geqslant 2$, причем подграф с вершинами $1,\ldots,k$ есть цепь.

Отметим, что $b\geqslant 1$; в противном случае выполнено неравенство

$$\operatorname{mult}_o Z_\Delta+\operatorname{mult}_y Z_\Delta^+\leqslant \deg Z_\Delta=8n^2$$

и можно рассуждать дословно так же, как при $\sigma(o)\notin W$.

Имеем

$$p^*_{L1}=\cdots=p^*_{L,k-1}.$$

Положим, далее,

$$\mu_i=\operatorname{mult}_{B_{i-1}}Z_1^{i-1},\qquad i=1,\ldots,L.$$

В силу неравенства (5.6.4) получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{L}p^*_{Li}m_i=b\biggl(\sum_{i=1}^{k}p^*_{Li}+p^*_{L1}\biggr)+\sum_{i=1}^{L}p^*_{Li}\mu_i\leqslant b\biggl(\sum_{i=1}^{k}p^*_{Li}+p^*_{L1}\biggr)+\frac{1}{2}\deg Z_1\sum_{i=1}^{L}p^*_{Li}. \tag{5.6.5}$$

Лемма 5.6.2. *Имеет место оценка*

$$p^*_{L1}=\cdots=p^*_{L,k-1}\leqslant 1+\sum_{i=k+1}^{L}p^*_{Li}.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{P}^*_{i,j}$ при $L\geqslant i>j\geqslant 1$ множество путей в графе Γ^* из вершины i в вершину j. Стрелку $i\xrightarrow{*}j$ назовем *прыжком*, если $i\geqslant j+2$. Путь $\pi\in\mathcal{P}^*_{i,j}$ назовем *простым*, если в нем нет прыжков, т.е. он последовательно проходит все вершины

$$i\xrightarrow{*}i-1\xrightarrow{*}\cdots\xrightarrow{*}a\xrightarrow{*}a-1\xrightarrow{*}\cdots\xrightarrow{*}j.$$

Очевидно, каждое множество $\mathcal{P}^*_{i,j}$ содержит в точности один простой путь. Обозначим его через σ_{ij}.

Если множество $\mathcal{P}^*_{i,j}\setminus\{\sigma_{ij}\}$ непусто, то каждый путь $\pi\in\mathcal{P}^*_{i,j}\setminus\{\sigma_{ij}\}$ имеет хотя бы один прыжок. Пусть

$$l(\pi)\xrightarrow{*}q(\pi)$$

– последний прыжок в пути π (т.е. прыжок из вершины $l(\pi)$ с наименьшим номером). Поскольку граф Γ^* имеет класс $\leqslant 2$, прыжок $a\xrightarrow{*}b$ однозначно определен вершиной a (так как из вершины a выходят ровно две стрелки и одна из них – это стрелка $a\xrightarrow{*}a-1$). Следовательно, путь π однозначно определен после вершины $l(\pi)$: сначала происходит однозначно определенный прыжок в вершину $q(\pi)$, а после этой вершины (если $q(\pi)\neq j$) путь π является простым.

Обозначим через $\mathcal{J}^*_{i,j}\subset\{j+2,\ldots,i\}$ множество таких индексов l, где $j+2\leqslant l\leqslant i$, что из вершины l имеется прыжок $l\xrightarrow{*}a\geqslant j$. Из сказанного следует, что, сопоставляя каждому пути

$\pi \in \mathcal{P}^*_{i,j} \setminus \{\sigma_{ij}\}$ вершину $l(\pi)$ последнего прыжка, получаем взаимно однозначное соответствие между множествами

$$\mathcal{P}^*_{i,j} \setminus \{\sigma_{ij}\}, \qquad \coprod_{l\in\mathcal{J}^*_{i,j}} \mathcal{P}^*_{i,l}$$

(где $\coprod$ обозначает дизъюнктное объединение). Следовательно,

$$p^*_{ij} = 1 + \sum_{l\in\mathcal{J}^*_{i,j}} p^*_{il} \leqslant 1 + \sum_{l\geqslant j+2} p^*_{il},$$

так как для $l \in \mathcal{J}^*_{i,j}$ во всяком случае $j+2 \leqslant l$. Лемма доказана.

Отметим, что приведенное рассуждение дает новое доказательство предложения 1.2.4 и, тем самым, $4n^2$-неравенства (см. гл. 1).

В силу леммы 5.6.2 правая часть неравенства (5.6.5) оценивается сверху числом

$$b + \left(b + \frac{1}{2}\deg Z_1\right)\sum_{i=1}^{L} p^*_{Li} = b + 4n^2 \sum_{i=1}^{L} p^*_{Li}.$$

Теперь из предложения 5.5.2 получаем оценку

$$b > 4n^2,$$

что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство предложения 5.1.2 для $M \geqslant 6$.

При $M = 5$ для завершения доказательства остается рассмотреть случай, когда кривая C имеет простую каспидальную особенность в точке o, так что C^+ касается исключительного дивизора E в точке y (касание простое). Если $L = 2$, то проходят предыдущие рассуждения. Если $L \geqslant 3$ и $B_2 \in C^2$, то вершины 3 и 1 соединены стрелкой, $3 \to 1$, так что

$$p^*_{L1} \geqslant p^*_{L2} + p^*_{L3},$$

и вклад первой вершины графа в сумму $\sum_{i=1}^{L} p^*_{Li} m_i$ не компенсируется числом

$$b\left(1 + \sum_{i=k+1}^{L} p^*_{Li}\right),$$

как выше. Однако предыдущие оценки могут быть усилены следующим образом. Положим

$$\mu = \operatorname{mult}_C \Sigma \leqslant n$$

(если $\mu > n$, то система Σ обладает максимальным подмногообразием коразмерности 2, что и требуется). Ограничим Σ на σ-прообраз S общей 2-плоскости в $\mathbb{P}$, проходящей через прямую L. Очевидно, $\Sigma_S = \Sigma|_S$ есть непустая линейная система кривых, имеющая единственную неподвижную компоненту C кратности μ. Для общей кривой $G \in \Sigma_S$ имеем неравенство

$$((G - \mu C)\cdot C) \geqslant 2\operatorname{mult}_o(G-\mu C) + \sum_{i=2}^{k} \operatorname{mult}_{B_{i-1}}(G-\mu C),$$

где

$$\{2,\dots,k\} = \{i \mid B_{i-1} \in C^{i-1}\}, \qquad k \geqslant 3.$$

Имеется стандартная техника (использованная в [37; п. 8], а также в [60], [38]), позволяющая из этой оценки и неравенства Нётера–Фано вывести, что “верхняя” сумма Σ^*_1 велика по сравнению с “нижней” Σ^*_0, откуда получается существенное усиление квадратичного неравенства (5.5.12). Этого усиленного неравенства уже достаточно для исключения каспидального случая. Детали мы опускаем; они будут приведены в другой работе. Таким образом, завершается доказательство предложения 5.1.2 для $M = 5$.

§ 5.7. Двойные пространства общего положения

В этом параграфе доказаны предложения 5.1.3–5.1.5.

5.7.1. Прямые на многообразии V. Докажем предложение 5.1.3. Нетривиальная часть этого утверждения заключается в том, что через каждую точку проходит не более конечного числа прямых; тот факт, что любое (не обязательно общее) двойное пространство индекса 2 заметается прямыми, почти очевиден. Легко видеть, что образ $L = \sigma(C)$ прямой $C \subset V$ на $\mathbb{P}$ есть прямая в обычном понимании и

$$\sigma|_C \colon C \to L \subset \mathbb{P}$$

есть изоморфизм. Таким образом, имеются две возможности: либо $L \not\subset W$, так что $\sigma^{-1}(L) = C \cup C^*$ – пара гладких рациональных кривых (переставляемых инволюцией Галуа двойного накрытия σ), либо $L \subset W$ целиком содержится в дивизоре ветвления, т.е. $\sigma^{-1}(L) = C$. Верно и обратное: если прямая $L \subset \mathbb{P}$ такова, что кривая $\sigma^{-1}(L)$ приводима либо $L \subset W$, то $\sigma^{-1}(L)$ состоит из двух либо одной прямой на V соответственно. Легкий счет размерностей показывает, что на общей гиперповерхности в $\mathbb{P}$ степени $2(M-1)$ прямых нет, так что вторая возможность не реализуется. Далее, двойное накрытие $\sigma^{-1}(L) \to L$ распадается тогда и только тогда, когда дивизор $W|_L$ на $L = \mathbb{P}^1$ делится на 2, т.е.

$$\frac{1}{2}(W|_L) \in \operatorname{Div} L$$

– целый дивизор. Поэтому предложение 5.1.3 немедленно вытекает из следующего факта.

Предложение 5.7.1. *Для общей гладкой гиперповерхности $W \subset \mathbb{P}$ степени $2(M-1)$ через каждую точку $x \in \mathbb{P}$ проходит конечное число таких прямых L, что*

$$W|_L \in 2 \operatorname{Div} L.$$

Доказательство. Через $\mathcal{P}_k(\mathbb{P}^l)$ обозначим пространство однородных многочленов степени k на проективном пространстве $\mathbb{P}^l$ (т.е. $H^0(\mathbb{P}^l, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^l}(k))$), рассматриваемое как аффинное алгебраическое многообразие размерности $\binom{k+l}{l}$. Пусть

$$\operatorname{sq} \colon \mathcal{P}_k(\mathbb{P}^l) \to \mathcal{P}_{2k}(\mathbb{P}^l), \qquad \operatorname{sq} \colon f \mapsto f^2,$$

– отображение возведения в квадрат. Его образ

$$\operatorname{sq}(\mathcal{P}_k(\mathbb{P}^l)) \subset \mathcal{P}_{2k}(\mathbb{P}^l)$$

обозначим $[\mathcal{P}_k(\mathbb{P}^l)]^2$. Рассмотрим пространство пар

$$\Pi = \mathbb{P} \times \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$$

и положим $\Pi(x) = \{x\} \times \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$ для произвольной точки $x \in \mathbb{P}$. Пусть

$$Y(x) \subset \Pi(x)$$

– замкнутое алгебраическое подмножество пар (x, F), $F \in \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$, определяемое условием:

> множество прямых $L \subset \mathbb{P}$, $L \ni x$, для которых $F|_L \in [\mathcal{P}_{M-1}(L)]^2$, имеет положительную размерность. (+)

Легко видеть, что замыкание

$$\overline{\bigcup_{x \in \mathbb{P}} Y(x)} \subset \Pi$$

есть замкнутое алгебраическое подмножество размерности $\leqslant M + \dim Y(x)$. Поэтому предложение 5.7.1, в свою очередь, вытекает из следующего факта.

Предложение 5.7.2. *Коразмерность замкнутого множества* $Y(x)$ *в* $\Pi(x) \cong \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$ *не меньше* $M+1$.

На самом деле, как будет видно из доказательства, справедлива гораздо более сильная оценка на коразмерность множества $Y(x)$. В частности, утверждение предложения 5.7.1 остается верным и для двойных пространств индекса 2 с простейшими особенностями (квадратичными точками). Однако здесь нам это не нужно.

Доказательство предложения 5.7.2. Пусть $z_1, \dots, z_M$ – система аффинных координат на $\mathbb{P}$ с началом в точке $x = (0, \dots, 0)$. Многочлен $F \in \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$ записываем в виде

$$F = q_0 + q_1(z_1, \dots, z_M) + \dots + q_{2(M-1)}(z_1, \dots, z_M),$$

где $q_i(z_*)$ – однородный многочлен степени i. Прямая $L \ni x$ соответствует набору однородных координат

$$(a_1 : \dots : a_M) \in \mathbb{P}^{M-1}$$

и

$$L = \{t(a_1, \dots, a_M) \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Очевидно, $F|_L \in [\mathcal{P}_{M-1}(L)]^2$ тогда и только тогда, когда многочлен

$$q_0 + tq_1(a_*) + \dots + t^{2(M-1)} q_{2(M-1)}(a_*) \in \mathbb{C}[t]$$

есть полный квадрат в $\mathbb{C}[t]$.

Для каждого $k = 0, 1, \dots, 2(M-1)$ определим подмножество $Y_k(x) \subset \Pi(x)$ условием

> существует неприводимое замкнутое подмножество $Z \subset \mathbb{P}^{M-1}$ положительной размерности такое, что для общей прямой $L \in Z$ имеем $F_L \in [\mathcal{P}_{M-1}(L)]^2$, причем $F|_L$ имеет в точке $x \in L$ нуль порядка k. $(+_k)$

Напомним, что мы отождествляем точки $\mathbb{P}^{M-1}$ с прямыми в $\mathbb{P}$, проходящими через точку x.

Очевидно, для нечетного $k \notin 2\mathbb{Z}$ имеем $Y_k = \varnothing$ и

$$Y(x) = \bigcap_{i=0}^{M-1} Y_{2i}(x).$$

Таким образом, достаточно доказать оценку предложения 7.2 для каждого из (конструктивных) множеств $Y_{2i}(x)$, $i = 0, \dots, M-1$. Рассмотрим сначала множество $Y_0(X)$ (соответствующее прямым на V, проходящим через точку вне дивизора ветвления). Для $F \in Y_0(x)$ имеем $q_0 \neq 0$, и можно считать, что $q_0 = 1$.

Лемма 5.7.1. *Для любого* $m \geqslant 1$ *существует набор квазиоднородных многочленов*

$$A_{m,i}(s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Q}[s_1, \dots, s_m]$$

степени $\deg A_{m,i} = i \in \{m+1, \dots, 2m\}$, *где вес переменной* s_j *есть* $\mathrm{wt}(s_j) = j$, *такой, что многочлен*

$$1 + b_1 t + \dots + b_{2m} t^{2m}$$

есть полный квадрат в $\mathbb{Q}[t]$ *для* $b_1, \dots, b_{2m} \in \mathbb{C}$ *тогда и только тогда, когда удовлетворяется система равенств*

$$b_i = A_{m,i}(b_1, \dots, b_m), \qquad i = m+1, \dots, 2m.$$

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$1 + s_1 t + \dots + s_{2m} t^{2m} = (1 + r_1 t + \dots + r_m t^m)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, найдем r_i как многочлены от $s_1, \dots, s_i$ при $i \leqslant m$ (с коэффициентами в $\mathbb{Z}[1/2]$). Равенство коэффициентов при $t^{m+1}, \dots, t^{2m}$ дает требуемую систему уравнений. Доказательство закончено.

Согласно лемме ограничение F на прямую $\{t(a_*)\}$ есть полный квадрат тогда и только тогда, когда удовлетворяется система уравнений

$$q_i(a_*) = A_{M-1,i}(q_1(a_*), \dots, q_{M-1}(a_*)), \qquad i = M, \dots, 2(M-1). \tag{5.7.1}$$

Это система $M-1$ полиномиальных однородных уравнений от $(a_1 : \dots : a_M)$ степеней $M, \dots, 2(M-1)$ соответственно, откуда, в частности, сразу следует, что через каждую точку $x \in V$ проходят хотя бы две прямые, а в случае общего положения через $x \in V$ проходят

$$2 \cdot (M \cdot (M+1) \cdots 2(M-1)) = 2\frac{(2M-2)!}{(M-1)!}$$

прямых. Как видно из (5.7.1), коэффициенты правой части полиномиально зависят от коэффициентов многочленов $q_1, \dots, q_{M-1}$. Таким образом, $Y_0(x)$ состоит из таких многочленов $F \in \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P})$, для которых система (5.7.1) задает алгебраическое множество положительной размерности.

Теперь коразмерность $\operatorname{codim} Y_0(x)$ можно оценить методом § 2.1. Считая многочлены $q_1, \dots, q_{M-1}$ фиксированными, получаем равенство

$$\operatorname{codim} Y_0(x) = \operatorname{codim} Y_0^*(x),$$

где замкнутое множество

$$Y_0^* \subset \mathcal{P}_M(\mathbb{P}^{M-1}) \times \dots \times \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P}^{M-1})$$

(состоящее из наборов $q_M^*, \dots, q_{2(M-1)}^*$ однородных многочленов соответствующих степеней) определяется условием: система уравнений

$$q_M^* = \dots = q_{2(M-1)}^* = 0$$

имеет множество решений положительной размерности.

Повторяя доказательство леммы 2.1.3, определим подмножества

$$Y_{0,j}^* \subset Y_0^*, \qquad j = M, \dots, 2(M-1),$$

фиксируя первую “неправильную” коразмерность:

$$Y_{0,j}^* = \bigl\{(q_M^*, \dots, q_{2(M-1)}^*) \mid \operatorname{codim}\{q_M^* = \dots = q_j^* = 0\} = j - M\bigr\},$$

так что

$$Y_0^* = \coprod_{j=M}^{2(M-1)} Y_{0,j}^*,$$

где $\coprod$ обозначает дизъюнктное объединение (например, $Y_{0,M}^*$ состоит из наборов (q_*^*) с $q_M^* \equiv 0$). Для $(q_M^*, \dots, q_{2(M-1)}^*) \in Y_{0,j}^*$ имеется неприводимая компонента

$$B \subset \{q_M^* = \dots = q_{j-1}^* = 0\}$$

коразмерности точно $j - M$, на которой q_j^* тождественно обращается в нуль. Пусть

$$\pi\colon B \to \mathbb{P}^{\dim B} \subset \mathbb{P}^{M-1}$$

– общая линейная проекция на общую $\dim B$-мерную плоскость. Так как π-подъем ненулевого однородного многочлена на $\mathbb{P}^{\dim B}$ не обращается тождественно в нуль на B, получаем оценку

$$\operatorname{codim} Y_{0,j}^* \geqslant \dim \mathcal{P}_j(\mathbb{P}^{2M-1-j}) = \binom{2M-1}{j},$$

поскольку

$$\dim B = 2M - 1 - j, \qquad j \in \{M, \ldots, 2M-2\},$$

так что

$$\operatorname{codim} Y_0^* \geqslant \min\left\{ \binom{2M-1}{j} \;\Big|\; j = M, \ldots, 2M-2 \right\} = 2M - 1.$$

Таким образом,

$$\operatorname{codim} Y_0(x) \geqslant 2M - 1 \geqslant M + 1,$$

что и требовалось.

Рассмотрим теперь задачу оценки коразмерности множества

$$Y_k(x), \qquad k = 2e \geqslant 2.$$

Для $F \in Y_k(x)$ существует множество $Z_F \subset \mathbb{P}^{M-1}$ положительной размерности, на котором тождественно обращаются в нуль многочлены

$$q_0, \; q_1(z_*), \; \ldots, \; q_{k-1}(z_*),$$

и для точки общего положения $(a_1 : \cdots : a_M) \in Z_F$ многочлен

$$t^k q_k(a_*) + \cdots + t^{2(M-1)} q_{2(M-1)}(a_*) \in \mathbb{C}[t]$$

есть полный квадрат, причем $q_k(a_*) \neq 0$. Применяя лемму 5.7.1, получаем систему равенств

$$\frac{q_i(a_*)}{q_k(a_*)} = A_{M-e-1,i}\left(\frac{q_{k+1}(a_*)}{q_k(a_*)}, \ldots, \frac{q_{M+e-1}(a_*)}{q_k(a_*)} \right), \qquad i = M-e, \ldots, 2(M-e-1),$$

или, после домножения на $q_k(a_*)^i$,

$$q_i(a_*) q_k(a_*)^{i-1} = A^+_{M-e-1,i}(q_k(a_*), q_{k+1}(a_*), \ldots, q_{M+e-1}(a_*)), \qquad i = M-e, \ldots, 2(M-e-1),$$

где $A^+(\,\cdot\,)$ – соответствующим образом модифицированный многочлен. Получаем систему $M + e - 1$ однородных уравнений на $\mathbb{P}^{M-1}$. Множество $Y_k(x)$ состоит из тех многочленов F, для которых эта система имеет множество решений положительной размерности, на котором, в свою очередь, q_k не обращается в нуль тождественно. При этом q_0 есть нулевая константа по определению множества $Y_k(x)$ при $k = 2e \geqslant 2$.

Теперь рассуждаем, как выше: считаем многочлены $q_k, \ldots, q_{M+e-1}$ фиксированными, так что коразмерность множества $Y_k(x)$ есть коразмерность подмножества

$$Y_k^* \subset \mathbb{C} \times \mathcal{P}_1(\mathbb{P}^{M-1}) \times \cdots \times \mathcal{P}_{k-1}(\mathbb{P}^{M-1}) \times \mathcal{P}_{M+e}(\mathbb{P}^{M-1}) \times \cdots \times \mathcal{P}_{2(M-1)}(\mathbb{P}^{M-1}),$$

определяемого следующим условием:

$$(q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}, q_{M+e}, \ldots, q_{2(M-1)}) \in Y_k^*$$

тогда и только тогда, когда $q_0 = 0$, и система уравнений

$$q_1 = \cdots = q_{k-1} = q_{M+e} = \cdots = q_{2(M-1)} = 0$$

задает алгебраическое множество, имеющее компоненту положительной размерности, на которой $q_k \not\equiv 0$. Последнее условие теперь можно опустить.

Теперь коразмерность множества Y_k^* оценивается методом § 2.1 в точности так же, как это сделано выше для $k = 0$: фиксируется первая "неправильная" коразмерность, когда очередной многочлен q_i в выписанной выше последовательности тождественно обращается в нуль на неприводимой компоненте, определенной предыдущими уравнениями (и имеющей "правильную" коразмерность). Наихудшая оценка получается на первом шаге: условие $q_1 \equiv 0$ (вместе с условием $q_0 = 0$) дает коразмерность

$$\operatorname{codim} Y_2^* = M + 1,$$

и эта оценка является точной. В самом деле, $q_1 \equiv 0$ означает, что дивизор ветвления имеет особенность в точке x, и тогда через эту точку проходит одномерное семейство прямых. Во всех остальных случаях оценка на $\operatorname{codim} Y_k^*$ значительно сильнее (элементарные подсчеты мы опускаем). Предложение 5.1.3 полностью доказано.

5.7.2. Изолированные особые точки. Доказательство предложения 5.1.4 элементарно, и мы лишь наметим его основные шаги. Предположим, что для некоторого подпространства $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2 пересечение $P \cap W$ имеет целую кривую C особенностей. Удобно рассматривать пару $p \in C$, где p – произвольная точка, так что заведомо

$$P \subset T_p W.$$

Имеется $(2M-3)$-мерное семейство пар $(p, P \ni p)$, удовлетворяющих этому условию. Достаточно показать, что количество независимых условий, которые накладываются на (неоднородный) многочлен

$$f|_P = f(z_1, \ldots, z_{M-2})$$

степени $2M-2$ требованием, чтобы гиперповерхность $\{f|_P = 0\} = W \cap P$ содержала кривую C особых точек, проходящих через $p = (0, \ldots, 0)$, не меньше чем $2M-2$. Имеются три возможности:

- C есть прямая;
- C есть плоская кривая, $C \subset \Lambda \subset P$, где Λ – некоторая 2-плоскость;
- линейная оболочка кривой C есть k-плоскость, где $k \geqslant 3$.

В первом случае количество независимых условий вычисляется точно – это элементарное упражнение.

Во втором случае плоская кривая $\{f|_\Lambda = 0\}$ имеет неприводимую компоненту C степени $\geqslant 2$ и кратности $\geqslant 2$, что и дает оценку снизу на количество независимых условий (существенно более сильную, чем нужно).

В третьем случае выберем на кривой C $3(M-1)$ точек в общем положении (никакие три не лежат на прямой и никакие четыре не лежат в одной плоскости). Нетрудно проверить (рассматривая гиперповерхности, являющиеся объединением особых квадрик), что наличие особенностей в этих точках накладывает на f независимые условия, что и завершает доказательство предложения 5.1.4. (На самом деле коразмерность множества гиперповерхностей, имеющих целую кривую особенностей, гораздо выше, но нам это не нужно.) Детали оставляем читателю.

5.7.3. Ранг квадратичных особенностей. Докажем предложение 5.1.5. Мы установим утверждение (i). Части (ii) и (iii) доказываются аналогично. Легко проверить, что плоскости $P \subset \mathbb{P}$ коразмерности 2, касающиеся гиперповерхности W хотя бы в одной точке (т.е. $\operatorname{Sing} P \cap W \neq \varnothing$), образуют $(2M-3)$-мерное семейство. Поэтому достаточно доказать следующий факт.

Пусть $P \subset \mathbb{P}$ – фиксированная плоскость коразмерности 2, $p \in P$ – фиксированная точка,

$$\mathcal{W} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2M-2)))$$

– пространство гиперповерхностей степени $2M-2$. Определим подмножество $\mathcal{W}_P \subset \mathcal{W}$ условиями:

- гиперповерхность $W \in \mathcal{W}_P$ неособа в точке p;
- касательная гиперплоскость T_pW содержит P;
- точка p – изолированная особенность пересечения $P \cap W$.

Для $W \in \mathcal{W}_P$ пусть

$$\sigma_W \colon V_W \to \mathbb{P}$$

– двойное накрытие, разветвленное над W, $o = \sigma_W^{-1}(p)$ – особая точка, $R = \sigma_W^{-1}(P)$,

$$\varphi \colon V_W^+ \to V_W$$

– раздутие подмногообразия R. На многообразии V_W^+ имеется единственная особая точка $o^+ \in \varphi^{-1}(o)$. Определим замкнутое подмножество $Y \subset W_P$ условием, что для $W \in Y$ ранг квадратичной особенности $o^+ \in V_W^+$ не выше 3. Теперь предложение 5.1.5, (i) немедленно следует из оценки

$$\operatorname{codim}(Y \subset W_P) \geqslant 2M-2 \tag{5.7.2}$$

при $M \geqslant 6$.

Доказательство неравенства (5.7.2) получается простыми локальными вычислениями, которые мы лишь наметим. Пусть $(z_1, \ldots, z_M)$ – аффинные координаты в точке p, причем плоскость P задается системой уравнений $z_1 = z_2 = 0$, а касательная гиперплоскость к W есть $z_1 = 0$. Локальное уравнение двойного накрытия V_W в точке $o = \sigma_W^{-1}(p)$ имеет вид

$$y^2 = z_1 + q_2(z_1, \ldots, z_M) + q_3(z_*) + \cdots,$$

а локальное уравнение раздутия V_W^+ в точке o^+ имеет вид

$$u^2 = u_1u_2 + q_2(0, u_2, \ldots, u_M) + \cdots.$$

Отсюда получаем следующее: условие, что ранг квадратичной точки o^+ не превосходит $M+1-k$, накладывает

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

независимых условий на коэффициенты уравнения гиперповерхности W. Если $M+1-k \leqslant 3$, то получаем не менее

$$\frac{(M-2)(M-1)}{2}$$

независимых условий, что при $M \geqslant 6$ строго больше чем $2M-3$. Предложение 5.1.5, (i) доказано. Утверждения (ii) и (iii) устанавливаются аналогично.

5.7.4. Исторические замечания. Поскольку теорема о бирациональной геометрии двойных пространств индекса 2 представляет собой первый результат, дающий полное описание бирационального типа многообразий Фано индекса 2 в произвольной размерности, уместно кратко остановиться на истории этой задачи. До сих пор описанию бирациональной геометрии многообразий Фано индекса $r \geqslant 2$ было посвящено очень немного работ. (Следует оговориться: здесь имеется в виду решение задач, дающих информацию о бирациональном типе многообразия, таких, как проблема рациональности, вычисление группы бирациональных автоморфизмов, описание множества структур рационально связных расслоений и т.д. Работ, в которых строятся и изучаются конкретные бирациональные отображения (например, бирациональные преобразования проективного пространства), очень много, но это совсем другая тема.) Пионером в изучении многообразий индекса $\geqslant 2$ был сам Фано, пытавшийся описать группу бирациональных автоморфизмов трехмерной кубики [9]. Эта попытка, как теперь ясно, не могла быть успешной: задача была слишком трудной для методов того времени. После того как в 1971 г. Исковских и Манин доказали бирациональную сверхжесткость (в современной терминологии) трехмерных квартик, естественно было попытаться применить новую технику метода максимальных особенностей к многообразиям большего индекса, и такая попытка сразу была сделана: в [11] некоторые вспомогательные утверждения формулируются для многообразий произвольного индекса $r \geqslant 1$ и проделана часть работы по описанию бирациональной геометрии двойного конуса Веронезе размерности 3 (это многообразие Фано индекса 2). Статья [61] была посвящена завершению этой работы (в частности, решению проблемы рациональности для этого класса многообразий). К сожалению, упомянутая работа [61], как стало ясно позднее, была ошибочной (см. [60], где доказательство было доведено до конца 20 лет спустя). Однако ошибочность статьи [61] была достаточно очевидной уже в середине 90-х: для успешного изучения двойного конуса Веронезе необходимо уметь исключать максимальные особенности подвижных линейных систем на пучках поверхностей дель Пеццо (потому что на двойном конусе имеются такие пучки), в то время как техника такого исключения впервые была разработана в [45]. Методами, которые использовались в 80-е годы (техника пробного класса), эту задачу решить было нельзя.

Стоит упомянуть, что в докладе [62] на Варшавском конгрессе было анонсировано данное Хашиным описание группы бирациональных автоморфизмов двойного пространства индекса 2 размерности 3 (соответствующего значению $M = 3$ в обозначениях настоящей статьи), однако этот анонс не подтвердился и доказательство не было предъявлено. (Отметим, что трехмерное двойное пространство индекса 2 – намного более сложный объект для изучения, чем двойной конус Веронезе, так что данный в [62] анонс представляется несколько наивным.) Для современных методов это многообразие, по-видимому, уже доступно, но задача все равно является очень трудной; описание ситуации на данный момент см. в [63], [64].

Таким образом, двойной конус Веронезе размерности 3 был до сегодняшнего дня единственным многообразием Фано индекса 2, бирациональная геометрия которого была полностью описана. Ряд замечательных результатов был получен другими методами: нерациональность трехмерной кубики доказана Клеменсом и Гриффитсом в [65] (см. также [66], [67]), нерациональность "очень общих" гиперповерхностей Фано произвольной размерности индекса 2 и выше доказана Колларом [68], нерациональность двойных пространств $\mathbb{P}^3$ индекса 2 следует из того, что на них отсутствуют структуры расслоения на коники, как показал Тихомиров в [69]–[71]. Это лишь три примера; мы не приводим полного списка этих результатов, поскольку используемые в упомянутых работах методы весьма далеки от метода максимальных особенностей, который составляет основу настоящей работы. Отметим, однако, что и "трансцендентный метод" (метод промежуточного якобиана, развитый Клеменсом и Гриффитсом), и подход Коллара позволяют получить гораздо меньше информации о бирациональной геометрии заданного многообразия, чем метод максимальных особенностей, который дает почти исчерпывающее ее описание. В частности, только метод максимальных особенностей описывает все структуры рационально связного расслоения (в том случае, когда исследование доведено до конца).

Двойной конус Веронезе размерности 3 является в некотором смысле исключительным многообразием по своим численным характеристикам. Двойные пространства произвольной размерности, рассматриваемые в данной работе, уже вполне типичны. Теоремы 5.1.1 и 5.1.2 показывают, что то поведение, которого естественно ожидать от многомерных многообразий Фано индекса 2, действительно имеет место.

Список литературы

[1] A. V. Pukhlikov, "Birational automorphisms of Fano hypersurfaces", *Invent. Math.*, **134**:2 (1998), 401–426.

[2] A. V. Pukhlikov, "Birationally rigid Fano complete intersections", *J. Reine Angew. Math.*, **541** (2001), 55–79.

[3] А. В. Пухликов, "Бирационально жесткие итерированные двойные накрытия Фано", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 139–182.

[4] А. В. Пухликов, "Бирационально жесткие гиперповерхности Фано с изолированными особенностями", *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 135–160.

[5] А. В. Пухликов, "Бирациональная геометрия двойных пространств Фано индекса два", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:5 (2010), 45–114.

[6] M. Noether, "Über Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen", *Math. Ann.*, **3**:2 (1871), 161–227.

[7] G. Fano, "Sopra alcune varieta algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli", *Torino Atti*, **43** (1908), 973–984.

[8] G. Fano, "Osservazioni sopra alcune varieta non razionali aventi tutti i generi nulli", *Atti Acc. Torino*, **50** (1915), 1067–1072.

[9] G. Fano, "Nuove ricerche sulle varieta algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche", *Comment. Pontif. Acad. Sci.*, **11** (1947), 635–720.

[10] В. А. Исковских, Ю. И. Манин, "Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота", *Матем. сб.*, **86**:1 (1971), 140–166.

[11] В. А. Исковских, "Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий", Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., **12**, ВИНИТИ, М., 1979, 159–236.

[12] V. A. Iskovskikh, A. V. Pukhlikov, "Birational automorphisms of multi-dimensional algebraic varieties", *J. Math. Sci.*, **82**:4 (1996), 3528–3613.

[13] А. В. Пухликов, "Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадрики", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:1 (1988), 229–239.

[14] А. В. Пухликов, "Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано", *Матем. сб.*, **191**:6 (2000), 101–126.

[15] A. V. Pukhlikov, "Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano cyclic covers", *Pure Appl. Math. Q.*, **5**:2 (2009), 641–700.

[16] Yu. I. Manin, "Рациональные поверхности над совершенными полями", *Publ. Math. IHES*, **30** (1966), 55–97.

[17] Ю. И. Манин, "Рациональные поверхности над совершенными полями. II", *Матем. сб.*, **72**:2 (1967), 161–192.

[18] *Flips and Abundance for Algebraic Threefolds*, Asterisque, **211**, ed. J. Kollár, Soc. Math. France, Paris, 1992.

[19] V. G. Sarkisov, *Birational Maps of Standard $\mathbb{Q}$-Fano Fibrations*, Preprint, Kurchatov Institute of Atomic Energy, 1989.

[20] В. А. Исковских, "Бирациональная жесткость гиперповерхностей Фано в рамках теории Мори", *УМН*, **56**:2 (2001), 3–86.

[21] И. А. Чельцов, “Бирационально жесткие многообразия Фано”, *УМН*, **60**:5 (2005), 71–160.

[22] M. Reid, *Birational Geometry of 3-Folds According to Sarkisov*, Warwick Preprint, 1991.

[23] A. Corti, “Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:2 (1995), 223–254.

[24] A. Corti, M. Mella, “Birational geometry of terminal quartic 3-folds. I”, *Amer. J. Math.*, **126**:4 (2004), 739–761.

[25] I. A. Cheltsov, M. M. Grinenko, *Birational Rigidity is not an Open Property*, 2006, arXiv: math.AG/0612159.

[26] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. III”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 35–68.

[27] M. Mella, “Birational geometry of quartic 3-folds. II. The importance of being $\mathbb{Q}$-factorial”, *Math. Ann.*, **330**:1 (2004), 107–126.

[28] И. А. Чельцов, “О гладкой четырехмерной квинтике”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 139–160.

[29] И. А. Чельцов, “Нерациональность четырехмерного гладкого полного пересечения квадрики и квартики, не содержащего плоскости”, *Матем. сб.*, **194**:11 (2003), 95–116.

[30] И. А. Чельцов, “Двойное пространство с двойной прямой”, *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 109–156.

[31] И. А. Чельцов, “Расслоения на коники с большим дискриминантом”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:2 (2004), 215–221.

[32] I. A. Cheltsov, “Birationally rigid del Pezzo fibrations”, *Manuscripta Math.*, **116**:4 (2005), 385–396.

[33] A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano complete intersections”, *Manuscripta Math.*, **121** (2006), 491–526.

[34] А. В. Пухликов, “K-тривиальные структуры на полных пересечениях Фано”, *Матем. заметки*, **91**:4 (2012), 608–616.

[35] А. В. Пухликов, “Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартике”, *Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия*, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН, **208**, Наука, М., 1995, 278–289.

[36] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие гиперповерхности Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:6 (2002), 159–186.

[37] A. V. Pukhlikov, “Birational isomorphisms of four-dimensional quintics”, *Invent. Math.*, **87**:2 (1987), 303–329.

[38] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью”, *Матем. сб.*, **135**:4 (1988), 472–496.

[39] A. V. Pukhlikov, “Essentials of the method of maximal singularities”, *Explicit Birational Geometry of 3-Folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 73–100.

[40] W. Fulton, *Intersection Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[41] A. Corti, “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *Explicit Birational Geometry of 3-Folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 259–312.

[42] В. В. Шокуров, “Трехмерные логперестройки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203.

[43] Ю. И. Манин, *Кубические формы. Алгебра, геометрия, арифметика*, М., Наука, 1972.

[44] A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid, “Fano 3-fold hypersurfaces,”, *Explicit Birational Geometry of 3-Folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 175–258.

[45] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:1 (1998), 123–164.

[46] И. В. Соболев, “Бирациональные автоморфизмы одного класса многообразий, расслоенных на кубические поверхности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 203–224.

[47] М. М. Гриненко, “Бирациональные свойства пучков поверхностей Дель Пеццо степеней 1 и 2”, *Матем. сб.*, **191**:5 (2000), 17–38.

[48] М. М. Гриненко, “Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степеней 1 и 2. II”, *Матем. сб.*, **194**:5 (2003), 31–60.

[49] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. II”, *Матем. сб.*, **195**:11 (2004), 119–156.

[50] А. В. Пухликов, “Бирационально жесткие расслоения Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:3 (2000), 131–150.

[51] А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия прямых произведений Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 153–186.

[52] И. В. Соболев, “Об одной серии бирационально жестких многообразий с пучком гиперповерхностей Фано”, *Матем. сб.*, **192**:10 (2001), 123–130.

[53] И. А. Чельцов, “Лог-канонические пороги на гиперповерхностях”, *Матем. сб.*, **192**:8 (2001), 155–172.

[54] T. Graber, J. Harris, J. Starr, “Families of rationally connected varieties”, *J. Amer. Math. Soc.*, **16**:1 (2003), 57–67.

[55] F. Call, G. Lyubeznik, “A simple proof of Grothendieck’s theorem on the parafactoriality of local rings”, *Commutative Algebra: Syzygies, Multiplicities, and Birational Algebra* (South Hadley, MA, 1992), Contemp. Math., **159**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 15–18.

[56] J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic Geometry – Santa Cruz* 1995, Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.

[57] И. А. Чельцов, “Локальные неравенства и бирациональная сверхжесткость многообразий Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:3 (2006), 185–221.

[58] I. Cheltsov, “Double cubics and double quartics”, *Math. Z.*, **253**:1 (2006), 75–86.

[59] A. V. Pukhlikov, *On the* $8n^2$*-inequality*, 2008, arXiv: math.AG/0811.0183.

[60] М. М. Гриненко, “Структуры Мори на трехмерном многообразии Фано индекса 2 и степени 1”, *Алгебраическая геометрия: Методы, связи и приложения*, Сборник статей. Посвящается памяти члена-корреспондента РАН Андрея Николаевича Тюрина, Тр. МИАН, **246**, Наука, М., 2004, 116–141.

[61] С. И. Хашин, “Бирациональные автоморфизмы двойного конуса Веронезе размерности три”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1984, № 1, 13–16.

[62] V. A. Iskovskih, “Algebraic threefolds with special regard to the problem of rationality”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 1, 2 (Warsaw, 1983), PWN, Warsaw, 1984, 733–746.

[63] М. М. Гриненко, “Новые структуры Мори на двойном пространстве индекса 2”, *УМН*, **59**:3 (2004), 163–164.

[64] М. М. Гриненко, “Расслоения на поверхности дель Пеццо”, *УМН*, **61**:2 (2006), 67–112.

[65] C. H. Clemens, Ph. A. Griffiths, “The intermediate Jacobian of the cubic threefold”, *Ann. of Math.* (2), **95**:2 (1972), 281–356.

[66] А. Н. Тюрин, “Пять лекций о трехмерных многообразиях”, *УМН*, **27**:5 (1972), 3–50.

[67] А. Н. Тюрин, “Средний якобиан трехмерных многообразий”, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., **12**, ВИНИТИ, М., 1979, 5–57.

[68] J. Kollár, “Nonrational hypersurfaces”, *J. Amer. Math. Soc.*, **8** (1995), 241–249.

[69] А. С. Тихомиров, “Средний якобиан двойного пространства P^3, разветвленного в квартике”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:6 (1980), 1329–1377.

[70] А. С. Тихомиров, “Особенности тэта-дивизора среднего якобиана двойного пространства P^3 индекса два”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:5 (1982), 1062–1081.

[71] А. С. Тихомиров, “Письмо в редакцию журнала “Известия АН СССР. Серия математическая””, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:4 (1985), 891.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 19

Александр Валентинович Пухликов

Бирациональная геометрия многомерных многообразий Фано

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Подписано в печать 11.09.2014. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mathnet.ru/spm/ e-mail: pupyrev@mi.ras.ru