ISSN 2226-5929

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

*Выпуск 21*

Издание выходит с 2003 года

# Закон Грама в теории дзета-функции Римана. Часть 2

М. А. Королёв

*Математический институт им. В.А. Стеклова*
*Российской академии наук*

МИАН

Москва
2016

УДК 511.331
ББК 22.13
С56



**Королёв М. А.**

С56 Закон Грама в теории дзета-функции Римана. Ч. 2 – М.: МИАН, 2016. – 94 с. – (Современные проблемы математики, ISSN 2226-5929; Вып. 21).

ISBN 978-5-98419-067-1

Серия “Современные проблемы математики” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В.А. Стеклова Российской Академии наук (МИАН). Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН.

Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (грант № 14-11-00433).

DOI: 10.4213/spm54
DOI: 10.4213/book1616

ISBN 978-5-98419-067-1

# Содержание

*Светлой памяти моего Учителя*
*Анатолия Алексеевича Карацубы*

# Глава 4. Порядок роста величин $\Delta_n$

Теоремы 3.3 и 3.4 о распределении величин $\Delta_n$ позволяют сделать вывод о существовании таких номеров $n$, для которых величина $|\Delta_n|$ существенно превышает свое среднее значение $\sqrt{\log\log n}$.

Например, при сколь угодно малом фиксированном $\delta$ с условиями $0 < \delta < 0.5$ и $N \geqslant N_0(\varepsilon, \delta)$ из теоремы 3.4 следует существование по крайней мере

$$M \exp\left(-(\log\log N)^{1-\delta}\right) > \frac{M}{\log N}$$

номеров $n$, $N < n \leqslant N + M$, для которых выполнено неравенство

$$\Delta_n \geqslant (\log\log N)^{1-\delta}. \tag{4.1}$$

Вместе с тем «зазор» между (4.1) и верхней оценкой $|\Delta_n| \ll \log n$ из леммы 3.1 слишком велик. Это наводит на мысль о том, что, во-первых, оценка леммы 3.1 достаточно груба и, во-вторых, должны существовать значения $\Delta_n$, по абсолютной величине значительно превосходящие правую часть (4.1).

Первое из этих предположений, по-видимому, является верным, однако средствами для его проверки мы не располагаем. Единственным аргументом в его пользу служит условная верхняя оценка $|\Delta_n|$, которая опирается на гипотезу Римана (теорема 4.4).

Обоснованию второго предположения мы посвящаем параграф 4.1. Именно, мы покажем, что $\Delta_n$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, превышающие по модулю

$$c\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/3} \qquad \text{или даже} \qquad c\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/2},$$

если гипотеза Римана верна. В последнем случае оказывается также, что большие значения $|\Delta_n|$ могут встречаться и на очень коротких промежутках изменения $n$ (теоремы 4.2 и 4.3).

Однако ни теоремы 3.3, 3.4 о распределении значений $\Delta_n$, ни утверждения параграфа 4.1 не позволяют ответить на следующий вопрос: принимает ли величина $\Delta_n$ заданное целочисленное значение $k$ при изменении $n$ на промежутке $N < n \leqslant N + M$, и если принимает, то как часто? Вопрос этот[1] представляется не лишенным интереса по той еще причине, что ответ на него в частном случае $k = 0$ позволил бы узнать, как часто на заданном промежутке наблюдается явление Грама–Сельберга.

Задачи такого рода и рассматриваются в параграфе 4.2. Оказывается, что всякое целочисленное значение $k$, находящееся между «экстремальными» значениями (существование которых гарантируется теоремами 4.2 и 4.3), принимает, и достаточно часто, величина $\Delta_n$ (теоремы 4.7–4.9).

## 4.1. $O$- и $\Omega$-теоремы для $\Delta_n$

Хорошо известно, что функция $S(t)$ может принимать очень большие по модулю как положительные, так и отрицательные значения (см., например, [1]). Используя особенности этой

[1] Поставленный автору (в несколько иной форме) его учителем Анатолием Алексеевичем Карацубой 31 июля 2008 г.

функции, связанные с формулой Римана–Мангольдта, а также «регулярный» характер последовательности $\{t_n\}$, можно показать, что утверждения всех омега-теорем для $S(t)$ остаются в силе и тогда, когда параметр $t$ пробегает множество точек Грама.

Применив лемму 3.3 о связи последовательностей $S(t_n+0)=\Delta(n)$ и $\Delta_n$, несложно вывести отсюда и соответствующие аналоги омега-теорем для $\Delta_n$.

Однако рассуждения такого рода приводят к потери точности ряда оценок. Чтобы избежать этого, мы откажемся от использования здесь леммы 3.3. Вместо этого мы сначала докажем соответствующие омега-теоремы для дробей

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1}-t_n}\,,$$

после чего с помощью леммы 3.7 осуществим переход от $q_n$ к $\Delta_n$.

Теорема 4.1. *Существует положительная постоянная $c$, зависящая лишь от $\varepsilon$ и такая, что*

$$\max_{N<n\leqslant N+M}\{\pm\Delta_n\} \geqslant c\biggl(\frac{\log N}{\log\log N}\biggr)^{1/3}.$$

Доказательство. Положим

$$q = a_1\biggl(\frac{\ln N}{\ln\ln N}\biggr)^{1/3},$$

где точное значение постоянной $a_1$ будет выбрано ниже. Допустим сначала, что для всех $n$ из рассматриваемого промежутка выполнены неравенства

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1}-t_n} < q.$$

Полагая $u_n = t_n + q(t_{n+1}-t_n)$, для таких $n$ будем иметь $\gamma_n < u_n$ и, следовательно,

$$n \leqslant N(\gamma_n+0) \leqslant N(u_n+0) = \frac{\vartheta(u_n)}{\pi} + 1 + S(u_n+0). \tag{4.2}$$

По формуле конечных приращений

$$\begin{aligned}\vartheta(u_n) &= \vartheta(t_n) + \vartheta'(t_n)(t_{n+1}-t_n)q + \frac{1}{2}\,\vartheta''(\xi)(t_{n+1}-t_n)^2q^2\\ &= \pi(n-1) + \pi q\biggl(1 + O\biggl(\frac{q}{N\log N}\biggr)\biggr) = \pi(n-1+q) + O\biggl(\frac{1}{N}\biggr),\end{aligned}$$

где $t_n < \xi < t_{n+1}$. Подставив последнее выражение в (4.2), получим

$$S(u_n+0) \geqslant n - \frac{\vartheta(u_n)}{\pi} - 1 = -q + O\biggl(\frac{1}{N}\biggr). \tag{4.3}$$

Покажем теперь, что неравенство (4.3) не может иметь место для всех без исключения значений $n$, $N<n\leqslant N+M$.

Рассмотрим при произвольном (не обязательно целом) $x>1$ величину $t_x$ из соотношения $\vartheta(t_x) = (x-1)\pi$ и положим $u_x = t_x + (t_{x+1}-t_x)q$. Тогда при некотором $\eta$, $x<\eta<x+1$, будем иметь

$$u'_x = t'_x + (t'_{x+1}-t'_x)q = t'_x + t''_\eta q. \tag{4.4}$$

Пользуясь леммой 1.1 наряду с равенствами

$$t'_x = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)}\,, \qquad t''_x = -\frac{\pi^2\vartheta''(t_x)}{(\vartheta'(t_x))^3}\,,$$

при $N < x \leqslant N + M$ получаем:

$$u'_x = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)} - \frac{\pi^2 q\vartheta''(t_\eta)}{(\vartheta'(t_\eta))^3} = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)}\biggl(1 - O\biggl(\frac{q}{x\log x}\biggr)\biggr) > \frac{\pi}{2\vartheta'(t_x)} > 0.$$

Итак, $u_x$ как функция $x$ монотонно возрастает. Вместе с ней возрастающей будет и последовательность $u_n$, $N < n \leqslant N + M$. Согласно лемме I.12 на промежутке $(u_N, u_{N+M}]$ найдется точка $u$ такая, что

$$S(u) < -a\biggl(\frac{\log N}{\log\log N}\biggr)^{1/3},$$

где $a = 0.5 \cdot 10^{-3}\delta^{5/4}$, $\delta = 10^{-4}\varepsilon$. Воспользовавшись монотонностью и неограниченностью последовательности $u_n$, определим номер $n$ из неравенств $u_n < u \leqslant u_{n+1}$. Предположим, далее, что $\gamma^{(1)} < \gamma^{(2)} < \cdots < \gamma^{(k)}$ – все различные ординаты нулей $\zeta(s)$, попавшие на промежуток $(u_n, u]$. Тогда, записывая приращение функции $S(t)$ на этом промежутке подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 3.17, приходим к тождеству

$$\begin{aligned} S(u) &- S(u_n + 0) \\ &= \{S(\gamma^{(1)} - 0) - S(u_n + 0)\} + \{S(\gamma^{(1)} + 0) - S(\gamma^{(1)} - 0)\} + \cdots \\ &\quad + \{S(\gamma^{(k)} - 0) - S(\gamma^{(k-1)} + 0)\} + \{S(\gamma^{(k)} + 0) - S(\gamma^{(k)} - 0)\} + \{S(u) - S(\gamma^{(k)} + 0)\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

(если $u$ совпадает с ординатой нуля $\zeta(s)$, то во всех формулах $S(u)$ следует заменить на $S(u + 0)$).

Преобразуя (4.5) с помощью формулы конечных приращений, находим

$$\begin{aligned} S(u) - S(u_n + 0) &\geqslant \{(\gamma^{(1)} - u_n) + (\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}) + \cdots + (u - \gamma^{(k)})\}\biggl(-\frac{1}{2}\log\frac{u}{2\pi} + O(u^{-2})\biggr) \\ &> -\frac{1}{2}(u - u_n)\log u. \end{aligned}$$

Согласно (4.4) имеем оценку

$$u - u_n \leqslant u_{n+1} - u_n = u'_\zeta < t'_\zeta = \frac{\pi}{\vartheta'(t_\zeta)} < \frac{\pi}{\vartheta'(t_n)} < \frac{3\pi}{\log n},$$

где $n < \zeta < n + 1$. Поэтому

$$S(u) - S(u_n + 0) > -\frac{1}{2}\frac{3\pi}{\log n}\log u_N > -2\pi,$$

$$S(u_n + 0) \leqslant S(u) + 2\pi < -0.9\,a\biggl(\frac{\log N}{\log\log N}\biggr)^{1/3}.$$

Последнее неравенство противоречит (4.3), если положить $a_1 = 0.8a$. Итак, найдется по крайней мере один номер $n$ такой, что

$$S(u_n + 0) \leqslant -0.9a\biggl(\frac{\log N}{\log\log N}\biggr)^{1/3}, \qquad q_n \geqslant 0.8a\biggl(\frac{\log N}{\log\log N}\biggr)^{1/3}.$$

В силу леммы 3.7 для такого $n$ имеем

$$\Delta_n \geqslant q_n - 1 - \frac{\log N}{4N} > 0.7a\biggl(\frac{\log N}{\log\log N}\biggr)^{1/3},$$

что и требовалось.

Аналогично доказывается и существование больших по модулю отрицательных значений $\Delta_n$. Именно, допустив, что для всех $n$ из рассматриваемого промежутка выполняется неравенство $q_n > -q$, несложно заключить, что на всем промежутке выполняется и неравенство $\gamma_n > v_n$, где $v_n = t_n - q(t_{n+1} - t_n)$, и, следовательно,

$$N(v_n + 0) \leqslant N(\gamma_n - 0) < n. \tag{4.6}$$

Преобразуя левую часть (4.6) подобно тому, как это делалось выше, получим

$$S(v_n + 0) < q + O(N^{-1}). \tag{4.7}$$

Отыскивая затем с помощью леммы I.12 точку $v$, $v_N < v \leqslant v_{N+M}$, такую, что

$$S(v) > a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/3},$$

определим номер $n$ из неравенств $v_{n-1} < v \leqslant v_n$. Последнее возможно, так как величины $v_n$ образуют на рассматриваемом промежутке строго монотонную и неограниченно возрастающую последовательность.

Рассуждая точно так же, как и при доказательстве первого утверждения теоремы, и пользуясь тем, что $v_n - v_{n-1} < 3\pi(\log n)^{-1}$, получим

$$S(v_n + 0) - S(v) > (v_n - v)\left(-\frac{1}{2}\log\frac{v}{2\pi} + O(v^{-2})\right) > -2\pi,$$

$$S(v_n + 0) > S(v) - 2\pi > 0.9a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/3}.$$

Последнее неравенство, очевидно, противоречит (4.7). Следовательно, для такого $n$ имеем

$$q_n \leqslant -0.8a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/3}, \qquad \Delta_n \leqslant q_n + 1 + \frac{1}{4N} < -0.7a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/3}.$$

Теорема доказана.

Следствие 4.1. *При $n \to +\infty$ справедливы следующие соотношения*:

$$\Delta_n = \Omega_{\pm}\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/3}\right), \qquad \gamma_n - t_n = \Omega_{\pm}((\log n)^{-2/3}(\log\log n)^{-1/3}),$$

$$S(\gamma_n + 0) = \Omega_{+}\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/3}\right), \qquad S(\gamma_n - 0) = \Omega_{-}\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/3}\right).$$

Доказательство. Первое соотношение следует непосредственно из теоремы 4.1. Для доказательства второго следует воспользоваться равенством

$$\gamma_n - t_n = \frac{\pi(\Delta_n - \theta_1)}{\vartheta'(t_N)}\left(1 + \frac{\pi\theta_2 M}{N\log N}\right),$$

которое было установлено при доказательстве теоремы 3.8 в предположении $N < n \leqslant N + M$. Наконец, последние два соотношения следуют из леммы 3.8 и неравенства

$$\varkappa_n = S(\gamma_n + 0) - S(\gamma_n - 0) > 0.$$

Предположив справедливость гипотезы Римана, утверждение теоремы 4.1 можно значительно уточнить.

Теорема 4.2. *Если верна гипотеза Римана, то при любом $\mu$ с условием*

$$\frac{1}{2\pi}(\log N)^2(\log\log N)^{-3/2} < \mu \leqslant \frac{N}{4}$$

*справедливы неравенства*

$$\max_{N-3\mu<n\leqslant N+2\mu}\{\pm\Delta_n\} \geqslant \frac{1}{400}\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Будем следовать доказательству теоремы 4.1. Положим

$$q = c\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{1/2} - 3\pi, \qquad c = \frac{1}{90\pi}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10^4}}$$

и обозначим

$$T = \frac{2\pi(N-\mu)}{\log N}, \qquad H = \frac{2\pi\mu}{\log N}.$$

Допустив, что для всех $n$ из промежутка $N-3\mu < n \leqslant N+2\mu$ справедливо неравенство

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1}-t_n} < q,$$

заключаем отсюда, что

$$S(u_n+0) \geqslant -q - N^{-1}, \tag{4.8}$$

где $u_n = t_n + (t_{n+1}-t_n)q$. Заметив, что

$$u_{N-3\mu} < T - H < T + 2H < u_{N+2\mu},$$

с помощью леммы I.13 отыщем на промежутке $(u_{N-3\mu}, u_{N+2\mu}]$ точку $u$ такую, что

$$S(u) \leqslant -\frac{1}{90\pi}\left(\frac{\log H}{\log\log H}\right)^{1/2} < -c\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{1/2}.$$

Отыскивая номер $n$ так, чтобы выполнялись неравенства $u_n < u \leqslant u_{n+1}$, получим

$$S(u) - S(u_n+0) \geqslant -\frac{1}{2}(u-u_n)\log u > -2\pi,$$

$$S(u_n+0) \leqslant S(u) + 2\pi < -c\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{1/2} + 2\pi,$$

что противоречит (4.8). Следовательно, найдется по меньшей мере один номер $n$, для которого

$$q_n \geqslant q, \qquad \Delta_n \geqslant q_n - 1 - \frac{\log N}{4N} \geqslant q - 2 > c\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{1/2} - 3\pi - 2 > \frac{1}{400}\left(\frac{\log\mu}{\log\log\mu}\right)^{1/2}.$$

Доказательство второго неравенства теоремы 4.2 подобно доказательству второго неравенства теоремы 4.1.

Следствие 4.2. *Если гипотеза Римана верна, то при $n \to +\infty$ справедливы следующие соотношения*:

$$\Delta_n = \Omega_\pm\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/2}\right), \qquad \gamma_n - t_n = \Omega_\pm((\log n)^{-1/2}(\log\log n)^{-1/2}),$$

$$S(\gamma_n+0) = \Omega_+\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/2}\right), \qquad S(\gamma_n-0) = \Omega_-\left(\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^{1/2}\right).$$

Длина промежутка, на котором теорема 4.2 гарантирует существование больших по модулю положительных и отрицательных значений, может быть уменьшена, правда, с незначительной потерей точности утверждения.

Теорема 4.3. *Если верна гипотеза Римана, то при любом $\mu$ с условием*

$$\frac{1}{2\pi}(\log N)\sqrt{\log\log N} \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{2\pi}(\log N)^2(\log\log N)^{-3/2}$$

*справедливы неравенства*

$$\max_{N-3\mu<n\leqslant N+2\mu}\{\pm\Delta_n\} \geqslant 7.5\cdot 10^{-4}\,\frac{\sqrt{\log{(\mu/\log N)}}}{\log\log{(\mu/\log N)}}\,, \tag{4.9}$$

$$\max_{N-3\mu<n\leqslant N+2\mu}\{\pm\Delta_n\} \geqslant 7.4\cdot 10^{-4}\,\frac{\sqrt{\log\log\mu}}{\log\log\log\mu}\,. \tag{4.10}$$

Доказательство. Положим

$$H = \frac{2\pi\mu}{\log N}\,, \qquad T = \frac{2\pi(N-\mu)}{\log N}$$

и заметим, что для так определенных $T$ и $H$ будет выполнено неравенство

$$H \geqslant \sqrt{\log\log T}.$$

Беря

$$q = \frac{c\sqrt{\log{(\mu/\log N)}}}{\log\log{(\mu/\log N)}}\,, \qquad c = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10^4}}$$

и практически дословно повторяя доказательство теоремы 4.2. (с использованием леммы I.14 вместо леммы I.13), получим (4.9). Неравенства (4.10) легко получаются из (4.9), если заметить, что

$$\frac{\mu}{\log N} \geqslant \frac{1}{2\pi}\sqrt{\log\mu}\,.$$

Теорема доказана.

Докажем теперь теорему о верхней границе величины $|\Delta_n|$, уточняющую оценку леммы 3.2.

Теорема 4.4. *Пусть $\delta$ – сколь угодно малое фиксированное число. Тогда при любом $n \geqslant n_0(\delta)$ имеет место оценка*

$$|\Delta_n| < (0.138+\delta)\log n.$$

*Если верна гипотеза Римана, то*

$$|\Delta_n| < (0.5+\delta)\,\frac{\log n}{\log\log n}\,.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.8 имеем равенство

$$\Delta_n = -S(\gamma_n+0) + \theta\kappa_n + \theta_1\,\frac{(\log n)^2}{79n}\,,$$

где $\kappa_n$ – кратность ординаты $\gamma_n$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $|\theta_1| \leqslant 1$. Замечая, что

$$\kappa_n = S(\gamma_n+0) - S(\gamma_n-0),$$

получим

$$\Delta_n = -S(\gamma_n+0) + \theta(S(\gamma_n+0) - S(\gamma_n-0)) + \theta_1\frac{(\log n)^2}{79n}$$
$$= (\theta-1)S(\gamma_n+0) - \theta S(\gamma_n-0) + \theta_1\frac{(\log n)^2}{79n}\,,$$

откуда

$$|\Delta_n| \leqslant (1-\theta)|S(\gamma_n+0)| + \theta|S(\gamma_n-0)| + \frac{(\log n)^2}{79n}\,.$$

Теперь утверждение теоремы следует из оценки леммы 3.1, а в случае, когда верна гипотеза Римана – из оценки

$$|S(t)| \leqslant (0.5+o(1))\frac{\log t}{\log\log t}\,,$$

принадлежащей Голдстону и Гонеку [2]. Теорема доказана.

Следствие 4.3. *Пусть $\delta$ – сколь угодно малое фиксированное число. Тогда при любом $n \geqslant n_0(\delta)$ имеет место оценка*

$$|\gamma_n - t_n| < 2\pi(0.138+\delta).$$

*Если верна гипотеза Римана, то*

$$|\gamma_n - t_n| < \frac{\pi+\delta}{\log\log n}\,.$$

Доказательство. Пусть для заданного $n$ выполнены неравенства

$$t_{m-1} < \gamma_n \leqslant t_m,$$

так что $\Delta_n = m-n$. Замечая, что

$$t_{m-1} - t_n < \gamma_n - t_n \leqslant t_m - t_n,$$

и пользуясь равенством (1.8), получаем:

$$t_m - t_n = \frac{\pi\Delta_n}{\vartheta'(t_n)}(1+O(n^{-1})), \qquad t_{m-1} - t_n = \frac{\pi(\Delta_n-1)}{\vartheta'(t_n)}(1+O(n^{-1})),$$

откуда

$$\gamma_n - t_n = \frac{\pi(\Delta_n-\theta)}{\vartheta'(t_n)}(1+O(n^{-1})) = \frac{2\pi(\Delta_n-\theta)}{\log n}(1+o(1)),$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Теперь утверждение следует из оценок теоремы 4.4.

Последние из утверждений настоящего параграфа связаны с оценками величин $D_n$, определенных в параграфе 3.7. Оказывается, что наибольшую сложность представляет уточнение верхней границы $D_n$.

Теорема 4.5. *Пусть при $t > t_0 > 1$ выполнено неравенство*

$$N_0(t) \geqslant \kappa N(t), \tag{4.11}$$

*где $\kappa$ – некоторое число с условием $0 < \kappa \leqslant 1$. Тогда при достаточно большом $n$ справедливы неравенства*

$$-0.14\log n \leqslant D_n \leqslant \left(\frac{1}{\kappa}-1\right)n + 0.14\left(\frac{2}{\kappa}+1\right)\log n.$$

Доказательство. Пусть $n$-й вещественный нуль $\mathfrak{c}_n$ функции Харди $Z(t)$ удовлетворяет неравенствам $t_{m-1} < \mathfrak{c}_n \leqslant t_m$, так что $D_n = m - n$. Тогда имеем, очевидно

$$N(\mathfrak{c}_n + 0) \geqslant N(t_{m-1} + 0) = m - 1 + S(t_{m-1} + 0). \tag{4.12}$$

Положив $t = \mathfrak{c}_n + 0$ в неравенстве (4.11), получим

$$N(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant \frac{1}{\kappa} N_0(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant \frac{1}{\kappa}(n + \kappa_n), \tag{4.13}$$

где $\kappa_n$ – кратность нуля $\mathfrak{c}_n$. Сравнивая (4.12) и (4.13), находим

$$m - 1 + S(t_{m-1} + 0) \leqslant \frac{1}{\kappa}(n + \kappa_n).$$

В силу леммы 3.1

$$\begin{aligned} D_n &\leqslant 1 - S(t_{m-1} + 0) + \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + \frac{1}{\kappa}(S(\mathfrak{c}_n + 0) - S(\mathfrak{c}_n - 0)) \\ &\leqslant 1 + 0.138\log n + \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + \frac{2}{\kappa}0.138\log n < \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + 0.14\left(\frac{2}{\kappa} + 1\right)\log n. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$n \leqslant N_0(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant N(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant N(t_m + 0) = m + S(t_m + 0),$$

откуда

$$D_n = m - n \geqslant -S(t_m + 0) > -0.14\log n.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.6. *Существует положительная постоянная $c$, зависящая лишь от $\varepsilon$, такая, что*

$$\max_{N<n\leqslant N+M} D_n \geqslant c\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/3}.$$

Доказательство. Положим

$$q = a\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/3},$$

где $a > 0$ – некоторая постоянная. Следуя доказательству леммы 3.6, получаем

$$\tau_n = \frac{\mathfrak{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} = D_n - \theta_1 + \frac{\theta_2\log N}{4N},$$

где $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$, $|\theta_2| \leqslant 1$. Допустив, что для всех $n$ с условием $N < n \leqslant N + M$ выполняется неравенство $\tau_n \leqslant q$, заключаем, что

$$\mathfrak{c}_n \leqslant u_n = t_n + q(t_{n+1} - t_n)$$

для всех $n$ из указанного промежутка. Следовательно,

$$n \leqslant N(\mathfrak{c}_n + 0) \leqslant N(u_n + 0) = \frac{\vartheta(u_n)}{\pi} + 1 + S(u_n + 0) \leqslant n + q + S(u_n + 0) + O\left(\frac{\log N}{N}\right),$$

откуда

$$S(u_n + 0) \geqslant -q + O\left(\frac{\log N}{N}\right).$$

Выше было показано (см. доказательство теоремы 4.1), что при надлежащем выборе постоянной $a$ последнее неравенство не может выполняться для всех значений $n$, $N < n \leqslant N + M$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Следствие 4.4. *При $n \to +\infty$ справедливо соотношение*

$$D_n = \Omega_+\left(\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/3}\right).$$

Замечание 4.1. При попытке доказать с помощью аналогичных рассуждений $\Omega_-$-оценку для $D_n$ мы придем к неравенству

$$S(v_n+0) \leqslant q + \varepsilon(n) + O\left(\frac{\log N}{N}\right), \tag{4.14}$$

в котором $v_n = t_n - q(t_{n+1} - t_n)$, а $\varepsilon(n)$ обозначает (как и в теореме 3.19) число нулей $\zeta(s)$ с условием $0 < \operatorname{Im} s \leqslant \mathfrak{c}_n$, $\operatorname{Re} s \neq 1/2$. Отсутствие какой-либо информации о величине $\varepsilon(n)$ не позволяет привести (4.14) к противоречию с имеющимися омега-теоремами для функции $S(t)$.

Еще раз отметим, что Сельберг, цитируя в [3] результат Титчмарша о неограниченности дробей

$$\tau_n = \frac{\mathfrak{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}$$

(совпадающих с $D_n$ с точностью до слагаемого $O(1)$), фактически утверждал, что Титчмарш доказал соотношения

$$\limsup_{n\to+\infty} D_n = +\infty, \qquad \liminf_{n\to+\infty} D_n = -\infty.$$

Первое из них, как было показано выше, справедливо. В то же время доказательство второго требует глубоких результатов о поведении величин $\varepsilon(n)$, сравнимых по силе с «почти гипотезой Римана».

Это еще раз подтверждает отстаиваемое в данной работе мнение о том, что Сельберг не вполне корректно процитировал в [3] работу Титчмарша и «отождествил» величины $\Delta_n$ и $D_n$ (см. параграф 3.7).

## 4.2. Значения, которые принимает величина $\Delta_n$

Ключевым обстоятельством, которое позволяет оценить снизу количество номеров $n$ с условием $\Delta_n = 0$, является то, что это число в силу леммы 3.3 практически совпадает с числом тех $n$ из заданного промежутка, для которых $\Delta(n) = S(t_n + 0) = 0$.

Несложные рассуждения позволяют связать такие точки Грама $t_n$ с точками, в которых функция $S(t)$ меняет знак. Нижняя оценка количества таких точек, полученная методом Сельберга, и приводит в итоге к искомому результату.

Обобщение оценки Сельберга числа точек перемены знака на случай функции

$$\varphi(t) = S(t+0) - k,$$

где $|k|$ – не очень большое целое число, позволяет оценить и число тех $n$, для которых $\Delta_n = k$.

В случае больших $|k|$ искомое утверждение получается как следствие омега-теорем для функции $S(t)$. Здесь мы существенно пользуемся особенностями графика $S(t)$, которые позволяют утверждать следующее: несмотря на наличие у этой функции точек разрыва, она принимает любое значение $k$, лежащее между любыми двумя ее значениями $\alpha = S(a)$ и $\beta = S(b)$ с условиями $a < b$, $\alpha > \beta$ (лемма 4.3). Кроме того, доказательство опирается и на тот факт, что целочисленные значения $k$ принимаются функцией $S(t)$ лишь в точках Грама $t_n$. Как и в случае малых $|k|$, переход от значений $\Delta(n) = S(t_n + 0)$ к величинам $\Delta_n$ осуществляется с помощью леммы 3.3.

Для доказательства утверждений этого параграфа придадим лемме 3.3 следующий, более удобный для дальнейшего, вид. Обозначим через $F_m$ число номеров $n$, $N < n \leqslant N + M$, для которых $\Delta_n = m$, а через $E_m$ – число номеров $n$, $N < n \leqslant N + M$, для которых $\Delta(n) = m$.

Лемма 4.1. *При любом целом $k$ справедливо равенство*

$$F_k = E_{(-k)} + \theta(2|k| + 4).$$

Точность ряда дальнейших утверждений о величинах $\Delta_n$ зависит, как оказывается, от степени точности асимптотических формул для первых моментов функций, связанных с $S(t)$. По этой причине нам потребуется следующее общее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, $H$ – произвольное число с условием $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon$. Пусть, далее, справедливы равенства*

$$\int_T^{T+H} |S(t)|\,dt = \frac{H}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\log T}\left(1 + \frac{\theta_1}{f(T)}\right), \tag{4.15}$$

$$\int_T^{T+H} \left|\int_0^h S(t+u)\,du\right| dt = \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\frac{1}{h}}\left(1 + \frac{\theta_2}{f(T)}\right), \tag{4.16}$$

*в которых $f(T)$ – некоторая монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая при $T \geqslant T_0$ неравенствам $24 < f(T) < \sqrt{\log\log T}$. Пусть, наконец, $k$ – произвольное целое число с условием*

$$|k| < \frac{1}{12\pi\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{12}{f(T)}\right)\sqrt{\log\log T}. \tag{4.17}$$

*Тогда для количества $\nu = \nu(T; H)$ точек перемены знака функции $\varphi(t) = S(t+0) - k$ на промежутке $(T, T+H]$ справедлива следующая оценка:*

$$\nu \geqslant \frac{H\Delta}{2\pi}(\log T),$$

*где*

$$\Delta = \left(\frac{1}{f^2(T)} + \frac{\pi^3 k^2}{\log\log T}\right)\exp\left\{-\frac{6\log\log T}{f(T)}\right\}\exp\left\{-6\pi\sqrt{\pi}\,|k|\sqrt{\log\log T}\right\}.$$

Доказательство. Для оценки величины $\nu$ воспользуемся следующим неравенством, принадлежащим Сельбергу (см. [1]):

$$\nu \geqslant \frac{(I_1 - I_2)^2}{2hI_3} - 1. \tag{4.18}$$

Здесь $h$ – некоторый параметр, удовлетворяющий условиям

$$\frac{(\log\log T)^2}{\log T} < h < \frac{1}{\sqrt{\log T}}, \tag{4.19}$$

точное значение которого будет выбрано ниже,

$$I_1 = \int_T^{T+H}\int_0^h |\varphi(t+u)|\,du\,dt, \qquad I_2 = \int_T^{T+H}\left|\int_0^h \varphi(t+u)\,du\right| dt,$$

$$I_3 = \int_T^{T+H}\left(\int_0^h |\varphi(t+u)|\,du\right)^2 dt.$$

Оценим эти интегралы, пользуясь леммами I.15 и I.16. Прежде всего, имеем

$$I_1 = \int_0^h \int_{T+u}^{T+H+u} |\varphi(t)|\,dt\,du$$

$$\geqslant \int_0^h \int_{T+u}^{T+H+u} |S(t)|\,dt\,du - |k|Hh \geqslant \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\biggl(\sqrt{\log\log T}\Bigl(1-\frac{1}{f(T)}\Bigr) - |k|\pi\sqrt{\pi}\biggr),$$

$$I_2 = \int_T^{T+H}\biggl|\int_0^h S(t+u)\,du + kh\biggr|\,dt$$

$$\leqslant \int_T^{T+H}\biggl|\int_0^h S(t+u)\,du\biggr|\,dt + Hh|k| \leqslant \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\biggl(\sqrt{\log\frac{1}{h}}\Bigl(1+\frac{1}{f(T)}\Bigr) + |k|\pi\sqrt{\pi}\biggr).$$

Наконец, применив к $I_3$ неравенство Коши, получим

$$I_3 \leqslant h\int_T^{T+H}\int_0^h |\varphi(t+u)|^2\,du\,dt = h\int_0^h\int_{T+u}^{T+H+u}|\varphi(t)|^2\,dt\,du$$

$$= h\int_0^h\int_{T+u}^{T+H+u}\bigl(S^2(t+0) + 2kS(t+0) + k^2\bigr)\,dt\,du$$

$$\leqslant h\int_0^h\biggl\{\frac{H}{2\pi^2}(\log\log T)\Bigl(1+\frac{2.4}{\sqrt{\log\log T}}\Bigr) + O(|k|\log T) + k^2H\biggr\}\,du < \frac{Hh^2}{\pi^2}(\log\log T).$$

Положим теперь $h = q(T)(\log T)^{-1}$, где

$$q(T) = \exp\biggl\{\frac{6\log\log T}{f(T)}\biggr\}\exp\bigl\{6\pi\sqrt{\pi}\,|k|\sqrt{\log\log T}\bigr\}.$$

Тогда из (4.17) следует, что условия (4.19) выполнены. Поэтому

$$I_1 - I_2 \geqslant \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\biggl(\sqrt{\log\log T} - \sqrt{\log\frac{1}{h}} - \frac{2\sqrt{\log\log T}}{f(T)} - 2|k|\pi\sqrt{\pi}\biggr)$$

$$= \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\biggl(\frac{\log q(T)}{\sqrt{\log\log T} + \sqrt{\log(1/h)}} - \frac{2\sqrt{\log\log T}}{f(T)} - 2|k|\pi\sqrt{\pi}\biggr)$$

$$\geqslant \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\biggl\{\frac{1}{2\sqrt{\log\log T}}\Bigl(\frac{6\log\log T}{f(T)} + 6\pi\sqrt{\pi}\,|k|\sqrt{\log\log T}\Bigr) - \frac{2\sqrt{\log\log T}}{f(T)} - 2|k|\pi\sqrt{\pi}\biggr\}$$

$$= \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\log T}\biggl(\frac{1}{f(T)} + \frac{\pi\sqrt{\pi}\,|k|}{\sqrt{\log\log T}}\biggr).$$

Переходя к оценке (4.18), будем иметь

$$\nu \geqslant \frac{(Hh)^2}{2\pi^3}(\log\log T)(\log T)\biggl(\frac{1}{f(T)} + \frac{\pi\sqrt{\pi}\,|k|}{\sqrt{\log\log T}}\biggr)^2$$

$$\times\exp\biggl\{-\frac{6\log\log T}{f(T)} - 6\pi\sqrt{\pi}\,|k|\sqrt{\log\log T}\biggr\}\frac{\pi^2}{Hh^2\log\log T} - 1$$

$$> \frac{H}{2\pi}(\log T)\biggl(\frac{1}{f^2(T)} + \frac{\pi^3k^2}{\log\log T}\biggr)\exp\biggl\{-\frac{6\log\log T}{f(T)} - 6\pi\sqrt{\pi}\,|k|\sqrt{\log\log T}\biggr\}.$$

Лемма доказана.

Теорема 4.7. *Пусть целое число $k$ удовлетворяет условию*

$$|k| \leqslant \frac{1}{12\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\log N}.$$

*Тогда для числа $F_k$ выполнено неравенство*

$$F_k \geqslant M\exp\bigl\{-6\pi\sqrt{\pi}(|k|+c)\sqrt{\log\log N}\bigr\},$$

*где $c = c(\varepsilon) > 0$ – постоянная леммы I.15.*

Доказательство. В силу леммы 4.1 достаточно получить подходящую оценку для числа $E_k$ номеров $n$, $N < n \leqslant N + M$, удовлетворяющих условию $\Delta(n) = k$, или, что то же, условию $S(t_n + 0) - k = 0$.

Заметим теперь следующее. Имеется ровно два типа точек, в которых функция $\varphi(t) = S(t + 0) - k$ меняет знак (рис. 5).

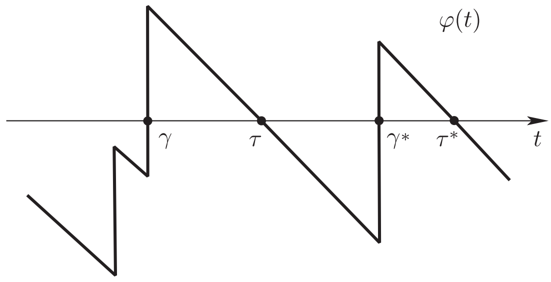



**Рис. 5.** Точки, в которых $\varphi(t)$ меняет знак: $\gamma, \gamma^*$ – первого типа, $\tau, \tau^*$ – второго типа

Первый тип – это точки разрыва $S(t)$ (совпадающие с ординатами нулей $\zeta(s)$) такие, что $\varphi(t - 0) < 0$, $\varphi(t + 0) > 0$. В каждой из точек разрыва функция $\varphi(t)$, как и функция $S(t)$, совершает скачок на положительную величину, равную кратности соответствующей ординаты. Следовательно, в точках перемены знака первого типа $\varphi(t)$ меняет знак только с минуса на плюс.

Второй тип – это нули $\varphi(t)$, расположенные на интервалах непрерывности $\varphi(t)$, которые имеют вид $(\gamma_n, \gamma_{n+1})$. Поскольку $S(t)$ строго убывает на таких интервалах, в точках второго типа функция $\varphi(t)$ может менять знак лишь с плюса на минус.

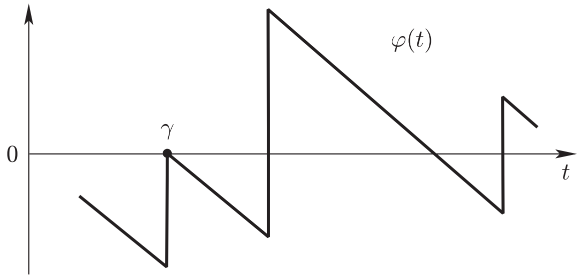



**Рис. 6.** Нули $\varphi(t)$ в точках Грама, совпадающие с ординатами, не могут быть точками перемены знака

Отметим, что нули $\varphi(t)$, совпадающие с точкой разрыва, не могут быть точками перемены знака (рис. 6). Действительно, если $t = \gamma$ – такая точка, то $\varphi(\gamma + 0) = 0$. Так как

$$\varphi(\gamma + 0) - \varphi(\gamma - 0) = S(\gamma + 0) - S(\gamma - 0) \geqslant 1,$$

то

$$\varphi(\gamma - 0) \leqslant \varphi(\gamma + 0) - 1 = -1.$$

Поэтому $\varphi(t)$ отрицательна при $t$, близких к $\gamma$ слева. Вместе с тем в достаточно малой окрестности вида $(\gamma, \gamma + h)$ как $S(t)$, так и $\varphi(t)$ монотонно убывают, так что $\varphi(t) < 0$ и при $t$, достаточно близких к $\gamma$ справа. Итак, при переходе через точку $t = \gamma$ функция $\varphi(t)$ знака не меняет.

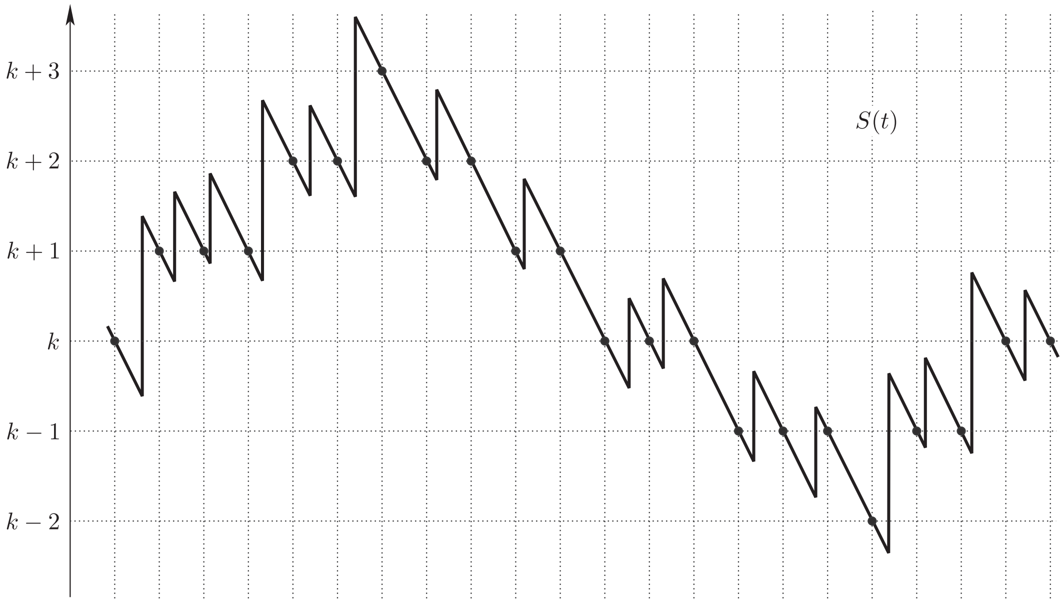



**Рис. 7.** Всякое значение $\tau$, для которой число $S(\tau+0)$ является целым, есть точка Грама: точки Грама совпадают с абсциссами точек пересечения графика $y = S(t)$ с горизонтальными прямыми $y = k$, $k \in \mathbb{Z}$

Далее, всякий нуль $\tau > t^* = 6.289\,836\ldots$ функции $\varphi(t)$ является точкой Грама (рис. 7).

Действительно, пусть $S(\tau+0) = k$. Обозначив через $m$ число ординат нулей $\zeta(s)$, не превосходящих $\tau$ и взятых с учетом кратности, из формулы Римана–Мангольдта получаем:

$$m = N(\tau) = \frac{\vartheta(\tau)}{\pi} + 1 + S(\tau+0) = \frac{\vartheta(\tau)}{\pi} + k + 1,$$

откуда $\vartheta(\tau) = \pi(m-k-1)$. В силу монотонности $\vartheta(t)$ заключаем: $\tau = t_{m-k}$ – точка Грама.

Из леммы 4.1 следует, что как $S(t)$, так и $\varphi(t)$ меняют знак на числовой прямой бесконечно много раз. Поэтому за всякой точкой первого типа необходимо следует точка второго типа, и наоборот.

Таким образом, число нулей $\varphi(t)$ на всяком промежутке $(T, T+H]$ не более чем на единицу отличается от числа точек разрыва $\varphi(t)$, в которых эта функция меняет знак. Иными словами, если $\nu$ – число точек перемены знака $\varphi(t)$, а $E_k$ – число нулей $\varphi(t)$ на промежутке $(T, T+H]$, то

$$E_k \geqslant \frac{\nu}{2} - 1.$$

Положим теперь $T = t_N$, $H = t_{N+M} - t_N$ и воспользуемся утверждениями леммы I.15 и леммы 4.2 с $f(T) = c^{-1}\sqrt{\log\log T}$. Получим

$$\begin{aligned}
E_k &\geqslant \frac{H}{2\pi}(\log T)\frac{\pi^3 k^2 + c}{\log\log T}\exp\{-6c\sqrt{\log\log T}\}\exp\{-6\pi\sqrt{\pi}\,|k|\sqrt{\log\log T}\} \\
&> \frac{M(k^2+c)}{\log\log N}\exp\{-6(\pi\sqrt{\pi}\,|k| + c)\sqrt{\log\log N}\} \\
&> 2M\exp\{-6\pi\sqrt{\pi}(|k|+c)\sqrt{\log\log N}\}, \\
F_k &\geqslant E_{(-k)} - 2|k| - 4 > M\exp\{-6\pi\sqrt{\pi}(|k|+c)\sqrt{\log\log N}\}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

В частности, при $k = 0$ теорема 4.7 дает неравенство

$$F_0 \geqslant M e^{-c_1\sqrt{\log\log N}}, \qquad c_1 > 0.$$

Однако в этом случае функция $\varphi(t)$ совпадает с $S(t+0)$, так что нижняя оценка величины $E_0$ (и, таким образом, $F_0$) сводится по сути к оценке числа точек перемены знака $S(t)$. Метод такой оценки, не опирающийся на асимптотические формулы для первых моментов функций, связанных с $S(t)$, был разработан в начале 1980-х годов Сельбергом и Тсангом [4] (см. также [5]). Применение оценки величины $E_0$, полученной с помощью этого метода, позволяет значительно уточнить и приведенную выше оценку числа $F_0$ ординат $\gamma_n$, для которых наблюдается явление Грама–Сельберга.

Так, из леммы I.17 и рассуждений, использованных для доказательства теоремы 4.7, сразу следует

Теорема 4.8. *Существуют положительные постоянные $b_1, b_2 > 0$, зависящие лишь от $\varepsilon$ и такие, что число $F_0$ номеров $n$ промежутка $N < n \leqslant N + M$ с условием $\Delta_n = 0$ оценивается снизу величиной*

$$M e^{-b_1(\log\log\log N)^2},$$

*а если верна гипотеза Римана – то величиной*

$$M e^{-b_2 \log\log\log N} = \frac{M}{(\log\log N)^{b_2}}.$$

Замечание 4.2. Существует гипотеза (см. [4; гл. 7]), согласно которой число перемен знака $S(t)$ на промежутке $(T, T+H]$ асимптотически равно

$$\frac{H\log T}{\sqrt{\pi\log\log T}}.$$

Если эта гипотеза верна, то число номеров $n$, $N < n \leqslant N + M$, с условием $\Delta_n = 0$ асимптотически равно

$$\frac{\sqrt{\pi}M}{\sqrt{\log\log N}}.$$

Доказательства двух оставшихся теорем опираются на известные утверждения о существовании на любом достаточно коротком промежутке точек, в которых функция $S(t)$ принимает «аномально» большие по абсолютной величине положительные и отрицательные значения (лемма I.12).

Хотя $S(t)$ и является разрывной функцией, пользуясь ее спецификой можно показать (лемма 4.3), что $S(t)$ принимает на заданном отрезке любое промежуточное значение, находящееся между ее минимумом и максимумом (при условии, что точка максимума лежит левее точки минимума). Эти соображения и лежат в основе доказательств теорем 4.9 и 4.10.

Лемма 4.3. *Пусть точки $\tau_1$ и $\tau_2$ таковы, что $\tau_1 < \tau_2$ и $S(\tau_1 + 0) > S(\tau_2 - 0)$. Тогда для всякого числа $\alpha$ с условием $S(\tau_2 - 0) < \alpha < S(\tau_1 + 0)$ на интервале $(\tau_1, \tau_2)$ найдется точка $\tau$, отличная от ординаты нуля $\zeta(s)$ и такая, что $S(\tau) = \alpha$.*

Доказательство. Предположим сперва, что промежуток $(\tau_1, \tau_2)$ не содержит ординат нулей $\zeta(s)$. Тогда функция $S(t)$ непрерывна и монотонно убывает на интервале $(\tau_1, \tau_2)$, и в этом случае утверждение леммы очевидно (рис. 8 a)).

Предположим теперь противное (рис. 8 b)); пусть $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(m)}$ – все различные ординаты на рассматриваемом интервале, $\tau_1 \leqslant \gamma^{(1)} < \gamma^{(2)} < \cdots < \gamma^{(m)} \leqslant \tau_2$. Если $S(\gamma^{(1)} - 0) < \alpha$,

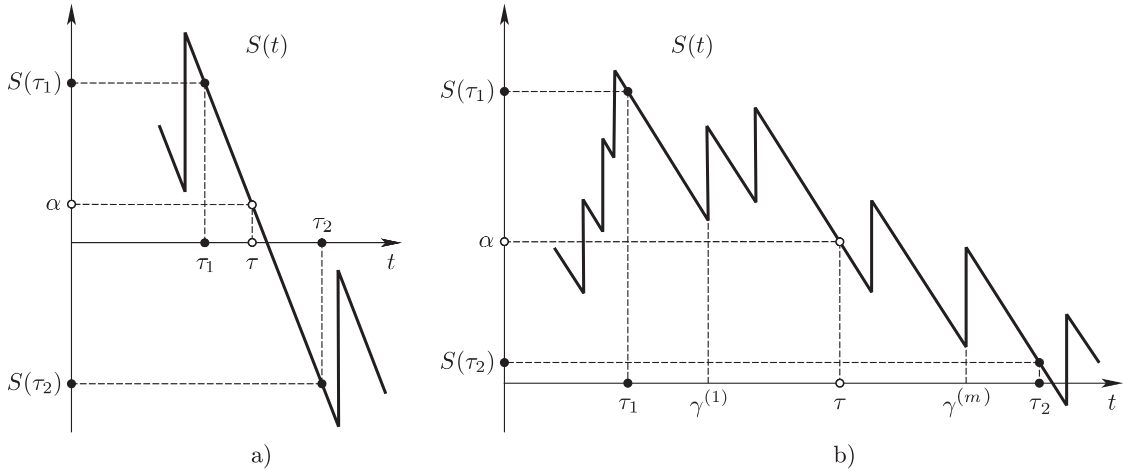



**Рис. 8.** Функция $S(t)$ принимает любое значение, лежащее между ее максимумом и минимумом при условии, что точка минимума расположена правее точки максимума

то из непрерывности $S(t)$ на $(\tau_1, \gamma^{(1)})$ следует, что искомая точка может быть выбрана на указанном интервале. Если же $S(\gamma^{(1)} - 0) \geqslant \alpha$, то

$$S(\gamma^{(1)} + 0) \geqslant S(\gamma^{(1)} - 0) + 1 \geqslant \alpha + 1 > \alpha,$$

и вышеприведенные рассуждения можно применить к промежутку $(\gamma^{(1)}, \tau_2)$.

Продолжая этот процесс далее, мы либо отыщем точку $\tau$ на одном из интервалов $(\gamma^{(k)}, \gamma^{(k+1)})$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, либо придем к цепочке неравенств

$$S(\gamma^{(1)} + 0) > \alpha, \quad S(\gamma^{(2)} + 0) > \alpha, \quad \ldots, \quad S(\gamma^{(m)} + 0) > \alpha.$$

Так как интервал $(\gamma^{(m)}, \tau_2)$ уже не содержит точек разрыва $S(t)$, то существование точки $\tau$, $\gamma^{(m)} < \tau < \tau_2$, следует из неравенств $S(\tau_2 - 0) < \alpha < S(\gamma^{(m)} + 0)$. Отличие $\tau$ от ординат $\gamma^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, m$, следует из приведенных выше рассуждений. Лемма доказана.

Теорема 4.9. *Существует постоянная $c$, зависящая лишь от $\varepsilon$ и такая, что для любого целого $k$ с условием*

$$|k| \leqslant c\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/3}$$

*справедливо неравенство $F_k \geqslant N^{0.8\varepsilon}$.*

Доказательство. Положим $\delta = 10^{-4}\varepsilon$, так что $0 < \delta < 10^{-7}$, $M_1 = [N^{\alpha+\delta}]$. Пусть, далее, $r$ – произвольное целое число с условием $1 \leqslant r \leqslant [MM_1^{-1}]$. Определим $T$ и $H$ из равенств

$$T - 4H = t_{N+(r-1)M_1}, \qquad T + 2H = t_{N+rM}. \tag{4.20}$$

Тогда несложно проверить, что $T^{\alpha+0.9\delta} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\delta}$. Согласно лемме I.12 на промежутке $(T - H, T + 2H]$ найдутся точки $\tau_1'$ и $\tau_2'$ такие, что

$$S(\tau_1' + 0) > K, \quad S(\tau_2' - 0) < -K, \qquad K = \left[\frac{\delta^{5/4}}{2000}\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)^{1/3}\right].$$

Отыскивая на промежутке $(T - 4H, T - H]$ точки $\tau_1''$ и $\tau_2''$ с тем же свойством и полагая $\tau_1 = \tau_1''$, $\tau_2 = \tau_2'$, будем иметь

$$S(\tau_1 + 0) > K, \quad S(\tau_2 - 0) < -K, \qquad \tau_1 < \tau_2.$$

Зададимся теперь произвольным целым $k$ с условием $|k| \leqslant K$ и воспользуемся леммой 4.3. Тогда мы убеждаемся в существовании точки $t$ с условием

$$t_{N+(r-1)M_1} = T - 4H < \tau_1 < t < \tau_2 \leqslant T + 2H = t_{N+rM_1}, \tag{4.21}$$

отличной от ординаты нуля $\zeta(s)$ и такой, что $S(t) = k$. Как было замечено при доказательстве теоремы 4.7, такая точка $t$ является точкой Грама: $t = t_n$. Из неравенств (4.21) следует, что

$$N + (r-1)M_1 < n \leqslant N + rM_1.$$

Придавая величине $r$ значения $1, 2, \ldots, [MM_1^{-1}]$, заключаем, что общее число номеров $n$ промежутка $N < n \leqslant N + M$, для которых $S(t_n + 0) = \Delta(n) = k$, оценивается снизу величиной $MM_1^{-1} - 1 > 2N^{0.8\varepsilon}$. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 4.1.

Теорема 4.10. *Пусть верна гипотеза Римана. Тогда при любом целом $k$ с условиями*

$$\frac{1}{86\pi}\left(\frac{\log\log N}{\log\log\log N}\right)^{1/2} < |k| \leqslant \frac{1}{91\pi}\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/2}$$

*на промежутке $N < n \leqslant 2N$ найдется не менее*

$$\frac{N}{\log N}\exp\{-2(90\pi k)^2\log|k|\}$$

*номеров $n$ с условием $\Delta_n = k$. В частности, всякое значение $k$,*

$$\frac{1}{92\pi}\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/2} < |k| \leqslant \frac{1}{91\pi}\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/2},$$

*принимается величиной $\Delta_n$ на указанном промежутке не менее $N^{0.02}$ раз.*

Доказательство. Наши рассуждения подобны доказательству теоремы 4.9, с той лишь разницей, что вместо леммы I.12 необходимо воспользоваться леммой I.13. Действительно, ограничиваясь случаем положительных $k$ и полагая

$$h = \exp\{2(90\pi k)^2\log|k|\}, \qquad M_1 = 6\left[\frac{h}{2\pi}\log N\right],$$

при произвольном $r$ с условием $1 \leqslant r \leqslant [NM_1^{-1}]$ определим $T$ и $H$ из равенств (4.20). Замечая, что $H = h(1 + o(1))$, будем иметь

$$\begin{aligned}
H &< \frac{3}{2}h \leqslant \frac{3}{2}\exp\left\{2(91\pi)^2\frac{\log N}{(91\pi)^2\log\log N}\cdot\frac{1}{2}(\log\log N - \log\log\log N)\right\}\\
&= N\exp\left\{-\frac{\log N}{\log\log N}\log\log\log N\right\} < \frac{T}{3},\\
H &> \frac{h}{2} > \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{2(91\pi)^2\log\log N}{(86\pi)^2\log\log\log N}\cdot\frac{1}{2}(\log\log\log N - \log\log\log\log N - 2\log(86\pi))\right\}\\
&> \exp\{1.1\log\log N\} > (\log T)(\log\log T)^{-3/2}.
\end{aligned}$$

Условия леммы I.13 выполнены. Следовательно, для любого целого числа $k$ из условия теоремы будем иметь

$$\sup_{T-H<t\leqslant T+2H}\{\pm S(t)\} \geqslant \frac{1}{90\pi}\left(\frac{\log H}{\log\log H}\right)^{1/2} > k + 1.$$

Согласно лемме 4.3 между $n + (r-1)M_1$ и $N + rM_1$ найдется номер $n$ с условием $\Delta(n) = k$. Общее же число таких номеров на промежутке $(N, 2N]$ оценивается снизу величиной

$$[NM_1^{-1}] - 2k - 4 > \frac{N}{\log N} \exp\{-2(90\pi k)^2 \log|k|\}.$$

Применяя лемму 4.1, приходим к первому утверждению теоремы. Второе утверждение получим, если подставим в последнее неравенство вместо $k$ значение

$$\frac{1}{91\pi}\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/2}.$$

Теорема доказана.

Если целое число $k$ превосходит по модулю $c\sqrt{\log\log N}$, где $c = (12\pi\sqrt{\pi})^{-1}$, то для величины $F_k$ мы имеем лишь очень слабую оценку теоремы 4.7. Вместе с тем согласно теореме 3.3 при любом $A$, даже сколь угодно большом (но фиксированном), каждое из неравенств

$$\Delta_n \leqslant -A\sqrt{\log\log N}, \qquad \Delta_n \geqslant A\sqrt{\log\log N}$$

выполняется для положительной доли номеров $n$ промежутка $N < n \leqslant N + M$.

Это позволяет предположить, что при $k$, близких к $\sqrt{\log\log N}$, оценка теоремы 4.7 может быть уточнена. Пример такого уточнения дается теоремой 4.11. Ее доказательство опирается на два вспомогательных утверждения (леммы 4.3 и I.18).

Теорема 4.11. *Пусть $A > 0$ – сколь угодно большое фиксированное число, $N \geqslant N_0(\varepsilon, A)$. Тогда при любом целом $k$ с условием $|k| \leqslant A\sqrt{\log\log N}$ справедлива следующая оценка*:

$$F_k \geqslant \frac{cM}{\log N}(\log\log\log\log N)^{-1}, \qquad c = \frac{\exp\{-(2\pi A)^2\}}{100A}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай положительных $k$. Положим $T = t_N$, $H = t_{N+M} - t_N$ и определим $E = E(A; T, H)$ как множество точек $t$ промежутка $T \leqslant t \leqslant T + H$, удовлетворяющих условию

$$S(t) > 2A\sqrt{\log\log T}.$$

Согласно лемме I.19 имеем

$$\operatorname{mes}(E) \sim \frac{H}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\pi A\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du > b_1 H, \tag{4.22}$$

где $b_1 = (0.07/(\pi A))e^{-(2\pi A)^2}$.

Множество $E$ состоит из конечного числа непересекающихся интервалов $(\alpha_j, \beta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, левые и правые концы которых занумеруем в порядке возрастания:

$$T \leqslant \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_s < \beta_s \leqslant T + H.$$

Распределим эти интервалы по совокупностям $E_1, E_2, \ldots$ по следующему правилу. Интервал $(\alpha_1, \beta_1)$ относим к совокупности $E_1$. Если интервал $(\alpha_j, \beta_j)$ уже отнесен к совокупности $E_m$, то интервал $(\alpha_{j+1}, \beta_{j+1})$ относим к той же совокупности $E_m$ в том случае, если отрезок $[\beta_j, \alpha_{j+1}]$ не содержит точек перемены знака функции $S(t)$, и относим к совокупности $E_{m+1}$ в противном случае. Из этого построения следует, что для всякой совокупности отрезок минимальной длины, ее покрывающий, не содержит точек перемен знака функции $S(t)$.

Положим теперь $h = 4.39 \log\log\log\log T$ и отнесем каждую из построенных совокупностей к первому или второму классу в зависимости от того, будет суммарная длина интервалов,

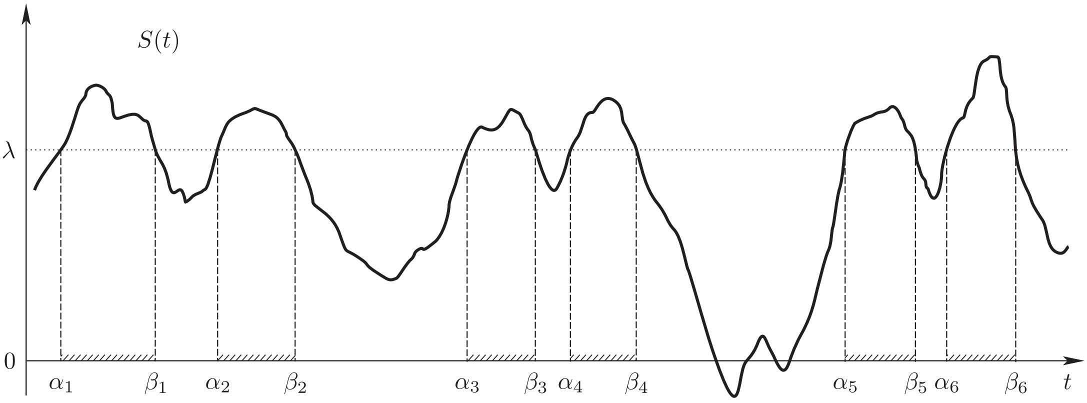



**Рис. 9.** На рисунке, схематически изображающем график функции $y = S(t)$ и прямую $y = \lambda = 2A\sqrt{\log\log T}$, промежутки $(\alpha_j, \beta_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, относятся к первой совокупности, а промежутки $(\alpha_5, \beta_5)$ и $(\alpha_6, \beta_6)$ – ко второй

составляющих эту совокупность, меньше $3h$ или нет. Обозначим, наконец, через $L_1$ и $L_2$ суммарные длины промежутков $(\alpha_j, \beta_j)$, образующих соответственно совокупности первого и второго классов. Тогда из (4.22) имеем оценку

$$L_1 + L_2 > b_1 H. \tag{4.23}$$

Предположим, что совокупность $E_m$, образованная интервалами $(\alpha_\ell, \beta_\ell)$, $(\alpha_{\ell+1}, \beta_{\ell+1})$, ..., $(\alpha_n, \beta_n)$, отнесена ко второму классу. Из вышеприведенных рассуждений следует, что отрезок $[\alpha_\ell, \beta_n]$, с одной стороны, не содержит ни одной точки перемены знака $S(t)$ и, с другой стороны, имеет длину, не меньшую $3h$ (см. рис. 10). Но тогда интервал $(\alpha_\ell + h, \beta_n - h)$ непуст и обладает следующим свойством: для всякой его точки $\tau$ интервал $(\tau - h, \tau + h)$ не содержит точек перемены знака $S(t)$.

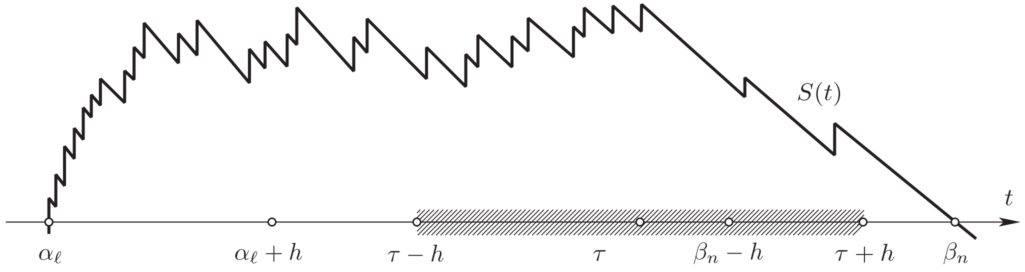



**Рис. 10.** Для всякой точки $\tau \in (\alpha_\ell + h, \beta_n - h)$ промежуток $(\tau - h, \tau + h)$ не содержит точек перемены знака $S(t)$

Если теперь $r$ обозначает число совокупностей, отнесенных ко второму классу, то мера $\mu$ множества точек $\tau$, $T \leqslant \tau \leqslant T + H$, таких, что $S(t)$ не меняет знака на интервале $(\tau - h, \tau + h)$, оценивается снизу величиной

$$\sum_{\substack{E_m \text{ принадлежит} \\ \text{второму классу}}} (\beta_n - \alpha_\ell - 2h) = \sum_{\substack{E_m \text{ принадлежит} \\ \text{второму классу}}} (\beta_n - \alpha_\ell) - 2rh \geqslant L_2 - 2rh.$$

С другой стороны, из леммы I.18 следует, что

$$\mu \leqslant \frac{b_2 H}{\sqrt{\log\log T}}\,,$$

где $b_2 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая лишь от $\varepsilon$. Таким образом,

$$L_2 - 2rh \leqslant \frac{b_2 H}{\sqrt{\log\log T}}\,.$$

В то же время из определения совокупностей второго класса имеем оценку $L_2 \geqslant 3h\cdot r$. Поэтому

$$rh \leqslant L_2 - 2rh \leqslant \frac{b_2 H}{\sqrt{\log\log T}}\,,$$

$$L_2 \leqslant 2rh + \frac{b_2 H}{\sqrt{\log\log T}} \leqslant \frac{3b_2 H}{\sqrt{\log\log T}}\,. \tag{4.24}$$

Пользуясь (4.22) и (4.24), получаем:

$$L_1 > b_1 H - \frac{3b_2 H}{\sqrt{\log\log T}} > (1-\delta)b_1 H, \tag{4.25}$$

где $\delta = 10^{-4}$.

Пусть теперь $R$ – число совокупностей, отнесенных к первому классу. Поскольку суммарная длина интервалов, образующих каждую из таких совокупностей, не превосходит $3h$, то $L_1 < 3Rh$. Вместе с (4.25) это дает:

$$3Rh > (1-\delta)b_1 H, \qquad R > (1-\delta)\frac{b_1}{3}\,Hh^{-1}.$$

Пусть $k$ – заданное целое число с условиями

$$1 \leqslant k \leqslant A\sqrt{\log\log N} < 2A\sqrt{\log\log T},$$

$E_m$ – произвольная совокупность первого класса, и пусть $(\alpha_\ell, \beta_\ell)$, $(\alpha_{\ell+1}, \beta_{\ell+1})$, …, $(\alpha_n, \beta_n)$ – образующие ее интервалы. Выберем на $(\alpha_n, \beta_n)$ произвольную точку $\tau_1$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$S(\tau_1) \geqslant 2A\sqrt{\log\log T} > k.$$

Пусть, далее, $\tau_2$ – ближайшая к $\beta_n$ справа точка перемены знака функции $S(t)$. Поскольку $S(t)$ меняет знак с плюса на минус, точка $\tau_2$ необходимо является точкой Грама[2] и $S(\tau_2) = 0$. Итак,

$$S(\tau_1) > k > S(\tau_2), \qquad \tau_1 < \tau_2.$$

Согласно лемме I.18 между $\tau_1$ и $\tau_2$ найдется по меньшей мере одна точка $\tau$ такая, что $S(\tau+0) = k$. Поскольку найденные выше точки $\tau_2$ перемены знака, отвечающие различным совокупностям, различны (это следует из процедуры разбиения множества интервалов $(\alpha_j, \beta_j)$ на совокупности), то количество таких точек $\tau$ на промежутке $T < t \leqslant T+H$ оценивается снизу числом

$$R - 1 > (1-\delta)\frac{b_1}{3}\,Hh^{-1} > \frac{\pi b_1}{6.6}\,\frac{M}{\log N}(\log\log\log\log N)^{-1}.$$

Теперь утверждение леммы следует из леммы 4.1.

[2] См. доказательство теоремы 4.7.

В случае отрицательных $k$ доказательство проводится аналогично. Отличие заключается в том, что в качестве $E$ следует рассматривать множество точек $t$ промежутка $(T, T+H]$, для которых $S(t) \leqslant -2A\sqrt{\log\log T}$. Далее все промежутки, образующие $E$, следует разбить на совокупности, а совокупности – на классы подобно тому, как это делалось выше (полученные выше оценки величин $L_1$, $L_2$, $R$ при этом, очевидно, сохраняют силу). На заключительном шаге при рассмотрении произвольной совокупности $E_m$ первого класса в качестве $\tau_1$ следует брать точку перемены знака $S(t)$, ближайшую к $\alpha_\ell$ слева, а в качестве $\tau_2$ – произвольную точку интервала $(\alpha_n, \beta_n)$, так что

$$S(\tau_2) < -2A\sqrt{\log\log T} < -A\sqrt{\log\log N} \leqslant k \leqslant -1 < S(\tau_1) = 0, \qquad \tau_1 < \tau_2.$$

Теперь утверждение теоремы следует из лемм I.18 и 4.1.

# Глава 5. Соседние ординаты, не подчиняющиеся закону Грама

Настоящая глава посвящена изучению поведения чисел в наборах вида

$$(\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1}), \tag{5.1}$$

где $s \geqslant 2$ – фиксированное целое число, а $n$ неограниченно возрастает. Ее появление явилось следствием попыток автора дать ответ на следующий вопрос, ранее, по всей видимости, не рассматривавшийся: как часто встречаются пары, тройки, четверки и т.д. подряд идущих ординат $\gamma_n$, для каждой из которых явление Грама–Сельберга не имеет места, и каково в таких случаях распределение знаков в соответствующих наборах

$$(\Delta_n, \Delta_{n+1}), \quad (\Delta_n, \Delta_{n+1}, \Delta_{n+2}), \quad (\Delta_n, \Delta_{n+1}, \Delta_{n+2}, \Delta_{n+4}), \quad \ldots ?$$

Из определения $\Delta_n$ следует, что одновременное выполнение неравенств

$$\Delta_n > 0, \qquad \Delta_{n+1} < 0$$

привело бы к противоречивому соотношению $\gamma_{n+1} \leqslant t_n < \gamma_n$. Таким образом, номера $n$, отвечающие соотношению $\Delta_n\Delta_{n+1} \neq 0$, можно разбить на три класса в зависимости от того, какое из следующих условий окажется выполненным:

1) $\Delta_n > 0$, $\Delta_{n+1} > 0$;
2) $\Delta_n < 0$, $\Delta_{n+1} < 0$;
3) $\Delta_n < 0$, $\Delta_{n+1} > 0$.

Вычисления показывают, что каждый из этих классов непуст, а наименьшие принадлежащие им значения $n$ равны соответственно 4923, 3359 и 379. Данные таблицы II.2 приложения II показывают, например, что среди первых 10 млн номеров $n$ доли попавших в первый, второй и третий классы составляют 1.05 %, 1.05 % и 0.46 %. Однако эта таблица плохо отражает истинное положение дел, поскольку (как будет показано ниже) при неограниченном возрастании $N$ эти доли стремятся к 50 %, 50 % и 0 % соответственно.

Похожая картина наблюдается и в случае, если вместо произведений двух соседних членов последовательности $\Delta_n$ рассматривать произведения трех, четырех, пяти и вообще любого фиксированного числа $s$ подряд идущих величин $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1}$.

Именно, пусть $E_s$ – множество номеров $n$ с условием $\Delta_n\Delta_{n+1}\cdots\Delta_{n+s-1} \neq 0$, и пусть $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ – произвольный набор, элементы которого равны $\pm 1$. Пусть, далее, $E_s(\mathbf{e})$ обозначает множество тех номеров $n \in E_s$, для которых знак $\Delta_{n+j-1}$ совпадает с $\varepsilon_j$ для всех $j = 1, \ldots, s$:

$$\operatorname{sign}\Delta_n = \varepsilon_1, \quad \operatorname{sign}\Delta_{n+1} = \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \operatorname{sign}\Delta_{n+s-1} = \varepsilon_s.$$

Отметим, что бóльшая часть из $2^s$ множеств $E_s(\mathbf{e})$, отвечающих всем возможным наборам $\mathbf{e}$, являются пустыми. Действительно, рассмотренный выше пример (с $s = 2$, $\mathbf{e} = (1, -1)$) показывает, что непустому множеству не может отвечать набор $\mathbf{e}$, в котором найдется пара соседних элементов вида $\varepsilon_j = 1, \varepsilon_{j+1} = -1$. Иначе говоря, для того, чтобы множество $E_s(\mathbf{e})$ было непустым, необходимо, чтобы величины $\varepsilon_j$, составляющие набор $\mathbf{e}$, образовывали неубывающую последовательность: $\varepsilon_1 \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_s$. Так как $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, то это возможно лишь в случае, когда $\mathbf{e}$ имеет вид

$$(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{r}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{s-r}),$$

где $0 \leqslant r \leqslant s$. Следовательно, общее число допустимых наборов равно $s + 1$.

Как и в случае $s = 2$, среди $s+1$ множеств $E_s(\mathbf{e})$, отвечающих допустимым наборам $\mathbf{e}$, можно указать два исключительных множества, для каждого из которых число элементов, не превосходящих $N$, составляет $0.5N + o(N)$ при неограниченном возрастании $N$. Эти исключительные множества (обозначаемые в дальнейшем через $E_s^+$ и $E_s^-$) отвечают наборам $\mathbf{e}^+ = (1, \ldots, 1)$, $\mathbf{e}^- = (-1, \ldots, -1)$, составленным из чисел одного знака.

Этот неожиданный эффект «неравноправия» различных допустимых наборов можно пояснить следующим образом. Одновременному наличию в наборе $\mathbf{e}$ положительных и отрицательных чисел должны отвечать перемены знака в последовательности величин $\Delta_n$, т.е. неравенства

$$\Delta_n < 0, \qquad \Delta_{n+1} > 0. \tag{5.2}$$

Если $\Delta_n$ велико по модулю, то для выполнения неравенств (5.2) величина $\Delta_m$ при переходе от $m = n$ к $m = n+1$ должна совершить достаточно резкий скачок. С другой стороны, этот скачок может быть и не таким резким, но для этого необходимо, чтобы модуль величины $\Delta_n$ был не очень велик. Таким образом, для частого осуществления условий (5.2) имеется два препятствия.

Первое препятствие заключается в том, что при больших $n$ величина $|\Delta_n|$, как правило, очень велика. Согласно следствию из теоремы 3.3 для любой сколь угодно медленно растущей функции $\Phi(x) > 0$ количество номеров $n \leqslant N$ с условием

$$|\Delta_n| \leqslant \Phi^{-1}(n)\sqrt{\log\log n}$$

есть $o(N)$. Иными словами, «почти всегда» $\Delta_n$ имеет порядок $\Phi^{-1}(n)\sqrt{\log\log n}$ и выше.

Второе препятствие состоит в следующем. Согласно лемме 5.3 резкий скачок при переходе от $\Delta_n$ к $\Delta_{n+1}$ (и, как следствие, большое значение разности $\Delta_{n+1} - \Delta_n$) возникает в случае, когда соседние ординаты $\gamma_n$ и $\gamma_{n+1}$ разделены большим числом точек Грама. Можно, однако, показать (см. лемму 5.1), что доля номеров $n$, для которых промежуток $[\gamma_n, \gamma_{n+1})$ содержит не менее $k$ таких точек, не превосходит $ae^{-bk}$, где $a, b > 0$, и, таким образом, чрезвычайно быстро убывает с ростом $k$.

Итак, если величина $\Delta_n$ положительна (отрицательна), то при любом фиксированном $s \geqslant 2$ все величины $\Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1}$ «почти всегда» будут иметь тот же знак, что и $\Delta_n$. Поскольку число положительных (отрицательных) членов в последовательности $\Delta_n$, $n \leqslant N$, эквивалентно $0.5N$, то и число номеров $n$ из того же промежутка, попавших в каждое из множеств $E_s^+, E_s^-$, также эквивалентно $0.5N$.

Строгому обоснованию приведенных выше рассуждений посвящена первая часть главы (параграфы 5.1, 5.2).

Утверждения первых двух параграфов уточняются и дополняются в параграфе 5.3, где строится функция распределения для произведений

$$\Delta_n\Delta_{n+1}\cdots\Delta_{n+s-1} \tag{5.3}$$

и доказываются теоремы о существовании наборов (5.1), состоящих из одних лишь аномально малых или одних лишь аномально больших значений $\Delta_n$.

В отличие от остальных глав, здесь мы предполагаем, что $N \geqslant N_0$, где постоянная $N_0$ зависит не только от $\varepsilon$, но и от $s$.

## 5.1. Большие расстояния между соседними ординатами нулей $\zeta(s)$

Приведенное ниже утверждение (лемма 5.1) имеет целью показать, что доля промежутков $(\gamma_n, \gamma_{n+1})$, длина которых в $v$ раз превышает среднее значение $2\pi(\log\gamma_n)^{-1}$, убывает с ростом $v$ как $O(e^{-cv})$, где $c$ – положительная постоянная.

Лемма 5.1. *Пусть $v > 0$, и пусть $\nu = \nu(v)$ – количество пар соседних ординат $\gamma_n$, $\gamma_{n+1}$ нулей $\zeta(s)$, удовлетворяющих условиям*

$$T < \gamma_n < \gamma_{n+1} \leqslant T + H, \qquad \gamma_{n+1} - \gamma_n > \frac{2\pi v}{\log T}. \tag{5.4}$$

*Тогда для $\nu(v)$ справедлива оценка*

$$\nu(v) \leqslant \kappa(v)\frac{H}{2\pi}\log T, \qquad \kappa(v) = e^4 \exp\left\{-\frac{v}{2ec_0} + \frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}}\right\}.$$

Доказательство. Если $0 < v \leqslant 8ec_0$, то искомая оценка следует из тривиальной, поскольку

$$\nu(v) \leqslant N(T+H) - N(T) < \frac{H}{2\pi}\log T \leqslant e^4\frac{H}{2\pi}(\log T)\exp\left\{-\frac{v}{2ec_0}\right\} < \kappa(v)\frac{H}{2\pi}\log T.$$

Если же

$$v > \frac{16}{\pi}\frac{\log T}{\log\log\log T},$$

то $\nu(v) = 0$ в силу теоремы Литтлвуда [6], согласно которой

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n < \frac{32}{\log\log\log\gamma_n}$$

для всех достаточно больших $n$.

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда

$$8ec_0 < v \leqslant \frac{16}{\pi}\frac{\log T}{\log\log\log T}.$$

Положим $h = \pi v(2\log T)^{-1}$ и рассмотрим произвольную пару $\gamma_n, \gamma_{n+1}$, отвечающую (5.4). При любом $t$ с условием $\gamma_n < t < \gamma_n + 2h$ промежуток $(t, t+2h)$ целиком лежит в $(\gamma_n, \gamma_n + 4h)$ и, таким образом, не содержит ни одной ординаты нулей $\zeta(s)$. Следовательно,

$$N(t+2h) - N(t) = \frac{1}{\pi}(\vartheta(t+2h) - \vartheta(t)) + S(t+2h) - S(t) = 0$$

при всех $t$, $\gamma_n < t \leqslant \gamma_n + 2h$. Итак, для указанных значений $t$ имеем

$$\begin{aligned}|S(t+2h) - S(t)| &= \frac{1}{\pi}(\vartheta(t+2h) - \vartheta(t)) = \frac{1}{\pi}(2h\vartheta'(t) + 2h^2\vartheta''(t+2\theta h)) \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{2h\left(\log\frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) + 2h^2\left(\frac{1}{2(t+2\theta h)} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right)\right\} \\ &> \frac{h}{\pi}\log\frac{t}{2\pi} > \frac{h}{\pi}\log\frac{T}{2\pi} = \frac{v}{2}\left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right).\end{aligned}$$

Положим $k = [v/(4ec_0)]$, так что

$$2 \leqslant k \leqslant \frac{2}{\pi ec_0}\frac{\log T}{\log\log\log T} < c\log Y,$$

где $c$ – сколь угодно малое фиксированное число. Суммируя обе части неравенства

$$2h\left(\frac{v}{2}\right)^{2k}\left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{2k} \leqslant \int_{\gamma_n}^{\gamma_n+2h}(S(t+2h) - S(t))^{2k}\,dt$$

по всем $\nu(v)$ парам $\gamma_n, \gamma_{n+1}$, отвечающим (5.4), и пользуясь леммой 3.15, находим

$$2h\nu(v)\left(\frac{v}{2}\right)^{2k}\left(1-\frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{2k} \leqslant \int_T^{T+H}(S(t+2h)-S(t))^{2k}\,dt \leqslant \exp\left\{\frac{v\varepsilon}{80c_0\sqrt{ke}}\right\}\frac{c_0}{56}(2c_0)^{2k}H,$$

откуда

$$\begin{aligned}\nu(v) &\leqslant \frac{H}{2h}\frac{c_0}{56}\left(\frac{4c_0k}{v}\right)^{2k}\left(1-\frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{-2k}\exp\left\{\frac{v\varepsilon}{80c_0\sqrt{ke}}\right\}\\ &\leqslant \frac{c_0}{28v}\exp\left\{\frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}}\right\}\left(1-\frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{-2k}e^{-2k}\frac{H}{2\pi}\log T.\end{aligned}$$

Из неравенств, которым удовлетворяет $v$, находим

$$\left(1-\frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{-2k} \leqslant \exp\left\{\frac{4k\log 2\pi}{\log T}\right\} \leqslant \exp\left\{\frac{v}{ec_0}\frac{\log 2\pi}{\log T}\right\} < \exp\left\{\frac{4\log 2\pi}{\pi ec_0}(\log\log\log T)^{-1}\right\},$$

$$\begin{aligned}\nu(v) &\leqslant \frac{c_0}{28\cdot 8ec_0}\exp\left\{\frac{4\log 2\pi}{\pi ec_0}(\log\log\log T)^{-1}\right\}\exp\left\{-2\left(\frac{v}{4ec_0}-1\right)\right\}\exp\left\{\frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}}\right\}\frac{H}{2\pi}\log T\\ &< \frac{1}{80}\exp\left\{-\frac{v}{2ec_0}+\frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}}\right\}\frac{H}{2\pi}\log T < \kappa(v)\frac{H}{2\pi}\log T.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Неравенство леммы 5.1 позволяет получить верхнюю оценку суммы

$$S_\kappa(N;M) = \sum_n(\gamma_{n+1}-\gamma_n)^\kappa, \qquad \kappa > 0,$$

необходимую для доказательства основных утверждений главы.

Лемма 5.2. *При любом $\kappa \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$S_\kappa(N;M) \leqslant c_5\left(\frac{2\pi c_4}{\log N}\right)^\kappa\Gamma(\kappa+1)M,$$

*где $c_4 = 8.7ec_0$, $c_5 = 9e^5c_0$.*

Доказательство. Положим $T=\gamma_N$, $H=\gamma_{N+M}-\gamma_N$, так что

$$T = (1+o(1))\frac{2\pi N}{\log N}, \qquad H = (1+o(1))\frac{2\pi M}{\log N}$$

и, следовательно,

$$T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon},$$

где $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon$. Распределим все ординаты $\gamma_n$, $N<n\leqslant N+M$, по классам $E_0, E_1, E_2, \ldots$, относя к классу $E_r$ те из них, которые удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi r}{\log T} \leqslant \gamma_{n+1}-\gamma_n < \frac{2\pi(r+1)}{\log T}.$$

Согласно лемме 5.1 число элементов в классе $E_r$ не превосходит

$$\kappa(r)\frac{H}{2\pi}\log T, \qquad \kappa(r) = e^4\exp\left\{-\frac{r}{2ec_0}+\frac{\varepsilon\sqrt{r}}{20\sqrt{2c_0}}\right\}.$$

Замечая, что

$$-\frac{r}{2ec_0} + \frac{\varepsilon\sqrt{r}}{20\sqrt{2c_0}} \leqslant -\frac{r}{2ec_0}\left(1 - 6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right) < -\frac{0.23r}{2ec_0} = -\beta r$$

при $\varepsilon < 10^{-3}$, получаем

$$S_\kappa(N;M) \leqslant e^4 \sum_{r=0}^{+\infty}\left(\frac{2\pi(r+1)}{\log T}\right)^\kappa e^{-\beta(r+1)+\beta}\frac{H}{2\pi}\log T \leqslant e^{4+\beta}\left(\frac{2\pi}{\log T}\right)^\kappa V_\kappa \frac{H}{2\pi}\log T,$$

$$V_\kappa = \sum_{r=1}^{+\infty} r^\kappa e^{-\beta r}.$$

Функция $f(r) = r^\kappa e^{-\beta r}$ монотонно возрастает на отрезке $1 \leqslant r \leqslant r_0 = \kappa\beta^{-1}$, достигает в точке $r = r_0$ максимума, равного

$$\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa, \tag{5.5}$$

после чего монотонно убывает. Оценивая слагаемые суммы $V_\kappa$, отвечающие значениям $1 \leqslant r \leqslant r_1 - 1$ и $r \geqslant r_1 + 2$, $r_1 = [r_0]$, интегралами по соответствующим промежуткам, а слагаемые, отвечающие значениям $r = r_1, r_1 \pm 1$, величиной (5.5), получим

$$\begin{aligned}
V_\kappa(N;M) &\leqslant \left(\int_0^{r_1} + \int_{r_1+1}^{+\infty}\right) f(r)\,dr + 3\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa < \int_0^{+\infty} f(r)\,dr + 3\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa \\
&= \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^{\kappa+1}} + 3\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^{\kappa+1}}\left(1 + 3\beta\frac{(\kappa e^{-1})^\kappa}{\Gamma(\kappa+1)}\right) \\
&\leqslant \left(1 + \frac{3\beta}{e}\right)\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^{\kappa+1}} < 8.9ec_0\Gamma(\kappa+1)\beta^{-\kappa}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
S_\kappa(N;M) &< e^{4+\beta}\left(\frac{2\pi}{\log T}\right)^\kappa \cdot 8.9ec_0\frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^\kappa} \\
&< 9e^5 c_0\left(\frac{2\pi}{\beta\log T}\right)^\kappa \Gamma(\kappa+1) < 9e^5 c_0\left(\frac{2\pi\cdot 8.7ec_0}{\log N}\right)^\kappa \Gamma(\kappa+1).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

## 5.2. Распределение знаков в наборах $(\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+s-1})$

Основное утверждение этого параграфа (теорема 5.1) показывает, что как бы ни было велико фиксированное число $s \geqslant 2$, «почти всегда» набор (5.1) состоит из чисел одного знака, причем асимптотически в половине случаев все элементы такого набора положительны, а в половине отрицательны.

По аналогии с величинами $r(n) = \Delta(n) - \Delta(n-1)$, введенными в параграфе 3.2, определим величины

$$r_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}.$$

Лемма 5.3. *Величина $r_n + 1$ совпадает с числом точек Грама на промежутке $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$.*

Доказательство. Определив номера $\mu$ и $\nu$ из неравенств

$$t_{\mu-1} < \gamma_{n-1} \leqslant t_\mu, \qquad t_{\nu-1} < \gamma_n \leqslant t_\nu,$$

будем иметь
$$\Delta_n = \nu - n, \quad \Delta_{n-1} = \mu - n + 1, \qquad 1 + r_n = \nu - \mu.$$
Но разность $\nu - \mu$ совпадает с числом точек Грама на промежутке $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$. Лемма доказана.

Следствие 5.1. *При любом $n$ справедливо неравенство $r_n \geqslant -1$.*

Лемма 5.4. *При любом $\kappa \geqslant 1$ справедлива оценка*
$$\sum_n |r_n|^\kappa \leqslant 1.1 c_5 (c_4 \kappa)^\kappa M$$
(*здесь и далее $c_4, c_5$ – постоянные из леммы* 5.2).

Доказательство. Пусть $t_{\nu-1} < \gamma_{N+M} \leqslant t_\nu$. В силу леммы 1.1 для длины $G_\nu$ наикратчайшего промежутка Грама, имеющего непустое пересечение с отрезком $[\gamma_N, \gamma_{N+M}]$, имеем оценку
$$h = t_\nu - t_{\nu-1} > \frac{2\pi}{\ln N}\,.$$
Следовательно, при любом $n$, $N < n \leqslant N + M$, число точек Грама, попавших на $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$, не превосходит $(\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1} + 1$. Отсюда по лемме 5.3 получаем: $r_n \leqslant (\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1}$. Пользуясь оценкой леммы 5.2, будем иметь
$$\sum_n |r_n|^\kappa \leqslant \sum_{n\,:\; r_n = -1} 1 + \sum_{n\,:\; r_n \geqslant 1} ((\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1})^\kappa \leqslant M + c_5 \Gamma(\kappa + 1) \left(\frac{2\pi c_4}{h \ln N}\right)^\kappa M$$
$$< M + c_5 (\kappa c_4)^\kappa M < 1.1 c_5 (\kappa c_4)^\kappa M.$$
Лемма доказана.

Для целых $i, j$ с условием $0 \leqslant i < j$ положим
$$r_n(i,j) = \Delta_{n+j} - \Delta_{n+i}.$$

Лемма 5.5. *Пусть $0 \leqslant i < j \leqslant s$. Тогда при любом $\kappa \geqslant 1$ справедлива оценка*
$$\sum_n |r_n(i,j)|^\kappa \leqslant 1.2 c_5 (c_4 s \kappa)^\kappa M.$$

Доказательство. Из определения $r_n$ и $r_n(i,j)$ следует тождество
$$r_n(i,j) = r_{n+j} + r_{n+j-1} + \cdots + r_{n+i+1}.$$
Применяя к нему неравенство Гёльдера и оценку леммы 5.4, получим
$$\sum_n |r_n(i,j)|^\kappa \leqslant \sum_n (j-i)^{\kappa-1} (|r_{n+j}|^\kappa + |r_{n+j-1}|^\kappa + \cdots + |r_{n+i+1}|^\kappa)$$
$$\leqslant s^{\kappa-1} \sum_n \sum_{t=i+1}^{j} |r_{n+t}|^\kappa \leqslant s^\kappa \sum_{N < n \leqslant N+M+s} |r_n|^\kappa$$
$$\leqslant s^\kappa \cdot 1.1 c_5 (\kappa c_4)^\kappa (M + s) < 1.2 c_5 (\kappa c_4 s)^\kappa M.$$
Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Пусть $0 \leqslant j \leqslant s$ – целое число. Тогда при любом $\kappa \geqslant 1$ справедлива оценка*
$$\sum_n{}' |\Delta_{n+j}|^{-\kappa} \leqslant \frac{3.6 M}{\sqrt{\log L}}\,.$$

Доказательство. В обозначениях леммы 4.1 сумма $F_r + F_{-r} = \mathcal{F}_r$ равна числу величин $\Delta_n$ с условием $|\Delta_n| = r$, $N < n \leqslant N + M + s$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$. Положив $R = \sqrt[4]{L}$, будем иметь

$$\sum_n{}' |\Delta_{n+j}|^{-\kappa} \leqslant \sum_{N<n\leqslant N+M+s} |\Delta_n|^{-\kappa} = \sum_{r\geqslant 1} \mathcal{F}_r \cdot r^{-\kappa}$$
$$= \biggl(\sum_{r\leqslant R} + \sum_{r>R}\biggr) \mathcal{F}_r \cdot r^{-\kappa} \leqslant \biggl(\sum_{r\leqslant R} \mathcal{F}_r\biggr) + R^{-\kappa}\biggl(\sum_{r>R} \mathcal{F}_r\biggr).$$

Полагая $x = \pm y$, $y = \pi R\sqrt{2/L}$ в теореме 3.3, получаем

$$\sum_{r\leqslant R} \mathcal{F}_r \leqslant (M+s)\biggl(\frac{2y}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2\cdot 1.79}{\sqrt{\log L}}\biggr) < \frac{3.59M}{\sqrt{\log L}}.$$

Таким образом, исходная сумма не превосходит

$$\frac{3.59M}{\sqrt{\log L}} + MR^{-\kappa} < \frac{3.6M}{\sqrt{\log L}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Пусть $0 \leqslant i < j \leqslant s$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_n{}' \left|\frac{r_n(i,j)}{\Delta_{n+j}}\right| \leqslant \frac{4.8c_4 sM \log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Доказательство. Положим $\kappa = 0.5\log\log L$. Применяя к исходной сумме неравенство Гёльдера наряду с оценками лемм 5.5 и 5.6, будем иметь

$$\sum_n{}' \left|\frac{r_n(i,j)}{\Delta_{n+j}}\right| \leqslant \biggl(\sum_n |r_n(i,j)|^{\kappa}\biggr)^{1/\kappa} \biggl(\sum_n{}' |\Delta_{n+j}|^{-\kappa/(\kappa-1)}\biggr)^{1-1/\kappa}$$
$$\leqslant (1.2c_5(c_4 s\kappa)^{\kappa} M)^{1/\kappa}\biggl(\frac{3.6M}{\sqrt{\log L}}\biggr)^{1-1/\kappa} = \biggl(\frac{c_5}{3}\biggr)^{1/\kappa} \frac{3.6ec_4 s\kappa M}{\sqrt{\log L}} < \frac{4.8c_4 sM\log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Лемма доказана.

Положим $e_n = \operatorname{sign}\Delta_n$, так что $e_n = |\Delta_n|/\Delta_n$ при $\Delta_n \neq 0$.

Лемма 5.8. *Пусть $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{2m} < i_{2m+1}$ – целые числа. Тогда равенства*

$$e_{n+i_1} e_{n+i_2} \cdots e_{n+i_{2m}} = 1 + 2\theta_1 f_m, \tag{5.6}$$
$$e_{n+i_1} e_{n+i_2} \cdots e_{n+i_{2m+1}} = e_{n+i_{2m+1}} + 2\theta_2 f_m, \tag{5.7}$$

*в которых*

$$f_m = \left|\frac{r_n(i_1,i_2)}{\Delta_{n+i_2}}\right| + \left|\frac{r_n(i_3,i_4)}{\Delta_{n+i_4}}\right| + \cdots + \left|\frac{r_n(i_{2m-1},i_{2m})}{\Delta_{n+i_{2m}}}\right|,$$

*имеют место в случае, когда произведения в левых частях (5.6), (5.7) отличны от нуля.*

Доказательство. Докажем (5.6) индукцией по $m$. Не ограничивая общности, можем считать $i_1 = 0$. Полагая для краткости $i_2 = i$ и пользуясь тем, что $|x+y| = |x| + \theta|y|$ при любых $x$ и $y$, в случае $m = 1$ получим

$$e_n e_{n+i} = \frac{|\Delta_n\Delta_{n+i}|}{\Delta_n\Delta_{n+i}} = \frac{|\Delta_n(\Delta_n + r_n(0,i))|}{\Delta_n\Delta_{n+i}} = \frac{\Delta_n^2 + \theta_1\Delta_n r_n(0,i)}{\Delta_n\Delta_{n+i}}$$
$$= \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+i}} + \theta_1\frac{r_n(0,i)}{\Delta_{n+i}} = \frac{\Delta_{n+i} - r_n(0,i)}{\Delta_{n+i}} + \theta_1\frac{r_n(0,i)}{\Delta_{n+i}} = 1 + (\theta_1 - 1)\frac{r_n(0,i)}{\Delta_{n+i}} = 1 + 2\theta_2 f_1.$$

Допустим, что формула (5.6) верна при $m = 1, \ldots, \mu$. По предположению индукции для $m = \mu + 1$ имеем

$$e_{n+i_1} \cdots e_{n+i_{2\mu}} e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} = (1 + 2\theta_3 f_\mu) e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}}$$
$$= e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} + 2\theta_4 f_\mu = 1 + 2\theta_5 \left| \frac{r_n(i_{2\mu+1}, i_{2\mu+2})}{\Delta_{n+i_{2\mu+2}}} \right| + 2\theta_4 f_\mu = 1 + 2\theta_6 f_{\mu+1},$$

что и требовалось. Формула (5.7) следует из (5.6). Лемма доказана.

Лемма 5.9. *Пусть* $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{2m} < i_{2m+1} \leqslant s$ – *фиксированные целые числа. Тогда справедливы соотношения*

$$\sum_n e_{n+i_1} e_{n+i_2} \cdots e_{n+i_{2m+1}} = \theta_1 R, \qquad \sum_n e_{n+i_1} e_{n+i_2} \ldots e_{n+i_{2m}} = M + \theta_2 R,$$

*в которых*

$$R = \frac{4.9 c_4 s^2 M \log\log L}{\sqrt{\log L}}\,.$$

Доказательство. Обозначим суммы из условия леммы через $\sigma_1$ и $\sigma_2$ соответственно. Согласно лемме 5.8

$$\sigma_1 = \sum_n{}' (e_{n+i_{2m+1}} + 2\theta_1 f_m) = \sigma^{(0)} + 2\theta_2 \sum_{k=1}^{m} \sigma^{(k)},$$

где

$$\sigma^{(0)} = \sum_n{}' e_{n+i_{2m+1}}, \qquad \sigma^{(k)} = \sum_n{}' \left| \frac{r_n(i_{2k-1}, i_{2k})}{\Delta_{n+i_{2k}}} \right|.$$

Заметим следующее: если $l$ и $r$ – количества нулевых членов некоторых последовательностей $a_n$ и $b_n$, $N < n \leqslant N + M$, то число нулевых членов в последовательности $a_n b_n$ не превосходит $l + r$. Отсюда и из теоремы 3.3 заключаем, что число тех $n$ из промежутка $N < n \leqslant N + M$, для которых $\Delta_{n+i_1} \Delta_{n+i_2} \cdots \Delta_{n+i_{2m}} = 0$, не превосходит

$$\frac{2 \cdot 1.79 \cdot 2 m c_2 M}{\sqrt{\log L}} < \frac{3.59 s M}{\sqrt{\log L}}\,. \tag{5.8}$$

Следовательно,

$$\sigma^{(0)} = \sum_n e_{n+i_{2m+1}} + \theta_2 \frac{3.59 s M}{\sqrt{\log L}} = \sum_n e_n + \theta_3 \left( \frac{3.59 s M}{\sqrt{\log L}} + s \right).$$

Последняя сумма по $n$ совпадает с разностью между числом положительных и отрицательных членов последовательности $\Delta_n$, $N < n \leqslant N + M$, и в силу теоремы 3.3 не превосходит по модулю

$$M \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2/2}\, du + \frac{1.79}{\sqrt{\log L}} \right) - M \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-u^2/2}\, du - \frac{1.79}{\sqrt{\log L}} \right) = \frac{3.58 M}{\sqrt{\log L}}\,.$$

Оценивая каждую из сумм $\sigma^{(k)}$ по лемме 5.6 получаем

$$|\sigma_1| \leqslant \frac{3.58 M}{\sqrt{\log L}} + \frac{3.59 s M}{\sqrt{\log L}} + s + \frac{4.8 c_4 s^2 M \log\log L}{\sqrt{\log L}} < \frac{4.9 c_4 s^2 M \log\log L}{\sqrt{\log L}}\,.$$

С помощью тех же рассуждений, что и выше, заключаем, что число ненулевых слагаемых в $\sigma_2$ отличается от $M$ не более, чем на (5.8). Вновь применяя леммы 5.6 и 5.8, будем иметь

$$\sigma_2 = \sum_n{}' (1 + 2\theta_4 f_m)$$
$$= M + \theta_5\left(\frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}} + s + \frac{4.8c_4 s^2 M \log\log L}{\sqrt{\log L}}\right) = M + \theta_6 \frac{4.9c_4 s^2 M \log\log L}{\sqrt{\log L}}\,.$$

Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ – *произвольный набор с условием* $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j = 1, \ldots, s$, $\varepsilon_1 \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon_s$, *и пусть* $\mu(\mathbf{e}) = \mu(\mathbf{e}; N, M)$ – *число номеров* $n$ *промежутка* $N < n \leqslant N + M$, *для которых выполнены равенства*

$$\operatorname{sign}(\Delta_{n+j-1}) = \varepsilon_j, \qquad j = 1, \ldots, s. \tag{5.9}$$

*Тогда*

$$\mu(\mathbf{e}) = \kappa \cdot \frac{M}{2} + \theta R, \qquad R = \frac{5c_4 s^2 M \log\log L}{\sqrt{\log L}}\,,$$

*где*

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \textit{если } \mathbf{e} = \mathbf{e}^+ \textit{ или } \mathbf{e} = \mathbf{e}^-, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$E_n = \frac{1 + \varepsilon_1 e_n}{2}\,\frac{1 + \varepsilon_2 e_{n+1}}{2} \cdots \frac{1 + \varepsilon_s e_{n+s-1}}{2}\,.$$

Так как

$$\frac{1 + \varepsilon_j e_{n+j-1}}{2} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_{n+j-1} = \varepsilon_j, \\ 0, & \text{если } e_{n+j-1} = -\varepsilon_j, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } \ e_{n+j-1} = 0, \end{cases}$$

то $0 \leqslant E_n \leqslant 1/2$ в случае, когда хотя бы одно из чисел $\Delta_{n+j}$, $j = 0, 1, \ldots, s-1$, обращается в нуль. Как было отмечено по ходу доказательства леммы 5.9, общее число таких номеров $n$ не превосходит (5.8). Для оставшихся $n$ имеем $E_n = 1$ или $E_n = 0$ в зависимости от того, выполнены или нет условия (5.9). Следовательно,

$$\mu(\mathbf{e}) = \sum_n E_n + \frac{\theta}{2}\,\frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}}\,.$$

Имеем, далее,

$$\sum_n E_n = 2^{-s} \sum_n (1 + \varepsilon_1 e_n) \cdots (1 + \varepsilon_s e_{n+s-1})$$
$$= 2^{-s} \sum_n \Bigl(1 + (\varepsilon_1 e_n + \cdots + \varepsilon_s e_{n+s-1}) + \cdots$$
$$+ \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant s} \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_k} e_{n+i_1} \cdots e_{n+i_k} + \cdots + \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_s e_n \cdots e_{n+s-1}\Bigr)$$
$$= 2^{-s} \Biggl(\sum_n 1 + \Bigl(\varepsilon_1 \sum_n e_n + \cdots + \varepsilon_s \sum_n e_{n+s-1}\Bigr) + \cdots$$
$$+ \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_k \leqslant s} \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_k} \sum_n e_{n+i_1} \cdots \varepsilon_{n+i_k} + \cdots + \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_s \sum_n e_n \cdots e_{n+s-1}\Biggr).$$

Согласно лемме 5.9 общий вклад сумм, отвечающих произведениям нечетного числа сомножителей $e_{n+i}$, оценивается по модулю величиной

$$2^{-s} \sum_{1\leqslant k\leqslant (s+1)/2} \binom{s}{2k-1} R = 0.5R, \qquad R = \frac{4.9c_1 s^2 M \log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Согласно той же лемме вклад сумм, отвечающих произведениям четного числа сомножителей, представляется в виде $2^{-s}M(1+\sigma_2+\sigma_4+\cdots)$, где

$$\sigma_2 = \sum_{0<i<j\leqslant s} \varepsilon_i\varepsilon_j, \qquad \sigma_4 = \sum_{0<i<j<k<r\leqslant s} \varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_r, \qquad \ldots$$

– элементарные симметрические функции величин $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$.

Положим

$$f(x) = (x-\varepsilon_1)\cdots(x-\varepsilon_s) = x^s - \sigma_1 x^{s-1} + \sigma_2 x^{s-2} - \cdots + (-1)^s \sigma_s.$$

Несложно проверить, что сумма $\sigma = 1+\sigma_2+\sigma_4+\cdots$ совпадает с суммой коэффициентов многочлена $g(x) = (f(x)+(-1)^s f(-x))/2$, так что $\sigma = g(1)$. Пусть теперь $l$ и $m$ обозначают количества положительных и отрицательных чисел в наборе $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$, так что $l+m = s$. Тогда

$$f(x) = (x-1)^l(x+1)^m, \qquad g(x) = \frac{1}{2}((x-1)^l(x+1)^m + (x-1)^m(x+1)^l).$$

Очевидно, $g(1) = 0$ при любых $l$ и $m$, отличных от нуля (что отвечает наборам $\mathbf{e}$, содержащим числа разных знаков). Если же $m = 0$ или $l = 0$ (что соответствует наборам $\mathbf{e}^+, \mathbf{e}^-$), то $g(1) = (1/2)\cdot 2^s = 2^{s-1}$.

Собирая вместе полученные результаты, получаем

$$\sum_n E_n = \kappa\frac{M}{2} + \theta_1 R,$$

$$\mu(\mathbf{e}) = \kappa\frac{M}{2} + \theta_2\left(R + \frac{1.8sM}{\sqrt{\log L}}\right) = \kappa\frac{M}{2} + \theta_3\frac{5c_4 s^2 M\log\log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Теорема доказана.

Результаты этого параграфа интересно сопоставить с численными данными, собранными в таблицах II.2–II.5 приложения II.

## 5.3. Распределение произведений $\boldsymbol{\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}}$

В настоящем параграфе исследуется распределение произведений (5.3) в случаях, когда $n$ пробегает множества $E_s^+$, $E_s^-$ (т.е. в случаях, когда числа набора (5.1) все положительны или все отрицательны). В частности, будет доказано, что при любом $s \geqslant 2$ произведения (5.3), должным образом нормированные, имеют распределение, сходящееся с ростом параметра $N$ к гамма-распределению $\Gamma(1)$, т.е. к распределению с плотностью

$$\frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}.$$

Построение функции распределения опирается, как и при доказательстве теоремы 2.4, на метод А. Гоша и использует асимптотические формулы для моментов произведений (5.3), но имеет свои особенности.

Несложно показать, что главные члены $2k$-х моментов

$$\sum_n |\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}|^{2k} \qquad \text{и} \qquad \sum_n \Delta_n^{2ks}$$

совпадают и равны, следовательно,

$$\frac{(2ks)!}{(ks)!} \frac{M(\log\log N)^{ks}}{(2\pi)^{2ks}}.$$

При применении метода Гоша напрямую к произведениям (5.3) и построении для них характеристической функции возникает сумма типа

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant K} \left(-\frac{t^2}{2^s}\right)^k \frac{(2ks)!}{(2k)!(ks)!},$$

которая при $s = 1$ служит приближением к функции $e^{-t^2/2}$, но при $s \geqslant 3$ оказывается частичной суммой ряда, расходящегося всюду, кроме точки $t = 0$.

Чтобы избежать трудностей такого рода, вместо произведений (5.3) приходится иметь дело с величинами

$$\kappa_n = |\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}|^{1/s}, \tag{5.10}$$

которые «в среднем» ведут себя, как $|\Delta_n|$, и к которым применима техника Гоша. Однако появление дробного показателя $1/s$ в (5.10), а также необходимость учета ограничений типа $n \in E_s^+$, $n \in E_s^-$ при вычислении моментов

$$\sum_{n \in E_s^\pm} \kappa_n^k$$

приводят к усложнению ряда выкладок. Этим объясняется большое число вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теоремы 5.2.

Положим $\delta_n = \pi\Delta_n\sqrt{2/L}, \varepsilon_n(i,j) = \delta_{n+j} - \delta_{n+i}$, так что $\varepsilon_n(i,j) = \pi r_n(i,j)\sqrt{2/L}$. Вместо $\varepsilon_n(0,j)$ в ряде случаев будем писать $\varepsilon_n(j)$.

Лемма 5.10. *Пусть $0 \leqslant i < j \leqslant s$. Тогда при любом $\kappa \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$\sum_n |\varepsilon_n(i,j)|^\kappa \leqslant 1.2c_5 \left(\frac{4.5c_4\kappa s}{\sqrt{L}}\right)^\kappa M.$$

Доказательство. Действительно, согласно лемме 5.5

$$\sum_n |r_n(i,j)|^\kappa \leqslant 1.2c_5(c_4 s\kappa)^\kappa M.$$

Значит,

$$\sum_n |\varepsilon_n(i,j)|^\kappa = \left(\pi\sqrt{\frac{2}{L}}\right)^\kappa \sum_n |r_n(i,j)|^\kappa \leqslant 1.2c_5\left(\frac{\pi\sqrt{2}c_4 s\kappa}{\sqrt{L}}\right)^\kappa M < 1.2c_5\left(\frac{4.5c_4 s\kappa}{\sqrt{L}}\right)^\kappa M.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.11. *Пусть $i$, $j$, $k$, $l$, $r$, $s$ и $t$ – целые числа, удовлетворяющие условиям*

$$0 \leqslant i < j \leqslant s, \quad 1 \leqslant t < s, \quad 0 \leqslant l \leqslant s, \quad 1 \leqslant r \leqslant c_1\sqrt[3]{L}.$$

*Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_n |\delta_{n+l}|^r |\varepsilon_n(i,j)|^t \leqslant 68\sqrt{c_0}\left(\frac{2r}{e}\right)^{r/2}\left(\frac{9c_4 s^2}{\sqrt{L}}\right)^t M.$$

Доказательство. Используя утверждения леммы 5.10 и теоремы 3.1 наряду и неравенство Коши, будем иметь

$$\sum_n |\delta_{n+l}|^r|\varepsilon_n(i,j)|^t \leqslant \biggl(\sum_{N<n\leqslant N+M+s}\delta_n^{2r}\biggr)^{1/2}\biggl(\sum_n \varepsilon_n^{2t}(i,j)\biggr)^{1/2}$$
$$< \biggl(2.88\Bigl(\frac{2r}{e}\Bigr)^r(M+s)\cdot 1.2c_5\Bigl(\frac{4.5c_4 s\cdot 2t}{\sqrt{L}}\Bigr)^{2t}M\biggr)^{1/2}$$
$$\leqslant 1.86\sqrt{c_1}\Bigl(\frac{2r}{e}\Bigr)^{r/2}\sqrt{c_5}\Bigl(\frac{9c_4 st}{\sqrt{L}}\Bigr)^t M < 68\sqrt{c_0}\Bigl(\frac{2r}{e}\Bigr)^{r/2}M\Bigl(\frac{9c_4 s^2}{\sqrt{L}}\Bigr)^t.$$

Лемма доказана.

Пусть $t$ – произвольное целое число с условием $1\leqslant t<s$. Положим

$$\xi_n(t)=\sum_{0<i_1<\dots<i_t<s}|\varepsilon_n(i_1)\cdots\varepsilon_n(i_t)|,$$

где суммирование ведется по всем $\binom{s-1}{t}$ упорядоченным наборам $(i_1,\ldots,i_t)$ натуральных чисел, меньших $s$.

Лемма 5.12. *Пусть $k$ – целое число, $2\leqslant k\leqslant c_1\sqrt[3]{L}$, $l=\min(k,s)$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_n\sum_{t=1}^{l-1}|\delta_n|^{h-t}\xi_n(t) < 374c_4\sqrt{c_0}\,\frac{Ms^3}{\sqrt{L}}\Bigl(\frac{2k}{e}\Bigr)^{k/2},$$

*где $h$ – любое из чисел $k$, $s$.*

Доказательство. Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, а также из леммы 5.11 следует, что исходная сумма не превосходит величины

$$\sum_n\sum_{t=1}^{l-1}|\delta_n|^{h-t}\sum_{0<i_1<\dots<i_t<s}|\varepsilon_n(i_1)\cdots\varepsilon_n(i_t)|$$
$$\leqslant \sum_n\sum_{t=1}^{l-1}|\delta_n|^{h-t}\sum_{0<i_1<\dots<i_t<s}\frac{1}{t}(|\varepsilon_n(i_1)|^t+\dots+|\varepsilon_n|^t)$$
$$=\sum_{t=1}^{l-1}\frac{1}{t}\sum_{0<i_1<\dots<i_t<s}\biggl\{\sum_n|\delta_n|^{h-t}|\varepsilon_n(i_1)|+\dots+\sum_n|\delta_n|^{h-t}|\varepsilon_n(i_t)|\biggr\}$$
$$<\sum_{t=1}^{l-1}\frac{1}{t}\sum_{0<i_1<\dots<i_t<s}t\cdot 68\sqrt{c_0}\,M\Bigl(\frac{2(h-t)}{e}\Bigr)^{h-t/2}\Bigl(\frac{9c_4s^2}{\sqrt{L}}\Bigr)^t$$
$$=68\sqrt{c_0}\,M\sum_{t=1}^{l-1}\binom{s-1}{t}\Bigl(\frac{2(h-t)}{e}\Bigr)^{h-t/2}\Bigl(\frac{9c_4s^2}{\sqrt{L}}\Bigr)^t.$$

Замечая, что

$$(h-t)^{h-t/2}\leqslant(k-t)^{k/2}=k^{k/2}\Bigl(1-\frac{t}{k}\Bigr)^{k/2}<k^{k/2}e^{-t/2},$$

заключаем, что сумма из условия леммы не превосходит

$$68\sqrt{c_0}M\sum_{t=1}^{l-1}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\binom{s-1}{t}e^{-t/2}\left(\frac{9c_4s^2}{\sqrt{L}}\right)^t$$
$$=68\sqrt{c_0}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}M\sum_{t=1}^{l-1}\binom{s-1}{t}q^t=68\sqrt{c_0}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}M\{(1+q)^{s-1}-1\},$$

где обозначено

$$q=\frac{9c_4s^2}{\sqrt{eL}}.$$

Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, находим:

$$(1+q)^{s-1}-1\leqslant q(s-1)(1+q)^{s-2}<qs(1+q)^s$$
$$=\frac{9c_4s^3}{\sqrt{eL}}\left(1+\frac{1}{s}\cdot\frac{9c_4s^3}{\sqrt{eL}}\right)^s<\frac{9c_4s^3}{\sqrt{eL}}\exp\left\{\frac{9c_4s^3}{\sqrt{eL}}\right\}<\frac{5.5c_4s^3}{\sqrt{L}}.$$

Отсюда уже легко получить утверждение леммы.

Лемма 5.13. *Пусть $k,t$ – целые числа, $k\geqslant 1$, $1\leqslant t<s$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_n \xi_n^{2k}(t)\leqslant 1.2c_5\left(\frac{9c_4ks^3}{\sqrt{L}}\right)^{2kt}M.$$

Доказательство. Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, а также из неравенства Гёльдера получаем:

$$\sum_n \xi_n^{2k}(t)=\sum_n\left\{\sum_{0<i_1<\cdots<i_t<s}|\varepsilon_n(i_1)\cdots\varepsilon_n(i_t)|\right\}^{2k}$$
$$\leqslant\sum_n\left\{\sum_{0<i_1<\cdots<i_t<s}\frac{1}{t}(|\varepsilon_n(i_1)|^t+\cdots+|\varepsilon_n(i_t)|^t)\right\}^{2k}$$
$$\leqslant\sum_n t^{-2k}\binom{s-1}{t}^{2k-1}\sum_{0<i_1<\cdots<i_t<s}(|\varepsilon_n(i_1)|^t+\cdots+|\varepsilon_n(i_t)|^t)^{2k}$$
$$\leqslant\sum_n t^{-2k}\binom{s-1}{t}^{2k-1}\sum_{0<i_1<\cdots<i_t<s}t^{2k-1}(|\varepsilon_n(i_1)|^{2kt}+\cdots+|\varepsilon_n(i_t)|^{2kt})$$
$$=\frac{1}{t}\binom{s-1}{t}^{2k-1}\sum_{0<i_1<\cdots<i_t<s}\left\{\sum_n|\varepsilon_n(i_1)|^{2kt}+\cdots+\sum_n|\varepsilon_n(i_t)|^{2kt}\right\}.$$

Оценивая каждую из сумм по $n$ с помощью леммы 5.10 и пользуясь неравенством

$$\binom{s-1}{t}=\frac{(s-1)(s-2)\cdots(s-t)}{t!}<s^t,$$

находим

$$\sum_n \xi_n^{2k}(t)\leqslant\frac{1}{t}\binom{s-1}{t}^{2k-1}\binom{s-1}{t}t\cdot 1.2c_5\left(\frac{9c_4s^2k}{\sqrt{L}}\right)^{2kt}M<1.2c_5\left(\frac{9c_4s^3k}{\sqrt{L}}\right)^{2kt}M.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.14. *Пусть $k, t$ – целые числа, $1 \leqslant t < s$, $1 \leqslant k \leqslant c_1\sqrt[3]{L}$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_n |\delta_n|^{k(s-t)/s}(\xi_n(t))^{k/s} < 8.25c_0^{1/4}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\left(\frac{10.5c_4\sqrt{k}s^3}{\sqrt{L}}\right)^{kt/s}.$$

Доказательство. Обозначим сумму из условия леммы через $C_t$. Согласно неравенству Гёльдера

$$C_t \leqslant \left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{1/2-t/(2s)}\left(\sum_n (\xi_n(t))^{2k/(s+t)}\right)^{1/2+t/(2s)}$$
$$\leqslant \left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{1/2-t/(2s)}\left(\sum_n \xi_n^{2k}(t)\right)^{1/(2s)} M^{s+t-1/(2s)}. \tag{5.11}$$

Оценивая правую часть (5.11) с помощью теорем 3.1 и леммы 5.13, находим:

$$C_t \leqslant \left(2.88\left(\frac{2k}{e}\right)^k M\right)^{1/2-t/(2s)}\left(1.2c_5M\left(\frac{9c_4s^3k}{\sqrt{L}}\right)^{2kt}\right)^{1/(2s)} M^{s+t-1/(2s)}$$
$$< (2.88)^{1/2-t/(2s)}(1.2c_5)^{1/(2s)}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/(2(1-t/s))}\left(\frac{9c_4s^3k}{\sqrt{L}}\right)^{kt/s} M$$
$$< 8.25c_0^{1/4}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\left\{\sqrt{\frac{e}{2k}}\frac{9c_4s^3k}{\sqrt{L}}\right\}^{kt/s} < 8.25c_0^{1/4}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\left(\frac{10.5c_4\sqrt{k}s^3}{\sqrt{L}}\right)^{kt/s}.$$

Лемма доказана.

Положим

$$\eta_n = \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{s-t}\xi_n(t).$$

Лемма 5.15. *Пусть $k$ – целое число, $1 \leqslant k \leqslant c_1\sqrt[3]{L}$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_n \eta_n^{k/s} < 8.3c_0^{1/4}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\left\{\frac{10.5c_4\sqrt{k}s^4}{\sqrt{L}}\right\}^{k/s}.$$

Доказательство. Из неравенства Гёльдера и очевидного соотношения

$$(a+b+\dots+c)^{1/s} \leqslant a^{1/s}+b^{1/s}+\dots+c^{1/s}, \qquad a,b,\dots,c \geqslant 0,$$

заключаем, что

$$\eta_n^k \leqslant (s-1)^{k-1}\sum_{t=1}^{s-1}|\delta_n|^{k(s-1)}\xi_n^k(t), \qquad \eta_n^{k/s} \leqslant s^{k/s}\sum_{t=1}^{s-1}|\delta_n|^{k(s-t)/s}(\xi_n(t))^{k/s}.$$

Полагая

$$q = \left\{\frac{10.5c_4\sqrt{k}s^3}{\sqrt{L}}\right\}^{k/s}$$

и используя оценку леммы 5.14, будем иметь

$$\sum_n \eta_n^{k/s} \leqslant s^{k/s}\sum_{t=1}^{s-1} 8.25c_0^{1/4}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} q^t < 8.25c_0^{1/4}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\frac{qs^{k/s}}{1-q}$$
$$< 8.3c_0^{1/4}M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\left\{\frac{10.5c_4\sqrt{k}s^4}{\sqrt{L}}\right\}^{k/s}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.16. *Пусть $k$ – целое число, $1\leqslant k\leqslant c_1\sqrt[3]{L}$. Тогда при любом $r$ с условием $1\leqslant r\leqslant k-1$ справедлива оценка*

$$\sum_n |\delta_n|^{k-r}\eta_n^{r/s} < 1.7M(4.9c_0^{1/4})^{r/s}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\left(\frac{10.5c_4s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{r/s}.$$

Доказательство. Несложно проверить, что при $r=k$ искомая оценка следует из леммы 5.15. Поэтому далее считаем, что $1\leqslant r\leqslant k-1$. Дважды применяя к сумме из условия леммы неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}\sum_n |\delta_n|^{k-r}\eta_n^{r/s} &\leqslant \left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{(k-r)/(2k)}\left(\sum_n \eta_n^{k/s\cdot 2r/(k+r)}\right)^{(k+r)/(2k)}\\ &\leqslant \left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{(k-r)/(2k)}\left\{M^{(k-r)/(k+r)}\left(\sum_n \eta_n^{k/s}\right)^{2r/(k+r)}\right\}^{(k+r)/(2k)}\\ &= M^{(k-r)/(2k)}\left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{(k-r)/(2k)}\left(\sum_n \eta_n^{k/s}\right)^{r/k}.\end{aligned}$$

Оценивая последние суммы с помощью теоремы 3.1 и леммы 5.15, получим:

$$\begin{aligned}\sum_n |\delta_n|^{k-r}\eta_n^{r/s} &\leqslant M^{(k-r)/(2k)}\left\{2.88\left(\frac{2k}{e}\right)^k M\right\}^{(k-r)/(2k)}\\ &\quad\times\left\{8.3c_0^{1/4}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} M\left(\frac{10.5c_4s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{k/s}\right\}^{r/k}\\ &= \sqrt{2.88}\,M\left(\frac{8.3c_0^{1/4}}{\sqrt{2.88}}\right)^{r/k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\left(\frac{10.5c_4s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{r/s}\\ &< 1.7M(4.9c_0^{1/4})^{r/k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\left(\frac{10.5c_4s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{r/s}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 5.17. *Справедливо равенство*

$$\delta_n\delta_{n+1}\cdots\delta_{n+s-1} = \delta_n^s + \theta\eta_n.$$

Доказательство. Из определения величин $\varepsilon_n(i)$ имеем

$$\begin{aligned}\delta_n\delta_{n+1}\cdots\delta_{n+s-1} &= \delta_n(\delta_n+\varepsilon_n(1))(\delta_n+\varepsilon_n(2))\cdots(\delta_n+\varepsilon_n(s-1))\\ &= \delta_n^s + \sum_{t=1}^{s-1}\delta_n^{s-t}\sum_{0<i_1<\cdots<i_t<s}\varepsilon_n(i_1)\cdots\varepsilon_n(i_t)\\ &= \delta_n^s + \theta\cdot\sum_{t=1}^{s-1}|\delta_n|^{s-t}\xi_n(t) = \delta_n^s+\theta\eta_n.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим $\kappa_n = |\delta_n\cdots\delta_{n+s-1}|^{1/s}$.

Лемма 5.18. *Пусть $E$ – любое из множеств $E_s^+$, $E_s^-$. Тогда для целого $k$ с условием*

$$1\leqslant k\leqslant \frac{L^{1/(2s+1)}}{136c_0^{3/5}}$$

*справедливо равенство*

$$\sum_{n\in E}\kappa_n^k=\sum_{n\in E}|\delta_n|^k+1180\theta M\varkappa(k)kc_0^{3/4}\left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}.$$

Доказательство. В силу леммы 5.17 имеем

$$\kappa_n=|\delta_n^s+\theta_1\eta_n|^{1/s}=|\delta_n|+\theta_2\eta_n^{1/s}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n\in E}\kappa_n^k=\sum_{n\in E}(|\delta_n|+\theta_2\eta_n^{1/s})^k=\sum_{n\in E}|\delta_n|^k+\theta_3R,$$

где

$$R=\sum_{r=1}^{k}\binom{k}{r}\sum_n|\delta_n|^{k-r}\eta_n^{r/s}.$$

Оценивая каждую из сумм по $n$ в выражении для $R$ с помощью леммы 5.16, получаем

$$R<1.7M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\sum_n\binom{k}{r}q^r<1.7M\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}kq(1+q)^k,$$

где

$$q=a^{1/k}b^{1/s}\left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)},\qquad a=4.9c_0^{1/4},\qquad b=10.5c_4s^4.$$

Заметим теперь, что при любых $k\geqslant1$ и $s\geqslant2$ справедливы неравенства

$$a^{2s/(k(2s+1))}\leqslant a^{2s/(2s+1)}<4.9c_0^{2s/(2s+1)},\qquad b^{2/(2s+1)}<27.6c_0^{2/(2s+1)},$$
$$a^{2s/(k(2s+1))}\cdot b^{2/(2s+1)}<136c_0^{(s+4)/(2(2s+1))}\leqslant136c_0^{3/5}.$$

Следовательно,

$$k\leqslant\frac{L^{1/(2s+1)}}{136c_0^{3/5}}<a^{-2s/(k(2s+1))}b^{-2/(2s+1)}L^{1/(2s+1)},$$

откуда

$$k^{2s+1}<a^{-2s/k}b^{-2}L,\qquad k<a^{-1/k}b^{-1/s}\left(\frac{L}{k}\right)^{1/(2s)}$$

и, наконец,

$$q=a^{1/k}b^{1/s}\left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}<\frac{1}{k}.$$

Таким образом, $(1+q)^k<e$, так что

$$\begin{aligned}R&<1.7eM\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}ka^{1/k}b^{1/s}\left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}\\&\leqslant1.7eM\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}k\cdot4.9c_0^{1/4}(10.5\cdot8.7es^4)^{1/s}c_0^{1/2}\left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}\\&<1427.4Mk\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}c_0^{3/4}\left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}<1180Mk\varkappa(k)c_0^{3/4}\left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим
$$D_n = \frac{1}{2}(|\delta_n| + \delta_n), \qquad d_n = \frac{1}{2}(|\delta_n| - \delta_n).$$

Лемма 5.19. *Пусть $k$ – целое число, $s \leqslant k \leqslant c_1 \sqrt[3]{L}$. Тогда справедливы соотношения*
$$\sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n D_n^k + \theta_1 R, \qquad \sum_{n\in E_s^-} |\delta_n|^k = \sum_n d_n^k + \theta_2 R,$$
*где*
$$R = 614 c_4 c_0^{1/2} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}}\, \varkappa(k).$$

Доказательство. Согласно лемме 5.17
$$\delta_n^s = \delta_n\delta_{n+1}\cdots\delta_{n+s-1} - \theta_1\eta_n,$$
откуда
$$\delta_n^k = \delta_n^{k-s}\cdot\delta_n\delta_{n+1}\cdots\delta_{n+s-1} + \theta_2|\delta_n|^{k-s}\eta_n. \tag{5.12}$$
Чтобы доказать первое соотношение, положим $D(n) = D_n\cdots D_{n+s-1}$. Поскольку
$$D(n) = \begin{cases} \delta_n\delta_{n+1}\cdots\delta_{n+s-1}, & \text{если } n\in E_s^+,\\ 0, & \text{если } n\notin E_s^+,\end{cases}$$
то в силу (5.12) получаем
$$\sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k = \sum_{n\in E_s^+} \left(\delta_n^{k-s}D(n) + \theta_2|\delta_n|^{k-s}\eta_n\right) = \sum_n \delta_n^{k-s}D(n) + \theta_3\sum_n |\delta_n|^{k-s}\eta_n. \tag{5.13}$$
Далее, несложно заметить, что
$$D_{n+j} = \frac{1}{2}(|\delta_n + \varepsilon_n(j)| + (\delta_n+\varepsilon_n(j))) = \frac{1}{2}(|\delta_n| + \theta_4|\varepsilon_n(j)|) + \frac{1}{2}(\delta_n + \varepsilon_n(j)) = D_n + \theta_5|\varepsilon_n(j)|. \tag{5.14}$$
Следовательно,
$$\begin{aligned} D(n) &= D_n(D_n + \theta'|\varepsilon_n(1)|)(D_n+\theta''|\varepsilon_n(2)|)\cdots(D_n + \theta^{(s-1)}|\varepsilon_n(s-1)|)\\ &= D_n^s + \sum_{t=1}^{s-1} D_n^{s-t} \sum_{0<i_1<\cdots<i_t<s} \theta^{(i_1)}\cdots\theta^{(i_t)}|\varepsilon_n(i_1)\cdots\varepsilon_n(i_t)|\\ &= D_n^s + \theta_6\sum_{t=1}^{s-1}|\delta_n|^{s-t}\xi_n(t) = D_n^s + \theta_6\eta_n. \end{aligned}$$
Возвращаясь к равенству (5.13), будем иметь
$$\sum_{n\in E_s^+}\delta_n^k = \sum_n \delta_n^{k-s}(D_n^s + \theta_6\eta_n) + \theta_3\sum_n|\delta_n|^{k-s}\eta_n = \sum_n \delta_n^{k-s}D_n^s + 2\theta_7\sum_n|\delta_n|^{k-s}\eta_n.$$
Оценивая последнюю сумму с помощью леммы 5.12, получим
$$\sum_n |\delta_n|^{k-s}\eta_n = \sum_{t=1}^{s-1}\sum_n |\delta_n|^{k-t}\xi_n(t) < 372 c_4 c_0^{1/2}\frac{Ms^3}{\sqrt{L}}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} < 307 c_4 c_0^{1/2}\frac{Ms^3}{\sqrt{L}}\,\varkappa(k).$$
Замечая, наконец, что $\delta_n^{k-s}D_n^s = D_n^k$, приходим к первому утверждению леммы. Второе утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 5.20. *Пусть* $1 \leqslant k < s$. *Тогда справедливы следующие соотношения*

$$\sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n D_n^k + \theta_1 R, \qquad \sum_{n\in E_s^-} |\delta_n|^k = \sum_n d_n^k + \theta_2 R,$$

*где*

$$R = 3\sqrt{e}s\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, M\frac{(\log\log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}\,.$$

Доказательство. Докажем первое соотношение (второе получается аналогично). Пусть $A$ – множество тех $n$, $N < n \leqslant N + M$, для которых $\delta_{n+k}\cdots\delta_{n+s-1} \neq 0$. Для $n \in A$ положим

$$D(n) = D_n D_{n+1}\cdots D_{n+k-1}\frac{D_{n+k}}{\delta_{n+k}}\cdots\frac{D_{n+s-1}}{\delta_{n+s-1}}\,,$$

так что

$$D(n) = \begin{cases}\delta_n\cdots\delta_{n+k-1}, & \text{если } n \in E_s^+,\\ 0, & \text{если } n \in A\setminus E_s^+.\end{cases}$$

Если $k = 1$, то, очевидно, имеем

$$\sum_{n\in E_s^+}\delta_n = \sum_{n\in A} D(n). \tag{5.15}$$

В случае $k \geqslant 2$, пользуясь леммой 5.17, приходим к равенству

$$\delta_n\cdots\delta_{n+k-1} = \delta_n^k + \theta_1\sum_{t=1}^{k-1}|\delta_n|^{k-t}\xi_n(t),$$

из которого при $n \in E_s^+$ получаем

$$D(n) = \delta_n^k + \theta_1\sum_{t=1}^{k-1}|\delta_n|^{k-t}\xi_n(t).$$

Применяя оценку леммы 5.12, будем иметь

$$\sum_{n\in E_s^+}\delta_n^k = \sum_{n\in E_s^+}\Bigl(D(n) - \theta_1\sum_{t=1}^{k-1}|\delta_n|^{k-t}\xi_n(t)\Bigr) = \sum_{n\in A} D(n) + 18\theta_2 c_0\sqrt{c_1}\frac{Ms^3}{\sqrt{L}}\Bigl(\frac{2k}{e}\Bigr)^{k/2}. \tag{5.16}$$

Сравнивая (5.15) и (5.16), убеждаемся, что формула (5.16) верна и в случае $k = 1$ (при $\theta_2 = 0$).

Чтобы заменить сумму по $n \in A$ суммой по всем $n$, $N < n \leqslant N + M$, покажем сначала, что при любых $n, r \geqslant 1$ имеет место равенство

$$D_n\frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}}\cdots\frac{D_{n+r}}{\delta_{n+r}} = D_n + \theta\sum_{i=1}^{r}|\varepsilon_n(i-1,i)|. \tag{5.17}$$

Действительно, пусть сначала $r = 1$. Если $\delta_{n+1} > 0$, то

$$D_n\frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} = D_n; \tag{5.18}$$

если же $\delta_{n+1} < 0$, то из равенства (5.14) следует, что

$$D_n\frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} = 0 = D_{n+1} = D_n + \theta|\varepsilon_n(0,1)|. \tag{5.19}$$

Допустим теперь, что равенство (5.17) доказано для $r = 1, \ldots, j$ и проверим его справедливость в случае $r = j + 1$. Пользуясь предположением индукции, получаем

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} \cdots \frac{D_{n+j}}{\delta_{n+j}} \frac{D_{n+j+1}}{\delta_{n+j+1}} = \left( D_n + \theta_1 \sum_{i=1}^{j} |\varepsilon_n(i-1, i)| \right) \cdot \frac{D_{n+j+1}}{\delta_{n+j+1}}. \tag{5.20}$$

Если $\delta_{n+j+1} > 0$, то правая часть (5.20) совпадает с

$$D_n + \theta_1 \sum_{i=1}^{j} |\varepsilon_n(i-1, i)| = D_n + \theta_2 \sum_{i=1}^{j+1} |\varepsilon_n(i-1, i)|, \qquad 0 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_1.$$

Если же $\delta_{n+j+1} < 0$, то $D_{n+j+1} = 0$ и правая часть (5.20) совпадает с

$$D_{n+j+1} = D_n + \theta_1 |\varepsilon_n(0, j+1)| = D_n + \theta_2 \sum_{i=1}^{j+1} |\varepsilon_n(i-1, i)|.$$

Формула (5.17) доказана.

Предположим, что $k \geqslant 2$. Полагая $r = s - 1$ и заменяя $n$ на $n + k - 1$ в (5.17), получим

$$\begin{aligned} D(n) &= D_n \cdots D_{n+k-2} \cdot D_{n+k-1} \frac{D_{n+k}}{\delta_{n+k}} \cdots \frac{D_{n+s-1}}{\delta_{n+s-1}} \\ &= D_n \cdots D_{n+k-2} \left( D_{n+k-1} + \theta_3 \sum_{i=1}^{s-k} |\varepsilon_{n+k-1}(i-1, i)| \right) \\ &= D_n \cdots D_{n+k-1} + \theta_4 |\delta_n \cdots \delta_{n+k-2}| \sum_{i=k}^{s-1} |\varepsilon_n(i-1, i)|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством (5.14), получаем

$$\begin{aligned} D_n \cdots D_{n+k-1} &= D_n (D_n + \theta^{(1)} |\varepsilon_n(1)|) \cdots (D_n + \theta^{(k-1)} |\varepsilon_n(k-1)|) \\ &= D_n^k + \sum_{t=1}^{k-1} D_n^{k-t} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_t < k} \theta^{(i_1)} \cdots \theta^{(i_t)} |\varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t)| \\ &= D_n^k + \theta_5 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_t < k} |\varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t)| = D_n^k + \theta_5 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t). \end{aligned}$$

Далее, замечая, что

$$|\delta_n \cdots \delta_{n+k-2}| \leqslant \frac{1}{k-1} \sum_{j=0}^{k-2} |\delta_{n+j}|^{k-1},$$

будем иметь

$$D(n) = D_n^k + \theta_6 \left( \frac{1}{k-1} \sum_{i=k}^{s-1} \sum_{j=0}^{k-2} |\delta_{n+j}|^{k-1} |\varepsilon_n(i-1, i)| + \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) \right). \tag{5.21}$$

Если же $k = 1$, то в силу (5.18), (5.19) имеем

$$D(n) = D_n + \theta_7 |\varepsilon_n(0, 1)|. \tag{5.22}$$

Суммируя обе части (5.21), (5.22) по $n \in A$ и пользуясь оценками лемм 5.10–5.12, получим

$$\sum_{n\in A} D(n) = \sum_{n\in A} D_n^k + \theta_8 R_k, \tag{5.23}$$

где

$$R_1 \leqslant \sum_n |\varepsilon_n(0,1)| \leqslant 1.2c_5 \frac{4.5c_4 sM}{\sqrt{L}} = \frac{5.4c_4c_5 sM}{\sqrt{L}}$$

и

$$\begin{aligned} R_k &\leqslant \frac{1}{k-1}\sum_{i=k}^{s-1}\sum_{j=0}^{k-2}\sum_n |\delta_{n+j}|^{k-1}|\varepsilon_n(i-1,i)| + \sum_{t=1}^{k-1}\sum_n |\delta_n|^{k-t}\xi_n(t) \\ &\leqslant \frac{1}{k-1}(s-k)(k-1)\cdot 68\sqrt{c_0}\,M\left(\frac{2(k-1)}{e}\right)^{(k-1)/2}\frac{9c_1s^2}{\sqrt{L}} + 372c_4\sqrt{c_0}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \\ &\leqslant s\cdot 68\sqrt{c_0}\frac{M}{\sqrt{2}}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\frac{9c_4s^2}{\sqrt{L}} + 372c_4\sqrt{c_0}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \\ &\leqslant 433c_4\sqrt{c_0}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\frac{Ms^3}{\sqrt{L}} + 372c_4\sqrt{c_0}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\frac{Ms^3}{\sqrt{L}} = 805c_4\sqrt{c_0}\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\frac{Ms^3}{\sqrt{L}}, \end{aligned}$$

если $k \geqslant 2$. Замечая, что $805c_4\sqrt{c_0} < 0.03c_4c_5$ при $\varepsilon < 10^{-3}$ и $5.4 < 6.3(2k/e)^{k/2}$ при $k = 1$, окончательно получаем

$$R_k \leqslant 6.3c_4c_5\left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2}\frac{Ms^3}{\sqrt{L}}$$

при любом $k$, $1 \leqslant k \leqslant s-1$.

Определим, наконец, множество $B$ как дополнение к $A$ до множества всех номеров $n$, $N < n \leqslant N+M$. Тогда $B$ совпадает со множеством всех $n$ из указанного промежутка, для которых $\delta_{n+k}\cdots\delta_{n+s-1} = 0$. Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 5.9, заключаем, что число элементов $B$ не превосходит правой части (5.8).

Зададимся теперь некоторым числом $a > 0$. Тогда, применяя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\sum_{n\in B} D_n^k \leqslant \sum_{n\in B}|\delta_n|^k \leqslant \left(\sum_n |\delta_n|^{ak}\right)^{1/a}\left(\sum_{n\in B} 1\right)^{1-1/a}.$$

Предполагая условие $ak = o(\sqrt[3]{L})$ выполненным, применим теорему 3.2. Получим

$$\begin{aligned} \sum_{n\in B} D_n^k &\leqslant \left\{\frac{\varkappa(ak)}{2^{ak/2}}M\left(1+\frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right)\right\}^{1/a}\left\{\frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}}\right\}^{1-1/a} \\ &\leqslant \left\{\sqrt{2}\cdot 2^{-ak/2}\left(\frac{2ak}{e}\right)^{ak/2}\left(1+\frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right)\right\}^{1/a}\left\{\frac{3.59s}{\sqrt{\log L}}\right\}^{1-1/a} M \\ &< \left\{\frac{3}{2}\left(\frac{ak}{e}\right)^{ak/2}\right\}^{1/a}\cdot(3.59s)^{1-1/a}(\log L)^{-(1/2)\cdot(1-1/a)} \\ &< 2.99sM\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}a^{k/2}(\sqrt{\log L}\,)^{-(1-1/a)}. \end{aligned}$$

Полагая теперь $a = (\log\log L)/k$, получим

$$a^{k/2}(\sqrt{\log L}\,)^{-(1-1/a)} = \left(\frac{e}{2}\right)^{k/2}\frac{(\log\log L)^{k/2}}{\sqrt{\log L}},$$

$$\sum_{n\in B} D_n^k < 2.99sM\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\left(\frac{e}{2}\right)^{k/2}\frac{(\log\log L)^{k/2}}{\sqrt{\log L}} < 2.99\sqrt{e}\,sM\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{(\log\log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}. \tag{5.24}$$

Итак, замена условия $n \in A$ в правой части (5.23) условием $N < n \leqslant N + M$ приводит к ошибке, не превосходящей по абсолютной величине правой части (5.24). Таким образом, получаем

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n D_n^k + \theta_9 \left( R_k + 2.99\sqrt{e} sM \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{(\log\log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}} \right)$$
$$= \sum_n D_n^k + 3\sqrt{e}\theta_{10} sM \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{(\log\log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}\,.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.21. *Пусть $r$ – четное число с условием $2 \leqslant r \leqslant (1/8) \cdot 10^{-5} \log\log\log N$. Тогда справедлива оценка*

$$\left| \sum_n \delta_n^{r-1} |\delta_n| \right| < M \frac{\varkappa(r)}{2^{r/2}} \frac{1205}{\sqrt{\log L}}\,.$$

Доказательство. Положим

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{e}} \sqrt{10^{-5} \log L + 4}, \qquad K = [4e\lambda^2] + 1,$$

так что $K > (1/4) \cdot 10^{-5} \log L$ и $r \leqslant (1/2)K$. Используя тождество

$$\delta_n^{r-1}|\delta_n| = \frac{2}{\pi}\,\delta_n^{r-1} \left( \int_0^\lambda + \int_\lambda^{+\infty} \right) \left( \frac{\sin(\delta_n u)}{u} \right)^2 du = \frac{2}{\pi}\,\delta_n^{r-1} \left( \int_0^\lambda \left( \frac{\sin(\delta_n u)}{u} \right)^2 du + \frac{\theta_1}{\lambda} \right)$$

и разложение

$$\sin^2 x = \sum_{\nu=1}^{K} (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu-1} x^{2\nu}}{(2\nu)!} + \frac{\theta_2}{2} \frac{(2x)^{2K+2}}{(2K+2)!}\,,$$

сумму из условия леммы представим в виде

$$\frac{2}{\pi} \sum_n \delta_n^{r-1} \int_0^\lambda \frac{1}{u^2} \left\{ \sum_{\nu=1}^{K} (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu-1} u^{2\nu}}{(2\nu)!}\, \delta_n^{2\nu} + \frac{\theta_3}{2} \frac{(2u\delta_n)^{2K+2}}{(2K+2)!} \right\} du + \frac{2\theta_4}{\pi\lambda} \sum_n |\delta_n|^{r-1}$$
$$= R_1 + \theta_5 (R_2 + R_3),$$

где

$$R_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{K} \frac{(2\lambda)^{2\nu-1}}{(2\nu-1)\cdot(2\nu)!} |R_1(2\nu + r - 1)|,$$

$$R_2 = \frac{4}{\pi} \frac{(2\lambda)^{2K+1}}{(2K+1)\cdot(2K+2)!}\, R_2(2K + r + 1), \qquad R_3 = \frac{2}{\pi\lambda}\, R_2(r-1),$$

а символы $R_j(m)$ обозначают соответственно суммы

$$\sum_n \delta_n^m, \qquad \sum_n |\delta_n|^m.$$

Оценим величины $R_1, R_2$ и $R_3$.

Прежде всего, используя неравенство

$$\left| \sum_n \delta_n^{2k-1} \right| < \frac{2\pi k c_0^{3/2}}{\sqrt{L}}\, M \left( \frac{2k}{e} \right)^k,$$

которое следует из теоремы 3.1 при $1 \leqslant k \leqslant c_1 \sqrt[3]{L}$, для любого $\nu$ с условием $1 \leqslant \nu \leqslant K$ получаем

$$\begin{aligned}|R_1(2\nu+r-1)| &< \frac{2\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{L}}\, M\left(\nu+\frac{r}{2}\right)\left\{\frac{2}{e}\left(\nu+\frac{r}{2}\right)\right\}^{\nu+r/2} \\ &= \frac{2\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{L}}\left(\frac{2\nu}{e}\right)^{\nu} M\left\{\left(1+\frac{r}{2\nu}\right)^{2\nu/r}\right\}^{r/2}\left\{\frac{1}{e}\left(\nu+\frac{r}{2}\right)\right\}^{r/2}\left(\nu+\frac{r}{2}\right) \\ &\leqslant \frac{2\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{L}}\left(\frac{2\nu}{e}\right)^{\nu} M e^{r/2}\left\{\frac{2K}{e}\right\}^{r/2}\cdot 2K = \frac{4\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{L}}\left(\frac{2\nu}{e}\right)^{\nu} M(2K)^{r/2}K.\end{aligned}$$

Принимая во внимание оценку

$$\left(\frac{2\nu}{e}\right)^{\nu} \leqslant 2^{-\nu}\frac{2}{e}\,\frac{(2\nu)!}{\nu!}\,,$$

получим

$$\begin{aligned}R_1 &\leqslant \frac{2}{\pi}\,\frac{4\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{L}}\, M(2K)^{r/2}K\sum_{\nu=1}^{K} 2^{-\nu}\,\frac{(2\lambda)^{2\nu-1}}{(2\nu)!}\,\frac{(2\nu)!}{\nu!}\,\frac{2}{e} \\ &\leqslant \frac{8c_0^{3/2}}{\lambda e\sqrt{L}}\, M(2K)^{r/2}K\sum_{\nu=1}^{K}\frac{(2\lambda^2)^{\nu}}{\nu!} < \frac{8c_0^{3/2}}{\lambda e\sqrt{L}}\, M(2K)^{r/2}Ke^{2\lambda^2}.\end{aligned}$$

Далее, используя формулу Стирлинга для гамма-функции, получаем

$$\begin{aligned}\varkappa(2K+r+1) &= \frac{2^{2K+r+1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(K+\frac{r}{2}+1\right) \leqslant 2\sqrt{2}\cdot 2^{2K+r}\sqrt{K+\frac{r}{2}}\left\{\frac{1}{e}\left(K+\frac{r}{2}\right)\right\}^{K+r/2} e^{1/(12K)} \\ &< 3\cdot 2^{2K+r}\sqrt{\frac{5K}{4}}\left(\frac{K}{e}\right)^{K}\left(1+\frac{r}{2K}\right)^{K}\left\{\frac{1}{e}\left(K+\frac{r}{2}\right)\right\}^{r/2} \\ &< 4\sqrt{K}\left(\frac{4K}{e}\right)^{K}\cdot 2^r e^{r/2}\left\{\frac{5K}{4e}\right\}^{r/2} = 4\sqrt{K}\left(\frac{4K}{e}\right)^{K}(5K)^{r/2}.\end{aligned}$$

Замечая теперь, что

$$2K+r+1 \leqslant \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}\log L + \frac{1}{8}\cdot 10^{-5}\log L + 1 < 10^{-5}\log L,$$

из теоремы 3.2 получаем следующие оценки:

$$R_2(2K+r+1) < \frac{\varkappa(2K+r+1)}{2^{K+(r+1)/2}}\, M\left(1+\frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right) < 3\sqrt{K}\left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2} M\left(\frac{2K}{e}\right)^{K},$$

$$\begin{aligned}R_2 &\leqslant \frac{4}{\pi}\,\frac{(2\lambda)^{2K+1}}{(2K+1)\cdot(2K+2)!}\cdot 3\sqrt{K}\left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2} M\left(\frac{2K}{e}\right)^{K} \\ &< \frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda\sqrt{K}}{K^3}\,\frac{(2\lambda)^{2K}}{(2K)!}\left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2} M\left(\frac{2K}{e}\right)^{K} < \left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2}\left(\frac{2e\lambda^2}{K}\right)^{K} M < \left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2}\cdot 2^{-K}M.\end{aligned}$$

Вновь пользуясь теоремой 3.2 и замечая, что при четном $r \geqslant 2$ справедливы оценки

$$\varkappa(r-1) = \frac{2^r}{r\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right) \leqslant \frac{2^r}{r\sqrt{\pi}}\sqrt{2\pi\cdot\frac{r}{2}}\left(\frac{r}{2e}\right)^{r/2} e^{1/(6r)} \leqslant \frac{e^{1/(6r)}}{\sqrt{r}}\left(\frac{2r}{e}\right)^{r/2},$$

получаем

$$R_3 \leqslant \frac{2}{\pi\lambda}\cdot\frac{\varkappa(r-1)}{2^{(r-1)/2}}\, M\left(1+\frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right) \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\pi\lambda}\,\frac{e^{1/(6r)}}{\sqrt{r}}\left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} M\left(1+\frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right) < \frac{2.2}{\pi\lambda}\left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} M.$$

Сложив полученные выше оценки $R_1$, $R_2$ и $R_3$, заключаем, что сумма из условия леммы не превосходит по абсолютной величине

$$\frac{2.2}{\pi\lambda}\left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} M + \left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2} \cdot 2^{-K} M + \frac{8c_0^{3/2}}{\lambda e\sqrt{L}} M(2K)^{r/2} K e^{2\lambda^2}$$
$$= M\left(\frac{r}{e}\right)^{r/2}\left\{\frac{2.2}{\pi\lambda} + 2^{-K}\left(\frac{5eK}{2r}\right)^{r/2} + \frac{8c_0^{3/2}K}{\lambda e\sqrt{L}}\left(\frac{2eK}{r}\right)^{r/2} e^{2\lambda^2}\right\}. \tag{5.25}$$

Несложно заметить, что дробь $(A/u)^u$ возрастает при изменении $u$ на промежутке $1 \leqslant u \leqslant A/e$, $A > e$. Следовательно, из условия $1 < r \leqslant K/2$ заключаем, что наибольшее значение выражения $(5eK/(2r))^{r/2}$ не превосходит

$$(5e)^{K/4} = \exp\left\{\frac{K}{4}\log(5e)\right\}.$$

Таким образом, второе слагаемое в фигурных скобках в (5.25) не превосходит

$$\exp\left\{\frac{K}{4}\log(5e) - K\log 2\right\} \leqslant \exp\{K(0.653 - 0.693)\} = \exp\left\{-\frac{K}{25}\right\}$$
$$\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{4}\cdot 10^{-5}\log L\right\} = L^{-10^{-7}}.$$

Рассуждая аналогично и замечая, что $\lambda < \sqrt{K/(4e)}$, третье слагаемое в (5.25) оценим сверху величиной

$$\frac{8c_0^{3/2}K}{\lambda e\sqrt{L}}(4e)^{K/4}e^{2\lambda^2} < \frac{8c_0^{3/2}K}{\lambda e\sqrt{L}}(4e)^{K/4}e^{K/(2e)}$$
$$< \frac{8c_0^{3/2}K}{\lambda e\sqrt{L}}\exp\left\{\frac{K}{4}\log(4e) + \frac{K}{2e}\right\} < \frac{\exp\{0.8K\}}{\sqrt{L}} < L^{-0.4}.$$

Таким образом, исходная сумма не превосходит по абсолютной величине

$$M\left(\frac{r}{e}\right)^{r/2}\left\{\frac{2.2}{\pi\lambda} + L^{-10^{-7}} + L^{-0.4}\right\}$$
$$< M\left(\frac{r}{e}\right)^{r/2}\cdot\frac{2.2}{\pi}\frac{4\sqrt{e}}{\sqrt{10^{-5}\log L}} < \frac{1461}{\sqrt{\log L}} M\left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} < \frac{1205}{\sqrt{\log L}} M\frac{\varkappa(r)}{2^{r/2}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5.22. *Пусть $k$ – целое число с условием $1 \leqslant k \leqslant (1/8)\cdot 10^{-5}\log L$; пусть, далее, $E$ – любое из множеств $E_s^+, E_s^-$, и пусть $|E|$ – число элементов $E$, отвечающих условию $N < n \leqslant N + M$. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{n\in E}\varkappa_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}|E|(1+\theta R), \qquad R = 5(2c_4+1)\frac{s(\log\log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}.$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $E = E_s^+$, так как в случае $E = E_s^-$ доказательство проводится аналогично. Прежде всего, согласно лемме 5.18 имеем

$$\sum_{n\in E_s^+}\kappa_n^k = \sum_{n\in E_s^+}\delta_n^k + \theta_1 R_1, \qquad R_1 = 1180k\varkappa(k)c_0^{3/4}M\left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}. \tag{5.26}$$

Далее, из лемм 5.19, 5.20 следует равенство

$$\sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k = S + \theta_2 R_2, \tag{5.27}$$

в котором

$$S = \sum_n D_n^k, \qquad R_2 = 3\sqrt{e}\, M s\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{(\log\log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}\,. \tag{5.28}$$

Используя тождество

$$D_n^k = \frac{1}{2}(\delta_n^k + |\delta_n|\cdot\delta_n^{k-1}),$$

получим

$$S = \frac{1}{2}(S_1+S_2), \qquad S_1 = \sum_n \delta_n^k, \quad S_2 = \sum_n |\delta_n|\cdot\delta_n^{k-1}.$$

Предположим сначала, что $k$ – четное число, $k=2r$. Тогда в силу теоремы 3.1 имеем

$$S_1 = \sum_n \delta_n^{2r} = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, M + \theta_3 R_3, \qquad R_3 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{4.3(c_0 r)^{3/2}M}{\sqrt{L}} < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{1.6(c_0 k)^{3/2}M}{\sqrt{L}}\,.$$

Далее, из леммы 5.21 следует оценка

$$|S_2| = \left|\sum_n |\delta_n|\cdot\delta_n^{k-1}\right| < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{1205M}{\sqrt{\log L}}\,.$$

Таким образом,

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{M}{2} + \theta_4 R_4, \qquad R_4 = \frac{1}{2}\left\{\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{1.6(c_0 k)^{3/2}M}{\sqrt{L}} + \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{1205M}{\sqrt{\log L}}\right\} < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{603M}{\sqrt{\log L}}\,. \tag{5.29}$$

Рассмотрим теперь случай нечетного $k$, $k=2r-1$. Из теорем 3.1, 3.2 получаем

$$|S_1| = \left|\sum_n \delta_n^{2r-1}\right| < \left(\frac{2r}{e}\right)^r\frac{2\pi r c_0^{3/2}M}{\sqrt{L}} = \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1/2}\frac{\pi(k+1)c_0^{3/2}M}{\sqrt{L}}$$
$$\leqslant \left(\frac{k}{e}\right)^{k/2}\frac{\pi(c_0(k+1))^{3/2}M}{\sqrt{L}} < \frac{\pi\sqrt{e}}{2}\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{(c_0(k+1))^{3/2}M}{\sqrt{L}},$$
$$S_2 = \sum_n |\delta_n|\cdot\delta_n^{2r-2} = \sum_n |\delta_n|^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\, M + \theta_5 R_5, \qquad R_5 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{131.6M}{\sqrt{\log L}}\,.$$

Следовательно,

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{M}{2} + \theta_6 R_6, \qquad R_6 = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi\sqrt{e}}{2}\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{(c_0(k+1))^{3/2}M}{\sqrt{L}} + \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{131.6M}{\sqrt{\log L}}\right\} < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{66M}{\sqrt{\log L}}\,. \tag{5.30}$$

Сравнивая (5.29) и (5.30), убеждаемся, что равенство

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{M}{2} + \theta_7 R_7, \qquad \text{где} \quad R_7 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{603M}{\sqrt{\log L}}\,, \tag{5.31}$$

имеет место как при четных, так и при нечетных $k$.

Используя теорему 5.1 и заменяя в (5.31) величину $M/2$ суммой

$$|E| + 5\theta c_4\frac{s^2 M\log\log L}{\sqrt{\log L}}\,,$$

получим

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}|E| + \theta_7 R_7 + \theta_8 R_8, \qquad R_8 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \cdot 5c_4 \frac{s^2 M \log\log L}{\sqrt{\log L}},$$

$$\sum_{n\in E_s^+} \delta_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}|E| + \theta_2 R_2 + \theta_7 R_7 + \theta_8 R_8$$

и, наконец,

$$\sum_{n\in E_s^+} \kappa_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}|E| + \theta_1 R_1 + \theta_2 R_2 + \theta_7 R_7 + \theta_8 R_8.$$

Суммируя полученные выше оценки, получаем

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1,2,7,8} \theta_j R_j\Big| \\
&\quad < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} M\left\{539 c_0^{3/4} k 2^{k/2}\left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)} + 3\sqrt{e}\frac{s(\log\log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}} + \frac{603}{\sqrt{\log L}} + 5c_4\frac{s^2\log\log L}{\sqrt{\log L}}\right\} \\
&\quad < 5(2c_4+1)\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}\frac{s|E|(\log\log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 5.2. *Пусть $s \geqslant 2$ – фиксированное целое число, $E$ – любое из множеств $E_s^+$, $E_s^-$. Тогда при любом $x > 0$ число $E(x)$ номеров $n$, $N < n \leqslant N+M$, принадлежащих $E$ и отвечающих условию*

$$0 < |\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}| \leqslant \left(\frac{1}{\pi}\sqrt{x\log\log N}\right)^s,$$

*выражается формулой*

$$E(x) = \frac{M}{2}\left\{\int_0^x \frac{e^{-u}\,du}{\sqrt{\pi u}} + \frac{2.15\theta}{\sqrt{\log\log\log\log N}}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция, отвечающая распределению

$$F(x) = \frac{1}{M}\cdot\{n \mid n\in E,\ \kappa_n \leqslant x\}$$

дискретной случайной величины $\kappa\colon E \mapsto \mathbb{R}$ со значениями $\kappa_n$, $n\in E$. Тогда, полагая

$$\delta = 10^{-4}, \qquad \lambda = \sqrt{(1-\delta)\log\log L}, \qquad K = [2e\lambda^2] + 1,$$

будем иметь

$$\varphi(t) = |E|^{-1}\sum_{n\in E} e^{it\kappa_n} = |E|^{-1}\sum_{n\in E}\left\{\sum_{k=0}^{K}\frac{(it\kappa_n)^k}{k!} + 2\theta_1\frac{(|t|\kappa_n)^{K+1}}{(K+1)!}\right\}. \tag{5.32}$$

Меняя в (5.32) порядок суммирования и пользуясь формулой леммы 5.22 в виде

$$\sum_{n\in E}\kappa_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}|E|(1+\theta^{(k)}R), \qquad R = \frac{5(2c_4+1)s(\log\log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}, \qquad \theta^{(0)} = 0,$$

получаем

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{K}\frac{(it)^k}{k!}|E|^{-1}\sum_{n\in E}\kappa_n^k + \frac{2\theta_2|t|^{K+1}}{(K+1)!}|E|^{-1}\sum_{n\in E}\kappa_n^{K+1} = \varphi_1(t) + 2\theta_3(\varphi_2(t)+\varphi_3(t)),$$

где

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{k!}\left(\frac{it}{\sqrt{2}}\right)^k \varkappa(k), \qquad \varphi_2(t) = \frac{\varkappa(K+1)}{(K+1)!}\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)^{K+1}, \qquad \varphi_3(t) = R\sum_{k=1}^{K+1} \frac{\varkappa(k)}{k!}\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

Преобразуя $\varphi_1(t)$ с помощью тождества

$$\varkappa(k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}(2u)^{2k}\,du,$$

имеем

$$\varphi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\sum_{k=0}^{K}\frac{(itu\sqrt{2})^k}{k!}\,du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\left\{e^{itu\sqrt{2}} + 2\theta_4\frac{(|t|u\sqrt{2})^{k+1}}{(K+1)!}\right\}du$$
$$= \psi(t) + \frac{2\theta_5}{(K+1)!}\left(\frac{|t|}{\sqrt{2}}\right)^{K+1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}(2u)^{K+1}\,du = \psi(t) + 2\theta_5\varphi_2(t),$$

где

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2+itu\sqrt{2}}\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-v^2/2+itv}\,dv$$

– характеристическая функция, отвечающая распределению $H(x)$ с плотностью

$$h(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u < 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,e^{-u^2/2}, & \text{если } u \geqslant 0. \end{cases}$$

Положим

$$I(\lambda) = \int_0^{\lambda}\frac{|\varphi(t) - \psi(t)|}{|t|}\,dt.$$

Тогда

$$I(\lambda) \leqslant \frac{4}{K+1}\frac{\varkappa(K+1)}{(K+1)!}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^{K+1} + 2R\sum_{k=1}^{K+1}\frac{\varkappa(k)}{k!}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^k$$
$$< \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{\lambda}{K^2}\left(\frac{e\lambda^2}{K}\right)^{K/2} + 2R\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\sum_{k=1}^{K+1}\frac{1}{k!}\left(2u\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)^k du$$
$$< 2^{-K/2} + 2R\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2+u\lambda\sqrt{2}}\,du = 2^{-K/2} + 4Re^{\lambda^2/2}$$
$$< L^{-1.8} + 4\cdot\frac{5(2c_4+1)s(\log\log L)^{s/2}}{(\log L)^{\delta/2}} < (\log L)^{-\delta/3}.$$

Замечая, что $\sup_u |h'(u)| = \sqrt{2/(\pi e)}$, и применяя лемму I.7, приходим к неравенству

$$\sup_x |F(x) - H(x)| \leqslant \frac{a}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi e}} + bI(\lambda) < \frac{2.15}{\sqrt{\log\log L}}\,.$$

Теорема доказана.

В завершение мы докажем две теоремы о существовании любого фиксированного числа подряд идущих аномально малых или аномально больших значений величин $\Delta_n$.

Во-первых, мы покажем, что каково бы ни было фиксированное число $s$, найдется бесконечно много номеров $n$ таких, что каждое из значений $\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+s-1}$ имеет порядок $o(\sqrt{\log\log n})$, т.е. будет очень маленьким по сравнению со своим средним значением $\sqrt{\log\log n}$.

Во-вторых, мы докажем бесконечность множества наборов $\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+s-1}$, в которых каждое из чисел превышает $\varphi(n)\sqrt{\log\log n}$, где $\varphi(x)$ – некоторая функция, неограниченно возрастающая при $x \to +\infty$.

Основное соображение, которое позволяет доказывать утверждения такого рода, состоит в том, что если произведение положительных величин из набора (5.1) очень мало, то в большинстве случаев и каждая из разностей $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1}$ тоже будет мала по сравнению со средним значением. Если же это не так, то в наборе (5.1) нашлись бы два числа, разность между которыми оказалась бы очень велика. Последнее в свою очередь влечет существование аномально больших расстояний между соседними ординатами нулей дзета-функции Римана, что оказывается (в силу леммы 5.1) очень редким явлением.

Теорема 5.3. *Для любого фиксированного числа $s \geqslant 2$ найдется не менее*

$$\frac{0.01M}{\log\log\log\log N}$$

*номеров $n$, $N < n \leqslant N + M$, таких, что*

$$1 \leqslant \Delta_n, \quad \Delta_{n+1}, \quad \ldots, \quad \Delta_{n+s-1} \leqslant 0.65\sqrt{\frac{\log\log N}{\log\log\log\log N}}\,.$$

Доказательство. Положим

$$\varkappa_1 = 1.2\pi, \quad \varkappa_2 = 1.3\pi, \qquad x = \frac{\varkappa_1}{\log\log L}\,, \quad y = \frac{\varkappa_2}{\log\log L}$$

и рассмотрим множество номеров $n$ с условиями

$$\Delta_n, \Delta_{n+1}, \ldots, \Delta_{n+s-1} > 0, \qquad \Delta_n\Delta_{n+1}\cdots\Delta_{n+s-1} \leqslant \left\{\frac{\sqrt{xL}}{\pi}\right\}^s.$$

Согласно теореме 5.2 для количества $\nu_1$ таких $n$ справедлива следующая нижняя оценка:

$$\nu_1 \geqslant \frac{M}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x u^{-1/2}e^{-u}\,du - \frac{2.15}{\sqrt{\log\log L}}\right\} > \frac{M}{2}\left\{2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\,e^{-x} - \frac{2.15}{\sqrt{\log\log L}}\right\} > \frac{0.02M}{\sqrt{\log\log L}}\,.$$

Далее, из рассматриваемых $n$ отберем те, для которых

$$\max_{0\leqslant j\leqslant s-1}\Delta_{n+j} > \frac{\sqrt{yL}}{\pi}\,. \tag{5.33}$$

Поскольку

$$\left\{\min_{0\leqslant j\leqslant s-1}\Delta_{n+j}\right\}^s \leqslant \Delta_n\cdots\Delta_{n+s-1} \leqslant \left\{\frac{\sqrt{xL}}{\pi}\right\}^s,$$

то

$$\min_{0\leqslant j\leqslant s-1}\Delta_{n+j} \leqslant \frac{\sqrt{xL}}{\pi}\,.$$

Следовательно, для таких $n$ имеем

$$\max_{0\leqslant j\leqslant s-1}\Delta_{n+j} - \min_{0\leqslant j\leqslant s-1}\Delta_{n+j} > \frac{1}{\pi}(\sqrt{\varkappa_2} - \sqrt{\varkappa_1})\sqrt{\frac{L}{\log\log L}} > \frac{1}{40}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}}\,. \tag{5.34}$$

Пусть при заданном $n$ символы $q$ и $r$ обозначают те значения $j$, для которых достигаются эти максимум и минимум. Тогда $r < q$. Действительно, воспользовавшись леммой 5.3, будем иметь

$$\Delta_{n+q+1} \geqslant \Delta_{n+q} - 1 \geqslant \frac{\sqrt{yL}}{\pi} - 1 > \frac{\sqrt{xL}}{\pi},$$
$$\Delta_{n+q+2} \geqslant \Delta_{n+q} - 2 \geqslant \frac{\sqrt{yL}}{\pi} - 2 > \frac{\sqrt{xL}}{\pi},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta_{n+s-1} \geqslant \Delta_{n+q} - (s-q-1) > \frac{\sqrt{xL}}{\pi}.$$

Итак, наименьшее из чисел $\Delta_{n+j}$, $0 \leqslant j < s$, находится среди $\Delta_n, \dots, \Delta_{n+q-1}$. Переписывая неравенство (5.34) в виде

$$\Delta_{n+q} - \Delta_{n+r} = (\Delta_{n+q} - \Delta_{n+q-1}) + (\Delta_{n+q-1} - \Delta_{n+q-2}) + \dots + (\Delta_{n+r+1} - \Delta_{n+r}) > \frac{1}{40}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}},$$

несложно заключить, что по крайней мере при одном $i$, $r < i \leqslant q$, будет выполнена оценка

$$\Delta_{n+i} - \Delta_{n+i-1} > \frac{1}{40(q-r)}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}} \geqslant \frac{1}{40(s-1)}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}}.$$

В силу леммы 5.3 соответствующий промежуток $[\gamma_{n+i-1}, \gamma_{n+i})$ содержит не менее

$$k = \frac{1}{40(s-1)}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}} + 1$$

точек Грама. Но тогда длина такого промежутка будет не меньше

$$(k-1)(t_{N+M} - t_{N+M-1}) > \frac{2\pi(k-1)}{\log t_{N+M}}.$$

Полагая $T = t_{N+M}$, $H = t_{N+M} - t_N$ в лемме 5.1, заключаем, что число таких промежутков $[\gamma_{n+i-1}, \gamma_{n+i})$ не превосходит

$$(1+o(1))e^4 M \exp\left\{-\left(\frac{1}{2ec_0} - o(1)\right)(k-1)\right\}.$$

Поскольку каждому из этих промежутков отвечает не более $s$ номеров $m$ с условием

$$\Delta_m - \Delta_{m-1} \geqslant \frac{1}{40(s-1)}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}},$$

то общее число $\nu_2$ номеров $n$, отвечающих (5.33), не превосходит

$$(1+o(1))e^4 sM \exp\left\{-\left(\frac{1}{2ec_0} - o(1)\right)(k-1)\right\} < M\exp\left\{-\frac{0.004}{sc_0}\sqrt{\frac{L}{\log\log L}}\right\} < \frac{0.01M}{\sqrt{\log\log L}}.$$

Таким образом, по крайней мере

$$\nu_1 - \nu_2 > \frac{0.02M}{\sqrt{\log\log L}} - \frac{0.01M}{\sqrt{\log\log L}} = \frac{0.01M}{\sqrt{\log\log L}}$$

номеров $n$ удовлетворяет условиям

$$1\leqslant \Delta_n,\quad \Delta_{n+1},\quad \ldots,\quad \Delta_{n+s-1}\leqslant \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\kappa_2}\frac{L}{\log\log L}}<0.65\sqrt{\frac{\log\log N}{\log\log\log\log N}}\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.4. *Для любого фиксированного числа $s\geqslant 2$ на промежутке $N<n\leqslant N+M$ найдется не менее*

$$\frac{0.1M}{\sqrt{\log\log\log\log N}}$$

*номеров $n$, удовлетворяющих условиям*

$$\Delta_{n+j}>\frac{1}{2\pi}\sqrt{\log\log N}\sqrt{\log\log\log\log N},\qquad j=0,1,\ldots,s-1.$$

Доказательство. Положим $\kappa_1=3.5$, $\kappa_2=0.25$,

$$x=\frac{1}{2}(\log\log\log L-\log\log\log\log L-\kappa_1),\qquad y=\kappa_2\log\log\log L$$

и рассмотрим множество номеров $n$ с условиями

$$\Delta_n,\Delta_{n+1},\ldots,\Delta_{n+s-1}>0,\qquad \Delta_n\cdots\Delta_{n+s-1}>\left\{\frac{\sqrt{xL}}{\pi}\right\}^s. \tag{5.35}$$

Согласно теореме 5.2 количество таких номеров оценивается снизу величиной

$$\nu_1=\frac{M}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}u^{-1/2}e^{-u}\,du-\frac{2.15}{\sqrt{\log\log L}}\right\}>\frac{M}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}-\frac{2.15}{\sqrt{\log\log L}}\right\}>\frac{0.07M}{\sqrt{\log\log L}}\,.$$

Далее, для каждого из таких $n$, очевидно, имеем

$$\max_{0\leqslant j<s}\Delta_{n+j}>\frac{\sqrt{xL}}{\pi}\,.$$

Выделим теперь среди рассматриваемых номеров те, для которых

$$\min_{0\leqslant j<s}\Delta_{n+j}\leqslant\frac{\sqrt{yL}}{\pi} \tag{5.36}$$

и, следовательно,

$$\max_{0\leqslant j<s}\Delta_{n+j}-\min_{0\leqslant j<s}\Delta_{n+j}>\frac{1}{\pi}(\sqrt{x}-\sqrt{y})\sqrt{L}>\frac{1}{2\pi}\sqrt{L}\sqrt{\log\log L}.$$

Зафиксировав такое значение $n$, обозначим через $q$ и $r$ те значения $j$, которые отвечают соответственно максимуму и минимуму $\Delta_{n+j}$, $0\leqslant j<s$. Рассуждая подобно тому, как это делалось при доказательстве теоремы 5.3, заключаем, что $0\leqslant r<q$ и по крайней мере для одного $i$ с условием $r,i\leqslant q$ будут выполнены неравенства

$$\Delta_{n+i}-\Delta_{n+i-1}>h,\qquad \gamma_{n+i}-\gamma_{n+i-1}>\frac{2\pi h}{\log T}\,, \tag{5.37}$$

где

$$h=\frac{1}{2\pi(s-1)}\sqrt{L}\sqrt{\log\log L},\qquad T=t_N.$$

Но тогда в силу леммы 5.1 число $\nu_2$ таких номеров $n$, для которых имеет место (5.36), не превосходит

$$(1+o(1))e^4 sM \exp\left\{-\left(\frac{1}{2ec_0} - o(1)\right)h\right\} < M \exp\left\{-\frac{1}{4\pi e c_0 s}\sqrt{L}\sqrt{\log\log L}\right\} < \frac{0.02M}{\sqrt{\log\log L}}.$$

Следовательно, по меньшей мере для

$$\nu_1 - \nu_2 > \frac{0.07M}{\sqrt{\log\log L}} - \frac{0.02M}{\sqrt{\log\log L}} = \frac{0.05M}{\sqrt{\log\log L}}$$

значений $n$, $N < n \leqslant N + M$, справедливо неравенство

$$\min_{0\leqslant j<s} \Delta_{n+j} > \frac{\sqrt{yL}}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{L}\sqrt{\log\log\log L}.$$

Теорема доказана.

# Глава 6. Значения функции $\zeta(1/2+it)$ в точках Грама

Вопросы, которые рассматриваются в этой главе, по сути принадлежат к дискретной теории дзета-функции Римана. Такое название носит целый класс задач, в которых исследуется поведение $\zeta(s)$ и связанных с ней функций на различных дискретных множествах точек $\{s_n\}$.

Дискретная теория $\zeta(s)$ берет свое начало в работах Титчмарша. Его статья [7] содержала новое доказательство теоремы Харди о бесконечности множества нулей $\zeta(s)$ на критической прямой. Это доказательство основано на вычислении сумм

$$\sum_{n\leqslant N} Z(t_{2n}) = -\sum_{n\leqslant N}\zeta\biggl(\frac{1}{2}+it_{2n}\biggr), \qquad \sum_{n\leqslant N} Z(t_{2n+1}) = \sum_{n\leqslant N}\zeta\biggl(\frac{1}{2}+it_{2n+1}\biggr).$$

К числу наиболее известных результатов этой области следует отнести и приводимые ниже формулы «дискретных моментов» функции Харди

$$\sum_{n\leqslant N} Z^2(t_n) = N(\log N)(1+o(1)), \tag{6.1}$$

$$\sum_{n\leqslant N} Z^4(t_n) = \frac{N}{2\pi^2}(\log N)^4(1+o(1)). \tag{6.2}$$

которые были получены Мозером[1] (см. [9], [10]).

Как следует из определения точек Грама, вещественные числа $\zeta(1/2+it_n)$ служат абсциссами точек пересечения вещественной оси с кривой

$$\mathcal{C}\colon t\mapsto \zeta\biggl(\frac{1}{2}+it\biggr) = \biggl(\mathrm{Re}\,\zeta\biggl(\frac{1}{2}+it\biggr), \mathrm{Im}\,\zeta\biggl(\frac{1}{2}+it\biggr)\biggr)$$

(рис. 11). Пересечениям $\mathcal{C}$ с вещественной осью отвечают и нули $t=\mathfrak{c}_n$ функции Харди $Z(t)$, но в этих случаях такие точки совпадают с началом координат.

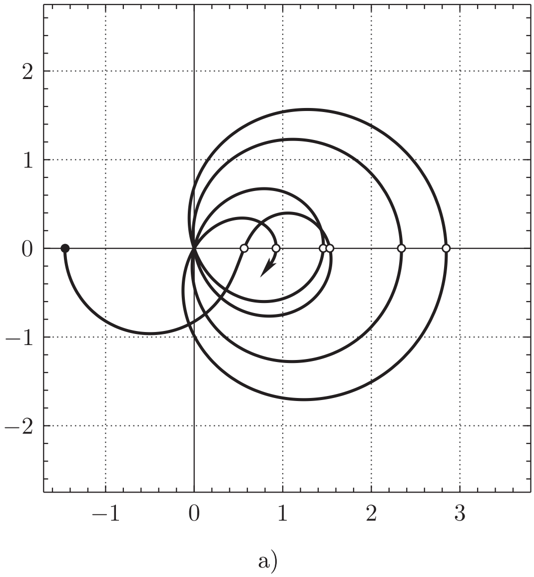
Естественно поставить следующий вопрос: могут ли точки пересечения $\mathcal{C}$ с вещественной осью, отвечающие значениям $t=t_n$, совпадать с началом координат? Иными словами, возможно ли равенство $\zeta(1/2+it_n)=0$? Случай совпадения точки Грама $t_n$ с какой-либо из ординат $\gamma_m$ представляется совершенно неправдоподобным. Это позволяет предположить, что

$$\zeta\biggl(\frac{1}{2}+it_n\biggr)\neq 0 \tag{6.3}$$

при всех $n\geqslant 0$. При попытке доказать или опровергнуть такое предположение возникают две задачи. Первая состоит в нахождении нижней оценки числа $Q(N)$ тех номеров $n$, $n\leqslant N$, что удовлетворяют условию (6.3). Вторая задача заключается в том, чтобы определить, насколько близкими к нулю могут оказаться величины $\zeta(1/2+it_n)$ при неограниченном возрастании $n$.

Обратимся сначала к первому вопросу. Прежде всего, несложно показать, что величина $Q(N)$ неограниченно возрастает с ростом $N$. Действительно, применяя неравенство Коши

[1] Вторая формула была независимо получена А. А. Лаврик в работе [8].



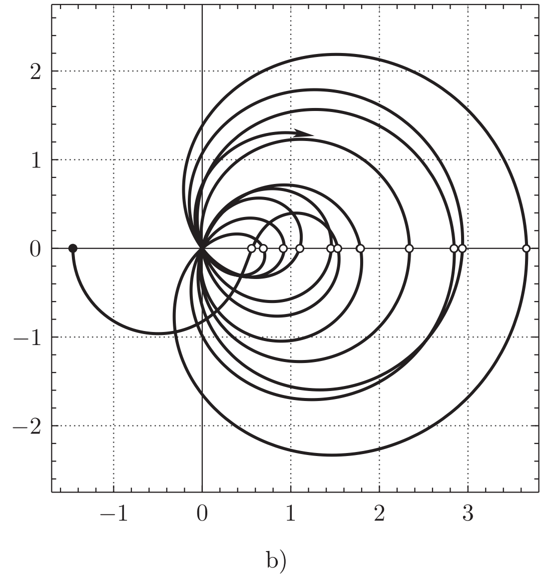




**Рис. 11.** Фрагменты кривой $\mathcal{C}\colon t \mapsto \zeta(1/2+it)$, отвечающие промежуткам (a) $0 \leqslant t \leqslant 32$ и (b) $0 \leqslant t \leqslant 51$. Абсциссы точек пересечения $\mathcal{C}$ с вещественной осью совпадают с величинами $\zeta(1/2+it_n)$.

к сумме из (6.1) и используя асимптотическую формулу (6.2), получим

$$N(\log N)(1+o(1)) = \sum_{n\leqslant N} Z^2(t_n)$$
$$\leqslant \biggl(Q(N)\sum_{n\leqslant N} Z^4(t_n)\biggr)^{1/2} \leqslant (1+o(1))\biggl(Q(N)\cdot\frac{N}{2\pi^2}(\log N)^4\biggr)^{1/2},$$

откуда

$$Q(N) > (1-\varepsilon)\frac{2\pi^2 N}{(\log N)^2}\,. \tag{6.4}$$

Оценка $Q(N)$, более точная, чем (6.4), была получена в 2011 г. Штойдингом и Калпокасом. В работе [11] ими была рассмотрена «обобщенная» последовательность точек Грама $t_n^{\varphi}$, определяемых при фиксированном $\varphi$ с условием $0 \leqslant \varphi < \pi$ как решение уравнения

$$\vartheta(t_n^{\varphi}) = (n-1)\pi + \varphi,$$

и получена следующая асимптотическая[2] формула:

$$\sum_{n\leqslant N}\zeta\biggl(\frac{1}{2}+it_n^{\varphi}\biggr) = 2e^{i\varphi}(\cos\varphi)N + O(N^{1/2+\varepsilon}).$$

Положив в ней $\varphi = 0$ и воспользовавшись неравенством Коши наряду с равенством (6.1) подобно тому, как это делалось выше, можно заключить, что

$$Q(N) > (1-\varepsilon)\frac{4N}{\log N}\,. \tag{6.5}$$

[2]При $\varphi \neq \pi/2$.

Необходимо, впрочем, отметить, что из сформулированной Сельбергом на с. 198 работы [3] теоремы следует, что

$$Q(N) > KN \tag{6.6}$$

при некотором постоянном $K>0$ [3]. В силу того, что доказательство этого утверждения так и не было опубликовано, задача нахождения оценок $Q(N)$, уточняющих (6.5), хотя бы и уступающих по точности (6.6), все же сохраняет смысл. Одна из такого рода оценок и помещена в настоящей главе. Именно, приведенная ниже теорема 6.1 дает неравенство вида

$$Q(N+M)-Q(N) \geqslant Me^{-c(\log\log\log N)^2}, \qquad c>0.$$

Вывод этой и иных подобных ей оценок опирается на факт существования у функции $S(t)$ большого числа точек перемены знака.

Перейдем теперь к задаче нахождения малых значений $|\zeta(1/2+it_n)|$. Численные данные доставляют примеры точек Грама $t_n$, для которых такие значения «аномально» близки к нулю. Таблица 1 содержит все такие значения, не превосходящие $10^{-7}$ и отвечающие промежутку $n\leqslant 10^8$ (см. также таблицу II.7 приложения II).

**Таблица 1**

| № | $n$ | $\zeta(1/2+it_n)$ | № | $n$ | $\zeta(1/2+it_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 368 383 | $8.908459\cdot 10^{-8}$ | 7 | 55 785 549 | $3.751899\cdot 10^{-8}$ |
| 2 | 12 984 109 | $-2.052298\cdot 10^{-8}$ | 8 | 61 769 885 | $8.026449\cdot 10^{-8}$ |
| 3 | 21 567 185 | $-6.709404\cdot 10^{-8}$ | 9 | 65 463 721 | $1.083783\cdot 10^{-8}$ |
| 4 | 45 898 152 | $8.302024\cdot 10^{-8}$ | 10 | 69 612 841 | $9.033652\cdot 10^{-8}$ |
| 5 | 50 550 325 | $-6.397503\cdot 10^{-8}$ | 11 | 74 201 244 | $2.875945\cdot 10^{-8}$ |
| 6 | 52 220 649 | $-6.529425\cdot 10^{-8}$ | | | |

Из приведенных ниже теорем следует, что величина $|\zeta(1/2+it_n)|$ может быть сколь угодно близкой к нулю. Оказывается даже, что какова бы ни была положительная постоянная $A$, номера $n$, $n\leqslant N$, удовлетворяющие условию

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right| < e^{-A\sqrt{\log\log n}},$$

образуют множество положительной плотности (зависящей от $A$).

Укажем на те соображения, которые приводят к такого рода утверждениям. Прежде всего, известно (см., например, [4; теорема 6.1], [12]), что при любом вещественном $x$ мера множества $\mathcal{E}(T;x)$ точек $t$ промежутка $(0,T]$, для которых величина

$$\xi(t) = \frac{\sqrt{2}\log|\zeta(1/2+it)|}{\sqrt{\log\log T}}$$

удовлетворяет неравенству $\xi(t)\leqslant x$, равна

$$\operatorname{mes}\mathcal{E}(T;x) = T\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du + O\left(\frac{(\log\log\log T)^2}{\sqrt{\log\log T}}\right)\right).$$

[3] Приведем соответствующую цитату из работы Сельберга [3]: “Исследуя колебания аргумента $\zeta(1/2+it)$ более детально, я преуспел в доказательстве того, что существуют абсолютные положительные постоянные $K$ и $N_0$ такие, что при $N>N_0$, $1\leqslant\nu\leqslant N$ числа $\zeta(1/2+it_{\nu-1})$ и $\zeta(1/2+it_\nu)$ имеют разные знаки в более чем $KN$ случаях, и одинаковый знак также в более чем $KN$ случаях.”

Положив $x=-A\sqrt{2}$, несложно заключить, что неравенство

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| < e^{-A\sqrt{\log\log T}}$$

выполняется для положительной доли точек $t$ рассматриваемого промежутка.

Однако попытка применить подобные рассуждения к последовательности

$$\xi(t_n)=\frac{\sqrt{2}\log|\zeta(1/2+it_n)|}{\sqrt{\log\log N}}\,, \qquad n\leqslant N,$$

наталкивается на самые серьезные препятствия, которые заключаются в следующем.

Формула для вещественной части логарифма $\zeta(s)$ на критической прямой, используемая при выводе (6.6), имеет следующий вид:

$$\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| = \sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}}\frac{\cos(t\log n)}{\log n} \\ + O\left(\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\log x+\log\chi(t)\right\}\left\{\left|\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}}\right|+\log t\right\}\right), \tag{6.7}$$

$$\chi(t)=1+\frac{1}{\eta(t)\log x}\,,$$

где величины $\sigma_{x,t},\Lambda_x(m)$ определены в параграфе 2.1, а $\eta(t)=\min_{\varrho=\beta+i\gamma}|t-\gamma|$ обозначает расстояние от $t$ до ближайшей ординаты нуля $\zeta(s)$, так что $\chi(\gamma_n)=+\infty$. Вычисление моментов

$$\int_0^T\left(\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\right)^k dt, \qquad k=1,2,3,\ldots,$$

также необходимых для вывода (6.6), сводится, помимо прочего, к оценке интегралов вида

$$\int_0^T\log^m\chi(t)\,dt, \qquad m=1,2,3,\ldots\,. \tag{6.8}$$

Интегралы (6.8) конечны, поскольку, например, конечен всякий интеграл

$$\int_0^1\left(\log\frac{1}{t}\right)^m dt.$$

В дискретном же случае вместо интегралов в (6.8) приходится иметь дело с суммами

$$\sum_n\log^m\chi(t_n).$$

Отсутствие точной информации о взаимном расположении точек Грама и ординат нулей $\zeta(s)$ не позволяет утверждать, что суммы эти конечны.

Идея доказательства теорем 6.1–6.3 состоит в следующем. Наличие в формуле (6.7) множителя

$$\log\chi(t) \tag{6.9}$$

необходимо, поскольку отражает суть дела: в точках $t$, совпадающих с нулями функции $\zeta(1/2+it)$, левая часть (6.7) обращается в $(-\infty)$, и то же должно происходить и с правой частью. Но поскольку множитель (6.9) в таких точках обращается в $+\infty$, то естественно предположить, что существует приближение $\log|\zeta(1/2+it)|$, подобное (6.7), в которое слагаемое, содержащее множителем (6.9), входит с отрицательным коэффициентом. Соответственно при переходе от точного равенства к верхней оценке это слагаемое может быть опущено. Выводу подобного неравенства и посвящена лемма 6.4.

Правая часть $C(t)$ полученного в этой лемме неравенства свободна от перечисленных выше недостатков формулы (6.7). К ней оказывается возможным применить технику, которая была использована в гл. 2 для нахождения моментов величин $\Delta(n)=S(t_n+0)$ и их функции распределения.

## 6.1. Верхняя оценка $\log|\zeta(1/2+it)|$

Доказательства теорем 6.1–6.3 опираются на ряд вспомогательных утверждений, которые собраны в настоящем параграфе.

Лемма 6.1. *Если $\zeta(1/2+it)\neq 0$, то справедливо равенство*

$$\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| = -\operatorname{Re}\left\{\text{v.p.}\int_{1/2}^{+\infty}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma\right\}. \tag{6.10}$$

Доказательство. Если $t$ не является ординатой нуля $\zeta(s)$, то всякая ветвь функции $\log\zeta(s)$, непрерывная вдоль луча $[1/2+it,+\infty+it)$, будет и аналитической в некоторой его окрестности. Фиксируя такую ветвь, будем иметь

$$\begin{aligned}\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| &= \operatorname{Re}\log\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = \operatorname{Re}\lim_{a\to+\infty}\left\{\log\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)-\log\zeta(a+it)\right\}\\ &= -\operatorname{Re}\lim_{a\to+\infty}\int_{1/2}^{a}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma = -\operatorname{Re}\int_{1/2}^{+\infty}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma.\end{aligned}$$

Так как несобственный интеграл совпадает в данном случае с несобственным интегралом в смысле главного значения, то мы приходим к утверждению леммы.

Пусть, далее, $\varrho=\beta+it$ – единственный нуль $\zeta(s)$ с условием $1/2<\beta<1$. Обозначая через $j$ правую часть (6.10), будем иметь

$$\begin{aligned} j &= -\operatorname{Re}\lim_{h\to 0}\left\{\int_{1/2}^{\beta-h}+\int_{\beta+h}^{+\infty}\right\}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma\\ &= \operatorname{Re}\lim_{h\to 0}\left\{\log\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)+\log\zeta(\beta+h+it)-\log\zeta(\beta-h+it)\right\}\\ &= \log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| + \lim_{h\to 0}\log\left|\frac{\zeta(\varrho+h)}{\zeta(\varrho-h)}\right|. \end{aligned}\tag{6.11}$$

Обозначим кратность нуля $\varrho$ через $m$. Определив $g(s)$ равенством $\zeta(s)=(s-\varrho)^m g(s)$ и замечая, что $g(s)$ аналитична вблизи точки $s=\varrho$ и отлична там от нуля, получим

$$\begin{aligned}&|\zeta(\varrho+h)| = h^m|g(\varrho+h)| = h^m(|g(\varrho)|+o(1)) = h^m|g(\varrho)|(1+o(1)),\\ &|\zeta(\varrho+h)| = h^m|g(\varrho)|(1+o(1)),\end{aligned}$$

откуда

$$\log\left|\frac{\zeta(\varrho+h)}{\zeta(\varrho-h)}\right| = \log\,(1+o(1)) = o(1)$$

при $h\to 0$. Возвращаясь к (6.11), получаем

$$j=\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|.$$

Случай, когда $t$ является ординатой нескольких различных нулей $\zeta(s)$, аналогичен рассмотренному. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *При* $10\leqslant x\leqslant t^{\delta}$, $800\delta=1$ *справедливо неравенство*

$$\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\leqslant C(t),$$

*где*

$$C(t)=\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}}\frac{\cos\left(t\log m\right)}{\log m}+\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2(\log x)\left(a_3\log t+a_4\left|\sum_{p\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}\right|\right)$$

*и* $a_3=4.01$, $a_4=7.52$.

Доказательство. Если $1/2+it$ – нуль $\zeta(s)$, то неравенство леммы выполнено, поскольку в этом случае его левая часть обращается в $(-\infty)$. Поэтому далее предполагаем, что $\zeta(1/2+it)\neq 0$. Используя лемму 6.1, будем иметь

$$\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|=-\operatorname{Re}\left\{\text{v.p.}\left(\int_{1/2}^{\sigma_{x,t}}+\int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty}\right)\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma\right\}=-I_1-I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)},$$

$$I_2=\operatorname{Re}\left\{\text{v.p.}\int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\,d\sigma\right\},\qquad I_3=\operatorname{Re}\left\{\text{v.p.}\int_{1/2}^{\sigma_{x,t}}\left(\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)}-\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right)d\sigma\right\}.$$

Согласно лемме I.5 первый интеграл удовлетворяет неравенству

$$|I_1|\leqslant\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)(2.6|r(x,t)|+0.8\log t+4.82),\tag{6.12}$$

где

$$r(x,t)=\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}}\,.$$

Используя оценку

$$\frac{1}{2}\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\log x\geqslant 1,\tag{6.13}$$

перепишем (6.12) в виде

$$|I_1|\leqslant\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2(\log x)\{a_3^{(1)}\log t+a_4^{(1)}|r(x,t)|+a_5^{(1)}\},$$

где $a_3^{(1)}=0.4$, $a_4^{(1)}=1.3$, $a_5^{(1)}=2.41$. Далее, применив лемму I.19, придем к равенству

$$I_2=-\operatorname{Re}\int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty}\left\{\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma+it}}+\frac{13\theta}{3}\,x^{1/4-\sigma/2}\left(|r(x,t)|+\frac{1}{2}\log t+4\right)\right\}d\sigma,$$

которое наряду с оценками (6.13) и

$$\int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} x^{1/4-\sigma/2}\,d\sigma = \frac{2}{\log x}\,x^{-(1/2)\cdot(\sigma_{x,t}-1/2)} \leqslant \frac{2}{e}\frac{1}{\log x}\,,$$

дает

$$I_2 = -\operatorname{Re}\biggl\{\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{\log m}\frac{1}{m^{\sigma_{x,t}+it}}\biggr\} + \theta\biggl(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\biggr)^2(\log x)\{a_3^{(2)}\log t + a_4^{(2)}|r(x,t)| + a_5^{(2)}\},$$

где $a_3^{(2)} = 13/(12e)$, $a_4^{(2)} = 13/(6e)$, $a_5^{(2)} = 26/(3e)$. Оценим, наконец, интеграл $I_3$. Воспользовавшись леммой I.20, при $\zeta(\sigma+it)\neq 0$ получим

$$\operatorname{Re}\biggl\{\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} - \frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\biggr\} = \sum_{\varrho}\kappa(\varrho) + \theta_1(\log t+6),$$

где

$$\begin{aligned}\kappa(\varrho) &= \frac{\sigma_{x,t}-\beta}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2} - \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\\ &= \frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)(t-\gamma)^2 + (\sigma_{x,t}-\sigma)(\sigma_{x,t}-\beta)(\beta-\sigma)}{\{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2\}\{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2\}} = \kappa_1(\varrho)+\kappa_2(\varrho),\end{aligned}$$

где смысл обозначений $\kappa_r(\varrho)$, $r=1,2$, очевиден. Положим также

$$j_r(\varrho) = \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}}\kappa_r(\varrho)\,d\sigma, \qquad j(\varrho) = j_1(\varrho)+j_2(\varrho).$$

Так как на всем промежутке $1/2\leqslant\sigma\leqslant\sigma_{x,t}$ выполняются оценки

$$0\leqslant\kappa_1 = \frac{\sigma_{x,t}-\sigma}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\cdot\frac{(t-\gamma)^2}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} \leqslant \frac{\sigma_{x,t}-\sigma}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\,,$$

то для любого нуля $\varrho=\beta+i\gamma$ имеем

$$\begin{aligned}j_1 &\leqslant \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}}\frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)\,d\sigma}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2} = \frac{1}{2}\frac{(\sigma_{x,t}-1/2)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\\ &\leqslant \frac{1}{4}\biggl(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\biggr)(\log x)\frac{(\sigma_{x,t}-1/2)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2}\,.\end{aligned}$$

Для оценки $\kappa_2$ и $j_2$ отметим сначала, что при $\beta\leqslant 1/2$ или $\beta\geqslant\sigma_{x,t}$ числитель $\kappa_2$ неположителен на всем промежутке интегрирования, так что для всех таких нулей имеем $j_2\leqslant 0$. Поэтому всюду далее предполагаем, что $1/2<\beta<\sigma_{x,t}$. Обозначим $\tau=|t-\gamma|$ и рассмотрим два случая.

*Случай* 1: $\tau>(\log x)^{-1}$. Преобразуя $\kappa_2$, получим

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= \frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)(\sigma_{x,t}-\sigma+\sigma-\beta)(\beta-\sigma)}{\{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2\}\{(\sigma-\beta)^2+\tau^2\}} = \frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)^2(\beta-\sigma)-(\sigma_{x,t}-\sigma)(\beta-\sigma)^2}{\{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2\}\{(\sigma-\beta)^2+\tau^2\}}\\ &\leqslant \frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)^2(\beta-\sigma)}{\{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2\}\{(\sigma-\beta)^2+\tau^2\}}\,.\end{aligned}$$

Далее, замечая, что последняя дробь отрицательна при $\sigma > \beta$, получаем

$$\begin{aligned}
j_2 &\leqslant \int_{1/2}^{\beta} \frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)^2(\beta-\sigma)\,d\sigma}{\{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2\}\{(\sigma-\beta)^2+\tau^2\}} \\
&\leqslant \frac{(\sigma_{x,t}-1/2)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\int_{1/2}^{\beta}\frac{(\beta-\sigma)\,d\sigma}{(\beta-\sigma)^2+\tau^2} = \frac{1}{2}\,\frac{(\sigma_{x,t}-1/2)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\log\frac{(\sigma_{x,t}-1/2)^2+\tau^2}{\tau^2} \\
&\leqslant \frac{(\sigma_{x,t}-1/2)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\log\left(1+\frac{\sigma_{x,t}-1/2}{\tau}\right) \leqslant \frac{(\sigma_{x,t}-1/2)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\,\frac{\sigma_{x,t}-1/2}{\tau} \\
&< \frac{(\sigma_{x,t}-1/2)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\log x. \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

*Случай* 2: $0 \leqslant \tau \leqslant (\log x)^{-1}$. Допустим сначала, что

$$\sigma_{x,t} = \frac{1}{2} + 2\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right),$$

где $\beta_0 > 1/2$ – абсцисса некоторого нуля $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ с условием

$$|t-\gamma_0| \leqslant \frac{x^{3|\beta_0-1/2|}}{\log x}\,.$$

Из определения $\sigma_{x,t}$ следует тогда, что $\beta_0$ – наибольшая среди абсцисс нулей $\varrho^* = \beta^* + i\gamma^*$ таких, что

$$|t-\gamma^*| \leqslant \frac{x^{3|\beta^*-1/2|}}{\log x}\,. \qquad (6.15)$$

Но для всякого $\beta^*$ верна оценка

$$\frac{x^{3|\beta^*-1/2|}}{\log x} \geqslant \frac{1}{\log x}\,.$$

А поскольку для рассматриваемого нуля $\varrho = \beta + i\gamma$ имеет место неравенство $\tau = |t-\gamma| \leqslant (\log x)^{-1}$, то этот нуль $\varrho$ заведомо содержится в числе нулей $\varrho^*$, удовлетворяющих (6.15). Следовательно, его абсцисса $\beta$ не может превосходить $\beta_0$:

$$\beta \leqslant \beta_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{x,t} + \frac{1}{2}\right).$$

Из последнего неравенства несложно заключить, что

$$0 \leqslant \beta - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \leqslant \sigma_{x,t} - \beta. \qquad (6.16)$$

Предположим теперь, что $\sigma_{x,t} = 1/2 + 2(\log x)^{-1}$. В этом случае для всех нулей, удовлетворяющих условию (6.15) (и, в частности, для нуля $\varrho = \beta + i\gamma$), будем иметь

$$\left|\beta^* - \frac{1}{2}\right| \leqslant (\log x)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, и в этом случае абсцисса $\beta$ удовлетворяет (6.16).

Переходя к оценке $j_2(\varrho)$, получаем

$$j_2 = \frac{\sigma_{x,t}-\beta}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\left(\int_{1/2}^{\beta} + \int_{\beta}^{\sigma_{x,t}}\right)\frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)(\beta-\sigma)}{(\sigma-\beta)^2+\tau^2}\,d\sigma = \frac{\sigma_{x,t}-\beta}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}(j_3 - j_4),$$

где

$$j_3 = \int_{1/2}^{\beta} \frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)(\beta-\sigma)\,d\sigma}{(\sigma-\beta)^2+\tau^2}, \qquad j_4 = \int_{\beta}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma_{x,t}-\sigma)(\beta-\sigma)\,d\sigma}{(\sigma-\beta)^2+\tau^2}.$$

Полагая $u=\beta-\sigma$, $v=\sigma-\beta$ в $j_3$ и $j_4$ соответственно, получаем

$$\begin{aligned} j_3 &= (\sigma_{x,t}-\beta)\int_0^{\beta-1/2} \frac{u\,du}{u^2+\tau^2} + \int_0^{\beta-1/2} \frac{u^2\,du}{u^2+\tau^2} \\ &\leqslant (\sigma_{x,t}-\beta)\frac{1}{2}\log\frac{(\beta-1/2)^2+\tau^2}{\tau^2} + \left(\beta-\frac{1}{2}\right), \\ j_4 &= (\sigma_{x,t}-\beta)\int_0^{\sigma_{x,t}-\beta} \frac{v\,dv}{v^2+\tau^2} - \int_0^{\sigma_{x,t}-\beta} \frac{v^2\,dv}{v^2+\tau^2} \\ &\geqslant (\sigma_{x,t}-\beta)\frac{1}{2}\log\frac{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}{\tau^2} - (\sigma_{x,t}-\beta), \end{aligned}$$

откуда

$$j_3 - j_4 \leqslant (\sigma_{x,t}-\beta)\frac{1}{2}\log\frac{(\beta-1/2)^2+\tau^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2} + \left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right).$$

В силу неравенства (6.16) дробь, стоящая под знаком логарифма, не превосходит единицы. Следовательно,

$$j_2 \leqslant \frac{\sigma_{x,t}-\beta}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\frac{(\sigma_{x,t}-1/2)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\log x. \tag{6.17}$$

Сравнивая (6.14) и (6.17), заключаем, что неравенство (6.14) имеет место при любом $\beta$. Таким образом,

$$j(\varrho) = j_1(\varrho) + j_2(\varrho) \leqslant \frac{5}{4}\frac{(\sigma_{x,t}-1/2)^2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+\tau^2}\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\log x.$$

Итак, для оценки $I_3$ остается воспользоваться леммой I.5. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho} j(\varrho) &\leqslant \frac{5}{4}(\log x)\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)\sum_{\varrho}\frac{\sigma_{x,t}-1/2}{(\sigma_{x,t}-\beta)^2+(t-\gamma)^2} \\ &\leqslant \frac{5}{4}(\log x)\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{5}{3}\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} + \frac{5}{6}\log t + 5\right) \\ &\leqslant (\log x)\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{65}{24}\log t + \frac{13}{4}|r(x,t)| + 16.3\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I_3 &\leqslant \sum_{\varrho} j(\varrho) + (\log x)\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\log t + 3\right) \\ &= (\log x)\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2(a_3^{(3)}\log t + a_4^{(3)}|r(x,t)| + a_5^{(3)}), \end{aligned}$$

где $a_3^{(3)} = 77/24$, $a_4^{(3)} = 13/12$, $a_5^{(3)} = 19.3$. Таким образом,

$$\ln|\zeta(0.5+it)| \leqslant \sum_{m\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}}\frac{\cos(t\log m)}{\log m} + R,$$

$$R = (\log x)\left(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}\right)^2\{a_3^{(4)}\log t + a_4^{(4)}|r(x,t)| + a_5^{(4)}\}, \qquad a_j^{(4)} = \sum_{k=1}^{3} a_j^{(k)},$$

причем $a_3^{(4)} < 4.00687$, $a_4^{(4)} < 7.51374$, $a_5^{(4)} < 24.89829$. Далее, полагая

$$q(x,t) = \sum_{p\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t}+it}}$$

и замечая, что

$$\begin{aligned}|r(x,t)| &\leqslant |q(x,t)| + \sum_{k\geqslant 2}\sum_{p\leqslant x^{3/k}} \frac{\log p}{p^{k/2}} \leqslant |q(x,t)| + \sum_{p\leqslant x^{3/2}} \frac{\log p}{p} + \sum_{p} \frac{\log p}{p(\sqrt{p}-1)}\\ &< |q(x,t)| + 1.5\log x + 2.48,\end{aligned}$$

при $10 \leqslant x \leqslant t^{\delta}$, $\delta = 800^{-1}$ получим

$$\begin{aligned}a_3^{(4)}\log t + a_4^{(4)}|r(x,t)| + a_5^{(4)} &< a_3^{(4)}\log t + a_4^{(4)}(|q(x,t)| + 1.5\delta\log t + 2.48) + a_5^{(4)}\\ &\leqslant (\log t)\left(a_3^{(4)} + 1.5\delta a_4^{(4)} + \frac{\delta}{\log 2}(2.48a_4^{(4)} + a_5^{(4)})\right) + a_4^{(4)}|q(x,t)|\\ &< 4.01\log t + 7.52|q(x,t)|.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть $k$ – целое число, $1\leqslant k\leqslant c\log X$, где $c$ – достаточно малая абсолютная постоянная, $x = X^{1/(8k+3)}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{n}\left|C(t_n) - \sum_{m\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}} \frac{\cos(t_n\log m)}{\log m}\right|^{2k} < \frac{31.8}{\varepsilon} M\left(\frac{2252.8k}{\varepsilon}\right)^{2k}.$$

Доказательство леммы практически дословно повторяет доказательство леммы 2.5; возникшая там постоянная $320a_1 = 1440$ заменится теперь величиной $640a_3 = 2566.4$ ($a_1$ и $a_3$ определены соответственно в леммах 2.4 и 6.2).

Лемма 6.4. *Если выполнены условия леммы 6.3, то имеет место неравенство*

$$\sum_{n}\left|\sum_{m\leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t_n}}} \frac{\cos(t_n\log m)}{\log m} - \sum_{p\leqslant x} \frac{\cos(t_n\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k} < \frac{M}{8\varepsilon}(1152e^4k)^k. \tag{6.18}$$

Доказательство леммы полностью аналогично доказательству леммы 2.6.

Лемма 6.5. *Если выполнены условия леммы 6.3, то имеет место неравенство*

$$\sum_{n}\left|C(t_n) - \sum_{p\leqslant x} \frac{\cos(t_n\log p)}{\sqrt{p}}\right|^{2k} < \frac{c_6}{280}(c_6k)^{2k}M,$$

*где $c_6 = 5132.8\varepsilon^{-1}$.*

Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 2.7. Фигурирующая в ней постоянная $c_0$ заменится при этом величиной

$$c_6 = 2\cdot 640a_3 = 5132.8\varepsilon^{-1}.$$

## 6.2. Основные теоремы

Пусть, как и выше, $Q(N)$ обозначает количество номеров $n$ с условием $1 \leqslant n \leqslant N$, удовлетворяющих (6.3). Имеет место

Теорема 6.1. *Существуют положительные постоянные $b_1, b_2$, зависящие лишь от $\varepsilon$ и такие, что при всех $N \geqslant N_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства*

$$Q(N+M) - Q(N) \geqslant Me^{-b_1(\log\log\log N)^2} \tag{6.19}$$

*и, если гипотеза Римана верна,*

$$Q(N+M) - Q(N) \geqslant Me^{-b_2\log\log\log N} = \frac{M}{(\log\log N)^{b_2}}\,. \tag{6.20}$$

Доказательство. При выводе теорем 4.7 и 4.8 было установлено, что число нулей функции $\varphi(t) = S(t+0)$, отличных от ординат нулей $\zeta(s)$ и лежащих на промежутке $(t_N, t_{N+M}]$, оценивается снизу величинами (6.20) или (6.19) в зависимости от того, предполагается гипотеза Римана справедливой или нет. Там же было установлено, что все нули $\varphi(t)$ являются точками Грама. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

Докажем теперь ряд утверждений о существовании очень маленьких по модулю значений дзета-функции в точках Грама. Для этого мы сначала получим нижнюю оценку для функции распределения

$$\Psi(v) = \frac{1}{M}\#\left\{n \;\middle|\; N < n \leqslant N+M,\, C(t_n) \leqslant \frac{v}{\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N}\right\},$$

после чего, выбрав надлежащим образом параметр $v = -w\sqrt{2}$, $w > 0$, сделаем заключение о существовании большого количества номеров $n$ с условием

$$C(t_n) \leqslant -w\sqrt{\log\log N}.$$

В силу леммы 6.2 для таких $n$ будут выполняться и неравенства

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right)\right| = e^{\log|\zeta(1/2+it_n)|} \leqslant e^{C(t_n)} \leqslant e^{-w\sqrt{\log\log N}}.$$

При оценке функции $\Psi(v)$ будем придерживаться схемы рассуждений из параграфа 2.4.

Положим

$$y = \exp\left(\frac{\log N}{288L}\right), \qquad \mathfrak{S} = \sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p}, \qquad V_z(t) = \sum_{p\leqslant z}\frac{\cos(t\log p)}{\sqrt{p}}\,.$$

Пусть, кроме того, $f(u)$ – неограниченная сверху и монотонно возрастающая при $u \to +\infty$ функция, подчиненная при $N \leqslant u \leqslant N+M$ условиям

$$1 \ll f(u) \leqslant \frac{c_6 L}{12\log L}$$

($c_6$ – постоянная леммы 6.5), и пусть $\mathcal{F} = f(N)$.

Лемма 6.6. *Для всех $n$ с условием $N < n \leqslant N+M$, за исключением не более $M\delta_1$ номеров,*

$$\delta_1 = 136\varepsilon^{-1}\exp\left\{-\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6}\right\},$$

*справедливо неравенство*

$$C(t_n) \leqslant V_y(t_n) + \frac{2L}{3\mathcal{F}}\,.$$

Доказательство. Положим

$$k_1 = \left[\frac{L}{3\mathcal{F}ec_6}\right], \qquad x = X^{1/(8k_1+3)}.$$

Пусть $\mathcal{A}_1$ – множество тех $n$, $N < n \leqslant N+M$, для которых

$$|C(t_n) - V_x(t_n)| > \frac{L}{3\mathcal{F}}.$$

Тогда, используя лемму 6.5, получаем

$$|\mathcal{A}_1|\left(\frac{L}{3\mathcal{F}}\right)^{2k_1} \leqslant \sum_{n\in\mathcal{A}_1}(C(t_n) - V_x(t_n))^{2k_1} \leqslant \sum_n (C(t_n) - V_x(t_n))^{2k_1} < \frac{c_6}{280}(c_6k_1)^{2k_1}M,$$

откуда

$$|\mathcal{A}_1| < \frac{c_6}{280}\left(\frac{3\mathcal{F}c_6k_1}{L}\right)^{2k_1}M < \frac{c_6}{280}\,e^{-2k_1}M.$$

Далее, несложно заметить, что

$$\log x = \frac{0.1\varepsilon\log N}{8k_1+3} > \frac{0.1\varepsilon\log N}{3L}\,\mathcal{F}ec_6 > \frac{a_0e}{30}\,\frac{\log N}{L} > 10^5\log y,$$

так что $x > y^{10^5}$. Обозначая через $\mathcal{A}_2$ множество тех $n$, для которых

$$|V_x(t_n) - V_y(t_n)| > \frac{L}{3\mathcal{F}},$$

и применяя лемму 2.1, найдем:

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_2|\left(\frac{L}{3\mathcal{F}}\right)^{2k_1} &\leqslant \sum_n (V_x(t_n) - V_y(t_n))^{2k_1} \leqslant \sum_n \Bigg|\sum_{y<p\leqslant x}\frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}}\Bigg|^{2k_1} \\ &\leqslant k_1!\,M\Bigg(\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p}\Bigg)^{k_1} + x^{k_1}\Bigg(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{\sqrt{p}}\Bigg)^{2k_1}\log N \\ &< k_1!\,M(\log L)^{k_1} + X^{0.25} < 3\sqrt{k_1}\left(\frac{k_1\log L}{e}\right)^{k_1}M,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_2| &< 3M\sqrt{k_1}\left(\frac{9\mathcal{F}^2}{L^2}\cdot\frac{\log L}{e}\cdot\frac{L}{3\mathcal{F}ec_6}\right)^{k_1} = 3M\sqrt{k_1}\left(\frac{3\mathcal{F}}{e^2c_6}\cdot\frac{\log L}{L}\right)^{k_1}M \\ &\leqslant 3M\sqrt{k_1}(2e)^{-2k_1} < Me^{-2k_1}.\end{aligned}$$

Таким образом, исключив из рассмотрения не более чем

$$|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| \leqslant \frac{c_6}{280}\,e^{-2k_1} + Me^{-2k_1} < 136\varepsilon^{-1}M\exp\left(-\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6}\right)$$

точек Грама $t_n$, для оставшихся будем иметь

$$C(t_n) = V_y(t_n) + (V_x(t_n) - V_y(t_n)) + (C(t_n) - V_x(t_n)) \leqslant V_y(t_n) + \frac{2L}{3\mathcal{F}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.7. *Для всех номеров $n$, $N < n \leqslant N + M$, за исключением не более чем $M\delta_2$ номеров, $\delta_2 = 9e\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-9\mathfrak{S}}$, справедливо неравенство*

$$|V_y(t_n)| \leqslant 3\mathfrak{S}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}_3$ – множество тех $n$, для которых $|V_y(t_n)| > 3\mathfrak{S}$. Полагая $k_2 = [9\mathfrak{S}]$, с учетом замечания к лемме 2.1 получаем

$$|\mathcal{A}_3| \cdot (3\mathfrak{S})^{2k_2} \leqslant \sum_n V_y^{2k_2}(t_n) \leqslant \sum_n \left|\sum_{p\leqslant y} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}}\right|^{2k_2} \leqslant k_2!\, M\mathfrak{S}^{k_2} + y^{2k_2}\log N < 3\sqrt{k_2}M\left(\frac{k_2\mathfrak{S}}{e}\right)^{k_2},$$

откуда и следует искомая оценка.

Лемма 6.8. *Пусть*

$$K(s) = \sum_{n\in\mathcal{A}} \exp\{sV_y(t_n)\}.$$

*Тогда для комплексных $s$ с условием $|s| \leqslant 1$ справедливо равенство*

$$K(s) = MF_y(s)(1 + \theta(\log N)^{-3}),$$

*в котором*

$$F_y(s) = \prod_{p\leqslant y} J_0\left(\frac{is}{\sqrt{p}}\right).$$

Доказательство. Подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.13, положим $K = [3e^2\mathfrak{S}] + 1$. Тогда, определяя $R_1(s)$ соотношениями

$$K(s) = \sum_{n\in\mathcal{A}} \left(\sum_{k=0}^{K} + \sum_{k>K}\right) \frac{s^k}{k!} V_y^k(t_n) = K_1(s) + R_1(s),$$

получим

$$|R_1(s)| \leqslant M \sum_{k>K} \frac{(3\mathfrak{S})^k}{k!} < M \sum_{k>K} \left(\frac{3\mathfrak{S}e}{k}\right)^k < Me^{-22\mathfrak{S}}.$$

Далее, представим $K_1(s)$ в виде

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{s^k}{k!} \sum_{n\in\mathcal{A}} V_y^k(t_n) = \sum_{k=0}^{K} \frac{s^k}{k!} \left(\sum_n V_y^k(t_n) - \sum_{n\in\mathcal{A}_3} V_y^k(t_n)\right) = K_2(s) - R_2(s)$$

и заметим, что

$$|R_2(s)| \leqslant |\mathcal{A}_3| + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} \sum_{n\in\mathcal{A}_3} |V_y(t_n)|^k.$$

В силу замечания к лемме 2.1 и оценки леммы 6.7 имеем

$$|R_2(s)| \leqslant M\delta_2 + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} \left(|\mathcal{A}_3| \sum_n V_y^{2k}(t_n)\right)^{1/2}$$
$$\leqslant M\delta_2 + \sqrt{M\delta_2} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k!} (k!\, M\mathfrak{S}^k)^{1/2} \leqslant M\delta_2 + \frac{M\sqrt{\delta_2}}{\sqrt[4]{2\pi}} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sqrt[4]{k}} \left(\frac{e\mathfrak{S}}{k}\right)^{k/2} < 43Me^{-4\mathfrak{S}}.$$

Чтобы вычислить $K_2(s)$, положим

$$v_k = \sum_n V_y^k(t_n), \qquad U(t) = \sum_{p\leqslant y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}}.$$

Если $k \leqslant K$ – нечетное число, то в силу леммы 1.2 имеем $|v_k| < y^k \log N < M^{0.25}$. При четном $k = 2m$ с помощью леммы 1.4 приходим к равенству

$$v_k = 2^{-2m}\binom{2m}{m} m!\, H_y^{(m)}(0) + \theta M^{0.25}, \qquad \text{где} \quad H_y(z) = \prod_{p\leqslant y} J_0\biggl(2i\sqrt{\frac{z}{p}}\biggr).$$

Следовательно, в силу леммы 1.17 имеем

$$\begin{aligned} K_2(s) &= M \sum_{0\leqslant m\leqslant 0.5K} \frac{H_y^{(m)}(0)}{m!}\Bigl(\frac{s}{2}\Bigr)^{2m} + 2\theta M^{0.25} \\ &= M\Biggl(\sum_{m=0}^{+\infty} - \sum_{m>0.5K}\Biggr)\frac{H_y^{(m)}(0)}{m!}\Bigl(\frac{s}{2}\Bigr)^{2m} + 2\theta M^{0.25} \\ &= MF_y(s) + \theta M \sum_{m>0.5K}\frac{1}{m!}\Bigl(\frac{\mathfrak{S}}{4}\Bigr)^{m} + 2\theta M^{0.25} = MF_y(s) + \theta M e^{-30\mathfrak{S}}, \end{aligned}$$

где

$$F_y(s) = H_y\biggl(\frac{s^2}{4}\biggr) = \prod_{p\leqslant y} J_0\biggl(\frac{is}{\sqrt{p}}\biggr).$$

Сложив полученные выше оценки, имеем

$$K(s) = M(F_y(s) + 44\theta\mathfrak{S}e^{-4\mathfrak{S}}).$$

Оценивая модуль функции $F_y(s)$ снизу в круге $|s| \leqslant 1$ подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.13, получаем

$$\min_{|s|\leqslant 1} |F_y(s)| = \min_{|s|\leqslant 1}\biggl|H_y\biggl(\frac{s^2}{4}\biggr)\biggr| > 0.99e^{-0.25\mathfrak{S}}.$$

Таким образом,

$$K(s) = MF_y(s)(1 + 44\theta\mathfrak{S}|F_y(s)|^{-1}e^{-4\mathfrak{S}}) = MF_y(s)(1 + \theta(\log N)^{-3}).$$

Лемма доказана.

Теорема 6.2. *Пусть $f(u)$ – произвольная монотонная функция, неограниченно возрастающая при $u \to +\infty$ и удовлетворяющая на промежутке $N \leqslant u \leqslant N + M$ неравенствам*

$$1 \ll f(u) \leqslant \sqrt{\log\log u},$$

*и пусть $\mathcal{F} = f(N)$. Тогда на указанном промежутке найдется по крайней мере*

$$\frac{M\mathcal{F}}{13\sqrt{L}} \exp\biggl(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\biggr)$$

*номеров $n$, для которых выполнены неравенства*

$$\biggl|\zeta\biggl(\frac{1}{2} + it_n\biggr)\biggr| < \exp\biggl(-\frac{1}{\mathcal{F}}\log\log N\biggr).$$

Замечание 6.1. После публикации результатов настоящей главы Калпокас и Сарка в совместной работе [13] доказали неравенство

$$\min_{t_n \leqslant T} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right| < \exp\left(-(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{\log T}{6\log\log T}}\right).$$

Доказательство теоремы 6.2. Пусть $K_N(s)$ – производящая функция моментов дискретной случайной величины $\xi_N$ со значениями $V_y(t_n)$, $N < n \leqslant N+M$, $n \in \mathcal{A}$. Тогда из лемм 6.7 и 6.8 несложно заключить, что в круге $|s| \leqslant 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} K_N(s) &= |\mathcal{A}|^{-1}\sum_{n\in\mathcal{A}} \exp\{sV_y(t_n)\} = |\mathcal{A}|^{-1}MF_y(s)(1+\theta(\log N)^{-3}) \\ &= F_y(s)(1-9\theta e\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-9\mathfrak{S}})^{-1}(1+\theta(\log N)^{-3}). \end{aligned}$$

Далее, заменяя $F_y(s)$ величиной

$$\exp\left(\frac{s^2}{4}\mathfrak{S}\right)F(s)(1+\theta y^{-1}), \qquad \text{где} \quad F(s) = \prod_p \varphi\left(\frac{s^2}{4p}\right)$$

($\varphi(u)$ – функция, введенная по ходу доказательства леммы 1.6), получаем

$$K_N(s) = \exp\left(\frac{s^2}{4}\mathfrak{S}\right)F(s)(1+2\theta(\log N)^{-3}).$$

Полагая $\sigma(N) = \mathfrak{S}$, $\kappa(N) = (\log N)^{-3}$, $u = \sqrt{6L}/\mathcal{F}$ в лемме I.8 и замечая, что $u \geqslant \sqrt{6} > 1$, заключаем, что по крайней мере для

$$\frac{|\mathcal{A}|}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_u^{+\infty} e^{-v^2/2}\,dv\right)(1+O(\mathcal{F}^{-1})) > 0.99\frac{|\mathcal{A}|}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-u^2/2}}{2u} > \frac{2M\mathcal{F}}{25\sqrt{L}}\exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right)$$

точек Грама выполнено неравенство $V_y(t_n) \leqslant -u\sqrt{\mathfrak{S}/2}$. Пользуясь леммой 6.6 и исключая из этого числа не более $M\delta_1$ точек $t_n$, при $\mathcal{F} \geqslant 9ec_6$ для оставшихся в количестве не менее

$$\begin{aligned} &\frac{2M\mathcal{F}}{25\sqrt{L}}\exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right) - 13M\exp\left(-\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6}\right) \\ &\quad = \frac{2M\mathcal{F}}{25\sqrt{L}}\exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right)\left(1-\frac{1700\sqrt{L}}{\mathcal{F}}\exp\left(-\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6}\left(1-\frac{9ec_6}{2\mathcal{F}}\right)\right)\right) > \frac{M\mathcal{F}}{13\sqrt{L}}\exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right) \end{aligned}$$

имеем неравенства

$$\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right| \leqslant C(t_n) \leqslant V_y(t_n) + \frac{2L}{3\mathcal{F}} \leqslant -\frac{L\sqrt{3}}{\mathcal{F}} + \frac{2L}{3\mathcal{F}} < -\frac{L}{\mathcal{F}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 6.1. *При любом фиксированном $\delta > 0$ и $N \geqslant N_0(\varepsilon,\delta)$ имеет место оценка*

$$\sum_n \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right|^{-1} > M\exp\left(\frac{\log\log N}{(\log\log\log N)^{\delta}}\right).$$

Доказательство. Положим в теореме $f(u) = 0.5(\log\log\log u)^{\delta}$; получим

$$\sum_n \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right|^{-1} > \frac{M\mathcal{F}}{13\sqrt{L}}\exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right)\cdot\exp\left(\frac{L}{\mathcal{F}}\right) > M\exp\left(\frac{L}{(\log L)^{\delta}}\right),$$

что и требовалось.

Приведенные в приложении II (таблица II.8) численные данные о значениях дзета-функции Римана в точках Грама позволяют предположить существование бесконечного числа пар точек $t_n$, $t_{n+1}$, для которых оба значения $\zeta(1/2+it_n)$, $\zeta(1/2+it_{n+1})$ будут очень маленькими. Более точно, весьма вероятным представляется предположение о том, что

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right|+\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_{n+1}\right)\right|\right)=0$$

или даже

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right|+\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_{n+1}\right)\right|\right)f(n)=0,$$

где $f(x)$ – некоторая положительная, неограниченная и монотонно возрастающая функция. Подобные предположения можно формулировать для троек, четверок и вообще для любого фиксированного числа $k$ соседних точек Грама $t_{n+1},\ldots,t_{n+k}$.

Аргументами в пользу истинности этих предположений (за исключением численных данных) мы не располагаем. Вместе с тем ниже мы приводим доказательство теоремы, которая утверждает существование бесконечного числа пар соседних точек Грама $t_n$ и $t_{n+1}$, в каждой из которых логарифм модуля дзета-функции оказывается существенно меньшим своего среднего значения $\sqrt{\log\log n}$.

Теорема 6.3. *На промежутке $N<n\leqslant N+M$ найдется не менее*

$$\frac{0.1M}{\sqrt{\log\log\log N}}$$

*номеров $n$ таких, что*

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right|<R,\quad \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_{n+1}\right)\right|<R,\qquad R=\exp\left\{3.24\sqrt{\frac{\log\log N}{\log\log\log N}}\right\}.$$

Замечание 6.2. Используя теорему 5 из работы Бояринова [5], теорему 6.3 можно доказать с гораздо меньшим $R$, а именно с

$$R=(\log\log N)^c,$$

где $c>0$ – некоторая постоянная.

Доказательство теоремы 6.3. Положим $h=1.81\sqrt{2\pi/\log L}$ и рассмотрим множество $E_1$ тех $n$, для которых

$$\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right|\leqslant\frac{h}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N}. \tag{6.21}$$

Дословно повторяя рассуждения теоремы 2.4 и строя приближение для функции распределения величин $C(t_n)$, несложно заключить, что число $m_1$ номеров $n$, попавших в $E_1$, оценивается снизу величиной

$$\begin{aligned}&M\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{h}e^{-u^2/2}\,du-\frac{1.78}{\sqrt{\log L}}\right)\\&\quad=M\left(\frac{1}{2}+\int_0^h e^{-u^2/2}\,du-\frac{1.78}{\sqrt{\log L}}\right)>M\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^h\left(1-\frac{u^2}{2}\right)du-\frac{1.78}{\sqrt{\log L}}\right)\\&\quad=M\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(h-\frac{h^3}{6}\right)-\frac{1.78}{\sqrt{\log L}}\right)>M\left(\frac{1}{2}+0.02\sqrt{\frac{2\pi}{\log L}}\right).\end{aligned}$$

Аналогично, определив $E_2$ как множество номеров $n$, $N < n \leqslant N + M$, удовлетворяющих условию

$$\log\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it_{n+1}\right)\right| \leqslant \frac{h}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N}, \tag{6.22}$$

число $m_2$ его элементов оценим снизу величиной

$$M\left(\frac{1}{2} + 0.02\sqrt{\frac{2\pi}{\log L}}\right).$$

Так как и $E_1$ и $E_2$ содержатся во множестве $N < n \leqslant N + M$, то их пересечение непусто и состоит не менее чем из

$$2 \cdot M\left(\frac{1}{2} + 0.02\sqrt{\frac{2\pi}{\log L}}\right) - M = 0.04M\sqrt{\frac{2\pi}{\log L}}$$

элементов. Но для каждого из $n$, принадлежащих пересечению $E_1$ и $E_2$, выполнены оба неравенства (6.21) и (6.22). Замечая, что

$$\frac{h}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log N} < 3.24\sqrt{\frac{\log\log N}{\log\log\log N}},$$

приходим к утверждению теоремы.

Замечание 6.3. В доказательстве теоремы 6.3 мы пользуемся утверждением, на первый взгляд более слабым, чем то, которое получилось бы применением теоремы Хванга (лемма I.8). Однако приближение функции распределения $\Psi(u)$ нормированных величин $C(t_n)$, полученное таким образом, годится лишь в области $|u| \geqslant 1$, в то время как мы пользуемся приближением $\Psi(u)$ в ситуации, когда $u \to +0$.

## Приложение I. Вспомогательные утверждения

Лемма I.1 (ван-дер Корпут). *Пусть $f(x)$ в интервале $a<x<b$ – вещественная дифференцируемая функция, производная которой монотонна, знакопостоянна и при постоянном $\delta$ с условием $0<\delta<1$ удовлетворяет неравенству $|f'(x)|\leqslant\delta$. Тогда*

$$\sum_{a<x\leqslant b} e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)}\,dx + \theta\biggl(3+\frac{2\delta}{1-\delta}\biggr).$$

*Если сверх того $a$ и $b$ целые, то число 3 в последнем слагаемом можно заменить на 1.*

Доказательство см. в [14; гл. 2].

При выводе неравенства для леммы 1.10 для коэффициентов $\varpi_n$ разложения

$$\varphi(v)=e^{-v}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{v^m}{m!}=e^{-v}J_0(2i\sqrt{v}).$$

используются оценки модуля функции Бесселя $J_0(z)$ на полуокружностях вида $|z|=R$, $|\arg z|\leqslant\pi/2$.

В случае, когда $z=R$ – вещественное положительное число, из классических разложений для $J_0(z)$ легко получить неравенство

$$|J_0(z)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi R}}\biggl(1+\frac{1}{4R}\biggr).$$

При замене вещественного $z$ комплексным числом $Re^{i\psi}$ с условием $|\psi|\leqslant\pi/2-\delta$, где $0\leqslant\delta<\pi/2$, эта оценка заменяется следующей:

$$|J_0(z)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi R}}\biggl(1+\frac{c}{R}\biggr)e^{R|\sin\psi|},$$

где $c=c(\delta)$ – некоторая постоянная.

В силу того, что в доступных нам руководствах по бесселевым функциям не удалось обнаружить необходимой для дальнейших выкладок оценки постоянной $c(\delta)$ для $\delta=0$, мы сочли возможным поместить здесь полное доказательство оценки такого типа.

Лемма I.2. *Для любого $z=Re^{i\psi}$ с условием $|\psi|\leqslant\pi/2$ справедливо неравенство*

$$|J_0(z)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi R}}\biggl(1+\frac{1}{2R\sqrt{2}}\biggr)e^{R|\sin\psi|}.$$

Доказательство. Согласно формуле (1) из [15; § 3.61] имеем

$$J_0(z)=\frac{1}{2}(H_0^{(1)}(z)+H_0^{(2)}(z)), \tag{I.1}$$

где $H_0^{(1)}(z)$, $H_0^{(2)}(z)$ – функции Бесселя третьего рода. Далее, положив $\beta=-\pi/4$ в формуле (3) из [15; § 6.12], для $z$ с условием $-3\pi/4<\arg z<5\pi/4$ получим

$$H_0^{(1)}(z)=\biggl(\frac{2}{\pi z}\biggr)^{1/2}\frac{e^{i(z-\pi/4)}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty e^{-\pi i/4}}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\biggl(1+\frac{iu}{2z}\biggr)^{-1/2}du.$$

Используя тождество

$$\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{-1/2}=\sum_{m=0}^{p-1}\binom{1/2}{m}\left(\frac{u}{2iz}\right)^m+p\binom{1/2}{p}\left(\frac{u}{2iz}\right)^p\int_0^1(1-t)^{p-1}\left(1+\frac{iut}{2z}\right)^{-p-1/2}dt,$$

которое справедливо при любом целом $p\geqslant 1$, получаем

$$H_0^{(1)}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\frac{e^{i(z-\pi/4)}}{\sqrt{\pi}}\left\{\sum_{m=0}^{p-1}\binom{1/2}{m}\frac{\Gamma(m+1/2)}{(2iz)^m}+R_p^{(1)}(z)\right\},$$

где

$$|R_p^{(1)}(z)|=\left|p\binom{1/2}{p}\int_0^{\infty e^{-\pi i/4}}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\frac{u}{2iz}\right)^p\int_0^1(1-t)^{p-1}\left(1+\frac{iut}{2z}\right)^{-p-1/2}dt\,du\right|$$
$$\leqslant\frac{p}{(2|z|)^p}\left|\binom{1/2}{p}\right|\int_0^1(1-t)^{p-1}\left|\int_0^{\infty e^{-\pi i/4}}e^{-u}u^{p-1/2}\left(1+\frac{iut}{2z}\right)^{-p-1/2}du\right|dt.$$

Пусть теперь $0<t\leqslant 1$, $z=Re^{i\psi}$. Тогда

$$\frac{iut}{2z}=\frac{|u|te^{\pi i/4}}{2Re^{i\psi}}=re^{i(\pi/4-\psi)},\qquad\text{где}\quad r=\frac{|u|t}{2R}.$$

Если угол $\psi$ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, то величина $\pi/4-\psi$ убывает от $3\pi/4$ до $-\pi/4$, причем наименьшее расстояние от точки $1+re^{i(\pi/4-\psi)}$ до начала координат отвечает значению $\psi=-\pi/2$ и составляет, таким образом,

$$|1+re^{i(\pi/4-\psi)}|=\sqrt{\left(1-\frac{r}{\sqrt2}\right)^2+\left(\frac{r}{\sqrt2}\right)^2}=\sqrt{\frac12+\left(r-\frac{1}{\sqrt2}\right)^2}\geqslant\frac{1}{\sqrt2}.$$

Итак, при любых рассматриваемых $u,z$ и $t$ имеем

$$\left|1+\frac{iut}{2z}\right|\geqslant\frac{1}{\sqrt2}.$$

Поэтому, положив $u=ve^{-pii/4}$ в последнем интеграле по $u$, получим

$$\left|\int_0^{\infty e^{-\pi i/4}}e^{-u}u^{p-1/2}\left(1+\frac{iut}{2z}\right)^{-p-1/2}du\right|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-v/\sqrt2}v^{p-1/2}(\sqrt2)^{p+1/2}\,dv=2^p\sqrt2\,\Gamma\left(p+\frac12\right),$$

откуда

$$|R_p^{(1)}(z)|\leqslant\frac{p}{(2|z|)^p}\left|\binom{1/2}{p}\right|2^p\sqrt2\,\Gamma\left(p+\frac12\right)\int_0^1(1-t)^{p-1}\,dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{2p-1}\left(\frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\right)^2\frac{1}{|z|^p}.$$

Таким образом,

$$H_0^{(1)}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}e^{i(z-\pi/4)}\left\{\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(-1)^{m-1}}{2m-1}\left(\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}\right)^2\frac{1}{(2iz)^m}\right.$$
$$\left.+\frac{\theta\sqrt2}{2p-1}\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\left(\frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\right)^2\frac{1}{|z|^p}\right\}.$$

В частности, беря $p=1$, придем к формуле

$$H_0^{(1)}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}e^{i(z-\pi/4)}\left\{1+\frac{\theta_1}{2|z|\sqrt2}\right\},$$

справедливой для $|\psi|\leqslant\pi/2$.

Подобным образом, отправляясь от формулы

$$H_0^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{e^{-i(z-\pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty e^{\pi i/4}} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(1 - \frac{iu}{2z}\right)^{-1/2} du,$$

которая справедлива для $-5\pi/4 < \arg z < 3\pi/4$ (см. [15; § 6.12]), при любом целом $p \geqslant 1$ и любом $z$ с условием $|\arg z| \leqslant \pi/2$ устанавливаем равенство

$$H_0^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i(z-\pi/4)} \Biggl\{ \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left(\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}\right)^2 \frac{1}{(2iz)^m} + \frac{\theta\sqrt{2}}{2p-1} \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1} \left(\frac{1}{2^{2p}}\binom{2p}{p}\right)^2 \frac{1}{|z|^p} \Biggr\}.$$

Отсюда при $p = 1$ имеем

$$H_0^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i(z-\pi/4)} \left\{1 + \frac{\theta_2}{2|z|\sqrt{2}}\right\},$$

Возвращаясь к формуле (I.1), будем иметь

$$|J_0(z)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(1 + \frac{1}{2R\sqrt{2}}\right) \frac{1}{2} (e^{R \sin\psi} + e^{-R\sin\psi}) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(1 + \frac{1}{2R\sqrt{2}}\right) e^{R|\sin\psi|}.$$

Лемма доказана.

Лемма I.3. *При любых $x > 1$ и $n \geqslant 2$ справедливы следующие соотношения:*

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + c + \frac{\theta}{(\log x)^2}\,, \tag{I.2}$$

*где $-0.5 \leqslant \theta \leqslant 1$, а $c = 0.261\,497\,212\,847\ldots$ – постоянная Мертенса;*

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{a\sqrt{n}}{\log n}\,, \qquad a = 2.784; \tag{I.3}$$

$$\pi(n) = \sum_{p\leqslant n} 1 \leqslant \frac{bn}{\log n}\,, \qquad b = 1.255\,06, \tag{I.4}$$

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\log p}{p} < \log x. \tag{I.5}$$

Доказательство соотношений (I.2), (I.4) и (I.5) см. в статье [16]. Оценка (I.3) при $n \leqslant 1.5 \cdot 10^6$ проверяется непосредственно (например, с помощью программного пакета Wolfram Mathematica 7.0.0), а при $n > 1.5 \cdot 10^6$ получается из (I.4) с помощью преобразования Абеля.

Лемма I.4 (А. А. Карацуба). *Пусть $T \geqslant T_0(\varepsilon)$, $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$, где $\alpha = 27/82$, $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon$. Тогда при любом $\sigma$ с условием $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$ имеет место неравенство*

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) < 13H(\log T)T^{-0.1\varepsilon(2\sigma-1)}.$$

Доказательство этой плотностной теоремы см. в [17]. Вычисление постоянной в правой части неравенства содержится в обзорной статье [18].

Лемма I.5. *При $2 \leqslant x \leqslant t^2$ справедливы неравенства*

$$\sum_{\varrho} \frac{\sigma_{x,t} - 1/2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t-\gamma)^2} \leqslant \frac{5}{3}\biggl(\mathrm{Re}\,\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)} + \frac{1}{2}\log t + 3\biggr),$$

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma_{x,t}+it)}{\zeta(\sigma_{x,t}+it)}\right| < 2.6\left|\sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}}\right| + 0.8\log t + 4.82.$$

Все эти неравенства принадлежат Сельбергу [1]. По поводу вычисления постоянных в правых частях см. обзорную статью [19].

Лемма I.6. *Пусть $e^{16} \leqslant x \leqslant t^{\delta}$, $110\delta = 1$, и пусть*

$$R(t) = S(t) + \frac{1}{\pi}\sum_{m \leqslant x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}}\,\frac{\sin{(t\log m)}}{\log m}.$$

*Тогда справедливо неравенство*

$$\pi|R(t)| \leqslant \biggl(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\biggr)\biggl(A\log t + Br(x,t) + C + \sum_{\varrho}\frac{\kappa(\varrho)}{(\sigma_{x,t}-1/2) + (t-\gamma)^2}\biggr),$$

*в котором*

$$A = \frac{13}{6e} + 1.8, \qquad B = \frac{13}{3e} + 2.6, \qquad C = \frac{52}{3e} + 10.82,$$

$$r(x,t) = \biggl|\sum_{m \leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(p)}{m^{\sigma_{x,t}+it}}\biggr|, \qquad \kappa(\varrho) = \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{|t-\gamma|\cdot|\sigma_{x,t}+\sigma-2\beta|}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2}\,d\sigma.$$

*Кроме того, если нуль $\varrho = \beta + i\gamma$ удовлетворяет условию*

$$\left|\beta - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}\biggl(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\biggr),$$

*то для интеграла $\kappa(\varrho)$ имеет место оценка*

$$\kappa(\varrho) < 2\biggl(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\biggr).$$

Доказательство см. в работе Сельберга [1]. Вычисление постоянных $A$, $B$ и $C$, а также постоянной в оценке интеграла $\kappa(\varrho)$ см. в [19; теорема 1].

Лемма I.7 (неравенство Берри–Эссеена). *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – функции распределения, причем $G'(x) \leqslant B < +\infty$ при любом $x$, и пусть $f(t)$, $g(t)$ – отвечающие им характеристические функции. Тогда при любом $\lambda > 0$ имеет место оценка*

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqslant a\frac{B}{\lambda} + b\int_0^{\lambda}\frac{|f(t)-g(t)|}{|t|}\,dt,$$

*где $a = 4.438998$, $b = 0.594499$.*

Доказательство утверждения следует из того варианта неравенства Берри–Эссеена, который содержится в работе Шевцовой [20]. В нем следует положить ядро $p(x)$ равным

$$\frac{1}{2\pi}\biggl(\frac{\sin x/2}{x/2}\biggr)^2$$

и затем минимизировать по $\alpha$ выражение

$$a(\alpha) = \frac{2\alpha\, j(\alpha)}{4j(\alpha) - 1}, \qquad j(\alpha) = \int_0^{\alpha} p(x)\,dx.$$

Лемма I.8. *Пусть* $\{\xi_N\}$ *– последовательность случайных величин. Предположим, что существует фиксированное число* $r>0$ *и положительные параметры* $\sigma(N)$ *и* $\kappa(N)$, *неограниченно возрастающие при* $N\to+\infty$, *такие, что для производящей функции* $K_N(s)=\mathsf{E}(e^{s\xi_N})$ *моментов случайной величины* $\xi_N$ *в круге* $|s|\leqslant r$ *справедливо равенство*

$$K_N(s)=\exp\left\{\frac{s^2}{4}\,\sigma(N)\right\}\Phi(s)(1+O(\kappa^{-1}(N))),$$

*где функция* $\Phi(s)$ *не зависит от* $N$, *аналитична в круге* $|s|\leqslant r$, *причем* $\Phi(0)=1$, *а постоянная в знаке* $O$ *абсолютная. Тогда для функции распределения*

$$F_N(u)=\mathsf{P}\left\{\frac{\xi_N\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma(N)}}\leqslant u\right\}$$

*нормированной случайной величины* $\xi_N$ *при любом* $u=o(\min(\kappa(N),\sqrt{\sigma(N)}))$, $u>1$, *справедливы следующие соотношения*:

$$\frac{1-F_N(u)}{1-G(u)}=1+O(r(u;N)),\qquad \frac{F_N(-u)}{G(-u)}=1+O(r(u;N)),$$

*где*

$$r(u;N)=u\left(\frac{1}{\kappa(N)}+\frac{1}{\sqrt{\sigma(N)}}\right),$$

*а постоянные в знаках* $O$ *являются абсолютными.*

Эта лемма является частным случаем теоремы из работы Хванга [21].

Лемма I.9. *При* $t>51.4$ *имеет место оценка*

$$|S(t)|<0.137\log t+0.443\log\log t+4.35.$$

Доказательство см. в [22] (различные варианты этого неравенства были получены в разное время Х. фон Мангольдтом, Дж. Гроссманном, Р. Дж. Бэклундом, Дж. Б. Россером и Т. С. Труджианом. Подробную библиографию по этому вопросу см. в [23].

Лемма I.10. *Пусть* $a_n$ *– произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда при любых* $A$, $B$, $Y$ *с условиями* $0<A\leqslant B$, $Y\geqslant 2$ *справедливо равенство*

$$\int_B^{A+B}\Bigl|\sum_{m\leqslant Y}a_m m^{it}\Bigr|^2\,dt=A\sum_{m\leqslant Y}|a_m|^2+\theta c\sum_{m\leqslant Y}m|a_m|^2,$$

*где* $c>0$ *– некоторая абсолютная постоянная.*

Доказательство см. в [24; теорема 5.2].

Лемма I.11 (Б. Конри). *При* $t>t_0>1$ *имеет место неравенство*

$$N_0(t)>(0.4+7\cdot 10^{-3})N(t).$$

Доказательство см. в [25].

Лемма I.12. *Пусть* $0<\delta<10^{-7}$ *– сколь угодно малое фиксированное число,* $T\geqslant T_0(\delta)>0$, $T^{\alpha+\delta_1}\leqslant H\leqslant T^{\alpha+\delta}$, *где* $\alpha=27/82$, $\delta_1=0.9\delta$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\sup_{T-H\leqslant t\leqslant T+2H}\{\pm S(t)\}\geqslant\frac{\delta^{5/4}}{1000}\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)^{1/3}.$$

Существование на длинном промежутке $(T, 2T]$ чисел $T_j$ таких, что

$$(-1)^j S(T_j) \geqslant c\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)^{1/3}, \qquad j = 1, 2,$$

где $c > 0$ – некоторая абсолютная постоянная, было впервые доказано Тсангом в [4] (см. также [26]). Доказательство неравенств из условия леммы для случая $H = T^{\alpha+\delta}$ проводится, по сути, тем же методом, но с использованием плотностной теоремы А. А. Карацубы (лемма I.4; подробнее см. [19]). Это же доказательство практически дословно переносится и на случай $T^{\alpha+\delta_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\delta}$.

Лемма I.13. *Если верна гипотеза Римана, то при любом $T > T_0 > 0$ и любом $H$ с условием*

$$(\log T)(\log\log T)^{-3/2} < H \leqslant \frac{T}{3}$$

*справедливы неравенства*

$$\sup_{T-H<t\leqslant T+2H}\{\pm S(t)\} \geqslant \frac{1}{90\pi}\left(\frac{\log H}{\log\log H}\right)^{1/2}.$$

Доказательство см. в [27].

Лемма I.14. *Если верна гипотеза Римана, то при любом $T > T_0 > 0$ и любом $H$ с условием*

$$\sqrt{\log\log T} \leqslant H \leqslant (\log T)(\log\log T)^{-3/2}$$

*справедливы неравенства*

$$\sup_{T-H<t\leqslant T+2H}\{\pm S(t)\} \geqslant \frac{\sqrt{\log H}}{900\log\log H}.$$

Доказательство см. в [28].

Лемма I.15 (К.-М. Тсанг, Р. Н. Бояринов). *Пусть $T \geqslant T_0(\varepsilon) > 0$, $H$ – произвольное число с условием $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$, и пусть*

$$\frac{(\log\log T)^2}{\log T} < h < \frac{1}{\sqrt{\log T}}. \tag{I.6}$$

*Тогда справедливы равенства*

$$\int_T^{T+H} |S(t)|\,dt = \frac{H}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\log T}\left(1 + \frac{\theta_1 c}{\sqrt{\log\log T}}\right), \tag{I.7}$$

$$\int_T^{T+H}\left|\int_0^h S(t+u)\,du\right| dt = \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\log\frac{1}{h}}\left(1 + \frac{\theta_2 c}{\sqrt{\log\log T}}\right), \tag{I.8}$$

*где $c = c(\varepsilon) > 0$ – достаточно большая постоянная.*

Доказательства равенств (I.7), (I.8) см. в [4; теорема 5.2], [5].

Лемма I.16. *При выполнении условий предыдущей леммы имеют место равенства*

$$\int_0^T S(t)\,dt = O(\log T), \tag{I.9}$$

$$\int_T^{T+H} S^2(t)\,dt = \frac{H}{2\pi^2}(\log\log T)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log T}}\right)\right). \tag{I.10}$$

Равенство (I.9) представляет собой классический результат Литтлвуда (см. [6]). Асимптотическая формула (I.10) для случая $T^{0.5+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T$ была впервые доказана А. Сельбергом в [1]. Ее доказательство для случая $H = T^{\alpha+\varepsilon}$ содержится в статье [17] (по поводу вычисления постоянной в оценке остаточного члена см. [18]). Те же рассуждения остаются в силе и в случае $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$.

Лемма I.17 (А. Сельберг, К.-М. Тсанг, Р. Н. Бояринов). *Пусть $T \geqslant T_0(\varepsilon)$, $T^{0.5+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T$. Тогда функция $S(t)$ имеет на промежутке $(T, T+H]$ не менее*

$$H(\log T)e^{-c_1(\log\log\log T)^2}$$

*точек перемены знака. Если верна гипотеза Римана, то число точек указанного промежутка, в которых $S(t)$ меняет знак, оценивается снизу величиной*

$$H(\log T)e^{-c_2\log\log\log T} = \frac{H\log T}{(\log\log T)^{c_2}}$$

*($c_1, c_2$ – некоторые постоянные, зависящие от $\varepsilon$).*

Доказательство этого утверждения для случая $H = T^{0.5+\varepsilon}$ см. в [4; гл. VII]; случай $H = T^{27/82+\varepsilon}$ рассмотрен в работе Бояринова [5].

Лемма I.18. *Пусть $T \geqslant T_0(\varepsilon)$, $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon$, и пусть*

$$h = 4.39\log\log\log\log T.$$

*Тогда мера множества точек $t$ промежутка $T \leqslant t \leqslant T+H$, для которых интервал $(t-h, t+h)$ не содержит точек перемены знака функции $S(t)$, есть*

$$O(H(\log\log T)^{-0.5}).$$

Доказательство этого утверждения для случая $H = T^{\alpha+\varepsilon}$ см. в статье [27]. В случае $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leqslant H \leqslant T^{\alpha+\varepsilon}$ доказательство проводится аналогично.

Замечание. Оценка леммы была уточнена в работе Бояринова [29], в которой понижающий множитель $(\log\log T)^{-0.5}$ был заменен на

$$(\log\log T)^{-1}(\log\log\log T)^{-0.5}.$$

Лемма I.19. *Пусть $T^{\alpha+\varepsilon} \leqslant H \leqslant T$, и пусть $\mu(x)$ – мера множества точек $t$ промежутка $T \leqslant t \leqslant T+H$, для которых выполнено неравенство*

$$S(t) \leqslant \frac{x}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\log\log T}.$$

*Тогда при любом фиксированном $x$ справедливо соотношение*

$$\mu(x) \sim \frac{H}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du.$$

Доказательство этого утверждения с разной степенью точности оценки остаточного члена и для различных значений длины $H$ исследуемого промежутка можно найти в работах [30], [31], [18], [4], [5], [32].

Лемма I.20. *Пусть $s = \sigma + it$, где $10 \leqslant x \leqslant t^2$, $\sigma \geqslant \sigma_{x,t}$, и пусть $\zeta(s) \neq 0$. Тогда*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^s} + \frac{13\theta}{3}x^{1/4-\sigma/2}\biggl(\biggl|\sum_{m\leqslant x^3}\frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}}\biggr| + \frac{1}{2}\log t + 4\biggr).$$

Эта лемма заимствована из работы Сельберга [1]; вычисление постоянных в правой части равенства см. в статье [19] (в формулировке этой леммы в работе [19] содержится опечатка: вместо $1/2 - \sigma/2$ должно быть $1/4 - \sigma/2$).

Лемма I.21. *Для вещественных $\sigma$ и $t$ с условиями $|\sigma| \leqslant 2$, $|t| \geqslant 10$, $s = \sigma + it$ справедливо равенство*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho} + \theta\biggl(\frac{1}{2}\log|t| + 3\biggr), \qquad \text{\textit{где}} \quad \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho} = \sum_{\operatorname{Im}\varrho>0}\biggl(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{s-\overline{\varrho}}\biggr).$$

Эта лемма по сути принадлежит Ландау (см. [33; §§ 76–77]); вычисление постоянных в последнем слагаемом правой части см. в обзорной статье [19].

# Приложение II. Таблицы

## II.1. Статистика нарушений правила Грама

Одним из следствий высказанного А. Сельбергом утверждения о том, что величины $\Delta_n/\sqrt{\log\log n}$ распределены по нормальному закону (см. гл. 3), служит тот факт, что примерно в половине случаев величина $\Delta_n$ строго отрицательна, а в половине случаев – строго положительна. Приведенные ниже численные данные, полученные при обработке значений первых 10 млн нулей $\zeta(s)$, показывают, что при сравнительно небольших значениях $N$ случаи, когда для ординаты $\gamma_n$, $n \leqslant N$, не наблюдается явление Грама–Сельберга (т.е. когда $\Delta_n \neq 0$), встречаются достаточно редко.

**Таблица II.1.** Количество и доля номеров $n$, $n \leqslant N$, отвечающих условиям $\Delta_n = -1$, $\Delta_n = 1$

| $N$ | $\Delta_n = -1$ | % | $\Delta_n = 1$ | % |
|---|---|---|---|---|
| 250 | 2 | 0.80 | 3 | 1.20 |
| 500 | 5 | 1.00 | 8 | 1.60 |
| 1 000 | 16 | 1.60 | 26 | 2.60 |
| 2 000 | 54 | 2.70 | 63 | 3.15 |
| 3 000 | 91 | 3.03 | 100 | 3.33 |
| 4 000 | 135 | 3.38 | 142 | 3.55 |
| 5 000 | 178 | 3.56 | 184 | 3.68 |
| 10 000 | 405 | 4.05 | 419 | 4.19 |
| 20 000 | 899 | 4.50 | 939 | 4.70 |
| 30 000 | 1 438 | 4.79 | 1 494 | 4.98 |
| 40 000 | 1 992 | 4.98 | 2 056 | 5.14 |
| 50 000 | 2 580 | 5.16 | 2 633 | 5.27 |
| 100 000 | 5 509 | 5.51 | 5 553 | 5.55 |
| 200 000 | 11 702 | 5.85 | 11 652 | 5.83 |
| 300 000 | 18 015 | 6.01 | 17 962 | 5.99 |
| 400 000 | 24 506 | 6.13 | 24 443 | 6.11 |
| 500 000 | 31 121 | 6.22 | 31 063 | 6.21 |
| 1 000 000 | 65 097 | 6.51 | 65 005 | 6.50 |
| 2 000 000 | 135 402 | 6.77 | 135 275 | 6.76 |
| 3 000 000 | 207 459 | 6.92 | 207 290 | 6.91 |
| 4 000 000 | 280 891 | 7.02 | 280 641 | 7.02 |
| 5 000 000 | 354 725 | 7.09 | 354 293 | 7.09 |
| 6 000 000 | 429 737 | 7.16 | 428 841 | 7.15 |
| 7 000 000 | 504 805 | 7.21 | 503 808 | 7.20 |
| 8 000 000 | 580 330 | 7.25 | 579 252 | 7.24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 000 000 | 656 103 | 7.29 | 655 114 | 7.28 |
| 10 000 000 | 732 315 | 7.32 | 731 252 | 7.31 |

## II.2. Соседние члены последовательности $\mathbf{\Delta}_n$, отличные от нуля

Пусть **e** обозначает набор из $k$ чисел $-1$ и $l$ чисел $+1$, т.е.

$$\mathbf{e} = (\underbrace{-1, \dots, -1}_{k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{l}),$$

и пусть $r = k + l$. В гл. 5 было установлено, что число номеров $n \leqslant N$, для которых распределение знаков в наборе $(\Delta_n, \dots, \Delta_{n+r-1})$ совпадает с распределением знаков в наборе **e**, при неограниченном возрастании $N$ эквивалентно $0.5N$, если все числа в наборе имеют один знак (т.е. одно из чисел $k$, $l$ равно нулю), и равно $o(N)$ в противном случае.

Однако эта закономерность начинает проявляться лишь при очень больших значениях $N$. Приведенные ниже численные данные, отвечающие первым 10 млн нулей $\zeta(s)$, показывают, например, что на соответствующем промежутке в среднем лишь одна из 95 пар соседних значений $\Delta_n$ отвечает распределению знаков $(1, 1)$, одна из 1 170 троек – распределению знаков $(1, 1, 1)$, одна из 65 000 четверок – распределению знаков $(1, 1, 1, 1)$. Пятерок, шестерок и т.д. соседних членов последовательности $\Delta_n$, имеющих одинаковые знаки, при этом обнаружено не было.

**Таблица II.2.** Количество номеров $n$, $n \leqslant N$, отвечающих парам $(\Delta_n, \Delta_{n+1})$ указанного вида

| $N$ | $(-1,-1)$ | $(-1,1)$ | $(1,1)$ | $N$ | $(-1,-1)$ | $(-1,1)$ | $(1,1)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 000 | 145 | 263 | 153 | 5 000 000 | 47 537 | 23 345 | 47 228 |
| 100 000 | 351 | 535 | 382 | 5 500 000 | 53 077 | 25 634 | 52 772 |
| 500 000 | 2 963 | 2 489 | 2 985 | 6 000 000 | 58 788 | 27 877 | 58 312 |
| 1 000 000 | 7 055 | 4 865 | 6 992 | 6 500 000 | 64 427 | 30 179 | 63 935 |
| 1 500 000 | 11 493 | 7 210 | 11 384 | 7 000 000 | 70 127 | 32 450 | 69 626 |
| 2 000 000 | 16 175 | 9 546 | 16 061 | 7 500 000 | 75 880 | 34 675 | 75 426 |
| 2 500 000 | 21 077 | 11 882 | 21 024 | 8 000 000 | 81 589 | 36 864 | 81 246 |
| 3 000 000 | 26 187 | 14 200 | 26 126 | 8 500 000 | 87 452 | 39 132 | 87 067 |
| 3 500 000 | 31 378 | 16 483 | 31 223 | 9 000 000 | 93 347 | 41 418 | 92 918 |
| 4 000 000 | 36 761 | 18 831 | 36 531 | 9 500 000 | 99 237 | 43 654 | 98 835 |
| 4 500 000 | 42 092 | 21 087 | 41 852 | 10 000 000 | 105 165 | 45 894 | 104 847 |

**Таблица II.3.** Количество номеров $n$, $n \leqslant N$, отвечающих тройкам $(\Delta_n, \Delta_{n+1}, \Delta_{n+2})$ указанного вида

| $N$ | $(-1,-1,-1)$ | $(-1,-1,1)$ | $(-1,1,1)$ | $(1,1,1)$ |
|---|---|---|---|---|
| 50 000 | 0 | 37 | 34 | 0 |
| 100 000 | 2 | 92 | 89 | 4 |
| 500 000 | 78 | 539 | 537 | 71 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 000 000 | 279 | 1 134 | 1 136 | 246 |
| 1 500 000 | 535 | 1 702 | 1 731 | 476 |
| 2 000 000 | 832 | 2 324 | 2 299 | 779 |
| 2 500 000 | 1 176 | 2 910 | 2 916 | 1 124 |
| 3 000 000 | 1 579 | 3 500 | 3 532 | 1 523 |
| 3 500 000 | 1 988 | 4 086 | 4 075 | 1 894 |
| 4 000 000 | 2 445 | 4 690 | 4 658 | 2 306 |
| 4 500 000 | 2 869 | 5 265 | 5 244 | 2 744 |
| 5 000 000 | 3 325 | 5 814 | 5 823 | 3 177 |
| 5 500 000 | 3 787 | 6 389 | 6 432 | 3 661 |
| 6 000 000 | 4 283 | 6 991 | 7 013 | 4 131 |
| 6 500 000 | 4 781 | 7 590 | 7 604 | 4 654 |
| 7 000 000 | 5 288 | 8 187 | 8 201 | 5 156 |
| 7 500 000 | 5 834 | 8 774 | 8 802 | 5 699 |
| 8 000 000 | 6 347 | 9 334 | 9 386 | 6 233 |
| 8 500 000 | 6 920 | 9 923 | 9 969 | 6 789 |
| 9 000 000 | 7 503 | 10 518 | 10 550 | 7 354 |
| 9 500 000 | 8 089 | 11 121 | 11 168 | 7 941 |
| 10 000 000 | 8 677 | 11 735 | 11 755 | 8 525 |

**Таблица II.4.** Количество номеров $n$, $n \leqslant N$, отвечающих четверкам $(\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+3})$ указанного вида

| $N$ | $(-1,-1,-1,-1)$ | $(-1,-1,-1,1)$ | $(-1,-1,1,1)$ | $(-1,1,1,1)$ | $(1,1,1,1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50 000 | 0 | 0 | 8 | 0 | 0 |
| 100 000 | 0 | 0 | 17 | 1 | 0 |
| 500 000 | 0 | 30 | 150 | 33 | 1 |
| 1 000 000 | 0 | 83 | 350 | 86 | 1 |
| 1 500 000 | 0 | 144 | 539 | 147 | 1 |
| 2 000 000 | 1 | 231 | 759 | 226 | 4 |
| 2 500 000 | 2 | 318 | 967 | 327 | 7 |
| 3 000 000 | 8 | 422 | 1 176 | 428 | 13 |
| 3 500 000 | 11 | 525 | 1 355 | 510 | 20 |
| 4 000 000 | 14 | 632 | 1 544 | 603 | 26 |
| 4 500 000 | 20 | 726 | 1 742 | 703 | 32 |
| 5 000 000 | 26 | 828 | 1 926 | 812 | 39 |
| 5 500 000 | 35 | 939 | 2 136 | 908 | 49 |
| 6 000 000 | 43 | 1 057 | 2 338 | 1 021 | 58 |
| 6 500 000 | 52 | 1 177 | 2 547 | 1 140 | 72 |
| 7 000 000 | 62 | 1 286 | 2 750 | 1 259 | 82 |
| 7 500 000 | 69 | 1 395 | 2 965 | 1 370 | 94 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 000 000 | 80 | 1 512 | 3 159 | 1 474 | 104 |
| 8 500 000 | 95 | 1 631 | 3 362 | 1 581 | 111 |
| 9 000 000 | 117 | 1 754 | 3 558 | 1 690 | 118 |
| 9 500 000 | 129 | 1 869 | 3 772 | 1 801 | 136 |
| 10 000 000 | 141 | 1 993 | 3 987 | 1 917 | 154 |

**Таблица II.5.** Количество номеров $n$, $n \leqslant N$, отвечающих пятеркам $(\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+4})$ указанного вида

| $N$ | $(-1,-1,-1,-1,1)$ | $(-1,-1,-1,1,1)$ | $(-1,-1,1,1,1)$ | $(-1,1,1,1,1)$ |
|---|---|---|---|---|
| 100 000 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 500 000 | 0 | 11 | 10 | 1 |
| 1 000 000 | 0 | 28 | 28 | 1 |
| 1 500 000 | 0 | 51 | 53 | 1 |
| 2 000 000 | 0 | 82 | 85 | 3 |
| 2 500 000 | 1 | 112 | 122 | 5 |
| 3 000 000 | 2 | 153 | 163 | 6 |
| 3 500 000 | 3 | 191 | 184 | 9 |
| 4 000 000 | 3 | 231 | 225 | 13 |
| 4 500 000 | 4 | 261 | 265 | 16 |
| 5 000 000 | 8 | 292 | 301 | 19 |
| 5 500 000 | 10 | 337 | 343 | 25 |
| 6 000 000 | 13 | 374 | 386 | 27 |
| 6 500 000 | 16 | 420 | 436 | 30 |
| 7 000 000 | 19 | 465 | 483 | 34 |
| 7 500 000 | 22 | 515 | 524 | 39 |
| 8 000 000 | 28 | 560 | 559 | 43 |
| 8 500 000 | 33 | 611 | 598 | 45 |
| 9 000 000 | 42 | 656 | 647 | 46 |
| 9 500 000 | 45 | 709 | 694 | 53 |
| 10 000 000 | 51 | 752 | 743 | 58 |

**Таблица II.6.** Количество номеров $n$, $n \leqslant N$, отвечающих шестеркам $(\Delta_n, \ldots, \Delta_{n+5})$ указанного вида

| $N$ | $(-1,-1,-1,-1,1,1)$ | $(-1,-1,-1,1,1,1)$ | $(-1,-1,1,1,1,1)$ |
|---|---|---|---|
| 500 000 | 0 | 0 | 0 |
| 1 000 000 | 0 | 1 | 0 |
| 1 500 000 | 0 | 4 | 0 |
| 2 000 000 | 0 | 12 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 500 000 | 0 | 20 | 0 |
| 3 000 000 | 1 | 28 | 1 |
| 3 500 000 | 1 | 29 | 2 |
| 4 000 000 | 1 | 39 | 4 |
| 4 500 000 | 1 | 45 | 7 |
| 5 000 000 | 3 | 47 | 7 |
| 5 500 000 | 4 | 56 | 9 |
| 6 000 000 | 4 | 62 | 10 |
| 6 500 000 | 5 | 72 | 12 |
| 7 000 000 | 5 | 85 | 13 |
| 7 500 000 | 7 | 94 | 14 |
| 8 000 000 | 10 | 98 | 15 |
| 8 500 000 | 13 | 109 | 15 |
| 9 000 000 | 16 | 117 | 15 |
| 9 500 000 | 19 | 125 | 17 |
| 10 000 000 | 22 | 136 | 19 |

## II.3. Маленькие значения $\zeta(1/2+it)$ в точках Грама

В гл. 6 было доказано, что значения функции $\zeta(1/2+it)$ в точках Грама $t=t_n$ могут быть сколь угодно близки к нулю. Например, при сколь угодно малом, но фиксированном $\delta$, $0<\delta<1$, и достаточно большом $N \geqslant N_0(\delta)$ на промежутке $n \leqslant N$ найдется достаточно много номеров $n$, для которых

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right| < e^{-(\log\log N)^{1-\delta}}.$$

Между тем приводимые ниже численные данные как будто указывают на существование точек Грама $t_n$, в которых значения дзета-функции аномально близки к нулю. Действительно, даже при $\delta=0$ и $N=10^7$ упомянутая теорема могла бы гарантировать лишь существование значений $\zeta(1/2+it_n)$, не превосходящих по модулю

$$e^{-\log\log N} = \frac{1}{\log N} \approx 0.06.$$

В то же время среди первых 10 млн значений дзета-функции Римана в точках Грама имеется 11, не превосходящих по модулю $10^{-7}=N^{-1}$.

Поэтому не лишенным оснований представляется предположение о том, что при некотором $\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, неравенство

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right| < n^{-\alpha}$$

имеет бесконечно много решений.

Ниже мы помещаем две таблицы, содержащие пары и тройки значений дзета-функции в последовательных точках Грама, одновременно близкие к нулю. Существование бесконечных последовательностей точек Грама с такими свойствам представляется несомненным, хотя и не получило еще теоретического обоснования.

Таблица II.7 содержит все значения $\zeta(1/2+it_n)$ среди первых 100 млн, не превосходящие по абсолютной величине $10^{-6}$.

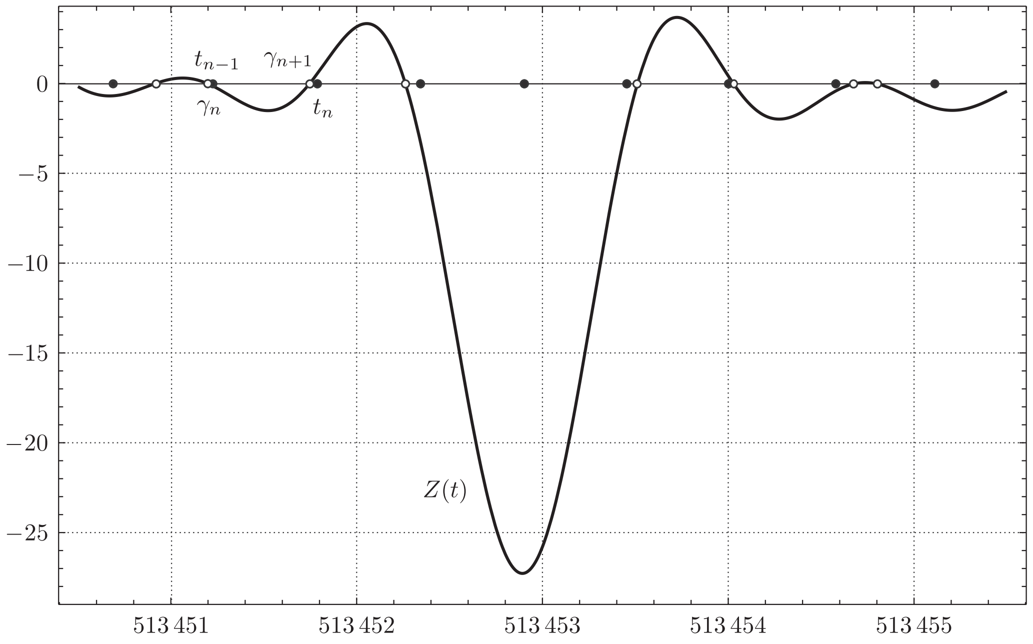



**Рис. 12.** График функции Харди вблизи нуля $\gamma_n$ с номером 842 602 – наименьшим значением $n$, для которого шесть подряд идущих членов последовательности $\Delta_n$ отличны от нуля: $\Delta_n = \Delta_{n+1} = \Delta_{n+2} = -1$, $\Delta_{n+3} = \Delta_{n+4} = \Delta_{n+5} = 1$

Таблица II.8 содержит все пары $\zeta(1/2+it_n)$, $\zeta(1/2+it_{n+1})$ среди первых 100 млн, в которых каждое из чисел не превосходит по модулю $10^{-3}$.

Таблица II.9 содержит все тройки $\zeta(1/2+it_n)$, $\zeta(1/2+it_{n+1})$ и $\zeta(1/2+it_{n+2})$ среди первых 100 млн, в которых каждое из чисел не превосходит по модулю $10^{-2}$.

**Таблица II.7.** Значения дзета-функции Римана в точках Грама, близкие к нулю

| № | $n$ | $\zeta(0.5+it_n)$ | № | $n$ | $\zeta(0.5+it_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 368 383 | $8.908459177 \cdot 10^{-8}$ | 31 | 55 397 801 | $-7.724510329 \cdot 10^{-7}$ |
| 2 | 1 081 356 | $3.286697349 \cdot 10^{-7}$ | 32 | 55 785 549 | $3.751898927 \cdot 10^{-8}$ |
| 3 | 1 703 469 | $-6.782496166 \cdot 10^{-7}$ | 33 | 56 977 438 | $-1.281331084 \cdot 10^{-7}$ |
| 4 | 2 221 534 | $8.913991560 \cdot 10^{-7}$ | 34 | 57 923 398 | $-8.600911945 \cdot 10^{-7}$ |
| 5 | 2 566 428 | $-5.017685320 \cdot 10^{-7}$ | 35 | 61 769 885 | $8.026448664 \cdot 10^{-8}$ |
| 6 | 3 932 141 | $-5.815426965 \cdot 10^{-7}$ | 36 | 65 463 721 | $1.083783062 \cdot 10^{-8}$ |
| 7 | 10 552 409 | $-2.168827302 \cdot 10^{-7}$ | 37 | 66 712 683 | $9.467610207 \cdot 10^{-7}$ |
| 8 | 12 984 109 | $-2.052297697 \cdot 10^{-8}$ | 38 | 67 185 440 | $-3.026334096 \cdot 10^{-7}$ |
| 9 | 17 192 658 | $-7.976228419 \cdot 10^{-7}$ | 39 | 67 817 448 | $3.065987007 \cdot 10^{-7}$ |
| 10 | 18 492 584 | $1.955139500 \cdot 10^{-7}$ | 40 | 68 116 120 | $-4.964761089 \cdot 10^{-7}$ |
| 11 | 19 190 466 | $-2.803305286 \cdot 10^{-7}$ | 41 | 68 804 262 | $-9.356895220 \cdot 10^{-7}$ |
| 12 | 19 652 116 | $3.938189772 \cdot 10^{-7}$ | 42 | 69 612 841 | $9.033652260 \cdot 10^{-8}$ |
| 13 | 21 380 358 | $3.869268958 \cdot 10^{-7}$ | 43 | 73 877 566 | $8.688378781 \cdot 10^{-7}$ |
| 14 | 21 567 185 | $-6.709404500 \cdot 10^{-8}$ | 44 | 74 201 244 | $2.875945334 \cdot 10^{-8}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 22 596 681 | $-3.443463124 \cdot 10^{-7}$ | 45 | 74 501 450 | $-9.894745552 \cdot 10^{-7}$ |
| 16 | 23 521 820 | $-2.672575299 \cdot 10^{-7}$ | 46 | 74 549 035 | $-6.786590341 \cdot 10^{-7}$ |
| 17 | 24 100 729 | $6.250046215 \cdot 10^{-7}$ | 47 | 74 939 457 | $-9.707059351 \cdot 10^{-7}$ |
| 18 | 25 841 031 | $-3.720614072 \cdot 10^{-7}$ | 48 | 76 315 239 | $-1.737656419 \cdot 10^{-7}$ |
| 19 | 36 596 593 | $9.536161749 \cdot 10^{-7}$ | 49 | 76 666 987 | $-4.813843438 \cdot 10^{-7}$ |
| 20 | 37 144 211 | $-6.532751077 \cdot 10^{-7}$ | 50 | 82 021 362 | $3.054704527 \cdot 10^{-7}$ |
| 21 | 38 149 300 | $1.883071757 \cdot 10^{-7}$ | 51 | 83 544 119 | $1.785705074 \cdot 10^{-7}$ |
| 22 | 40 691 692 | $-5.549799612 \cdot 10^{-7}$ | 52 | 84 026 196 | $-3.880595918 \cdot 10^{-7}$ |
| 23 | 43 005 627 | $9.335807026 \cdot 10^{-7}$ | 53 | 86 680 958 | $-2.600521850 \cdot 10^{-7}$ |
| 24 | 45 898 152 | $8.302024309 \cdot 10^{-8}$ | 54 | 89 039 640 | $8.806346508 \cdot 10^{-7}$ |
| 25 | 46 555 309 | $-6.184960394 \cdot 10^{-7}$ | 55 | 93 186 166 | $-9.021584705 \cdot 10^{-7}$ |
| 26 | 49 016 454 | $-5.510043425 \cdot 10^{-7}$ | 56 | 93 796 535 | $5.326477354 \cdot 10^{-7}$ |
| 27 | 49 092 047 | $1.457889033 \cdot 10^{-7}$ | 57 | 93 869 701 | $-4.703062781 \cdot 10^{-7}$ |
| 28 | 50 550 325 | $-6.397502838 \cdot 10^{-8}$ | 58 | 94 842 148 | $-7.418568754 \cdot 10^{-7}$ |
| 29 | 52 220 649 | $-6.529424698 \cdot 10^{-8}$ | 59 | 95 788 773 | $-7.262093847 \cdot 10^{-7}$ |
| 30 | 53 253 362 | $6.684365546 \cdot 10^{-7}$ | 60 | 95 988 225 | $-4.872821625 \cdot 10^{-7}$ |

**Таблица II.8.** Значения дзета-функции Римана в соседних точках Грама, близкие к нулю

| № | $n$ | $\zeta(0.5+it_n)$ | $\zeta(0.5+it_{n+1})$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 816 747 | −0.00099 82444 | −0.00047 15144 |
| 2 | 1 992 269 | −0.00074 13299 | −0.00048 31443 |
| 3 | 5 192 539 | −0.00091 95711 | −0.00063 63480 |
| 4 | 5 569 839 | −0.00068 28763 | −0.00047 92222 |
| 5 | 9 008 869 | 0.00090 02257 | 0.00070 81692 |
| 6 | 13 832 731 | −0.00000 80280 | 0.00098 28156 |
| 7 | 18 163 000 | 0.00040 09274 | −0.00079 37788 |
| 8 | 30 077 815 | 0.00048 93125 | 0.00017 49607 |
| 9 | 35 875 340 | −0.00080 43341 | −0.00085 30483 |
| 10 | 38 287 466 | −0.00077 17557 | −0.00050 55571 |
| 11 | 39 046 347 | 0.00046 61767 | 0.00002 19750 |
| 12 | 40 142 820 | −0.00081 68821 | −0.00084 57050 |
| 13 | 43 029 919 | −0.00085 47402 | 0.00095 16843 |
| 14 | 49 780 945 | 0.00008 28373 | 0.00008 65893 |
| 15 | 51 201 822 | −0.00006 83471 | 0.00003 75653 |
| 16 | 51 594 505 | 0.00018 17627 | 0.00068 87363 |
| 17 | 54 166 549 | −0.00089 28189 | −0.00041 69653 |
| 18 | 56 769 908 | 0.00059 69652 | 0.00073 58172 |
| 19 | 57 489 193 | −0.00023 61312 | −0.00090 58221 |
| 20 | 57 539 118 | −0.00086 11471 | 0.00021 29330 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | 57 584 929 | −0.00050 58439 | −0.00022 00641 |
| 22 | 59 187 069 | 0.00030 00735 | −0.00098 32528 |
| 23 | 63 890 968 | 0.00001 47495 | 0.00045 19164 |
| 24 | 70 699 520 | −0.00056 44376 | 0.00095 12555 |
| 25 | 75 078 864 | 0.00026 87740 | −0.00022 52979 |
| 26 | 76 371 912 | −0.00059 11880 | −0.00096 41903 |
| 27 | 78 991 010 | −0.00063 76352 | −0.00093 41621 |
| 28 | 82 566 363 | 0.00074 27305 | −0.00025 55093 |
| 29 | 82 915 114 | −0.00031 55988 | −0.00083 92445 |
| 30 | 84 807 620 | 0.00027 60681 | −0.00033 73168 |
| 31 | 92 088 995 | −0.00079 77560 | −0.00095 57573 |
| 32 | 94 279 811 | 0.00010 94287 | −0.00017 04603 |
| 33 | 97 537 083 | −0.00050 04338 | 0.00032 06898 |

**Таблица II.9.** Значения дзета-функции Римана в трех соседних точках Грама, близкие к нулю

| № | $n$ | $\zeta(0.5+it_n)$ | $\zeta(0.5+it_{n+1})$ | $\zeta(0.5+it_{n+2})$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 333 401 | −0.00232 65321 | −0.00162 21856 | 0.00844 88197 |
| 2 | 10 265 739 | 0.00219 53893 | −0.00101 16015 | 0.00290 43398 |
| 3 | 20 700 019 | −0.00606 78549 | 0.00464 15922 | −0.00673 17207 |
| 4 | 22 060 602 | −0.00145 76244 | 0.00477 93071 | 0.00082 91226 |
| 5 | 22 930 085 | −0.00941 75668 | 0.00202 31619 | 0.00221 27749 |
| 6 | 26 744 861 | 0.00428 23469 | 0.00091 68454 | −0.00785 36040 |
| 7 | 27 838 191 | −0.00977 93752 | 0.00260 31443 | 0.00807 66231 |
| 8 | 31 529 739 | 0.00013 79851 | −0.00390 41453 | −0.00641 21563 |
| 9 | 32 980 449 | −0.00448 75141 | 0.00542 06063 | 0.00852 44378 |
| 10 | 45 513 704 | −0.00317 38499 | −0.00238 94084 | −0.00224 79058 |
| 11 | 45 970 390 | 0.00290 56653 | 0.00085 77340 | −0.00777 69921 |
| 12 | 46 104 506 | −0.00346 35139 | 0.00552 73770 | 0.00263 29073 |
| 13 | 49 086 832 | 0.00028 30038 | −0.00497 27257 | −0.00046 25985 |
| 14 | 49 845 648 | 0.00836 44817 | −0.00763 14230 | −0.00977 40154 |
| 15 | 50 941 296 | −0.00297 24145 | 0.00895 75515 | 0.00899 21534 |
| 16 | 52 876 965 | 0.00876 42238 | −0.00787 38824 | 0.00024 95172 |
| 17 | 53 335 581 | −0.00198 51916 | 0.00069 11725 | 0.00194 18227 |
| 18 | 74 972 824 | −0.00213 50399 | −0.00056 66266 | −0.00973 89106 |
| 19 | 75 603 058 | −0.00486 46810 | 0.00316 55734 | 0.00759 96091 |
| 20 | 81 755 052 | 0.00950 16993 | 0.00844 36909 | 0.00898 67914 |
| 21 | 82 514 089 | 0.00742 58341 | −0.00062 90315 | −0.00643 91133 |
| 22 | 82 978 419 | 0.00847 64232 | −0.00086 78237 | 0.00204 52694 |
| 23 | 84 153 877 | −0.00150 13153 | 0.00633 52150 | −0.00617 37619 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 85 691 854 | −0.00847 60289 | −0.00422 67876 | −0.00844 38678 |
| 25 | 86 813 816 | 0.00758 55428 | −0.00687 82447 | −0.00375 07974 |
| 26 | 91 962 033 | 0.00692 04691 | 0.00002 46855 | −0.00243 88692 |

## II.4. Дискретный момент дзета-функции Римана

Из результатов гл. 6 следует, что отношение $\mathfrak{M}(N)/N$, где

$$\mathfrak{M}(N) = \sum_{n\leqslant N}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n\right)\right|^{-1}$$

– дискретный момент дзета-функции Римана, при $N\to+\infty$ возрастает быстрее, чем любая функция вида

$$e^{(\log\log N)^{1-\delta}}, \qquad 0<\delta<0.5.$$

Вопрос об истинном порядке суммы $\mathfrak{M}(N)$ (и даже о том, конечна она или нет), остается открытым.

Пусть случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение. Тогда при любом $\mathcal{L}>0$ справедливо равенство

$$\mathsf{E}(e^{\xi\sqrt{\mathcal{L}/2}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\sqrt{\mathcal{L}/2}}\,dG(u) = e^{\mathcal{L}/4}.$$

Поэтому если бы величины

$$\xi_n = \frac{\sqrt{2}\log|\zeta(1/2+it_n)|}{\sqrt{\log\log N}}, \qquad n\leqslant N,$$

были распределены по закону, «близкому» к нормальному, то естественно было бы ожидать, что

$$\mathfrak{M}(N) = \sum_{n\leqslant N} e^{\xi_n\sqrt{(1/2)\log\log N}} \sim N(\log N)^{1/4}.$$

Между тем численные данные, приведенные в таблице II.10, показывают, что отношение $\mathfrak{M}(N)/(N(\log N)^{1/4})$ достаточно далеко от единицы.

**Таблица II.10.** Дискретный момент степени $(-1)$ дзета-функции Римана

| $N$ | $\mathfrak{M}(N)$ | $\mathfrak{M}(N)/N$ | $\mathfrak{M}(N)/(N(\log N)^{1/4})$ |
|---|---|---|---|
| 1 000 | 2 281.67 | 2.28 | 1.41 |
| 2 000 | 5 237.67 | 2.62 | 1.58 |
| 3 000 | 7 494.98 | 2.50 | 1.49 |
| 4 000 | 24 561.26 | 6.14 | 3.62 |
| 5 000 | 26 933.05 | 5.39 | 3.15 |
| 10 000 | 44 566.50 | 4.46 | 2.56 |
| 20 000 | 115 562.76 | 5.78 | 3.26 |
| 30 000 | 167 058.27 | 5.57 | 3.11 |
| 40 000 | 214 220.65 | 5.36 | 2.97 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 50 000 | 267 472.98 | 5.35 | 2.95 |
| 100 000 | 601 939.09 | 6.02 | 3.27 |
| 200 000 | 1 339 389.70 | 6.70 | 3.58 |
| 300 000 | 2 010 849.64 | 6.70 | 3.56 |
| 400 000 | 13 815 874.94 | 34.54 | 18.23 |
| 500 000 | 14 476 098.90 | 28.95 | 15.21 |
| 1 000 000 | 17 507 650.56 | 17.51 | 9.08 |
| 2 000 000 | 29 299 867.03 | 14.65 | 7.51 |
| 3 000 000 | 40 814 274.43 | 13.60 | 6.92 |
| 4 000 000 | 50 254 864.88 | 12.56 | 6.36 |
| 5 000 000 | 59 169 353.81 | 11.83 | 5.97 |
| 10 000 000 | 98 075 035.16 | 9.81 | 4.89 |

«Всплеск» в правой колонке при переходе от $N = 3\,000$ к $N = 4\,000$ вызван появлением слишком малых по модулю значений дзета-функции в точках Грама $t_n$ с номерами $n = 3\,383, 3\,783, 3\,804$, вклады от которых в $\mathfrak{M}(N)$ составляют соответственно $4\,924.53$, $1\,315.28$ и $7\,263.06$. Аналогично, большой всплеск между $N = 300\,000$ и $N = 400\,000$ возник благодаря одному лишь слагаемому суммы $\mathfrak{M}(N)$, которое отвечает слишком маленькому значению $|\zeta(0.5 + it_n)|$ в точке Грама с номером $368\,383$ (см. Таблицу II.7). Вклад от этого слагаемого, равный $11\,225\,285.77$, составляет более $80\,\%$ от величины $\mathfrak{M}(N)$.

Причина отклонения отношения в правой колонке таблицы от единицы состоит, по-видимому, в том, что вероятности $\mathsf{P}\{\xi_n \leqslant -x\}$ при слишком больших $x > 0$ (так называемые вероятности больших уклонений) перестают подчиняться нормальному закону. Не исключено, что для таких вероятностей справедлив аналог гипотезы, сформулированной в 2001 г. Хьюджесом (см. [34]). Согласно этой гипотезе при любых $\varepsilon > 0$, $T \geqslant T_0(\varepsilon)$ и $u$ с условием

$$u \geqslant \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{\log\log T}$$

мера множества точек $t$ промежутка $0 < t \leqslant T$, для которых

$$\frac{\sqrt{2}\log|\zeta(1/2+it)|}{\sqrt{\log\log T}} \leqslant -u,$$

эквивалентна $T\Delta$,

$$\Delta = c\cdot a(-0.5)\left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{u}{\sqrt{2}}\sqrt{\log\log T}\right),$$

где

$$c = \exp\left\{3\zeta'(-1) + \frac{1}{12}\log 2 - \frac{1}{2}\log\pi\right\} \approx 0.364,$$

$$a(\lambda) = \prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\lambda^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{\Gamma(m+\lambda)}{m!\,\Gamma(\lambda)}\right)^2\frac{1}{p^m},$$

так что $a(-0.5) \approx 0.919$.

# Список литературы


[1] A. Selberg, "Contributions to the theory of the Riemann zeta-function", *Arch. Math. Naturvid.*, **48**:5 (1946), 89–155; A. Selberg, *Collected Papers*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 214–280.

[2] D. A. Goldston, S. M. Gonek, *A Note on $S(t)$ and the Zeros of the Riemann Zeta-Function*, arXiv: math.NT/0511092v1.

[3] A. Selberg, "The zeta-function and the Riemann hypothesis", *C. R. Dixième Congrès Math. Skandinaves* 1946, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187–200; A. Selberg, *Collected Papers*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 341–355.

[4] K.-M. Tsang, *The Distribution of the Values of the Riemann Zeta-Function*, Ph.D. Thesis, Princeton Univ., 1984.

[5] Р. Н. Бояринов, "О распределении значений дзета-функции Римана", *Докл. РАН*, **438**:1 (2011), 14–16.

[6] J. E. Littlewood, "Two notes on the Riemann zeta-function", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **22** (1924), 234–242.

[7] E. C. Titchmarsh, "The mean-value of the zeta-function on the critical line", *Proc. London Math. Soc.* (2), **27**:1 (1928), 137–150.

[8] А. А. Лаврик, "Проблема Титчмарша дискретной теории дзета-функции Римана", *Теория чисел и анализ*, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 197–230.

[9] Я. Мозер, "Арифметический аналог одной формулы Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана", *Acta Math. Univ. Comenian.*, **37** (1980), 109–120.

[10] Я. Мозер, "О порядке одной суммы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана", *Czechoslovak Math. J.*, **41 (116)**:4 (1991), 663–684.

[11] J. Kalpokas, J. Steuding, "On the value distribution of the Riemann zeta-function on the critical line", *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **1**:1 (2011), 26–42.

[12] A. Selberg, "Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series", *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory* (Maiori, September, 25–29, 1989), Salerno, Univ. Salerno, 1992, 367–385; A. Selberg, *Collected Papers*, Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 47–64.

[13] J. Kalpokas, P. Šarka, "Small values of the Riemann zeta function on the critical line", *Acta Arith.*, **169**:3 (2015), 201–220.

[14] И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, М., 1971.

[15] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Ч. 1, ИЛ, М., 1949.

[16] J. B. Rosser, L. Schoenfeld, "Approximate formulas for some functions of prime numbers", *Illinois J. Math.*, **6** (1962), 64–94.

[17] А. А. Карацуба, "О функции $S(t)$", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:5 (1996), 27–56.

[18] А. А. Карацуба, М. А. Королёв, "Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой", *УМН*, **61**:3 (2006), 3–92.

[19] А. А. Карацуба, М. А. Королев, "Аргумент дзета-функции Римана", *УМН*, **60**:3 (2005), 41–96.

[20] И. Г. Шевцова, "О неравенстве сглаживания", *Докл. РАН*, **430**:5 (2010), 600–602.

[21] H.-K. Hwang, "Large deviations for combinatoril distributions. I: Central limit theorems", *Ann. Appl. Probab.*, **6**:1 (1996), 297–319.

[22] R. J. Backlund, "Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion", *Acta Math.*, **41** (1916), 345–375.

[23] T. S. Trudgian, *An Improved Upper Bound for the Argument of the Riemann Zeta-Function on the Critical Line II*, arXiv: math.NT/1208.5846v1.

[24] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function. Theory and Applications*, Dover Publ., New York, 2003.

[25] J. B. Conrey, "More than two fifths of the zeros of the Rimann zeta-function are on the critical line", *J. Reine Angew. Math.*, **399** (1989), 1–26.

[26] K.-M. Tsang, "Some Ω-theorems for the Riemann zeta-function", *Acta Arith.*, **46**:4 (1986), 369–395.

[27] М. А. Королёв, “О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 115–124.

[28] Р. Н. Бояринов, “О больших значениях функции $S(t)$ на коротких интервалах”, *Матем. заметки*, **89**:4 (2011), 495–502.

[29] Р. Н. Бояринов, “Изменение знака функции $S(t)$ на коротких интервалах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, № 3, 51–53.

[30] M. Radziwill, *Large Deviations in Selberg's Central Limit Theorem*, arXiv: math.NT/1108.5092v1.

[31] A. Ghosh, “On the Riemann zeta-function – mean value theorems and the distribution of $|S(t)|$”, *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 93–102.

[32] М. А. Королёв, “Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 83–118.

[33] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, B. I, B. G. Teubner, Berlin, 1909.

[34] C. P. Hughes, *Characteristic Polynomial of a Random Unitary Matrix and the Riemann Zeta Function*, Ph.D. Thesis, University of Bristol, 2001.

*Научное издание*

**Современные проблемы математики**

**Выпуск 21**

***Максим Александрович Королёв***

**Закон Грама в теории дзета-функции Римана. Часть 2**

Компьютерная верстка: *Ю. А. Пупырев*

Подписано в печать 21.04.2016.    Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
`http://www.mathnet.ru/spm/`    e-mail: `pupyrev@mi.ras.ru`