Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ**

***Выпуск 12***

Издание выходит с 2003 года

С. В. Козырев

# Методы и приложения ультраметрического и $p$-адического анализа: от теории всплесков до биофизики

МИАН

Москва
2008

УДК 512.554.232+515.17+514.83
ББК (В)22.14
С56

***Редакционный совет***:

*С. И. Адян, Д. В. Аносов, О. В. Бесов,*
*В. С. Владимиров, А. М. Зубков, А. Д. Изаак,*
*А. А. Карацуба, В. В. Козлов, С. П. Коновалов,*
*А. М. Малокостов (ответственный секретарь),*
*С. П. Новиков, А. Н. Паршин (заместитель главного редактора),*
*Ю. В. Прохоров, А. Г. Сергеев (главный редактор),*
*А. А. Славнов, Д. В. Трещёв, Е. М. Чирка*

С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2008. Вып. 12: Методы и приложения ультраметрического и $p$-адического анализа: от теории всплесков до биофизики / Козырев С. В. – 170 с.

ISBN 5-98419-028-1

Серия “Современные проблемы математики” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

ISBN 5-98419-028-1

© Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2008
© Козырев С. В., 2008

# Содержание

**1. Введение** **5**
1.1. Библиографический обзор . . . . . 12
1.2. Ультраметрические пространства . . . . . 18
1.3. Элементы $p$-адического анализа . . . . . 20
1.4. Основные и обобщённые функции на $\mathbb{Q}_p$ . . . . . 22

**2. $p$-Адические ПДО и всплески** **25**
2.1. Введение . . . . . 25
2.2. $p$-Адические всплески . . . . . 28
2.3. Непрерывное $p$-адическое всплеск-преобразование . . 33
2.4. Связь со всплесками на вещественной прямой . . . . . 36
2.5. Кратномасштабное приближение $L^2(\mathbb{Q}_p)$ . . . . . 42
2.6. $p$-Адические ПДО: снятие вырождения . . . . . 46
2.7. $p$-Адическое уравнение Шрёдингера . . . . . 52

**3. Ультраметрические ПДО и всплески** **55**
3.1. Введение . . . . . 55
3.2. Направленное дерево $\mathcal{T}(X)$ шаров . . . . . 57
3.3. Направленные деревья и ультраметрика . . . . . 65
3.4. Пополнение направленных деревьев . . . . . 69
3.5. Связь со стандартным определением абсолюта . . . . 73
3.6. Ультраметрические всплески . . . . . 75
3.7. Связь со всплесками на вещественной прямой . . . . . 79
3.8. Ультраметрические ПДО . . . . . 82
3.9. Аналог оператора Владимирова . . . . . 86
3.10. Обобщённые функции на ультраметрическом пространстве . . . . . 87
3.11. Пространство $D_0'(X)$ . . . . . 89
3.12. Разложение обобщённых функций по всплескам и задача Коши . . . . . 90
3.13. Ультраметрическое случайное поле . . . . . 94
1. Приложение . . . . . 101
3.14. Квадратичное каскадное уравнение . . . . . 102

**4. Метод реплик и ультраметрический анализ** **111**
4.1. Введение . . . . . 111
4.2. Параметризация матриц Паризи . . . . . 112

**5. Ультраметрическая динамика как модель межбассейновой кинетики** **117**
5.1. Метод межбассейновой кинетики . . . . . 117
5.2. Ландшафт и дерево бассейнов . . . . . 122
5.3. Анзац межбассейновой кинетики . . . . . 124
5.4. Ультраметрическая диффузия . . . . . 127
5.5. Приложение: кластеризация . . . . . 131

**6. Генетический код на двоичной плоскости** **135**
6.1. Введение . . . . . 135
6.2. Генетический код . . . . . 136
6.3. Параметризация пространства кодонов двоичной плоскостью . . . . . 137
6.4. Генетический код на двоичной плоскости . . . . . 141
6.5. Физико-химическая регулярность генетического кода . 143
6.6. Эукариотный код . . . . . 145

**Заключение** **147**
Список литературы . . . . . 149

# Глава 1

## Введение

Настоящая книга посвящена изложению новых методов $p$-адического и ультраметрического анализа и их приложений в физике и молекулярной биологии. Хотя основные определения будут приведены в тексте, в целом для чтения полезно знакомство с материалом книги [20] "$p$-Адический анализ и математическая физика" В. С. Владимирова, И. В. Воловича и Е. И. Зеленова в объёме первых двух глав. Целью настоящей книги является изложение некоторых новых методов и приложений $p$-адического и ультраметрического анализа, развитых после 1994 года[1] по 2007 год. Более того, пересечение настоящей книги с [20] сделано по возможности минимальным. В частности, мы не обсуждаем такие темы, как $p$-адические квантовая механика и теория струн.

Изложение данной книги охватывает несколько сюжетов $p$-адического и ультраметрического анализа и приложений. Большинство приводимых результатов являются новыми и ранее излагались только в журнальных работах.

Первый сюжет является чисто математическим и связан с развитием теории ультраметрических всплесков (вейвлетов) и исследованию её связи со спектральным анализом ультраметрических псевдодифференциальных операторов. Ультраметрические псевдодифференциальные операторы (такие, как оператор Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования) играют в ультраметрическом анализе роль, аналогичную роли оператора дифференцирования в вещественном анализе. Использование базисов всплесков позоляет вычислять спектры ультраметрических

[1] С момента выхода книги [20], в которой был подведён итог первого периода развития $p$-адической математической физики.

псевдодифференциальных операторов. Вообще, в ультраметрическом случае теория всплесков является существенно более простой, мощной и удобной, чем в вещественном. Мы рассматриваем здесь как $p$-адический случай, так и случай общих локально компактных ультраметрических пространств.

Важное место в книге занимает обсуждение приложений ультраметрического анализа. Мы обсуждаем приложения к теории спиновых стёкол, динамике макромолекул и генетике. Общей чертой рассматриваемых приложений ультраметрического анализа является то, что данные приложения описывают коллективные эффекты в сложных системах.

Основной парадигмой физики является описание явлений, исходя из первых принципов (физических законов). Для многих случаев такое описание встречает трудности. В связи с этим важной является разработка различных приближений, опирающихся на представления об эффективном поведении системы в различных режимах. Известным примером является переход от микроскопического описания многочастичной системы к кинетическому, и, затем, к гидродинамическому [10]. Другим примером является стохастический предел квантовой теории, в котором динамика квантовой системы, взаимодействующей с окружением, приближается некоторым квантовым случайным процессом [89].

В настоящей книге мы рассматриваем три примера приложений к сложным системам, где для описания системы важна ультраметрическая специфика. Вообще, часто обсуждающаяся, в частности, в приложении к биологическим системам, парадигма сложности сама по себе не позволяет делать далеко идущих выводов. Рассматриваемые примеры показывают, как предполагалось в [20], что ультраметрический анализ позволяет описывать в простом виде свойства некоторых сложных систем, для описания которых фактически не достаточно методов вещественного анализа. Разумеется, мы не утверждаем, что ультраметрические методы исчерпывают всю специфику сложных систем. Наше утверждение состоит в том, что есть классы сложных систем, некоторые важные свойства которых эффективно описываются ультраметрическим анализом.

Основные результаты, излагаемые в настоящей книге:

1) Теория вещественных всплесков (вейвлетов) является важным разделом современного анализа и имеет многочисленные

применения [42], [70], [210]. Мы вводим конструкцию базисов $p$-адических всплесков и $p$-адического кратномасштабного приближения. Базисы вещественных всплесков строятся при помощи сдвигов на целые числа и растяжений на степени двух. Поскольку в $p$-адическом случае целые числа не образуют решётку, а образуют плотное множество в единичном шаре, вещественное определение базисов всплесков не может быть непосредственно перенесено на $p$-адический случай. Мы предлагаем специальный набор сдвигов, при помощи которого вводим базисы $p$-адических всплесков.

Используемое нами определение $p$-адических базисов всплесков обладает замечательным свойством – существует явным образом вводимое отображение, которое переводит $p$-адический базис всплесков на вещественный базис всплесков на полупрямой. Более того, при таком отображении вещественное кратномасштабное приближение (представление пространств функций через индуктивные пределы или пополнения таких пределов от пространств всплесков) переходит в естественную фильтрацию пространства основных функций на поле $p$-адических чисел. Таким образом, конструкции вещественного кратномасштабного приближения и базисов всплесков можно рассматривать как перенос на вещественный случай естественных конструкций $p$-адического анализа.

Мы приходим к точке зрения, что теория всплесков является по существу $p$-адической, и именно в $p$-адическом случае должна иметь наиболее простой и естественный вид, и быть наиболее мощной и удобной. Мы приводим следующие аргументы в пользу такой точки зрения.

Во-первых, в $p$-адическом случае дискретное всплеск-преобразование (разложение по базису всплесков) по существу совпадает с непрерывным интегральным всплеск-преобразованием. В вещественном случае эти два преобразования радикально различались.

Во-вторых, одним из важных результатов вещественной теории всплесков являются утверждения о том, что некоторые классы интегральных операторов (псевдодифференциальные операторы и операторы Кальдерона–Зигмунда) имеют в базисах всплесков разреженные матрицы, близкие к диагональным (то есть матричные элементы таких матриц убывают с удалением от главной диагонали). Мы доказываем, что в $p$-адическом случае опе-

раторы из некоторого широкого класса интегральных операторов (например, оператор Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования) диагональны в базисах всплесков (то есть внедиагональные матричные элементы в точности равны нулю). Более того, при помощи $p$-адического анализа всплесков мы вычисляем спектры операторов из этого класса.

Данные результаты изложены во второй главе книги.

2) Следующей темой книги является обобщение анализа всплесков и спектральной теории псевдодифференциальных операторов на случай произвольных полных локально компактных ультраметрических пространств со счётной базой. Мы изучаем двойственность таких пространств к деревьям с некоторым частичным порядком.

Мы вводим базисы всплесков на таких пространствах как некоторые обобщения базисов $p$-адических всплесков. Поскольку для общих ультраметрических пространств нет никакой структуры действия группы, то невозможно рассматривать сдвиги на таких пространствах. Для введения базисов всплесков мы используем двойственность между ультраметрическими пространствами и деревьями. Таким образом в данной весьма общей постановке для построения базисов всплесков не требуется использовать ни сдвигов, ни растяжений.

Далее, мы вводим класс псевдодифференциальных операторов на ультраметрических пространствах как класс интегральных операторов специального вида:

$$Tf(x) = \int T(\sup(x,y))(f(x) - f(y))\, d\nu(y).$$

Обозначение $T(\sup(x,y))$ значит, что ядро интегрирования, как функция $x$ и $y$, зависит от минимального шара в ультраметрическом пространстве, содержащего точки $x$ и $y$, $\nu$ есть борелевская мера на ультраметрическом пространстве.

Для таких операторов (при выполнении некоторых условий сходимости) мы показываем, что базис ультраметрических всплесков является базисом из собственных векторов. Более того, мы вычисляем спектры ультраметрических псевдодифференциальных операторов. Таким образом, все основные результаты теории $p$-адических всплесков и псевдодифференциальных операторов допускают перенос на случай общих локально компактных ультраметрических пространств.

Мы исследуем задачи Коши для линейных и нелинейных интегральных ультраметрических уравнений.

Затем мы рассматриваем гауссовское случайное поле на ультраметрическом пространстве и показываем, что для такого случайного поля можно ввести аналог марковского свойства. Марковское свойство для случайных процессов вещественного аргумента связано с существованием порядка на поле вещественных чисел. На поле $p$-адических чисел невозможно ввести естественный порядок, но на шарах в ультраметрическом пространстве такой порядок существует. Мы определяем ультраметрическое марковское свойство, исходя из порядка на шарах.

Данные результаты изложены в третьей главе книги.

Описанные выше результаты относились к разработкам новых методов ультраметрического анализа. Далее, мы развиваем приложения ультраметрического анализа к спиновым стёклам, моделям динамики макромолекул (в частности, белков), и к описанию генетического кода. Таким образом, изучаемые приложения относятся к наноскопическому масштабу размеров (порядка $10^{-7}$ см, размер молекулы), что отличает их от ранее обсуждавшихся [20] приложений, где характерным размерным масштабом был планковский (порядка $10^{-33}$ см).

3) Первое приложение ультраметрических методов в физике было предложено в методе реплик теории спиновых стёкол [211]. Возникновение ультраметрики в этом подходе рассматривалось как общее свойство статистической механики неупорядоченных систем со многими степенями свободы, и технически было связано с тем, что процесс ветвления в бесконечномерном пространстве естественным образом порождает ультраметрическое пространство.

Мы развиваем подходы к статистической физике неупорядоченных систем, связанные с ультраметрическими псевдодифференциальными операторами. В частности, мы показываем, что после соответствующей перенумеровки строк и столбцов матрицы Паризи (параметра порядка нарушения репличной симметрии) матричный элемент этой матрицы будет зависеть от $p$-адической нормы разности номеров строки и столбца

$$Q_{ab} = q(|a-b|_p).$$

Данные результаты изложены в четвертой главе книги.

4) Следующее рассматриваемое нами приложение ультраметрики в физике связано с моделями случайного блуждания на сложных энергетических ландшафтах [153], [156], [264], [267]. Такие модели актуальны для описания динамики сложных макромолекул, таких, как белки (в рамках релаксационной концепции динамики белка [9]). В свою очередь, описание динамики белков нужно для исследования их биологической функции.

Мы рассматриваем случайное блуждание на энергетическом ландшафте, характеризующееся некоторой температурой $\theta$ (и обратной температурой $\beta = \theta^{-1}$). Для некоторого класса ландшафтов такое случайное блуждание будет иметь тенденцию находиться в областях с низкой энергией, вблизи локальных минимумов. Такое случайное блуждание можно грубо описать системой кинетических уравнений, отвечающей переходам между локальными минимумами с вероятностями перехода в единицу времени, задаваемыми аррениусовскими факторами

$$e^{-\beta \Delta E},$$

где $\Delta E$ есть величина барьера активации перехода.

Для сложных ландшафтов локальных минимумов много, и, соответственно, много переходов между ними. Для таких случаев мы рассматриваем кластеризацию локальных минимумов относительно метрики $e^{\beta E_{ij}}$, где $E_{ij}$ есть величина энергетического барьера между локальными минимумами энергии $i$ и $j$. Для энергетического ландшафта общего положения такая метрика будет ультраметрикой, и система кинетических уравнений (называемая системой уравнений межбассейновой кинетики) будет иметь иерархический вид. Название “межбассейновая кинетика” означает, что мы кластеризовали локальные минимумы в иерархический набор кластеров, называемых бассейнами.

Мы показываем, что система уравнений межбассейновой кинетики при некотором наборе естественных для энергетического ландшафта общего положения предположений будет эквивалентна ультраметрическому псевдодифференциальному уравнению. В простейшем модельном случае такое уравнение будет иметь вид $p$-адического уравнения теплопроводности, предложенного в [20] из чисто математических соображений:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + D_x^{\alpha} f(x,t) = 0.$$

Здесь $t$ есть время, $x$ есть конформационная переменная, описывающая набор бассейнов межбассейновой кинетики, $D_x^\alpha$ есть оператор Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования (действующий по конформационной координате $x$), показатель $\alpha$ пропорционален обратной температуре $\beta$. Можно сказать, что это уравнение есть уравнение динамики белка в рамках релаксационной концепции в приближении межбассейновой кинетики.

Фактически адекватность использования $p$-адического уравнения теплопроводности для описания динамики белка подтверждается экспериментом – предсказываемые таким уравнением аномальные зависимости релаксации от времени и температуры совпадают с данными спектроскопических экспериментов по связыванию CO (угарного газа) миоглобином.

Данные результаты изложены в пятой главе книги.

5) Можно сказать, что первым приложением ультраметрики в науке вообще была таксономическая классификация видов живых организмов Карлом Линнеем (Carl von Linne), изложенная в Systema Naturae в 1735 году, задолго до возникновения понятия ультраметрики и неархимедова анализа. Таксономическая классификация есть по существу параметризация множества видов некоторым ультраметрическим пространством. Таким образом, приложения ультраметрики в естественных науках имеют весьма продолжительную историю.

Возможно, именно биология является основной областью приложений ультраметрических методов. Есть известное высказывание, что математические методы демонстрируют удивительную эффективность в физике и удивительную неэффективность в биологии [275]. Неэффективность математических методов в биологии может быть связана именно с тем, что к биологии пытались применять, как и к физике, методы вещественного анализа, в то время как базовые модели биологии, возможно, должны выражаться на ультраметрическом языке.

В данной книге мы развиваем следующее приложение ультраметрики к биологии – строим 2-адическую параметризацию генетического кода. Генетический код есть отображение пространства кодонов (троек нуклеотидов) на пространство аминокислот (плюс символ остановки трансляции, стоп-кодон). Такое отображение позволяет преобразовать один линейный полимер в другой – последовательность нуклеотидов (нуклеиновую кислоту) в последовательность аминокислот (белок). Нуклеотиды бывают четырёх

сортов, соответственно, кодонов 64, в то время как аминокислот насчитывается 20 разновидностей. Таким образом, имеет место вырождение генетического кода.

Мы вводим специальную параметризацию пространства кодонов 2-мерной таблицей $8 \times 8$ (двоичной плоскостью) с естественной 2-адической ультраметрикой. Мы показываем, что вырождение генетического кода после такой параметризации будет описываться локальным постоянством отображения, определённого на ультраметрическом пространстве. Более того, само это отображение будет весьма симметричным, и гидрофобные аминокислоты (слабо взаимодействующие с водой) будут кластеризоваться в два шара на двоичной плоскости. Это показывает, что отображение генетического кода имеет явную 2-адическую структуру.

Данные результаты изложены в шестой главе книги.

**Благодарности.** Автор благодарен В. С. Владимирову, И. В. Воловичу, А. Ю. Хренникову, В. А. Аветисову, А. Х. Бикулову, В. И. Гольданскому, Е. И. Зеленову, Б. Драговичу, С. Альбеверио и Дж. Паризи за плодотворные обсуждения и важные замечания. Автор был частично поддержан грантами DFG 436 RUS 113/809/0-1 и DFG 436 RUS 113/951, грантами РФФИ 05-01-04002-ННИО-а, 08-01-00727-а, грантом Президента Российской Федерации для поддержки научной школы НШ 3224.2008.1 и программой Отделения математики РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

## 1.1. Библиографический обзор

В настоящем разделе кратко обсуждается литература, касающаяся основных идей и результатов $p$-адического и ультраметрического анализа и математической физики, а также приложений и смежных вопросов. Данный обзор литературы ни в коей мере не претендует на полноту.

$p$-Адические числа были введены в 1899 году К. Гензелем. Сильное неравенство треугольника было введено Хаусдорфом [161], понятие ультраметрики было введено Краснером [196]. Поля $p$-адических чисел широко используются в теории чисел и алгебраической геометрии. Книги Коблица [48], Малера [206], Шикхофа [235], Монна [213], Робера [233], Гуве [160] могут служить введением в $p$-адические числа и в $p$-адический анализ. В качестве начального чтения по алгебре и теории чисел можно использовать

книги: Боревич, Шафаревич [11], Виноградов [13], А. Вейль [12]. Введение в алгебраическую геометрию, в том числе над $p$-адическими полями, можно найти в [85].

$p$-Адическому анализу посвящены многочисленные работы. Различные вопросы $p$-адического анализа (в том числе функционального) рассматриваются в [115], [121], [187], [145], [147], [148], [253],[168]. Применение $p$-адического анализа в теории алгебраических групп рассмотрено в [73]. Связь $p$-адического анализа и анализа на деревьях изучалась в [238]. Теория обобщённых функций над произвольной локально компактной группой была развита в работе Брюа [127] и над локально компактным несвязным полем Гельфандом, Граевым и Пятецким-Шапиро [30]. Изложение теории $p$-адических обобщённых функций можно найти в [30], [15]. $p$-Адическая теория Коломбо обсуждалась в [2]. По поводу $p$-адических групп Шоттки и $p$-адической униформизации см. Манин [65] и Геррицен и Ван дер Пут [159]. Жесткая аналитическая геометрия была введена Тейтом [251], см. также [159]. Теория $p$-адических дифференциальных уравнений представлена в книге Дворка [145]. Конструкция Брюа–Титса действия $p$-адических групп на деревьях построена в [128], [129]. Двойственность между направленными деревьями и ультраметрическими пространствами обсуждалась Леминым [203]. Ультраметрические пространства, являющиеся границами деревьев, рассматривались в [134], [133]. Различные аспекты $p$-адического функционального анализа обсуждались в [147], [148], [253], [137], [252], [236]. $p$-Адический анализ применялся в различных задачах алгебраической геометрии [165], [166], [169], [273], [65].

$p$-Адическая математическая физика была систематически изложена в книге Владимирова, Воловича и Зеленова [20]. Различные разделы $p$-адической математической физики обсуждаются в книгах Хренникова [171], [172], [82], [185], Кочубея [189]. Приложения $p$-адического анализа к когнитивным наукам и психологии изучаются в книгах Хренникова [83], [175], [174], и его работах [173], [92], [176], [84]. Различные результаты по $p$-адической математической физике докладывались на конференциях по $p$-адической математической физике [87], [274]. $p$-Адические динамические системы и их приложения обсуждались в [172], [175], [82], [83], [185], [217], [218], [249]. Применения $p$-адических динамических систем к криптографии развивались Анашиным [3], [4], [102], [103].

Понятие псевдодифференциального оператора на поле $\mathbb{Q}_p$ (оператора $p$-адического дробного дифференцирования и интегрирования $D^\alpha$) было введено Владимировым [16], [15]. Спектральная теория оператора $D^\alpha$ была построена Владимировым [256], при этом был найден явный вид собственных функций (см. также [17]), имеющих компактный носитель. Были найдены также явные выражения для собственных функций и собственных чисел оператора $D^\alpha$, $\alpha > 0$, в шаре и на сфере [20]. Спектральная теория псевдодифференциального оператора вида $D^\alpha + V(x)$, введённого в [258], (оператор типа Шрёдингера) на открыто-замкнутом множестве $G$ была построена в [16], см. [20]. Дальнейшее развитие спектральной теории оператора $D^\alpha + V(x)$ было проведено Кочубеем [62], [61]. $p$-Адические функции Грина рассматривались Бикуловым [7] и Кочубеем [63]. Характеры расширений поля $\mathbb{Q}_p$ и соответствующих групп иделей и их применение к $p$-адическому анализу расматривалось в [23]. Случайные блуждания на $p$-адических числах рассмаривались в книге [20], Альбеверио и Карвовским [95], [94], Ясудой [268]. Случайное поле на $p$-адических числах ($p$-адическое броуновское движение), являющееся решением стохастического псевдодифференциального уравнения с оператором Владимирова, было введено Бикуловым и Воловичем [8]. Различные примеры $p$-адических псевдодифференциальных операторов рассматривались в [188].

$p$-Адические всплески были введены Козыревым [50]. Конструкция $p$-адических всплесков была обобщена Бенедетто и Бенедетто [118], [117] на некоторый класс абелевых локально компактных групп. Новые примеры $p$-адических всплесков были введены в [242], [90], [184]. В работе Альбеверио и Козырева [97] было показано, что непрерывное $p$-адическое всплеск-преобразование совпадает с дискретным. В работе [99] были описаны фреймы $p$-адических всплесков, возникающие как орбиты действия $p$-адической аффинной группы. Для обзора различных методов и приложений анализа всплесков см. [42], [47], [210], [70], [192]. Непрерывное $p$-адическое всплеск преобразование обсуждалось в [100], [101]. $p$-Адические пространства Лизоркина обсуждались в [91]. В работе Муртага [215] изучалось всплеск-преобразование на деревьях. Такие деревья, в частности, возникают при применении алгоритмов кластеризации [214]. В работах Козырева и соавторов были введены новые классы $p$-адических псевдодифференциальных операторов, которые не диагонализуются преобразова-

нием Фурье, но диагонализуются всплеск-преобразованием [52], [53], [195]. В работах Козырева и Хренникова [57], [177] и Козырева [54] была разработана теория псевдодифференциальных операторов и всплесков на локально компактных ультраметрических пространствах. В [181] эта теория была применена для построения случайных полей на ультраметрических пространствах и введения понятия ультраметрической марковости. Случайные процессы и обобщённые случайные процессы рассматривались многими авторами. Отметим, в частности, Альбеверио и др. [93], Гельфанд и Виленкин [31], Гихман и Скороход [32], Аккарди, Фриджерио и Льюис [88], Хида [78].

С теорией $p$-адических всплесков и псевдодифференциальных операторов тесно связаны теория базисов Фурье–Уолша и анализ на двоичном отрезке (или канторовской диадической группе), с которыми можно ознакомиться в [237], [34], [34], [36], [75], [198].

С ультраметрическим анализом связан анализ на фракталах. Об интегральных операторах на фракталах, их спектральной теории и связи с теорией чисел можно прочесть в [199], [200], [201], [186], [248].

Были развиты $p$-адические модели в теории струн, квантовой механике и квантовой теории поля. Гипотеза о возможной неархимедовой $p$-адической структуре пространства-времени на планковских масштабах была предложена Воловичем [262]. Подчеркивалась также роль рациональных чисел, выдвигалась идея флюктуирующих числовых полей [28], [262], [263]. Возможная роль $p$-адического анализа в математической физике в контексте суперанализа и суперсимметрии отмечалась Владимировым и Воловичем [262]. Обсуждение возможной роли теории чисел в физике можно найти в работах Манина [207], [208] и Варадараджана [255]. $p$-Адическая квантовая механика и теория поля обсуждались в [14], [18], [41], [44], [45], [46], [64], [79], [80], [81], [96], [138], [139], [140], [141], [170], [182], [189], [204], [227], [254], [255], [257], [258], [271], [272] и многих других работах.

В работах Миссарова и Лернера изучалась теория перенормировок для иерархической фермионной модели [205], [66], [67], [68], [69].

Формулировка $p$-адической теории струн с $p$-адичнозначными и комплекснозначными амплитудами была предложена Воловичем [28], [262], [263]. Фройнд и Олсон [157], Фройнд, Олсон и Виттен [122] внесли существенный вклад в эту теорию, рассмотрев

$p$-адические бета функции в качестве струнных амплитуд. Идея адельного подхода выдвинута Маниным [208]. Важная адельная формула была отмечена Фройндом и Виттеном [158], см. также [123]. Проблемы регуляризации этой формулы и альтернативная адельная формула были рассмотрены Арефьевой, Драговичем и Воловичем [105]. $p$-Адические многопетлевые амплитуды на дереве Брюа–Титса рассматривались Чеховым, Мироновым и Забродиным [131], [132], [270]. Различные теории $p$-адических струн рассматривались [105], [106], [107]. Адельные формулы, их регуляризация, и применение к теории струн, для различных расширений поля $p$-адических чисел были рассмотрены в работах Владимирова [261], [259], [19], [260], [21], [22], [24], [25], [26]. В частности, адельные формулы для различных расширений поля $p$-адических чисел позволяют получить амплитуды, соответствующие разным струнным теориям. В работах [150], [27], [6] рассматривалось нелинейное псевдодифференциальное (вещественное) уравнение, возникающее в теории $p$-адических струн.

Связь между $q$-анализом и квантовыми группами была отмечена в работе Арефьевой и Воловича [109]. Общий подход к некоммутативной геометрии развивался Конном [135]. Связь между некоммутативной и $p$-адической геометрией через конструкцию свободных когерентых состояний была обнаружена Козыревым [194], [49], [193], [51]. Первые шаги в изучении $p$-адических уравнений Эйнштейна и квантовой $p$-адической гравитации были предприняты в работах Арефьевой, Воловича, Драговича и Фрэмптона [108], [110].

Применение ультраметричности в статистической физике неупорядоченных систем (в первую очередь, спиновых стёкол) обсуждалось Мезардом, Паризи, Вирасоро [211] и другими авторами, см., например, обзор [232]. Обзор метода реплик можно найти в [43]. Статфизика неупорядоченных полимеров обсуждалась Гросбергом и Хохловым [39], [38]. Репличная процедура была введена Эдвардсом и Андерсеном [146]. Подход нарушения репличной симметрии был разработан Паризи [220], [221], [222], [223], [224], [225], [226]. Связь с ультраметрической геометрией была обнаружена Мезардом, Паризи, Сурласом, Тулузом и Вирасоро [212]. Также обсуждение ультраметрики, возникающей в методе реплик, можно найти в [231], [229], [230]. В работах Аветисова, Бикулова, Козырева [111] и Паризи, Сурласа [228], была построена $p$-адическая параметризация матрицы Паризи. В [228], [58]

обсуждался предел $n \to 0$ метода реплик в $p$-адической параметризации. В работах Карлуччи, Де Доминичиса, Темесвари [130], [136] обсуждалась связь репличных расчётов и фурье-анализа на абелевых группах. В работах [178], [179], [180] Козырева и Хренникова был разработан анзац нарушения репличной симметрии, обобщающий анзац Паризи и связанный с ультраметрическими пространствами общего вида.

Иерархические модели динамики неупорядоченных систем исследовались разными авторами [269], [219], [124], [163], [234], [190], [120], [191], [162], [209]. Динамика на ландшафте, задаваемом тэта-функцией, обсуждалась в [216]. Обсуждение ландшафтной парадигмы динамики сложных макромолекул является предметом многочисленных работ. В частности, это обсуждение можно найти в работах [153], [154], [202], [155], [104], [164], [265], [264], [126]. Важным способом исследования макромолекул является молекулярная динамика, см. например [239], [240], [241]. Приближение межбассейновой кинетики динамики на ландшафтах разрабатывалось в [246], [247], [162], [116], [197]. В частности, в работе Беккера и Карплуса [116] была описана межбассейновая кинетика для тетрапептида, ландшафт энергии которого исследовался при помощи молекулярной динамики. В работах Аветисова, Бикулова, Козырева и Осипова [112], [53], [1], [113] было показано, что в приближении межбассейновой кинетики динамика на сложном ландшафте эквивалентна ультраметрической диффузии. Была исследована модель $p$-адической диффузии со стоком и показано, что такая модель адекватно описывает спектроскопические эксперименты по динамике белка (связывание миоглобин–CO) [112].

Применение $p$-адических интегральных уравнений к описанию каскадных моделей турбулентности изучалось Зеленовым и Фищенко [149].

Модели генетического кода изучались различными авторами, см. в частности работу Свансон [250] (применение модели кода Грея для описания генетического кода), [167], [244]. В работах [152], [151] была предложена модель описания вырождения генетического кода с использованием квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl(2) \oplus sl(2))$ в пределе $q \to 0$ в рамках аналогии между генетическим кодом и кварковой моделью барионов.

В работах [175], [174] было предложено использовать 4-адическое информационное пространство (в смысле [171], [83]) для представления генетической информации. В работе [142] Б. Дра-

говича и А. Драгович генетический код был представлен как локально постоянное отображение на информационном 5-адическом пространство кодонов, при этом вырождение генетического кода описывалось локальным постоянством этого отображения относительно 2-адической и 5-адической метрик. В работе Козырева и Хренникова [183] для описания вырождения и физико-химических свойств генетического кода использовалось двумерное 2-адическое пространство.

## 1.2. Ультраметрические пространства

Напомним некоторые конструкции, используемые в ультраметрическом и $p$-адическом анализе, см. [20].

Ультраметрическое пространство есть метрическое пространство, где выполнено сильное неравенство треугольника.

Определение 1. Ультраметрическое пространство $X$ есть множество с ультраметрикой $d(x, y)$ (где $d(x, y)$ называется расстоянием между точками $x$ и $y$ из $X$), то есть функцией двух переменных, удовлетворяющей свойствам положительности и невырожденности

$$d(x, y) \geqslant 0, \qquad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \ \ \forall x, y;$$

симметричности

$$d(x, y) = d(y, x) \ \ \forall x, y;$$

и сильному неравенству треугольника

$$d(x, y) \leqslant \max(d(x, z), d(y, z)) \quad \forall x, y, z.$$

Основные свойства ультраметрических пространств:

1) Все треугольники (тройки точек) в ультраметрическом пространстве равнобедренны, причём длины двух равных сторон больше или равны длине третьей стороны.

Это свойство является характеристическим, то есть метрическое пространство, где все треугольники имеют такое свойство, является ультраметрическим.

2) Любые два шара в ультраметрическом пространстве либо не пересекаются, либо один содержит другой.

Шаром называется множество всех точек, удалённой от некоторой точки (центра шара) на расстояние не более заданного (радиус шара). Таким образом, на множестве шаров в ультраметрическом пространстве задан иерархический порядок по вложению. Можно говорить, что ультраметрический анализ оперирует с иерархическими системами. Подробнее эта тема будет рассмотрена при обсуждении связи ультраметрических пространств и направленных деревьев.

3) Любая точка шара в ультраметрическом пространстве является его центром. Диаметр шара равен его радиусу.

Диаметром шара называется точная верхняя грань для расстояний между точками этого шара.

Ультраметрические пространства могут возникать как некоторые подмножества в вещественных пространствах.

Пример. Примером ультраметрического пространства является множество из трёх точек евклидовой плоскости, являющихся вершинами равнобедренного треугольника, для которого длины двух равных сторон больше или равны длине третьей стороны. Ультраметрика здесь возникает как ограничение евклидовой метрики на плоскости на множество из трёх точек.

Таким образом, мы вложили ультраметрическое пространство из трёх точек в вещественную евклидову плоскость. Аналогично, ультраметрическое пространство из $n+1$ точек может быть вложено в $n$-мерное вещественное пространство (а также в пространства большей размерности).

Таким образом, подмножества в бесконечномерных вещественных пространствах могут нести структуру ультраметрического пространства. В некотором смысле, это есть свойство общего положения для дискретных подмножеств в бесконечномерных пространствах.

А именно, если мы рассмотрим в шаре высокой размерности три случайные точки $A$, $B$, $C$ (равнораспределённые по шару, и выбранные независимо), то эти три точки почти наверняка будут находиться у поверхности шара (поскольку с ростом размерности единичного шара доля меры, приходящаяся на слой данной толщины у поверхности, стремится к единице). Рассматривая теперь вектора, проведенные из начала координат к точкам $A$, $B$, $C$, мы

по аналогичным соображениям можем заключить, что эти вектора в случае общего положения близки к ортогональным. Следовательно, в случае общего положения точки $A$, $B$, $C$ образуют почти равносторонний треугольник.

Такого рода соображения являются важными для физики сложных систем (например, спиновых стёкол), где возникают ультраметрические пространства, связанные с подмножествами в бесконечномерных вещественных пространствах, порождаемыми некоторыми итерируемыми процедурами (вроде процесса ветвления в бесконечномерном пространстве).

## 1.3. Элементы $p$-адического анализа

Важнейшим примером ультраметрического пространства является поле $p$-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Поле $p$-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ есть пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по $p$-адической норме на $\mathbb{Q}$. Эта норма определяется следующим образом. Произвольное рациональное число $x$ может быть записано в виде $x = p^\gamma \frac{m}{n}$, где целые $m$ и $n$ не делятся на $p$. $p$-Адическая норма не равного нулю рационального числа $x = p^\gamma \frac{m}{n}$ вводится как $|x|_p = p^{-\gamma}$. Сильное неравенство треугольника для $p$-адических чисел принимает вид

$$|x + y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p).$$

$p$-Адическая норма согласована с умножением:

$$|xy|_p = |x|_p \, |y|_p.$$

$p$-Адические нормы ненулевого рационального числа $x$ удовлетворяют формуле адельного произведения

$$\prod_p |x|_p = 1,$$

где перемножение идёт по всевозможным простым $p$ и $p = \infty$ (соответствующая норма есть вещественный модуль). Это бесконечное произведение сходится, поскольку только конечное число норм в нём отлично от 1.

Таким образом, произведение всех $p$-адических норм положительного рационального числа $x$ есть $1/x$.

Аналогичные адельные формулы имеют место для $p$-адических гамма- и бета-функций. Основываясь на этом, а также на том, что древесные амплитуды в теории струн имеют вид бета-функций, было предложено (см. для изложения [20]) использовать адельные формулы для построения $p$-адических теорий струн.

$p$-Адические числа находятся во взаимно однозначном соответствии со (сходящимися в $p$-адической норме) рядами вида

$$x = \sum_{j=\gamma}^{\infty} x_j p^j, \quad x_j = 0, \dots, p-1. \tag{1.1}$$

Кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых $p$-адических чисел содержит $p$-адические числа с нормой, не превосходящей 1, то есть числа вида

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^j, \qquad x_j = 0, \dots, p-1.$$

Мы отождествляем группу $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ с множеством дробей вида

$$x = \sum_{j=\gamma}^{-1} x_j p^j, \qquad x_j = 0, \dots, p-1 \tag{1.2}$$

со сложением по модулю 1.

В настоящей книге мы рассматриваем анализ вещественнозначных и комплекснозначных функций $p$-адического аргумента (а также с аргументами в ультраметрических пространствах более общего вида).

Для меры Хаара $\mu$ на $\mathbb{Q}_p$ мера шара равна его диаметру. Такая мера будет инвариантна относительно сдвигов.

Комплекснозначный характер $\chi(x)$ $p$-адического аргумента для $x$, заданного (1.1), определен как

$$\chi(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=\gamma}^{-1} x_j p^j\right).$$

Для этой функции будет выполнено свойство характера $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$. $p$-Адическое преобразование Фурье комплекснозначной функции $f(x)$ определено как

$$F[f](k) = \int \chi(kx) f(x)\, d\mu(x).$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$F^{-1}[f](x) = \int \chi(-kx) f(k)\, d\mu(k).$$

Оператор Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования определяется следующим образом

$$D^\alpha f(x) = F^{-1} \circ |k|_p^\alpha \circ F[f](x), \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

то есть такой оператор диагонализуется $p$-адическим преобразованием Фурье и после преобразования Фурье принимает вид умножения на степень $p$-адической нормы импульса $|k|_p^\alpha$.

При $\alpha > 0$ оператор Владимирова может быть записан в виде

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|_p^{1+\alpha}}\, d\mu(y), \tag{1.3}$$

где

$$\Gamma_p(-\alpha) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}}$$

есть постоянная ($p$-адическая гамма-функция).

## 1.4. Основные и обобщённые функции на $\mathbb{Q}_p$

В настоящем разделе помещены (в очень кратком виде) основные определения теории основных и обобщённых функций на $\mathbb{Q}_p$, см. [20], [30].

Мы рассматриваем комплекснозначные функции $p$-адического аргумента. Функция $f$ называется локально постоянной, если $\forall x \in \mathbb{Q}_p$ существует шар в $\mathbb{Q}_p$, содержащий $x$, на котором функция $f$ постоянна. Диаметр максимального такого шара называется диаметром локального постоянства функции $f$ в точке $x$, точная нижняя грань грань от диаметров локального постоянства по $x$ называется диаметром локального постоянства функции $f$.

Локально постоянная функция с компактным носителем называется основной функцией, пространство таких функций обозначается $D = D(\mathbb{Q}_p)$. Любая основная функция является конечной линейной комбинацией характеристических функций шаров.

На пространстве основных функций имеет место естественная фильтрация линейными подпространствами $D_{\gamma N}$. Пространство $D_{\gamma N}$, $\gamma \leqslant N$ есть пространство всех функций с носителем в шаре

с центром в нуле диаметра $p^N$ и диаметром локального постоянства $p^\gamma$.

Фильтрация $D(\mathbb{Q}_p)$ есть согласованное с порядком[2] отображение упорядоченного множества индексов $(\gamma, N)$ на упорядоченное (по вложению) множество пространств $D_{\gamma N}(\mathbb{Q}_p)$, причём $D(\mathbb{Q}_p)$ есть предел по вложению $D_{\gamma N}$ относительно порядка (индуктивный предел):

$$D = \bigcup_{\gamma, N} D_{\gamma N}, \qquad \gamma, N \in \mathbb{Z}, \quad \gamma \leqslant N.$$

Индексы упорядочены таким образом, что соответствующие пространства основных функций вложены друг в друга:

$$D_{\gamma N} \supset D_{\gamma' N'}$$

при $\gamma \leqslant \gamma'$, $N \geqslant N'$.

Топологию в $D(\mathbb{Q}_p)$ определим как топологию индуктивного предела. Таким образом, последовательность $\{f_k\}$ функций из $D(\mathbb{Q}_p)$ сходится, если эта последовательность целиком лежит в некотором пространстве $D_{\gamma N}$ и сходится как последовательность в этом пространстве. Поскольку пространство $D_{\gamma N}$ конечномерно, топология там определяется однозначно (например, поточечной сходимостью).

Обобщённой функцией называется (всюду определённый) линейный функционал на пространстве $D$ основных функций. Такой функционал будет автоматически непрерывным. Линейное пространство обобщённых функций обозначают $D' = D'(\mathbb{Q}_p)$. На пространстве обобщённых функций определена слабая топология.

[2] Для определения частично упорядоченного множества см. определение 22.

# Глава 2

## $p$-Адические ПДО и всплески

### 2.1. Введение

В настоящей главе вводятся и иссследуются $p$-адические всплески и строится теория $p$-адических псевдодифференциальных операторов (или сокращенно ПДО), диагональных в базисах всплесков. Такие операторы являются более общими по сравнению с изучавшимися ранее.

Теория всплесков является важным разделом современного анализа и имеет много приложений. Для изложения результатов теории всплесков см. [42], [210], [70], [47], [71], [72]. В [5] рассматриваются некоторые приложения теории всплесков.

Базисы всплесков строятся при помощи сдвигов и растяжений фиксированной функции (всплеска). Теория базисов всплесков связана с теорией кратномасштабных приближений пространств функций. Также изучается непрерывное всплеск-преобразование – интегральное преобразование, связанное с разложением по преобразованиям всплеска под действием представления аффинной группы. При попытке построить $p$-адические базисы всплесков возникает следующая проблема – целые числа, которые образуют решетку на вещественной прямой (и используются для сдвигов при построении базиса всплесков), в $p$-адическом случае образуют плотное множество в шаре. Следовательно, сдвиги некоторой функции на целые числа и растяжения в $p$-адическом случае не могут быть базисом в $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Эта проблема была решена в [50], где были построены $p$-адические базисы всплесков в $L^2(\mathbb{Q}_p)$. При этом были использованы сдвиги на представители из классов эквивалентности факторгруппы $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ (то есть использовался набор сдвигов на элементы факторгруппы, а не на элементы подгруппы целых чисел).

Далее, мы показываем, что $p$-адические всплески могут быть переведены в вещественные всплески Хаара на положительной полупрямой при помощи специального преобразования, называемого $p$-адической заменой переменной (то же верно для кратномасштабных приближений). Такое отображение связано с теорией базисов Уолша на модифицированном отрезке и модифицированной полупрямой [34], [198].

Мы рассматриваем $p$-адическое непрерывное всплеск-преобразование и показываем, что оно по существу совпадает с дискретным (разложением функции по базису всплесков).

Псевдодифференциальные операторы (или ПДО) – это операторы, диагонализуемые преобразованием Фурье, а также операторы, строящиеся из таких естественным образом. В интегральном виде операторы, диагонализуемые преобразованием Фурье, будут записываться в виде

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} T(x-y)f(y)\,d\mu(y),$$

где функция $T(x-y)$ (интегральное ядро) удовлетворяет соответствующим условиям интегрируемости. Мы будем всегда рассматривать регуляризованный вид такого оператора:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} T(x-y)(f(x)-f(y))\,d\mu(y). \tag{2.1}$$

В настоящей главе мы рассматриваем обобщение оператора (2.1), для которого интегральное ядро имеет вид функции от двух переменных $T(x,y)$, удовлетворяющей определенным условиям.

Будут рассмотрены следующие случаи:

$$T(x,y) = T(|x-y|_p); \tag{2.2}$$

$$T(x,y) = \text{const}, \quad \text{если } |x-y|_p = \text{const для фиксированного } x. \tag{2.3}$$

Это условие эквивалентно можно переформулировать следующим образом: функция $T(x,y)$ зависит только от минимального шара в $\mathbb{Q}_p$, содержащего обе точки $x$ и $y$:

$$T(x,y) = T(\sup(x,y)).$$

Некоторый ещё более общий класс ядер и соответствующих операторов был рассмотрен в [53], [195].

Второе условие является более общим, чем первое. Во всех случаях на функцию $T(x, y)$ накладываются соответствующие условия интегрируемости, которые будут обсуждаться ниже.

Случай (2.2) соответствует ПДО, диагонализуемым преобразованием Фурье.

Операторы, отвечающие более общему случаю (2.3), не диагонализуются преобразованием Фурье, но диагональны в базисе $p$-адических всплесков.

Эти результаты показывают, что для комплекснозначных функций $p$-адического аргумента всплеск-преобразование является естественным обобщением преобразования Фурье, позволяющим диагонализовать более широкий класс операторов. Исходя из этого, мы будем называть $p$-адическими псевдодифференциальными операторами операторы

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} T(x, y)(f(x) - f(y))\, d\mu(y) \tag{2.4}$$

с ядрами вида (2.3), а не только операторы с ядрами вида (2.2).

В настоящей главе излагаются следующие результаты.

В разделе 2.2 вводится базис $p$-адических всплесков.

В разделе 2.3 рассматривается непрерывное $p$-адическое всплеск-преобразование и показывается, что такое преобразование совпадает с дискретным.

В разделе 2.4 устанавливается связь базиса $p$-адических всплесков и базиса всплесков на вещественной прямой.

В разделе 2.5 вводится $p$-адическое кратномасштабное приближение и обсуждается его связь с аналогичной вещественной конструкцией.

В разделе 2.6 вводятся невырожденные $p$-адические ПДО, доказывается их диагональность в базисе $p$-адических всплесков, и вычисляются соответствующие собственные значения.

В разделе 2.7 при помощи теории всплесков обсуждается локализация волновых пакетов для линейного и нелинейного $p$-адических уравнений Шрёдингера.

Данные результаты были опубликованы: разделы 2.2 и 2.4 в [50], разделы 2.3 и 2.5 в [97], раздел 2.6 в [52].

## 2.2. $p$-Адические всплески

В настоящем разделе мы построим ортонормированный базис $p$-адических всплесков в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p)$ квадратично интегрируемых комплекснозначных функций $p$-адического аргумента. Этот базис есть базис из собственных векторов для оператора Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования, состоящий из локально постоянных функций с компактным носителем.

Следущая лемма показывает, что функция $\psi$, равная произведению характера и характеристической функции шара и называемая $p$-адическим всплеском, является собственным вектором оператора Владимирова.

Лемма 2. *Функция*

$$\psi(x) = \chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p) \tag{2.5}$$

*является собственным вектором оператора Владимирова*:

$$D^\alpha \psi(x) = p^\alpha \psi(x). \tag{2.6}$$

Здесь $\Omega(s)$ есть индикатор (характеристическая функция) отрезка $[0,1]$, откуда для характеристической функции $p$-адического шара радиуса 1 с центром в нуле получаем выражение

$$\Omega(|x|_p) = \begin{cases} 1, & |x|_p \leqslant 1, \\ 0, & |x|_p > 1. \end{cases}$$

Замечание. Собственное значение для $\psi(x)$ совпадает с собственным значением для характера $\chi(p^{-1}x)$:

$$D^\alpha \chi(p^{-1}x) = p^\alpha \chi(p^{-1}x).$$

Формула (2.6) была впервые получена в [258], см. также [16].

Доказательство. Проверим, что $\psi(x)$ есть собственный вектор оператора Владимирова. Мы имеем

$$\begin{aligned} D^\alpha \psi(x) &= \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int \frac{\psi(x) - \psi(y)}{|x-y|_p^{1+\alpha}}\, d\mu(y) = \\ &= \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int \frac{\chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p) - \chi(p^{-1}y)\Omega(|y|_p)}{|x-y|_p^{1+\alpha}}\, d\mu(y) = \end{aligned}$$

$$= \chi(p^{-1}x)\frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \times$$
$$\times \int \frac{\Omega(|x|_p) - \chi(p^{-1}(y-x))\Omega(|y|_p)}{|x-y|_p^{1+\alpha}}\, d\mu(y). \tag{2.7}$$

Вычислим интеграл по $y$ в (2.7) в двух случаях.

1) Пусть $|x|_p \leqslant 1$. В этом случае интеграл в (2.7) равен

$$\int \frac{1 - \chi(p^{-1}(y-x))\Omega(|y|_p)}{|x-y|_p^{1+\alpha}}\, d\mu(y).$$

Так как каждая точка $p$-адического шара является его центром, мы получим что для $|x|_p \leqslant 1$ выполнено $\Omega(|y|_p) = \Omega(|x-y|_p)$ и, следовательно, интеграл равен

$$\int \frac{1 - \chi(p^{-1}(y-x))\Omega(|y-x|_p)}{|x-y|_p^{1+\alpha}}\, d\mu(y) = \int \frac{1 - \chi(p^{-1}z)\Omega(|z|_p)}{|z|_p^{1+\alpha}}\, d\mu(z).$$

2) Пусть $|x|_p > 1$. Для интеграла в (2.7) мы получаем

$$-\frac{1}{|x|_p^{1+\alpha}} \int_{|y|_p \leqslant 1} \chi(p^{-1}(y-x))\, d\mu(y) = 0.$$

Это доказывает, что $\psi(x)$ есть собственный вектор для оператора Владимирова, отвечающий собственному значению

$$D^\alpha \psi(x) = \psi(x)\frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int \frac{1 - \chi(p^{-1}z)\Omega(|z|_p)}{|z|_p^{1+\alpha}}\, d\mu(z) =$$
$$= \psi(x)\frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \left( p^{-1} \sum_{i=0}^{p-1} (1 - \chi(p^{-1}i)) + \right.$$
$$\left. + (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^\gamma p^{-(1+\alpha)\gamma} \right) = p^\alpha \psi(x),$$

что завершает доказательство леммы. □

Из леммы следует, что

$$D^\alpha \psi(ax+b) = |a|_p^\alpha p^\alpha \psi(ax+b). \tag{2.8}$$

Можно проверить, что множество функций $\psi(ax+b)$ (для различных $a$, $b$) есть полная система в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Более того, выполнена следующая теорема.

Теорема 3. 1) *Набор функций* $\{\psi_{\gamma nj}\}$:

$$\psi_{\gamma nj}(x) = p^{-\frac{\gamma}{2}}\chi(p^{\gamma-1}j(x-p^{-\gamma}n))\Omega(|p^{\gamma}x-n|_p),$$
$$\gamma\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\quad j=1,\dots,p-1, \tag{2.9}$$

*есть ортонормированный базис в* $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

2) *Этот базис состоит из собственных векторов оператора Владимирова* $D^{\alpha}$:

$$D^{\alpha}\psi_{\gamma nj} = p^{\alpha(1-\gamma)}\psi_{\gamma nj}. \tag{2.10}$$

*Здесь группа* $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ *в* (3) *параметризована как*

$$n=\sum_{l=\beta}^{-1} n_l p^l,\quad n_l=0,\dots,p-1.$$

Функции $\psi_{\gamma nj}(x)$ в дальнейшем мы будем называть $p$-адическими всплесками. Это локально постоянные функции с радиусом локального постоянства $p^{\gamma-1}$, то есть

$$\psi_{\gamma nj}(x+z)=\psi_{\gamma nj}(x),\quad |z|_p\leqslant p^{\gamma-1},$$

и с носителем, являющимся шаром радиуса $p^{\gamma}$ с центром в $p^{-\gamma}n$.

В следующей лемме мы показываем, что любой вектор из набора $\{\psi_{\gamma nj}\}$ $p$-адических всплесков является сдвигом и растяжением всплеска $\psi$, и, наоборот, любое сдвиг и растяжение всплеска $\psi$ будет функцией $\{\psi_{\gamma nj}\}$ с точностью до умножения на некоторый корень из единицы.

Эквивалентно, набор $p$-адических всплесков (умноженных на соответствующие корни из единицы) может рассматриваться как орбита действия $p$-адической афинной группы в пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p)$, содержащая функцию $\psi$. При этом мы рассматриваем унитарное представление $G$ $p$-адической аффинной группы в пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p)$, действующей сдвигами и растяжениями

$$G(a,b)f(x)=f^{a,b}(x)=|a|_p^{-\frac{1}{2}}f\left(\frac{x-b}{a}\right), \tag{2.11}$$

где $a,b\in\mathbb{Q}_p$ и $a\neq 0$.

Лемма 4. 1) *Любой всплеск из набора* $\{\psi_{\gamma nj}\}$ *$p$-адических всплесков является сдвигом и растяжением всплеска*

$$\psi(x)=\chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p)$$

*следующего вида*:

$$\psi_{\gamma nj}(x) = G(p^{-\gamma}j^{-1}, p^{-\gamma}n)\psi(x) = \psi^{p^{-\gamma}j^{-1}, p^{-\gamma}n}(x).$$

2) *Сдвиг и растяжение $p$-адического всплеска $\psi$ пропорционально вектору из набора $\{\psi_{\gamma nj}\}$*:

$$\psi^{a,b}(x) = \chi\big(p^{-1}[(a|a|_p)^{-1} \bmod p]\,(\{|a|_p b\} - [|a|_p b \bmod p])\big)\times \\ \times\, \psi_{\log_p |a|_p,\, \{|a|_p b\},\, (a|a|_p)^{-1} \bmod p}. \tag{2.12}$$

*Здесь $a, b \in \mathbb{Q}_p$, $a \neq 0$.*

Доказательство. 1) Мы имеем

$$\begin{aligned}\psi_{\gamma nj}(x) &= p^{-\frac{\gamma}{2}}\chi(p^{-1}j(p^{\gamma}x - n))\Omega(|p^{\gamma}x - n|_p) = \\ &= p^{-\frac{\gamma}{2}}\chi(p^{-1}(p^{\gamma}jx - nj))\Omega(|p^{\gamma}jx - nj|_p) = \\ &= p^{-\frac{\gamma}{2}}\psi(p^{\gamma}jx - nj) = \psi^{p^{-\gamma}j^{-1}, p^{-\gamma}n}(x).\end{aligned}$$

2) Вычислим

$$\psi^{a,b}(x) = |a|_p^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) = |a|_p^{-\frac{1}{2}}\chi\left(p^{-1}\frac{x-b}{a}\right)\Omega\left(\left|\frac{x-b}{a}\right|_p\right).$$

Имеет место цепочка равенств

$$a^{-1} = |a|_p\frac{a^{-1}}{|a|_p},$$

$$\Omega\left(\left|\frac{x-b}{a}\right|_p\right) = \Omega\big(\big||a|_p x - |a|_p b\big|_p\big) = \Omega\big(\big||a|_p x - \{|a|_p b\}\big|_p\big),$$

$$\begin{aligned}&\chi\left(p^{-1}\frac{x-b}{a}\right)\Omega\left(\left|\frac{x-b}{a}\right|_p\right) = \\ &\quad= \chi\left(p^{-1}\frac{a^{-1}}{|a|_p}(|a|_p x - |a|_p b)\right)\Omega\big(\big||a|_p x - \{|a|_p b\}\big|_p\big) = \\ &\quad= \chi\big(p^{-1}\big[(a|a|_p)^{-1} \bmod p\big](|a|_p x - |a|_p b)\big)\times \\ &\qquad\times\, \Omega\big(\big||a|_p x - \{|a|_p b\}\big|_p\big) = \\ &\quad= \chi\big(p^{-1}\big[(a|a|_p)^{-1} \bmod p\big]\big(\{|a|_p b\} - [|a|_p b \bmod p]\big)\big),\end{aligned}$$

$$\chi\big(p^{-1}\big[(a|a|_p)^{-1} \bmod p\big]\big(|a|_p x - \{|a|_p b\}\big)\big)\Omega\big(\big||a|_p x - \{|a|_p b\}\big|_p\big).$$

Принимая во внимание нормировку, мы получим

$$\psi^{a,b}(x) = \chi\big(p^{-1}\big[(a|a|_p)^{-1} \bmod p\big]\big(\{|a|_p b\} - [|a|_p b \bmod p]\big)\big)\times \\ \times\, \psi_{\log_p |a|_p,\, \{|a|_p b\},\, (a|a|_p)^{-1} \bmod p},$$

то есть вычисленный выше сдвиг и растяжение всплеска $\psi$ совпадает с всплеском из набора $p$-адических всплесков, умноженным на корень из единицы. Это завершает доказательство леммы. □

Доказательство теоремы 3. Легко видеть, что

$$\int \psi_{\gamma nj}(x)\, d\mu(x) = 0. \tag{2.13}$$

Произведение всплесков $\psi_{\gamma nj}\psi_{\gamma' n' j'}$, где $\gamma < \gamma'$, есть всплеск $\psi_{\gamma nj}$, умноженный на число, поскольку $\psi_{\gamma' n' j'}$ есть константа на носителе $\psi_{\gamma nj}$. Отсюда и из (2.13) следует, что

$$\langle \psi_{\gamma nj}, \psi_{\gamma' n' j'}\rangle = 0, \qquad \gamma \neq \gamma'.$$

Перемножим характеристические функции носителей всплесков $\psi_{\gamma nj}$, $\psi_{\gamma' n' j'}$. Для $\gamma \leqslant \gamma'$ произведение следующих характеристических функций равно характеристической функции или нулю:

$$\Omega\big(|p^{\gamma}x - n|_p\big)\Omega\big(|p^{\gamma'}x - n'|_p\big) = \Omega\big(|p^{\gamma}x - n|_p\big)\Omega\big(|p^{\gamma'-\gamma}n - n'|_p\big).$$

Для $\gamma = \gamma'$ и $n$, $n' \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, мы получим в правой части вышеприведенного выражения

$$\Omega(|n - n'|_p) = \delta_{nn'}.$$

Отсюда следует, что

$$\langle \psi_{\gamma nj}, \psi_{\gamma' n' j'}\rangle = \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{nn'} \int_{\mathbb{Q}_p} p^{-\gamma}\chi(p^{\gamma-1}(j' - j)(x - p^{-\gamma}n))\times \\ \times\, \Omega(|p^{\gamma}x - n|_p)\, d\mu(x) = \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{nn'}\delta_{jj'},$$

что доказывает ортонормальность векторов $\psi_{\gamma nj}$.

Для проверки того, что набор векторов $\{\psi_{\gamma nj}\}$ есть ортонормированный базис (есть полная система в $L^2(\mathbb{Q}_p)$) используем неравенство Парсеваля.

Поскольку набор индикаторов (характеристических функций) $p$-адических шаров полон в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, а множество векторов $\{\psi_{\gamma nj}\}$ инвариантно (с точностью до умножения на числа) относительно сдвигов и растяжений, для доказательства того, что $\{\psi_{\gamma nj}\}$ есть полная система, достаточно проверить равенство Парсеваля для индикатора $\Omega(|x|_p)$. Мы имеем

$$\begin{gathered}\langle\Omega(|x|_p),\psi_{\gamma nj}\rangle = p^{-\frac{\gamma}{2}}\theta(\gamma)\delta_{n0},\\ \theta(\gamma)=0,\quad \gamma\leqslant 0,\qquad \theta(\gamma)=1,\quad \gamma\geqslant 1.\end{gathered}\tag{2.14}$$

Из формулы (2.14) следует равенство Парсеваля для $\Omega(|x|_p)$:

$$\sum_{\gamma nj}|\langle\Omega(|x|_p),\psi_{\gamma nj}\rangle|^2=\sum_{\gamma=1}^{\infty}(p-1)p^{-\gamma}=1=|\langle\Omega(|x|_p),\Omega(|x|_p)\rangle|^2,$$

что доказывает, что $\{\psi_{\gamma nj}\}$ есть ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

Формула (2.8) влечет, что базис $\{\psi_{\gamma nj}\}$ есть ортонормированный базис из собственных векторов для оператора Владимирова $D^\alpha$ с собственными значениями (2.10). Это завершает доказательство теоремы. □

Базис всплесков состоит из функций с компактным носителем. Впервые базис из собственных функций оператора Владимирова с компактным носителем был построен В. С. Владимировым [16], обобщение такого базиса было построено А. Н. Кочубеем [62].

## 2.3. Непрерывное $p$-адическое всплеск-преобразование

Непрерывное всплеск-преобразование на поле $p$-адических чисел рассматривалось, например, в [100]. В работе [97] было отмечено, что, если при определении непрерывного $p$-адического всплеск-преобразования использовать рассмотренный в предыдущем разделе $p$-адический всплеск $\psi(x)=\chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p)$, то непрерывное $p$-адическое всплеск-преобразование совпадёт с дискретным (разложением по базису $p$-адических всплесков). Это наблюдение показывает, что $p$-адическая теория всплесков существенно отличается от вещественной.

Рассмотрим всплеск на $\mathbb{Q}_p$ – комплекснозначную функцию $\Psi$ с нулевым средним в $L^1(\mathbb{Q}_p)\cap L^2(\mathbb{Q}_p)$. Всплеск-преобразование

$Tf$ функции $f \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ определяется формулой

$$(Tf)(a,b) = |a|_p^{-\frac{1}{2}} \int d\mu(x)\, f(x) \overline{\Psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \langle \Psi^{a,b}, f \rangle,$$

где $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ есть скалярное произведение в $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Напомним, что $p$-адическая аффинная группа действует в пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p)$ по формуле (2.11).

Обратное всплеск-преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= C_\Psi^{-1} \int \frac{d\mu(a)\, d\mu(b)}{|a|_p^2} \langle \Psi^{a,b}, f \rangle \Psi^{a,b}(x) = \\ &= C_\Psi^{-1} \int \frac{d\mu(a)\, d\mu(b)}{|a|_p^2} (Tf)(a,b) \Psi^{a,b}(x). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь

$$C_\Psi = \frac{1}{\|\Psi\|^2} \int \frac{d\mu(a)\, d\mu(b)}{|a|_p^2} \left|\langle \Psi(x), \Psi^{a,b}(x) \rangle\right|^2$$

и $\|\Psi\|$ есть $L^2$-норма.

Формула для обратного всплеск-преобразования (2.15) имеет эквивалентный вид разложения единицы

$$C_\Psi^{-1} \int \frac{d\mu(a)\, d\mu(b)}{|a|_p^2} P(\Psi^{a,b}) = 1.$$

Здесь $P(\Psi^{a,b})$ обозначает ортогональный проектор ранга 1 на вектор $\Psi^{a,b}$ в $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

Рассмотрим непрерывное $p$-адическое всплеск-преобразование, порождённое $p$-адическим всплеском

$$\psi(x) = \chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p).$$

Следующая теорема [97] показывает, что в $p$-адическом случае теория непрерывного всплеск-преобразования по существу совпадает с дискретной теорией всплесков.

Теорема 5. 1) *$p$-Адическое всплеск-преобразование $T$, отвечающее всплеску $\psi$, принимает вид разложения по базису $p$-адических всплесков $\psi_{\gamma n j}$:*

$$(Tf)(a,b) = |a|_p^{-\frac{1}{2}} \int d\mu(x)\, f(x) \overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \langle \psi^{a,b}, f \rangle =$$

$$= \chi\big(-p^{-1}\big[(a|a|_p)^{-1} \bmod p\big]\big(\{|a|_p b\} - [|a|_p b \bmod p]\big)\big)\times$$
$$\times f_{\log_p |a|_p,\, \{|a|_p b\},\, (a|a|_p)^{-1} \bmod p}.$$

*Здесь $f_{\gamma n j}$ есть коэффициент разложения функции $f$ по базису всплесков.*

2) *Для непрерывного $p$-адического всплеск-преобразования, связанного с $p$-адическим всплеском $\psi$, формула обратного всплеск-преобразования принимает вид разложения единичного оператора по базису $p$-адических всплесков*

$$C_\psi^{-1} \int \frac{d\mu(a)\, d\mu(b)}{|a|_p^2} P(\psi^{a,b}) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\, j=1,\dots,p-1} P(\psi_{\gamma n j}) = 1.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы прямо следует из леммы 4.

Вычислим для $p$-адического всплеска $\psi$ константу

$$C_\psi = \frac{1}{\|\psi\|^2} \int \frac{d\mu(a)\, d\mu(b)}{|a|_p^2} \, |\langle \psi(x), \psi^{ab}(x)\rangle|^2 = p^{-1}$$

Здесь мы использовали (2.12) и ортогональность всплесков в базисе, $\|\psi\|$ есть $L^2$-норма.

Тогда, используя (2.12), вычислим интеграл

$$\int \frac{d\mu(a)\, d\mu(b)}{|a|_p^2} P(\psi^{a,b}) =$$
$$= \int \frac{d\mu(a)\, d\mu(b)}{|a|_p^2} P\big(\psi_{\log_p |a|_p,\, \{|a|_p b\},\, (a|a|_p)^{-1} \bmod p}\big) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \int \frac{d\mu(a)}{|a|_p} P\big(\psi_{\log_p |a|_p,\, n,\, (a|a|_p)^{-1} \bmod p}\big) =$$
$$= p^{-1} \sum_{\gamma\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\, j=1,\dots,p-1} P(\psi_{\gamma n j}).$$

Следовательно,

$$C_\psi^{-1} \int \frac{d\mu(a)\, d\mu(b)}{|a|_p^2} P(\psi^{a,b}) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\, j=1,\dots,p-1} P(\psi_{\gamma n j}) = 1.$$

Это завершает доказательство теоремы. □

## 2.4. Связь со всплесками на вещественной прямой

Обсудим связь построенного базиса $\{\psi_{\gamma nj}\}$ $p$-адических всплесков в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ с базисом всплесков в пространстве квадратично интегрируемых функций $L^2(\mathbb{R}_+)$ на положительной полупрямой. Мы покажем (см. теорему 11), что базис всплесков Хаара на полупрямой переводится в базис $p$-адических всплесков при помощи отображения (2.20).

Базис всплесков (или вейвлетов) есть базис, состоящий из сдвигов и растяжений "mother wavelet function". Простейший пример такой функции есть всплеск Хаара

$$\Psi(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x) \tag{2.16}$$

(разность двух характеристических функций отрезков).

Базис всплесков в $L^2(\mathbb{R})$ (или базис из кратномасштабных всплесков, "multiresolution wavelets") есть базис

$$\Psi_{\gamma n}(x) = 2^{-\frac{\gamma}{2}}\Psi(2^{-\gamma}x - n), \qquad \gamma \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.17}$$

Нас будет интересовать базис всплесков на положительной полупрямой, который получается из вышеприведенного ограничением на неотрицательные $n$.

Мы будем рассматривать также обобщение базиса (2.17), отвечающее произвольному $p$. Этот базис в $L^2(\mathbb{R}_+)$, состоит из векторов, имеющих вид

$$\Psi^{(p)}_{\gamma nj}(x) = p^{-\frac{\gamma}{2}}\Psi^{(p)}_j(p^{-\gamma}x - n), \qquad \gamma \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.18}$$

$$\Psi^{(p)}_j(x) = \sum_{l=0}^{p-1} e^{2\pi i j l p^{-1}}\chi_{[lp^{-1},(l+1)p^{-1}]}(x), \quad j = 1,\dots,p-1. \tag{2.19}$$

Здесь $\mathbb{Z}_+$ есть множество целых неотрицательных чисел. Базис (2.17) получается из (2.18) при $p = 2$.

Назовем $p$-адической заменой переменной следующее отображение

$$\rho\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_+,$$
$$\rho\colon \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^i \mapsto \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^{-i-1}, \quad x_i = 0,\dots,p-1, \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{2.20}$$

Такое отображение рассматривалось Монна [213]. Это отображение сюрьективно, но не является взаимно однозначным. Отображение $\rho$ непрерывно, более того, имеет место следующая лемма.

Лемма 6. *Отображение $\rho$ удовлетворяет неравенству Гёльдера*

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant |x - y|_p. \tag{2.21}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$x = \sum_{i=\alpha}^{\infty} x_i p^i, \qquad y = \sum_{i=\beta}^{\infty} y_i p^i,$$

где без потери общности $\alpha \leqslant \beta$. Тогда

$$\rho(x) - \rho(y) = \sum_{i=\alpha}^{\beta-1} x_i p^i + \sum_{i=\beta}^{\infty} (x_i - y_i) p^i.$$

Рассмотрим следующие два случая.

1) Пусть $\alpha < \beta$. Тогда

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant (p-1) \sum_{i=\alpha}^{\infty} p^{-i-1} = |x - y|_p.$$

2) Пусть $\alpha = \beta$. Тогда $|x - y|_p = p^{-\gamma}$, $\gamma \geqslant \alpha$. Мы получим

$$\rho(x) - \rho(y) = \sum_{i=\gamma}^{\infty} (x_i - y_i) p^{-i-1}$$

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant (p-1) \sum_{i=\gamma}^{\infty} p^{-i-1} = p^{-\gamma} = |x - y|_p,$$

что завершает доказательство леммы. □

Сужение $\rho$ на $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ есть взаимно однозначное отображение

$$\rho\colon \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_+,$$

где $\mathbb{Z}_+$ есть множество целых неотрицательных чисел. Здесь мы рассматриваем $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ как группу дробей вида (1.2).

Лемма 7. *Отображение $\rho$ удовлетворяет следующим свойствам*:

$$\rho(p^\gamma x) = p^{-\gamma}\rho(x). \tag{2.22}$$

*Для $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $x \in \mathbb{Z}_p$*

$$\rho(n + x) = \rho(n) + \rho(x). \tag{2.23}$$

*В частности*,

$$\rho(n - 1) = \rho(n) + 1. \tag{2.24}$$

*Также для $x \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$*

$$\chi_{[0,p^k]}(\rho(x - n)) = \chi_{[0,p^k]}(\rho(x) - \rho(n)) \tag{2.25}$$

*для $k \leqslant 0$.*

Доказательство. Доказательство (2.22), (2.23) очевидно.

Докажем (2.24). Рассмотрим $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$:

$$n = \sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^i.$$

Легко видеть, что

$$n - 1 = \sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^i + \sum_{i=0}^{\infty}(p-1)p^i.$$

Тогда

$$\rho(n) = \sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^{-i-1}$$

$$\rho(n-1) = \rho\left(\sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^i + \sum_{i=0}^{\infty}(p-1)p^i\right) =$$

$$= \sum_{i=\gamma}^{-1} n_i p^{-i-1} + \sum_{i=0}^{\infty}(p-1)p^{-i-1} = \rho(n) + 1,$$

что доказывает (2.24).

Формула (2.25) следует из (2.23). Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 8. *Для $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ и $m, k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant m$, отображение $\rho$ удовлетворяет условиям*

$$\rho\colon p^m n + p^k\mathbb{Z}_p \to p^{-m}\rho(n) + [0, p^{-k}] \tag{2.26}$$

$$\rho\colon \mathbb{Q}_p \setminus \{p^m n + p^k\mathbb{Z}_p\} \to \mathbb{R}_+ \setminus \{p^{-m}\rho(n) + [0, p^{-k}]\}, \tag{2.27}$$

*верным с точностью до конечного множества точек.*

Доказательство. Рассмотрим для простоты случай $m = 0$, $k = 0$. Применение (2.21) для $y = n$, $y = n - 1$ с учетом (2.24) доказывает, что диск $n + \mathbb{Z}_p$ отображается в отрезок $\rho(n) + [0, 1]$, поскольку для $x \in \{n+\mathbb{Z}_p\}$ образ $\rho(x)$ будет находиться на расстоянии не более 1 от $\rho(n)$ и $\rho(n-1) = \rho(n)+1$, то есть принадлежать отрезку $[\rho(n), \rho(n)+1]$. Общий случай (2.26) для произвольных $m$, $k$ доказывается аналогично, откуда следует, что диск $p^m n + p^k\mathbb{Z}_p$ отображается в отрезок $p^{-m}\rho(n) + [0, p^{-k}]$.

Пусть теперь $x \notin \{n + \mathbb{Z}_p\}$. Тогда $x \in \{n' + \mathbb{Z}_p\}$ для некоторого $n' \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $n' \neq n$. При этом $|\rho(n) - \rho(n')| \geqslant 1$. Если $|\rho(n)-\rho(n')| > 1$, то по гельдеровости (2.21) отображения $\rho$ образы $\rho(\{n+\mathbb{Z}_p\})$ и $\rho(\{n'+\mathbb{Z}_p\})$ не пересекаются. Если $|\rho(n)-\rho(n')| = 1$, то по гельдеровости (2.21) отображения $\rho$ образы $\rho(\{n + \mathbb{Z}_p\})$ и $\rho(\{n' + \mathbb{Z}_p\})$ пересекаются в единственной точке. Например, для $\rho(n) - \rho(n') = 1$ это следует из гельдеровости $\rho(x - y)$ для $y = n'$, $y = n' + 1$ и $x \in \{n' + \mathbb{Z}_p\}$. Повторяя эти рассуждения для произвольных $m$, $k$ мы докажем, что внешность диска $p^m n + p^k\mathbb{Z}_p$ (то есть дополнение к этому множеству в $\mathbb{Q}_p$) отображается во внешность отрезка $p^{-m}\rho(n) + [0, p^{-k}]$ в $\mathbb{R}_+$ с точностью до концов отрезка.

Поскольку отображение $\rho$ сюрьективно, отображения (2.26) и (2.27) также сюрьективны, что доказывает лемму. □

Лемма 9. *Отображение $\rho$ отображает меру Хаара $\mu$ на $\mathbb{Q}_p$ в меру Лебега $l$ на $\mathbb{R}_+$: для измеримого подмножества $X \subset \mathbb{Q}_p$ имеем*

$$\mu(X) = l(\rho(X)),$$

*или в сокращенной записи*

$$\rho\colon d\mu(x) \mapsto dx.$$

Доказательство. Из леммы 8 следует, что шары в $\mathbb{Q}_p$ отображаются на отрезки в $\mathbb{R}_+$ с сохранением меры. Отображение

$\rho\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_+$ сюрьективно, причем непересекающиеся шары отображаются на отрезки, которые либо не пересекаются, либо пересекаются по множеству нулевой меры (снова по лемме 8). Это доказывает лемму. □

Лемма 9 влечет, что соответствующее отображение

$$\rho^*\colon L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{Q}_p), \tag{2.28}$$

$$\rho^* f(x) = f(\rho(x)), \tag{2.29}$$

есть унитарный оператор.

Прямым следствием леммы 8 является следующая лемма.

Лемма 10. *Всплеск* (2.19) *при отображении* $\rho$ *отображается на функцию* (2.5):

$$\Psi_1^{(p)}(\rho(x)) = \psi(x). \tag{2.30}$$

*Формулу* (2.30) *следует понимать как равенство в* $L^2$: *на множестве точек нулевой меры* (2.30) *может не иметь места.*

Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 11. *Отображение* $\rho$ *отображает ортонормированный базис всплесков* (2.18) *на* $L^2(\mathbb{R}_+)$ *на базис* (3) *в* $L^2(\mathbb{Q}_p)$ *из собственных векторов для оператора Владимирова*:

$$\Psi_{\gamma\rho(n)j}(\rho(x)) = \psi_{\gamma nj}(x). \tag{2.31}$$

Доказательство. Из (2.18), используя (2.22), (2.25), (2.30) получим

$$\begin{aligned}\Psi_{\gamma\rho(n)j}(\rho(x)) &= p^{-\frac{\gamma}{2}}\Psi_j^{(p)}(p^{-\gamma}\rho(x) - \rho(n)) = \\ &= p^{-\frac{\gamma}{2}}\Psi_j^{(p)}(\rho(p^{\gamma}x - n)) = \\ &= p^{-\frac{\gamma}{2}}\psi_{00j}(p^{\gamma}x - n) = \psi_{\gamma nj}(x),\end{aligned}$$

что доказывает формулу (2.31) и завершает доказательство теоремы. □

Следовательно, после $p$-адической замены переменных (2.20) анализ всплесков Хаара становится $p$-адическим спектральным анализом (разложением функций по собственным векторам оператора Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования).

Замечание. Используя отображение (2.28), можно перенести действие оператора Владимирова в $L^2(\mathbb{R}_+)$, определив оператор

$$\partial_p^\alpha f(x) = \rho^{*-1} D^\alpha \rho^* f(x)$$

(отметим, что $D^\alpha$ и $\rho^*$ зависят от $p$).

Легко видеть, что

$$\partial_p^\alpha f(x) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(y)}{|\rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(y)|_p^{1+\alpha}}\, dy, \tag{2.32}$$

где $\rho^{-1}$ есть обратное отображение к $\rho$. Поскольку $\rho$ не есть взаимно однозначное отображение, отображение $\rho^{-1}$ вообще говоря многозначно, но многозначность сосредоточена на множестве нулевой меры, что делает определение (2.32) корректным.

Имея в виду вышеприведенное замечание, обсудим применение всплесков к исследованию интегральных операторов. Известно [119], что для некоторых семейств интегральных операторов, например, для операторов Кальдерона–Зигмунда и псевдодифференциальных операторов, матрицы этих операторов имеют в базисе всплесков вид, близкий к диагональному (если для всплесков из используемого базиса определённое число моментов обращается в нуль). А именно, рассмотрим базис всплесков для пространства $L^2(\mathbb{R})$, для которых соответствующий всплеск имеет $M$ нулевых моментов:

$$\int \psi(x) x^m\, dx = 0, \qquad m = 0, 1, \dots M - 1.$$

Тогда [119] имеет место следующее свойство убывания для матричных элементов интегральных операторов из некоторого семейства

$$|\alpha_{il}^\gamma| + |\beta_{il}^\gamma| + |\gamma_{il}^\gamma| \leqslant \frac{C_M}{1 + |i - l|^{M+1}}$$

для

$$|i - l| \geqslant 2M.$$

Здесь матричные элементы $\alpha_{il}^\gamma$, $\beta_{il}^\gamma$, $\gamma_{il}^\gamma$ взяты в базисах всплесков в пространствах $V_\gamma$, $W_\gamma$ кратномасштабного приближения (связанного с базисом всплесков, см. следующий раздел), индекс $\gamma$ связан с масштабом всплеска, индексы $i$, $l$ связаны с пространственной локализацией (сдвигом) всплесков.

Таким образом, матрицы соответствующих интегральных операторов в базисах всплесков являются разреженными и близки к диагональным. Результаты такого рода имеют приложения, например, к численным алгоритмам быстрого умножения интегральных операторов в базисах всплесков [119].

Обсудим $p$-адический аналог такого результата. Известно, что $p$-адические псевдодифференциальные операторы диагональны в базисе $p$-адических всплесков. Более того, в $p$-адическом случае не нужно условий равенства нулю высших моментов всплесков. Таким образом, в $p$-адическом случае имеют место существенно более сильные результаты о связи базисов всплесков и интегральных операторов. Диагональность матриц интегральных операторов, которая была приблизительной для вещественного случая, для $p$-адических псевдодифференциальных операторов становится точной, и, более того, мы можем вычислить спектры соответствующих операторов.

## 2.5. Кратномасштабное приближение $L^2(\mathbb{Q}_p)$

Следующее определение кратномасштабного приближения хорошо известно в теории всплесков [210].

Определение 12. Кратномасштабным приближением $L^2(\mathbb{R})$ называется убывающая последовательность $V_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, замкнутых линейных подпространств в $L^2(\mathbb{R})$, имеющая следующие свойства:

1)
$$\bigcap_{-\infty}^{+\infty} V_\gamma = \{0\}, \qquad \bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_\gamma \quad \text{плотно в } L^2(\mathbb{R});$$

2) для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$ и всех $\gamma \in \mathbb{Z}$
$$f(\cdot) \in V_\gamma \Longleftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j-1};$$

3) для всех $f \in L^2(\mathbb{R})$ и всех $n \in \mathbb{Z}$
$$f(\cdot) \in V_0 \Longleftrightarrow f(\cdot - n) \in V_0;$$

4) существует функция $g \in V_0$ такая, что последовательность
$$g(\cdot - n), \quad n \in \mathbb{Z},$$
есть базис Рисса в пространстве $V_0$.

Из этого определения следует [210], что существует такая функция $\phi \in V_0$, что последовательность $\phi(x-n)$, $n \in \mathbb{Z}$, является ортонормированным базисом $V_0$. В дальнейшем мы будем иметь в виду только ортонормированные базисы.

Мы обозначаем $W_\gamma$ ортогональное дополнение к $V_\gamma$ в пространстве $V_{\gamma-1}$. Тогда $L^2(\mathbb{R})$ будет ортогональной суммой пространств $W_\gamma$:

$$L^2(\mathbb{R}) = \oplus_{\gamma\in\mathbb{Z}} W_\gamma.$$

Пространство $W_\gamma$ имеет базис $\{\Psi_{\gamma n}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, кратномасштабных всплесков. Существует конструкция построения базисов всплесков из кратномасштабных приближений, см. [42] или [210].

Пример. Чтобы определить кратномасштабное приближение, достаточно задать функцию $\phi$. Выберем эту функцию в виде характеристической функции отрезка $[0,1]$:

$$\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Такой выбор функции $\phi$ связан со всплесками Хаара. Легко видеть, что для рассматриваемого примера все свойства кратномасштабного приближения будут выполнены. Выбирая в определениях выше $\phi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ и $n \geqslant 0$, мы получим кратномасштабное приближение для пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$ квадратично интегрируемых функций на положительной полупрямой.

Нетрудно построить $p$-адический аналог кратномасштабного приближения. Основное отличие в том, что в $p$-адическом случае мы должны использовать сдвиги на элементы факторгруппы $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ (точнее, на представители из соответствующих классов эквивалентности) вместо сдвигов на целые числа.

Определение 13. Кратномасштабным приближением $L^2(\mathbb{Q}_p)$ называется убывающая последовательность $V_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, замкнутых линейных подпространств пространства $L^2(\mathbb{Q}_p)$, имеющая следующие свойства:

1)

$$\bigcap_{-\infty}^{+\infty} V_\gamma = \{0\}, \qquad \bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_\gamma \quad \text{плотно в } L^2(\mathbb{Q}_p);$$

2) для всех $f \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ и всех $\gamma \in \mathbb{Z}$

$$f(\cdot) \in V_\gamma \Longleftrightarrow f(p^{-1}\cdot) \in V_{\gamma-1};$$

3) для всех $f \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ и всех $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$

$$f(\cdot) \in V_0 \Longleftrightarrow f(\cdot - n) \in V_0;$$

4) существует функция $\phi \in V_0$ такая, что последовательность

$$\phi(\cdot - n), \quad n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,$$

есть ортонормированный базис в пространстве $V_0$.

Мы не говорим здесь о базисах Рисса, так как в $p$-адическом случае существует естественный пример ортонормированного базиса, имеющего описанные выше свойства.

Обсудим связь $p$-адических кратномасштабных приближений и структуры пространства $D(\mathbb{Q}_p)$ $p$-адических основных функций.

Пространство $D(\mathbb{Q}_p)$ $p$-адических основных функций (локально постоянных функций с компактным носителем) имеет естественную фильтрацию. Обозначим $D_\gamma(\mathbb{Q}_p)$ пространство локально постоянных функций с компактным носителем и с диаметром локального постоянства $p^\gamma$:

$$|x - y|_p \leqslant p^\gamma \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Имеет место фильтрация пространства $D(\mathbb{Q}_p)$ подпространствами $D_\gamma(\mathbb{Q}_p)$:

$$D(\mathbb{Q}_p) = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} D_\gamma(\mathbb{Q}_p).$$

Имеет место следующая теорема, показывающая, что рассмотренная фильтрация пространства основных функций может быть рассмотрена как кратномасштабное приближение пространства $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Следовательно, кратномасштабное приближение может рассматриваться как внутреннее свойство пространств функций $p$-адического аргумента. Более того, $p$-адическая замена переменной (2.20) переводит кратномасштабное приближение пространства $L^2(\mathbb{Q}_p)$ в кратномасштабное приближение пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, уже вещественное кратномасштабное приближение можно рассматривать как отражение структуры пространства $p$-адических основных функций.

Теорема 14. 1) *Последовательность $D_\gamma(\mathbb{Q}_p)$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, есть кратномасштабное приближение пространства $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Для*

*этого кратномасштабного приближения функция $\phi(x)$ может быть выбрана равной характеристической функции единичного шара*:

$$\phi(x) = \Omega(|x|_p).$$

2) *Для $p = 2$ отображение (2.20) переводит характерное кратномасштабное приближение $\{V_\gamma\}$ пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$, описанное в примере после определения 12, в кратномасштабное приближение $\{D_\gamma(\mathbb{Q}_p)\}$ пространства $L^2(\mathbb{Q}_p)$.*

*Соответствующий изоморфизм пространств $D_\gamma(\mathbb{Q}_p)$ и $V_\gamma$ задаётся следующей формулой*:

$$\Omega(|p^\gamma x - n|_p) = \chi_{[0,p^\gamma]}(\rho(x) - p^\gamma \rho(n)), \qquad x \in \mathbb{Q}_p, \quad n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказывается непосредственно. Функция $\phi$ в Определении 13 выбирается равной характеристической функции шара:

$$\phi(x) = \Omega(|x|_p).$$

Сдвиги $\Omega(|x - n|_p)$, $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, дают ортонормированный базис в пространстве $D_0(\mathbb{Q}_p)$. Растяжения $x \mapsto p^\gamma x$ на степени $p$ дают ортонормированные базисы $\{\Omega(|p^\gamma x - n|_p)\}$ в пространствах $D_\gamma(\mathbb{Q}_p)$.

Второе утверждение теоремы следует из леммы 8 и выбора функции $\phi$. Пространство $D_\gamma(\mathbb{Q}_p)$ имеет базис $\{\Omega(|p^\gamma x - n|_p)\}$, $x \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Набор функций $\{\chi_{[0,p^\gamma]}(x - p^\gamma m)\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}_+$, составляет базис в $V_\gamma$. Поскольку отображение $\rho$ есть взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Z}_+$, это завершает доказательство теоремы. □

Отметим, что в отличие от вещественного случая, в котором характеристические функции и всплески Хаара разрывны, рассмотренное в этой теореме кратномасштабное приближение пространства $L^2(\mathbb{Q}_p)$ состоит из пространств непрерывных функций. Таким образом, после $p$-адической замены переменной конструкция данного кратномасштабного приближения стала более регулярной.

Замечание. Рассмотренные в настоящей главе свойства $p$-адических всплесков – тесная связь со спектральной теорией псевдодифференциальных операторов, совпадение дискретного

и непрерывного всплеск-преобразований, совпадение кратномасштабного приближения с естественной фильтрацией пространства основных функций могут служить аргументом в пользу того, что теория всплесков связана с $p$-адическим анализом, в котором теория всплесков появляется естественным и по существу автоматическим образом.

## 2.6. $p$-Адические ПДО: снятие вырождения

В начале настоящей главы был построен базис $\{\psi_{\gamma nj}\}$ $p$-адических всплесков, являющийся базисом из собственных векторов для оператора Владимирова (и других интегральных операторов (2.1) с ядрами вида (2.2)). При этом для операторов с ядрами вида (2.2) собственное значение $\lambda_{\gamma nj}$, соответствующее всплеску $\psi_{\gamma nj}$, зависит только от первого индекса $\gamma$ (то есть имеет место вырождение по второму и третьему индексам).

В настоящем разделе мы рассмотрим более общую конструкцию $p$-адического псевдодифференциального оператора с ядром (2.3)). Рассматриваемые операторы не будут диагонализоваться преобразованием Фурье, но будут диагонализоваться в базисе $p$-адических всплесков. При этом собственное значение $\lambda_{\gamma nj}$ для всплеска $\psi_{\gamma nj}$ будет зависеть от первого и второго индексов $\gamma$ и $n$, соответствующих масштабу и пространственному смещению соответственно. Следовательно, для операторов рассматриваемого вида вырождение по второму индексу (пространственному смещению) будет снято. Руководствуясь этим, мы будем называть $p$-адические псевдодифференциальные операторы с ядром (2.3)) невырожденными $p$-адическими ПДО.

Рассмотрим оператор

$$Tf(x) = \int T(x,y)(f(x) - f(y))\,dy. \tag{2.33}$$

Здесь $x$, $y$ лежат в поле $\mathbb{Q}_p$ $p$-адических чисел. Мы рассматриваем оператор $T$ как оператор в пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p)$ комплекснозначных квадратично интегрируемых функций $p$-адического аргумента.

Мы будем рассматривать интегральные ядра вида, описываемого следующим определением.

Определение 15. Мы будем говорить, что функция $T(x,y)$ есть ядро невырожденного $p$-адического ПДО, если она симметрична и для фиксированного $x$ выполнено следующее условие:

$$T(x,y) = \text{const}, \quad \text{если} \quad |x-y|_p = \text{const}. \tag{2.34}$$

Легко видеть, что оператор Владимирова и схожие операторы с трансляционно инвариантными ядрами $T(x,y)$ (которые зависят только от разности $x-y$ и, следовательно, при соответствующих условиях интегрируемости ядра, диагонализуются преобразованием Фурье), удовлетворяют условиям определения 15. В настоящем разделе мы рассматриваем более общие операторы с трансляционно не инвариантными ядрами.

Имеет место следующая доказывающаяся непосредственным вычислением лемма.

Лемма 16. *Множество характеристических функций всевозможных шаров в $\mathbb{Q}_p$ состоит из функций вида $\Omega(|p^\gamma x - n|_p)$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.*

Следующая теорема описывает общую форму ядра вида (2.34).

Теорема 17. *Пусть задана функция*

$$T(x,y) = \sum_{\gamma n} T^{(\gamma n)} \delta_{1,|p^\gamma x - p^\gamma y|_p} \Omega(|p^\gamma x - n|_p), \tag{2.35}$$

*где $T^{(\gamma n)}$ суть комплексные числа, $\gamma \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Тогда функция $T(x,y)$ удовлетворяет условиям определения 15.*

*Более того, произвольная комплекснозначная функция, удовлетворяющая (2.34), может быть представлена в виде (2.35).*

Доказательство. Докажем симметричность $T(x,y)$. Имеет место выражение

$$\begin{aligned} &T(x,y) - T(y,x) = \\ &\quad = \sum_{\gamma n} T^{(\gamma n)} \delta_{1,|p^\gamma x - p^\gamma y|_p} \big(\Omega(|p^\gamma x - n|_p) - \Omega(|p^\gamma y - n|_p)\big). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Докажем, что это выражение тождественно равно нулю. Рассмотрим случай, когда $x$ такой, что следующая характеристическая функция не равна нулю:

$$\Omega(|p^\gamma x - n|_p) = 1.$$

Отсюда следует

$$|x - p^{-\gamma}n|_p \leqslant p^{\gamma}. \tag{2.37}$$

Если

$$\delta_{1,|p^{\gamma}x-p^{\gamma}y|_p} \neq 0,$$

то

$$|x - y|_p = p^{\gamma}. \tag{2.38}$$

Из формул (2.37), (2.38) и ультраметричности следует, что

$$\Omega(|p^{\gamma}y - n|_p) = 1.$$

Следовательно, соответствующие члены в (2.36) сокращаются. Отсюда следует, что $T(x, y)$, задаваемое (2.35), симметрично.

Докажем, что $T(x, y)$, задаваемое (2.35), удовлетворяет (2.34). Выберем $x \in \mathbb{Q}_p$. Тогда для $y$, лежащего на сфере с центром в $x$ и радиусом $p^{\gamma}$, получим

$$\delta_{1,|p^{\gamma}x-p^{\gamma}y|_p} = 1$$

и

$$\Omega(|p^{\gamma}x - n|_p)$$

будет равно 0 или 1 в зависимости от того, будет ли $p^{-\gamma}n$ лежать в диске

$$\{y\colon |x - y|_p \leqslant p^{\gamma}\}$$

или нет. Следовательно, $T(x, y)$ будет постоянной на рассмотренной сфере и условие (2.34) будет выполнено.

Это доказывает, что $T(x, y)$, удовлетворяющее условиям настоящей теоремы, будет удовлетворять условиям определения 15.

Обратно, легко видеть, что ядро (2.35) для $x$, $y$, лежащих в диске с центром в $p^{-\gamma}n$ радиуса $p^{\gamma}$, и удовлетворяющих $|x-y|_p = p^{\gamma}$, принимает значение $T^{(\gamma n)}$.

Поскольку все пространство $x, y \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ есть несвязное объединение подмножеств такого вида, следовательно, выбирая произвольные положительные $T^{(\gamma n)}$, мы можем построить произвольное ядро, удовлетворяющее (2.34). Это завершает доказательство теоремы. □

В следующей теореме мы вычисляем собственные значения $p$-адического ПДО.

Теорема 18. *Пусть ядро* (2.34) *оператора* (2.33) *удовлетворяет условию абсолютной сходимости интеграла* (2.40) *для некоторых* $\gamma = \gamma_0$, $n = n_0$. *Тогда оператор* (2.33) *имеет плотную область определения в пространстве* $L^2(\mathbb{Q}_p)$ *и* $p$*-адические всплески* $\psi_{\gamma nj}$ *вида* (3) *являются собственными векторами для* $p$*-адического псевдодифференциального оператора* (2.33):

$$T\psi_{\gamma nj} = \lambda_{\gamma n}\psi_{\gamma nj} \tag{2.39}$$

*с собственными значениями*

$$\lambda_{\gamma n} = \int_{|n-p^\gamma y|_p>1} T(p^{-\gamma}n, y)\, d\mu(y) + p^\gamma T(p^{-\gamma}n, p^{-\gamma}(n+1)). \tag{2.40}$$

Замечание. Здесь собственное значение в базисе всплесков $\lambda_{\gamma n}$ зависит от двух индексов, в отличие от рассмотренного в предыдущем разделе случая, где собственное значение в базисе всплесков зависело только от первого индекса $\gamma$. Это показывает, что для ПДО с ядром вида (2.34) снимается вырождение собственного состояния по второму индексу (пространственному смещению) в базисе $p$-адических всплесков. Поэтому такие ПДО мы будем называть невырожденными.

Доказательство теоремы 18. Для доказательства настоящей теоремы мы используем определение 15. Рассмотрим всплеск $\psi_{\gamma nj}$. Тогда

$$T\psi_{\gamma nj}(x) = \int T(x,y)\big(\psi_{\gamma nj}(x) - \psi_{\gamma nj}(y)\big)\, d\mu(y).$$

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $|p^\gamma x - n|_p > 1$. Тогда из определения 15 следует

$$T\psi_{\gamma nj}(x) = \int T(x,y)\psi_{\gamma nj}(x)\, d\mu(y) - T(x,n)\int \psi_{\gamma nj}(y)\, d\mu(y) = 0.$$

2) Пусть $|p^\gamma x - n|_p \leqslant 1$. Тогда опять по определению 15

$$T\psi_{\gamma nj}(x) = \Bigg(\int_{|p^\gamma x - p^\gamma y|_p>1} + \int_{|p^\gamma x - p^\gamma y|_p=1} + \\ + \int_{|p^\gamma x - p^\gamma y|_p<1}\Bigg) T(x,y)(\psi_{\gamma nj}(x) - \psi_{\gamma nj}(y))\, d\mu(y) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{|p^\gamma x - p^\gamma y|_p > 1} + \int_{|p^\gamma x - p^\gamma y|_p = 1}\right) T(x,y) \times \\
&\qquad \times \left(\psi_{\gamma n j}(x) - \psi_{\gamma n j}(y)\right) d\mu(y) = \\
&= \psi_{\gamma n j}(x) \int_{|p^\gamma x - p^\gamma y|_p > 1} T(x,y)\, dy + \\
&\qquad + \int_{|p^\gamma x - p^\gamma y|_p = 1} T(x,y)(\psi_{\gamma n j}(x) - \psi_{\gamma n j}(y))\, d\mu(y) = \\
&= \psi_{\gamma n j}(x) \int_{|n - p^\gamma y|_p > 1} T(p^{-\gamma} n, y)\, d\mu(y) + \\
&\qquad + \sum_{l=0}^{p-1} \int_{|z|_p < p^\gamma} T(x, x + p^{-\gamma} l + z) \times \\
&\qquad \times \left(\psi_{\gamma n j}(x) - \psi_{\gamma n j}(x + p^{-\gamma} l + z)\right) d\mu(z) = \\
&= \psi_{\gamma n j}(x) \int_{|n - p^\gamma y|_p > 1} T(p^{-\gamma} n, y)\, d\mu(y) + \\
&\qquad + p^{\gamma - 1} \sum_{l=1}^{p-1} T(x, x + p^{-\gamma} l)(\psi_{\gamma n j}(x) - \psi_{\gamma n j}(x + p^{-\gamma} l)).
\end{aligned}
$$

Последнее равенство следует из определения 15 и локального постоянства функции $\psi_{\gamma n j}$.

Используя равенство

$$
\begin{aligned}
\psi_{\gamma n j}(x + p^{-\gamma} l) &= p^{-\frac{\gamma}{2}} \chi(p^{\gamma - 1} j (x + p^{-\gamma} l)) \Omega(|p^\gamma (x + p^{-\gamma} l) - n|_p) = \\
&= \chi(p^{-1} j l) \psi_{\gamma n j}(x)
\end{aligned}
$$

и определение 15, получим

$$
\begin{aligned}
T\psi_{\gamma n j}(x) = \psi_{\gamma n j}(x) \Bigg( &\int_{|n - p^\gamma y|_p > 1} T(p^{-\gamma} n, y)\, d\mu(y) + \\
&+ p^{\gamma - 1} T(p^{-\gamma} n, p^{-\gamma}(n+1)) \sum_{l=1}^{p-1} (1 - \chi(p^{-1} j l)) \Bigg).
\end{aligned}
$$

Поскольку

$$
\sum_{l=1}^{p-1} (1 - \chi(p^{-1} j l)) = p,
$$

получим

$$T\psi_{\gamma nj}(x) = \psi_{\gamma nj}(x)\Bigg(\int\limits_{|n-p^{\gamma}y|_p>1} T(p^{-\gamma}n, y)\, d\mu(y) + \\ + p^{\gamma}T(p^{-\gamma}n, p^{-\gamma}(n+1))\Bigg),$$

что доказывает (2.40).

Следовательно, оператор $T$ определен на базисе $p$-адических всплесков в пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p)$, и болеее того, этот базис есть базис из собственных векторов для оператора $T$, что завершает доказательство теоремы. Отметим, что сходимость всех интегралов, использовавшихся при доказательстве теоремы, гарантируется сходимостью интегралов в (2.40) для некоторых $\gamma = \gamma_0$, $n = n_0$ (поскольку расходимости могут возникать только на бесконечности, а все интегралы типа возникающих в (2.40) ведут себя на бесконечности одинаково для любых $\gamma$, $n$). □

Следующее следствие дает простое представление для собственных значений генератора с ядром (2.35).

Следствие 19. *Пусть следующий ряд сходится абсолютно*:

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{\gamma}T^{(\gamma 0)} < \infty. \tag{2.41}$$

*Тогда оператор* (2.33) *с ядром вида* (2.35) *имеет плотную область определения в пространстве* $L^2(\mathbb{Q}_p)$, *диагонализуется в базисе $p$-адических всплесков, и имеет в этом базисе собственные значения*

$$\lambda_{\gamma n} = p^{\gamma}T^{(\gamma n)} + (1-p^{-1})\sum_{\gamma'=\gamma+1}^{\infty} p^{\gamma'}T^{(\gamma', p^{\gamma'-\gamma}n)}. \tag{2.42}$$

Отметим, что условие абсолютной сходимости ряда (2.41) эквивалентно абсолютной сходимости интегралов (2.40).

Доказательство. Подставляя (2.35) в (2.40), получим

$$\lambda_{\gamma n} = \int\limits_{|n-p^{\gamma}y|_p>1} \sum_{\gamma' n'} T^{(\gamma' n')}\delta_{1,|p^{\gamma'}p^{-\gamma}n-p^{\gamma'}y|_p}\Omega(|p^{\gamma'}p^{-\gamma}n-n'|_p)\, d\mu(y) + \\ + p^{\gamma}\sum_{\gamma' n'} T^{(\gamma' n')}\delta_{1,|p^{\gamma'}p^{-\gamma}n-p^{\gamma'}p^{-\gamma}(n+1)|_p}\Omega(|p^{\gamma'}p^{-\gamma}n-n'|_p) =$$

$$= \sum_{\gamma' n'} T^{(\gamma' n')} p^{\gamma'} (1-p^{-1}) \theta(\gamma'-\gamma) \Omega(|p^{\gamma'} p^{-\gamma} n - n'|_p) +$$
$$+ p^{\gamma} \sum_{n'} T^{(\gamma n')} \Omega(|n-n'|_p) =$$
$$= p^{\gamma} T^{(\gamma n)} + (1-p^{-1}) \sum_{\gamma'=\gamma+1}^{\infty} p^{\gamma'} T^{(\gamma', p^{\gamma'-\gamma} n)}.$$

Мы использовали свойства

$$\int_{|n-p^{\gamma} y|_p > 1} \delta_{1, |p^{\gamma'} p^{-\gamma} n - p^{\gamma'} y|_p} \, d\mu(y) = p^{\gamma'} (1-p^{-1}) \theta(\gamma'-\gamma),$$
$$\theta(\gamma) = 0, \quad \gamma \leqslant 0, \qquad \theta(\gamma) = 1, \quad \gamma > 0,$$
$$\delta_{1, |p^{\gamma'} p^{-\gamma} n - p^{\gamma'} p^{-\gamma} (n+1)|_p} = \delta_{\gamma\gamma'},$$
$$\Omega(|m-n|_p) = \delta_{mn}, \qquad m, n \in \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p.$$

Это завершает доказательство следствия. □

Замечание. Вышеприведенное следствие влечет следующие рекуррентные соотношения:

$$\lambda_{\gamma-1, p^{-1} n} - \lambda_{\gamma n} = p^{\gamma-1} T^{(\gamma-1, p^{-1} n)} - p^{\gamma-1} T^{(\gamma n)},$$
$$T^{(\gamma n)} = T^{(\gamma-1, p^{-1} n)} + p^{1-\gamma} (\lambda_{\gamma n} - \lambda_{\gamma-1, p^{-1} n}). \tag{2.43}$$

В частности, для неотрицательных $T^{(\gamma n)}$ последовательность $\{\lambda_{\gamma n}\}$ для фиксированного $n$ неотрицательна и не возрастает с ростом $\gamma$.

## 2.7. $p$-Адическое уравнение Шрёдингера

Рассмотрим модель квантовой частицы с $p$-адической координатой $x$ и вещественным временем $t$. Динамика такой частицы описывается $p$-адическим уравнением Шрёдингера

$$i\partial_t \psi(x,t) = D_x^{\alpha} \psi(x,t) + U(x) \psi(x,t).$$

Здесь $\psi(x,t) \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ для любого вещественного $t$. Таким образом, отличие от вещественного уравнения Шрёдингера состоит в замене минус оператора Лапласа на оператор Владимирова.

В частности, для квантовой свободной частицы потенциал $U$ равен тождественно нулю. Явное отличие от вещественного случая состоит в том, что уравнение Шрёдингера для $p$-адической

свободной частицы имеет решения с компактным носителем (то есть имеет место локализация волновых пакетов для свободной частицы).

Построим пример локализованного решения: выберем

$$\psi(x,t) = e^{-i\omega t}\psi_{\gamma nj}(x),$$

где $\psi_{\gamma nj}$ есть $p$-адический всплеск. Тогда, при условии равенства частоты $\omega$ собственному значению оператора Владимирова для всплеска $\psi_{\gamma nj}$:

$$\omega = \lambda_\gamma = p^{\alpha(1-\gamma)},$$

вышеуказанная функция $\psi(x,t)$ будет являться решением $p$-адического уравнения Шрёдингера для свободной частицы

$$i\partial_t\psi(x,t) = D_x^\alpha\psi(x,t).$$

Обсудим нелинейное $p$-адическое уравнение Шрёдингера. Как известно, нелинейное уравнение Шрёдингера имеет вид уравнения в частных производных

$$i\partial_t\psi = -\partial_x^2\psi + \kappa|\psi|^2\psi$$

для комплекснозначной функции $\psi = \psi(x,t)$. Это уравнение имеет явные решения, называемые солитонами.

Исследуем $p$-адический аналог нелинейного уравнения Шрёдингера — $p$-адическое псевдодифференциальное уравнение с кубической нелинейностью вида

$$i\partial_t\psi = D_x^\alpha\psi + \kappa|\psi|^2\psi. \tag{2.44}$$

Будем, как выше, искать решение в виде

$$\psi(x,t) = Ce^{-i\omega t}\psi_{\gamma nj}(x),$$

где $C$ есть комплексная константа.

Легко видеть, что для любого всплеска $\psi_{\gamma nj}$ квадрат модуля всплеска пропорционален характеристической функции шара, являющегося носителем всплеска, и кубическая комбинация $|\psi_{\gamma nj}|^2\psi_{\gamma nj}$ пропорциональна самому всплеску:

$$|\psi_{\gamma nj}|^2\psi_{\gamma nj} = p^{-\gamma}\psi_{\gamma nj}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.44), мы получим

$$\omega = p^{\alpha(1-\gamma)} + \kappa|C|^2 p^{-\gamma}.$$

Мы получаем однопараметрическое семейство решений уравнения (2.44):

$$\psi(x,t) = Ce^{-it(p^{\alpha(1-\gamma)}+\kappa|C|^2 p^{-\gamma})}\psi_{\gamma nj}(x). \tag{2.45}$$

Построенное решение есть $p$-адический аналог солитона. Отметим, что частота $\omega$ зависит от амплитуды $C$.

# Глава 3

## Ультраметрические ПДО и всплески

### 3.1. Введение

Настоящая глава посвящена исследованию псевдодифференциальных операторов и всплесков на локально компактных ультраметрических пространствах общего вида, которые не обязательно обладают структурой группы. Такие операторы являются далеко идущим обобщением оператора Владимирова $D^\alpha$ $p$-адического дробного дифференцирования.

В настоящей главе мы показываем, что все основные результаты анализа $p$-адических псевдодифференциальных операторов допускают обобщение на случай регулярных ультраметрических пространств. Регулярные пространства – это полные локально компактные ультраметрических пространства со счётной базой. Имеет место двойственность между регулярными ультраметрическими пространствами и направленными деревьями определённого вида. Здесь направление есть частичный порядок, для которого любая пара элементов имеет единственную точную верхнюю грань.

Мы вводим псевдодифференциальные операторы и базисы ультраметрических всплесков на регулярных ультраметрических пространствах, доказываем, что базисы ультраметрических всплесков состоят из собственных векторов для введенных ультраметрических псевдодифференциальных операторов и вычисляем соответствующие собственные значения. Таким образом, для рассматриваемого класса ультраметрических пространств анализ всплесков является эффективной заменой анализа Фурье (на не обладающих структурой группы пространствах Фурье-анализ отстутствует).

Далее, мы развиваем приложения построенного анализа ультраметрических всплесков и псевдодифференциальных операторов. Мы вводим пространства основных и обобщённых функций на регулярных ультраметрических пространствах.

Мы исследуем существование и единственность решений задач Коши для линейных и нелинейных ультраметрических интегральных уравнений и строим решения таких задач Коши.

Мы строим гауссовское случайное поле на регулярном ультраметричесом пространстве как решение псевдодифференциального стохастического уравнения на ультраметрическом пространстве. Вводим понятие ультраметрической марковости, описывающее набор условий независимости для случайных полей ультраметрического аргумента, и показываем, что построенное гауссовское случайное поле является ультраметрически марковым. Построенное гауссовское случайное поле обобщает $p$-адическое броуновское движение, изучавшееся А. Х. Бикуловым и И. В. Воловичем [8].

Также мы изучаем пример точно решаемого нелинейного интегрального уравнения. Такое уравнение связано с каскадными моделями, использовавшимися для описания турбулентности.

Основные результаты настоящей главы по анализу ультраметрических всплесков и псевдодифференциальных операторов были изложены в [57], [177], [54]. Гауссовское случайное поле ультраметрического аргумента построено в [181]. Двойственность между ультраметрическими пространствами и направленными деревьями обсуждалась в [54] и изучалась также Леминым [203]. В $p$-адическом случае такая двойственность связана с конструкцией Брюа–Титса [128], [129]. Построение ультраметрических пространств при помощи деревьев обсуждалась разными авторами, см., например, [238], [134], [133]. Точно решаемое нелинейное ультраметрическое интегральное уравнение и его связь с каскадными моделями обсуждалась в [56]. Впервые $p$-адические нелинейные интегральные уравнения были применены к описанию каскадных моделей турбулентности Зеленовым и Фищенко [149].

Настоящая глава устроена следующим образом.

В разделах 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 мы строим семейство регулярных ультраметрических пространств и обсуждаем двойственность между такими пространствами и направленными деревьями.

В разделе 3.6 мы вводим ортонормированные базисы ультраметрических всплесков в пространствах квадратично интегрируемых функций на регулярных ультраметрических пространствах.

В разделе 3.7 мы вводим ультраметрическую замену переменной, отображающую рассматриваемые ультраметрические пространства на положительную полупрямую, и используем это отбражение для построения неоднородного обобщения базисов всплесков на вещественной полупрямой.

В разделе 3.8 мы вводим псевдодифференциальные операторы, действующие на комплекснозначных функциях на регулярных ультраметрических пространствах, доказываем, что эти операторы диагональны в базисах ультраметрических всплесков, и вычисляем соответствующие собственные значения.

В разделе 3.9 мы исследуем аналог оператора Владимирова на рассматриваемых ультраметрических пространствах.

В разделах 3.10 и 3.11 мы обсуждаем пространства основных и обобщённых функций на регулярных ультраметрических пространствах.

В разделе 3.12 мы обсуждаем разложение обобщённых функций из $D'(X)$ по всплескам и применяем это к построению решений задачи Коши для псевдодифференциальных уравнений.

В разделе 3.13 мы строим гауссовское случайное поле ультраметрического аргумента и вводим понятие ультраметрической марковости.

В разделе 3.14 мы исследуем пример точно решаемого нелинейного интегрального ультраметрического уравнения.

## 3.2. Направленное дерево $\mathcal{T}(X)$ шаров

В настоящем разделе мы по ультраметрическому пространству $X$ строим направленное дерево $\mathcal{T}(X)$ шаров в пространстве $X$. Напомним, см. определение 1 и обсуждение после этого определения, что ультраметрическое пространство есть метрическое пространство, где метрика удовлетворяет сильному неравенству треугольника. Мы опишем свойство локальной компактности ультраметрического пространства в терминах дерева шаров. Введём необходимые определения.

Определение 20. Будем говорить, что ультраметрическое пространство $X$ регулярно, если оно полно и удовлетворяет следующим свойствам:

1) множество всех шаров в $X$ ненулевого диаметра не более чем счётно;

2) для любой убывающей бесконечной последовательности шаров $\{D_k\}$, $D_k \supset D_{k+1}$, диаметры шаров стремятся к нулю;

3) Каждый шар ненулевого диаметра есть конечное объединение максимальных подшаров.

Из свойств 2 и 3 следует условие:

Для любых двух шаров $I$, $J$ в $X$ ненулевого диаметра и любой последовательности шаров $\{D_k\}$, для которой $I \subset D_k \subset J$ для всех $k$, последовательность $\{D_k\}$ конечна.

В самом деле, по условию 3 в шаре $J$ существует максимальный подшар $J_1 \subset J$, содержащий шар $I$. Если $J_1$ строго больше $I$, то в шаре $J_1$ существует максимальный подшар $J_2 \subset J_1$, содержащий шар $I$, и так далее. По свойству 2 диаметры шаров из убывающей последовательности стремятся к нулю либо эта последовательность обрывается (то есть диаметр некоторого шара в этой последовательности равен нулю). Поэтому шар $J_l$ для некоторого $l$ совпадёт с шаром $I$. Поскольку построенная последовательность $\{J_k\}$ максимальна, последовательность $\{D_k\}$ будет подпоследовательностью конечной последовательности $\{J_k\}$, $k \leqslant l$ и поэтому будет конечной.

Предложение 21. 1) *Регулярное ультраметрическое пространство локально компактно и имеет не более чем счётную базу.*

2) *Локально компактное ультраметрическое пространство со счётной базой регулярно.*

Здесь имеется в виду топология, соответствующая ультраметрике.

Доказательство. Наличие не более чем счётной базы эквивалентно свойству 1 определения регулярности.

Достаточно доказать, что исследуемое пространство локально счётно компактно. Для доказательства того, что регулярное пространство $X$ локально компактно (то есть любой шар в $X$ компактен) рассмотрим бесконечную (счётную) последовательность $\{x_k\}$, лежащую в шаре $D$ в $X$. Тогда, если шар имеет ненулевой диаметр, он содержит подшар $D'$, содержащий бесконечную подпоследовательность в $\{x_k\}$. В качестве такого подшара можно выбрать один из максимальных подшаров в $D$, так как поскольку

таких подшаров конечное число, то хотя бы один из них содержит бесконечное число членов последовательности.

Повторяя эту процедуру, мы получим убывающую последовательность шаров с диаметрами, стремящимися к нулю, причем каждый подшар содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_k\}$. Следовательно, последовательность $\{x_k\}$ имеет предельную точку в $D$. Мы показали, что регулярное ультраметрическое пространство локально компактно.

Пусть теперь полное ультраметрическое пространство $X$ со счётной базой локально компактно. Покажем, что для любого шара $J \subset X$ ненулевого диаметра и точки $x \in J$ существует максимальный подшар $J_1$ в $J$, содержащий $x$. В самом деле, пусть такого подшара не существует. Тогда существует бесконечная растущая последовательность вложенных шаров $\{D_k\}$, $D_k \in J$, $x \in D_k$ $\forall k$. Тогда в каждом шаре $D_k$ можно выбрать по одной точке, не принадлежащей меньшим шарам из последовательности. Мы получили последовательность точек, расстояния между которыми будут равны диаметрам соответствующих шаров $D_k$. Таким образом, эта последовательность не будет иметь точек сгущения, что противоречит локальной компактности.

Мы показали существование максимальных подшаров. Если бы в некотором шаре максимальных подшаров было бы бесконечно много, то это бы противоречило локальной компактности (поскольку расстояния между этими шарами одинаковы и равны диаметру содержащего их шара), откуда следует свойство 3 определения 20.

Более того, выполнено также свойство 2 этого определения. Это доказывается тем же рассуждением, которое использовалось для доказательства существования максимальных подшаров: в шарах из последовательности $\{D_k\}$ выбирается по одной точке, не лежащей в следующем (меньшем) шаре последовательности. Тогда если диаметры шаров не стремятся к нулю, последовательность точек не будет иметь точек сгущения, что противоречит локальной компактности.

Мы показали, что регулярные ультраметрические пространства суть в точности локально компактные ультраметрические пространства со счётной базой. Это завершает доказательство предложения. □

Введём стандартные определения частично упорядоченного и направленного множеств.

Определение 22. Частично упорядоченным множеством называется множество с заданным на нём частично определённым бинарным отношением сравнения, то есть для каждой пары $(x, y)$, $x \neq y$ элементов которого элементы $x$, $y$ либо несравнимы, либо $x > y$, либо $x < y$, причем:

1) элемент не может быть больше или меньше самого себя;

2) если $x > y$ и $y > z$, то $x > z$ (транзитивность).

Если любые два элемента частично упорядоченного множества сравнимы, то такое множество называется вполне упорядоченным.

Верхней гранью подмножества $S$ в частично упорядоченном множестве $T$ называется элемент множества $T$, больший или равный всем элементам подмножества $S$. Точная верхняя грань $\sup S$ подмножества $S$ – это верхняя грань, меньшая или равная любой верхней грани. Точная верхняя грань единственна. Если любое конечное подмножество имеет точную верхнюю грань, то частично упорядоченное множество называют направленным (а частичный порядок – направлением).

Напомним определения из теории графов.

Граф есть пара множеств $(G, E)$ (множество вершин, множество ребер), каждое из которых мы будем считать не более чем счётным. При этом каждое ребро $i \in E$ есть пара вершин $I_0, I_1 \in G$ (начало и конец ребра), мы рассматриваем только такие рёбра, для которых конец отличен от начала. В этом случае мы говорим, что $I_0$, $I_1$ соединены ребром, или являются соседними.

Путем в графе называем последовательность рёбер, такую, что конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего. Длиной пути называется число рёбер в этом пути. Граф называется связным, если для любых двух вершин $I$, $J$ существует конечный путь с началом в $I$ и концом в $J$. Расстоянием между вершинами графа называем длину соединяющего их кратчайшего пути. Цикл в графе есть конечный путь, для которого начальная вершина совпадает с конечной. Дерево есть связный граф без циклов. Мы будем рассматривать только такие пути в деревьях, которые не имеют самопересечений.

Рассмотрим произвольное дерево $\mathcal{T}$ (конечное или бесконечное), такое, что количество ребер, входящих в каждую вершину, конечно. Мы рассматриваем деревья с частичным порядком, удовлетворяющим следующему свойству:

Свойство 1. В любом конечном пути существует ровно одна максимальная вершина.

В частности, вершины, соединённые ребром, сравнимы.

Индексом ветвления $p_I$ вершины $I$ в таком дереве с частичным порядком будем называть число убывающих рёбер, выходящих из $I$ (ребро убывает, если его конец меньше начала). Индекс ветвления вершины $I$ эквивалентно может быть определён как число максимальных вершин, меньших $I$.

Лемма 23. *Частичный порядок в дереве, удовлетворяющий свойству* 1, *является направлением.*

Доказательство. Докажем, что если выполняется свойство 1, то для любого конечного множества вершин существует точная верхняя грань. Достаточно доказать это для случая двух вершин, поскольку если для любых двух вершин $A$, $B$ существует вершина, являющаяся точной верхней гранью $\sup(A, B)$, и мы выбираем произвольную вершину $C$, то рассмотрим

$$D = \sup(C, \sup(A, B)).$$

Тогда $D \geqslant A, B, C$, и если $E \geqslant A, B, C$, то $E \geqslant D$, то есть $D = \sup(A, B, C)$.

Следовательно, если существует точная верхняя грань для любой пары вершин, то $\sup(A, B, C)$ существует. Аналогично можно поступить для произвольного конечного числа вершин.

Из свойства 1 следует, что для максимальной вершины $C$ на пути $AB$ пути $AC$ и $CB$ представляют из себя вполне упорядоченные множества.

Для вершин $A$, $B$ рассмотрим путь, соединяющий эти вершины, и докажем, что (единственная) максимальная вершина $C$ на этом пути есть точная верхняя грань для $A$, $B$.

Пусть $D$ есть некоторая вершина, большая $A$, $B$. Рассмотрим путь, соединяющий $A$ и $D$. На этом пути по свойству1 есть максимальная вершина, большая $A$ и $D$. Поскольку $D > A$, эта максимальная вершина совпадает с $D$. Аналогично, $D$ есть максимальная вершина на пути, соединяющем $B$ и $D$. Более того, пути $AD$ и $BD$ вполне упорядочены.

Рассмотрим теперь пути $AB$, $AD$, $BD$. Поскольку мы рассматриваем дерево, существует единственная вершина $E$, принадлежащая всем трём путям. Для вершины $E$ выполнены неравенства

$$E \geqslant A, \qquad E \geqslant B, \qquad E \leqslant D.$$

Следовательно, $E = C$. Это доказывает, что $C$ есть точная верхняя грань для $A$ и $B$. Это завершает доказательство леммы. $\square$

Для ультраметрического пространства $X$ рассмотрим множество $\mathcal{T}(X)$, содержащее шары ненулевого диаметра в пространстве $X$, и шары нулевого диаметра, являющиеся максимальными подшарами в шарах ненулевого диаметра (напомним, что диаметр множества есть точная верхняя грань расстояния между элементами этого множества).

На множестве $\mathcal{T}(X)$ существует естественный частичный порядок: для $I, J \in \mathcal{T}(X)$ имеем $I > J$, если соответствующие шары упорядочены по вложению. Поскольку для любых двух шаров в ультраметрическом пространстве существует единственный минимальный шар, содержащий эти два шара (то есть точная верхняя грань этих шаров), то такой частичный порядок будет направлением.

Множество $\mathcal{T}(X)$ имеет структуру графа, определенную следующим образом: вершины графа есть шары из $\mathcal{T}(X)$, две вершины $I$ и $J$ соединены ребром если соответствующие шары вложены друг в друга, и между $I$ и $J$ нет других элементов из $\mathcal{T}(X)$ (то есть один из шаров есть максимальный подшар в другом). В $p$-адическом случае, когда $X$ есть $\mathbb{Q}_p$, соответствующий граф $\mathcal{T}(X)$ совпадает с деревом Брюа–Титса.

Теорема 24. *Пусть $X$ есть регулярное ультраметрическое пространство. Тогда множество $\mathcal{T}(X)$, содержащее шары ненулевого диаметра в пространстве $X$, и шары нулевого диаметра, являющиеся максимальными подшарами в шарах ненулевого диаметра, есть направленное дерево, причем направление удовлетворяет свойству* 1.

*Индекс ветвления в дереве $\mathcal{T}(X)$ может принимать конечные значения, не равные* 1. *Шары ненулевого диаметра в $X$ соответствуют вершинам индекса ветвления $\geqslant 2$ в $\mathcal{T}(X)$, и шары нулевого диаметра, являющиеся максимальными подшарами в шарах ненулевого диаметра отвечают вершинам с индексом ветвления* 0 *в $\mathcal{T}(X)$.*

Доказательство. Докажем, что граф $\mathcal{T}(X)$ будет деревом с конечным индексом ветвления. Из свойств (1), (3) регулярного ультраметрического пространства $X$ следует, что $\mathcal{T}(X)$ имеет не

более чем счётное число вершин, и все индексы ветвления конечны. По свойству (2) регулярного ультраметрического пространства граф $\mathcal{T}(X)$ является связным. В самом деле, для шаров $A$ и $B$ пути $A\ \sup(A,B)$ и $\sup(A,B)B$ являются конечными.

Предположим, что в графе $\mathcal{T}(X)$ имеется цикл. Выберем минимальный элемент $I$ цикла, и рассмотрим шары $J$, $K$ в $X$, лежащие в цикле, причем $I \subset J$, $I \subset K$ (в качестве $J$, $K$ можно выбрать соседние с $I$ вершины в цикле, они будут больше $I$). Из ультраметричности пространства $X$, для любых трёх шаров $I$, $J$, $K$ в $X$, таких, что $I \subset J$, $I \subset K$, шары $J$ и $K$ будут сравнимы: либо $J \subset K$, либо $K \subset J$, либо $J = K$. Следовательно, цикл не существует и граф $\mathcal{T}(X)$ является деревом.

Затем, легко видеть, что индекс ветвления дерева $\mathcal{T}(X)$ не может быть равен 1 ни для какой вершины. Более того, шары ненулевого диаметра в $X$ отвечают вершинам индекса ветвления $\geqslant 2$ в $\mathcal{T}(X)$, и шары нулевого диаметра, являющиеся максимальными подшарами в в шарах ненулевого диаметра отвечают вершинам индекса ветвления 0 в $\mathcal{T}(X)$.

Докажем, что направление в $\mathcal{T}(X)$ удовлетворяет свойству 1. Пусть $I$, $J$ в $\mathcal{T}(X)$ и $K = \sup(I,J)$. Рассмотрим пути $IJ$, $IK$, $JK$ и вершину

$$L = IJ \cap IK \cap JK$$

Тогда $L \geqslant I$, $L \geqslant J$ и $L \leqslant K$, откуда следует, что $L = K$, то есть точная верхняя грань $K$ лежит на пути $IJ$. Более того, легко видеть, что пути $IK$ и $JK$ вполне упорядочены, откуда следует свойство 1. Это завершает доказательство теоремы. □

Эта теорема показывает, что дерево шаров в регулярном ультраметрическом пространстве является направленным деревом с определёнными свойствами. Это подсказывает следующее определение.

Определение 25. Направленное дерево $\mathcal{T}$ называется регулярным деревом, если:

1) направление удовлетворяет свойству 1;

2) индекс ветвления в дереве $\mathcal{T}$ может принимать конечные значения, не равные 1.

Рассмотрим множество $X \cup \mathcal{T}(X)$, где мы отождествляем шары нулевого диаметра из $\mathcal{T}(X)$ и соответствующие точки из $X$. Мы называем $\mathcal{T}(X)$ *деревом шаров* в ульраметрическом пространстве $X$, и называем $X \cup \mathcal{T}(X)$ *расширенным деревом шаров.*

Можно сказать, что $X \cup \mathcal{T}(X)$ есть множество всех шаров в $X$, нулевого и ненулевого диаметра.

Введём структуру направленного множества на $X \cup \mathcal{T}(X)$. На дереве шаров $\mathcal{T}(X)$ эта структура уже описана, и отношения порядка с точками из $X$ вводятся следующим образом.

Определение 26. Любые две точки ультраметрического пространства $X$ несравнимы. Отношения порядка между точками $X$ и вершинами дерева $\mathcal{T}(X)$ (то есть шарами в $X$) вводятся следующим образом: если $x \in X$ и $I \in \mathcal{T}(X)$, то $x \leqslant I$ тогда и только тогда, когда $x \in I$.

Лемма 27. *Введённый определением 26 частичный порядок в $X \cup \mathcal{T}(X)$ является направлением. Это направление описывается следующим образом.*

*Точная верхняя грань*

$$\sup(x, y) = I$$

*точек $x, y \in X$ есть минимальный шар $I$, содержащий эти точки.*

*Аналогично для $J \in \mathcal{T}(X)$ и $x \in X$ точная верхняя грань*

$$\sup(x, J) = I$$

*есть минимальный шар $I$, содержащий шар $J$ и точку $x$.*

Эта конструкция расширяет определение верхней грани вершин дерева $\mathcal{T}(X)$, поскольку $I = \sup(J, K)$ соответствует минимальному $I$, содержащему шары $J$ и $K$).

Введем структуру ультраметрического пространства на расширенном дереве $X \cup \mathcal{T}(X)$.

Определение 28. Для $I$, $J$ в $X \cup \mathcal{T}(X)$, где $I \neq J$, расстояние $d(I, J)$ вводится как диаметр шара $K \in X \cup \mathcal{T}(X)$, $K = \sup(I, J)$, и для $I$ in $X \cup \mathcal{T}(X)$ расстояние $d(I, I)$ кладётся равным нулю: $d(I, I) = 0$.

Нетрудно проверить, что введённое расстояние есть ультраметрика. В частности, дерево шаров $\mathcal{T}(X)$ является (в общем случае, неполным) ультраметрическим пространством.

Более того, борелевская (то есть все шары измеримы) мера $\nu$ на ультраметрическом пространстве $X$ порождает меру (которую мы также обозначаем $\nu$) на расширенном дереве шаров $X \cup \mathcal{T}(X)$:

меру $I \in \mathcal{T}(X)$ мы кладём равной мере соответствующего шара в $X$.

Следующее предложение даёт пример борелевской $\sigma$-аддитивной меры на $X$, называемой однородной мерой.

Предложение 29. *На регулярном ультраметрическом пространстве $X$ рассмотрим меру $\mu$, положительную для некоторого шара $I_0$ ненулевого диаметра, и определенную для каждого шара $I$ по следующему правилу:*

*Меры всех шаров $I_j$, являющихся максимальными подшарами в $I$, равны.*

*Тогда мера $\mu$ является положительной, борелевской, $\sigma$-аддитивной и имеет счётный или конечный базис, состоящий из шаров*[1,2].

Доказательство. Легко видеть, что рассмотренное условие определяет меру $\mu$ с точностью до умножения на число. Мера шара $I$ определяется следующим образом: рассмотрим путь $II_0$. Тогда мера $\mu(I)$ получается из $\mu(I_0)$ умножением на индексы ветвления в минус первой степени для возрастающих рёбер на пути $II_0$ и на индексы ветвления в первой степени для убывающих рёбер на этом пути (индекс ветвления ребра есть индекс ветвления его максимальной вершины).

$\sigma$-Аддитивность следует из локальной компактности $X$ (также, как и для меры Лебега) [60]. Конечный или счётный базис для $\mu$ задаётся (не более счётным) множеством шаров в $X$. Это завершает доказательство предложения. □

## 3.3. Направленные деревья и ультраметрика

В предыдущем разделе было показано, как по регулярному ультраметрическому пространству $X$ построить направленное дерево шаров $\mathcal{T}(X)$. В настоящем разделе мы покажем, что на на-

[1] Напомним, что мера $m$ счётно-аддитивна, или $\sigma$-аддитивна, если для любого счётного набора непересекающихся попарно множеств из области определения меры $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, для которого $A = \bigcup_n A_n$ лежит в области определения меры, имеем $m(A) = \sum_n m(A_n)$.

[2] Напомним, что мера $m$ имеет счётный базис, если существует такой счётный набор измеримых множеств (счётный базис), что для всякого измеримого множества мера симметрической разности этого множества и конечного объединения множеств из счётного базиса может быть сделана как угодно малой.

правленном дереве $\mathcal{T}$ с направлением, удовлетворяющим свойству 1, можно ввести ультраметрику, и дадим характеризацию таких ультраметрик.

Определение 30. Два пути в дереве $\mathcal{T}$ назовём эквивалентными, если они совпадают, начиная с некоторой вершины (соответственно, они оба либо бесконечны, либо кончаются в одной вершине). Путь из класса эквивалентности $x$, начинающийся в вершине $A$, будем обозначать $Ax$ (такой путь существует вследствие связности дерева).

Следующая теорема описывает взаимно однозначное соответствие между направлениями на дереве $\mathcal{T}$, удовлетворяющими свойству 1, и классами эквивалентности путей в $\mathcal{T}$. Это даёт возможность описать конструктивно направления, удовлетворяющие свойству 1.

Теорема 31. *Фиксируем некий класс эквивалентности $x$ путей в дереве $\mathcal{T}$. Введём следующий частичный порядок на дереве $\mathcal{T}$. Будем говорить, что $A < B$, где $A$, $B$ есть вершины дерева $\mathcal{T}$, если существует путь из класса эквивалентности $x$, такой что $A$, $B$ лежат на этом пути, и $A < B$ в смысле порядка на пути (любой путь есть вполне упорядоченное множество в естественном смысле: вершина тем меньше, чем ближе к началу).*

*Данный частичный порядок удовлетворяет свойству 1 и является направлением на $\mathcal{T}$.*

*Обратно, любое направление на дереве $\mathcal{T}$, удовлетворяющее свойству 1, вводится таким образом (то есть для любого такого направления существует класс эквивалентности $x$ путей, задающий данное направление).*

Доказательство. Докажем, что условие теоремы действительно определяет частичный порядок. Покажем, что если для вершин $A$, $B$ имеем $A > B$, то не может быть $A < B$. Пусть пути $Ax$ и $Bx$ совпадают, начиная с вершины $C$. Если одновременно $A < B$ и $B < A$, то на вершины $A$, $B$, $C$ можно натянуть цикл, что противоречит условиям теоремы. Транзитивность введенного частичного порядка очевидна.

Пусть теперь $A$, $B$ – произвольные вершины. Рассмотрим пути $Ax$, $Bx$. Эти пути и путь $AB$ пересекаются в единственной вершине $C$. По построению вершина $C > A$, $C > B$, и $C$ есть

единственная максимальная вершина на пути $AB$. Таким образом, введенный частичный порядок удовлетворяет свойству 1 и по лемме 23 есть направление.

Обратно, пусть на дереве $\mathcal{T}$ задано направление, удовлетворяющее свойству 1. Выберем вершину $A$ и рассмотрим соседние (соединённые с $A$ рёбрами) вершины. Среди этих вершин ($A$ и соседних) по свойству 1 есть единственная максимальная вершина $A_1$. Опять, рассмотрим соседние к $A_1$ (включая саму $A_1$) и выберем максимальную вершину $A_2$. Повторяя процедуру, получим возрастающий путь $AA_1A_2\dots$ (который может быть конечен либо бесконечен).

Стартуя с вершины $B$, аналогичным способом получим возрастающий путь $BB_1B_2\dots$. Поскольку по свойству 1 на пути $AB$ есть единственная максимальная вершина $C = \sup(A, B)$, то

$$AB \subset AA_1A_2\dots \cup BB_1B_2\dots$$

и пути $AA_1A_2\dots$, $BB_1B_2\dots$ совпадают, начиная с $C$. Следовательно, эти пути лежат в одном классе эквивалентности.

Это завершает доказательство теоремы. □

Следующая теорема описывает семейство ультраметрик на направленных деревьях. Мы называем две метрики на одном пространстве эквивалентными, если они определяют одинаковые наборы шаров.

Теорема 32. *Если $F(I)$ есть положительная возрастающая функция на направленном дереве $\mathcal{T}$, то формула*

$$d(A, B) = F(\sup(A, B)), \quad A \neq B, \quad d(A, A) = 0 \quad \forall A, B \in \mathcal{T}, \tag{3.1}$$

*определяет на дереве $\mathcal{T}$ ультраметрику, то есть эта функция неотрицательна, равна нулю только для $A = B$, симметрична по отношению к перестановке $A$ и $B$, и удовлетворяет сильному неравенству треугольника:*

$$d(A, B) \leqslant \max(d(A, C), d(B, C)) \quad \forall A, B, C \in \mathcal{T}.$$

*Более того, все ультраметрики, определённые таким образом, эквивалентны.*

Доказательство. Для доказательство того, что $d(A, B)$ есть ультраметрика, достаточно доказать, что $d(A, B)$ удовлетворяет

сильному неравенству треугольника (остальные условия, необходимые для ультраметричности, очевидны).

Рассмотрим вершины $A$, $B$, $C$. Пусть $I = \sup(A, B)$, $J = \sup(B, C)$, $K = \sup(A, C)$.

Поскольку вершины $I$ и $K$ обе больше вершины $A$, то они сравнимы, иначе бы в дереве существовал цикл из двух различных путей $AI\sup(I, K)$, $AK\sup(I, K)$ (мы обозначаем $XYZ$ путь с началом в $X$ и концом в $Z$, проходящий через $Y$). Аналогично, сравнимы вершины $I$ и $J$; а также вершины $J$ и $K$. Следовательно, $\{I, J, K\}$ есть упорядоченное множество.

Возможно два варианта: либо $I = J = K$, либо среди этих вершин есть несовпадающие. Если $I = J = K$, то вследствие (3.1)

$$d(A, B) = d(A, C) = d(B, C),$$

то есть выполнено сильное неравенство треугольника.

Примем, что $I > J$, то есть $\sup(A, B) > \sup(B, C)$. Тогда $\sup(A, C) = \sup(A, B)$, то есть $I = K$. Это означает, что по (3.1)

$$d(A, B) = d(A, C) > d(B, C),$$

то есть выполнено сильное неравенство треугольника.

Аналогично, при прочих выборах порядка на множестве $\{I, J, K\}$ мы опять получим сильное неравенство треугольника.

Поскольку структура множества шаров, определённая таким образом, зависит только от направления на дереве и не зависит от функции $F$, ультраметрики, соответствующие различным $F$, будут эквивалентны. Это завершает доказательство теоремы. □

Введём теперь пример ультраметрики вида, описанного в теореме 32. Такую ультраметрику на $\mathcal{T}$ мы будем назвать стандартной.

Сопоставим ребру дерева индекс ветвления наибольшей из вершин ребра (это определение корректно, поскольку две вершины, соединенные ребром, всегда сравнимы). Ребро называется возрастающим, если конец ребра больше начала, и убывающим в противном случае.

Определение 33. Рассмотрим направленное дерево $\mathcal{T}$ с направлением, удовлетворяющим свойству 1. Пусть, более того, все индексы ветвления вершин дерева конечны и не равны 1, максимальная вершина либо не существует, либо имеет индекс ветвления $\geqslant 2$. Выберем произвольную вершину $R$ дерева (эту вершину мы будем называть корнем дерева).

Пусть $A$, $B$, $A \neq B$, есть вершины дерева $\mathcal{T}$ и $I = \sup(A, B)$, $R$ есть корень дерева $\mathcal{T}$. Определим расстояние $d(A, B)$ между вершинами дерева как произведение индексов ветвления ребер вдоль конечного направленного пути $RI$

$$RI = I_0 \dots I_N, \qquad I_0 = R, \quad I_N = I$$

в степенях $\pm 1$, причем индексы ветвления возрастающих ребер $I_j I_{j+1}$ входят в произведение в степени $+1$, а индексы ветвления убывающих ребер входят в степени $-1$:

$$d(A, B) = \prod_{j=0}^{N-1} p_{I_j I_{j+1}}^{\varepsilon_{I_j I_{j+1}}}, \tag{3.2}$$

где $\varepsilon_{I_j I_{j+1}} = 1$ для $I_j < I_{j+1}$, $\varepsilon_{I_j I_{j+1}} = -1$ для $I_j > I_{j+1}$.

Если вершины $A$, $B$ совпадают, то расстояние между ними положим равным нулю.

По теореме 32 введённое расстояние будет ультраметрикой. В дальнейшем обозначение $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ для определённости будет пониматься как ультраметрика, заданная формулой (3.2).

## 3.4. Пополнение направленных деревьев

В настоящем разделе мы рассматриваем пополнения направленных деревьев (с направлением, удовлетворяющим свойству 1 и описываемым теоремой 31) относительно ультраметрики, определённой теоремой 32. Данная конструкция является аналогом конструкции вещественных (и $p$-адических) чисел по рациональным.

Определение 34. Для направленного дерева $\mathcal{T}$ рассмотрим множество $\widetilde{X}(\mathcal{T})$, являющееся пополнением $\mathcal{T}$ по ультраметрике, заданной теоремой 32. Пространство $\widetilde{X}(\mathcal{T})$ будем называть пополненным деревом, отвечающим дереву $\mathcal{T}$.

Также введём множество $X(\mathcal{T}) = \widetilde{X}(\mathcal{T}) \setminus (\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_{\min})$ (где $\mathcal{T}_{\min}$ есть множество минимальных вершин в $\mathcal{T}$), то есть $X(\mathcal{T})$ есть $\widetilde{X}(\mathcal{T})$, из которого выкинуты все вершины дерева $\mathcal{T}$, кроме минимальных. Пространство $X(\mathcal{T})$ мы будем называть ультраметрическим пространством, связанным с направленным деревом $\mathcal{T}$.

Множества $\widetilde{X}(\mathcal{T})$ и $X(\mathcal{T})$ являются полными ультраметрическими пространствами.

Здесь мы понимаем вычитание дерева из его пополнения следующим образом: вершина $A$ дерева очевидным образом отождествляется с классом эквивалентности последовательностей вершин, совпадающих с $A$, начиная с некоторого элемента.

Определение пространства $X(\mathcal{T})$ эквивалентно, см. следующий раздел, стандартному определению абсолюта дерева (точнее, определению абсолюта с выколотой точкой, отвечающей возрастающему пути).

Назовём бесконечно продолженным путь в направленном дереве $\mathcal{T}$ с описанным в разделе 3.2 направлением, который либо бесконечен, либо заканчивается в вершине с индексом ветвления 0, либо заканчивается в максимальной вершине в $\mathcal{T}$ (если такая вершина существует).

Лемма 35. *Множество $\widetilde{X}(\mathcal{T})$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов эквивалентности путей в $\mathcal{T}$, содержащих невозрастающие пути. Множество $X(\mathcal{T})$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством классов эквивалентности путей в $\mathcal{T}$, содержащих невозрастающие бесконечно продолженные пути.*

Доказательство. Невозрастающему пути в дереве $\mathcal{T}$ можно сопоставить бесконечную последовательность вершин в дереве следующим образом: если путь бесконечен, то последовательность выберем как последовательность вершин пути; если путь конечен, то последовательность выберем как последовательность вершин пути, дополненную бесконечной последовательностью, состоящей из конечной вершины пути.

Применяя данную конструкцию к классу эквивалентности, содержащему невозрастающий путь, получим набор эквивалентных фундаментальных последовательностей в смысле ультраметрики (3.1). Таким образом, множество классов эквивалентности, содержащих невозрастающие пути, есть подмножество в $\widetilde{X}(\mathcal{T})$.

В свою очередь, из (3.1) нетрудно видеть, что любой класс эквивалентности фундаментальных относительно метрики (3.1) последовательностей в $\mathcal{T}$ содержит последовательность, определённую невозрастающим путем. Следовательно, множество $\widetilde{X}(\mathcal{T})$ изоморфно множеству классов эквивалентности невозрастающих путей.

Аналогично, класс эквивалентности бесконечно продолженных невозрастающих путей отвечает некоторой точке $X(\mathcal{T})$, и в любом классе эквивалентности последовательностей точек дерева, отвечающем точке $X(\mathcal{T})$, содержится последовательность, отвечающая бесконечно продолженному невозрастающему пути. Это завершает доказательство леммы. $\square$

Введённое пополненное дерево $\widetilde{X}(\mathcal{T})$ совпадает с $X \cup \mathcal{T}(X)$, где $X = X(\mathcal{T})$. Это показывает наличие двойственности между регулярными ультраметрическими пространствами и направленными деревьями с конечным индексом ветвления $\neq 1$, направлением, удовлетворяющим свойству 1, и с максимальной вершиной (если она существует) имеющей индекс ветвления $\geqslant 2$.

Вершине $I \in \mathcal{T}$ соответствует шар $I$ в ультраметрическом пространстве $\widetilde{X}(\mathcal{T})$, являющийся минимальным шаром, содержащим все вершины, меньшие $I$. Аналогично, шаром $I$ в пространстве $X(\mathcal{T})$ назовем результат вычитания из $I \subset \widetilde{X}(\mathcal{T})$ соответствующих вершин $\mathcal{T}$. Шар $I$ содержит $p_I$ максимальных подшаров, где $p_I$ есть индекс ветвления вершины $I$.

Определим однородную меру $\mu$ на пространстве $X(\mathcal{T})$, которая для случая дерева Брюа–Титса сведется к мере Хаара на $p$-адических числах. Чтобы определить меру $\mu$, достаточно определить эту меру на шарах $I$. Определим диаметр $d_I = \operatorname{diam}(I)$ шара как точную верхнюю грань расстояния $d(x, y)$ между точками $x$ и $y$ в шаре $I$.

Определение 36. Однородная мера $\mu$ на $X(\mathcal{T})$ шара $I$ ненулевого диаметра равна его диаметру $\mu(I) = \operatorname{diam}(I)$ в ультраметрике (3.2). Для шара нулевого диаметра $I$, отвечающего минимальной вершине $I$, мера $\mu(I)$ определяется как $p_{I+1}^{-1}\mu(I+1)$. Здесь $I+1$ есть минимальная вершина, большая $I$, $p_{I+1}$ и $\mu(I+1)$ есть соответственно индекс ветвления и мера шара (с ненулевым диаметром), соответствующие этой вершине.

Поскольку неминимальный шар $I$ содержит $p_I$ максимальных подшаров, которые по определению ультраметрики и меры имеют меру $p_I^{-1}\mu(I)$, то мера $\mu$ аддитивна.

Лемма 37. *Эквивалентно, однородная мера $\mu$ задаётся следующими условиями*:

1) *Для шара $R$, отвечающего корню дерева $\mathcal{T}$, $\mu(R) = 1$*;

2) *Для каждого неминимального шара $I$ выполнено условие*: *меры максимальных подшаров в $I$ равны.*

Однородная мера на регулярном ультраметрическом пространстве будет положительной, борелевской (то есть все шары будут измеримы), счётно аддитивной и будет иметь счётный либо конечный базис. Эти свойства (кроме счётной аддитивности) непосредственно следуют из определения. Счётная аддитивность доказывается так же, как и для меры Лебега на прямой, и следует из локальной компактности регулярного ультраметрического пространства.

Мы обозначаем $L^2(X,\mu)$ сепарабельное гильбертово пространство комплекснозначных квадратично интегрируемых (по отношению к введенной мере) функций на пространстве $X(\mathcal{T})$. Поскольку пространство $X(\mathcal{T})$ (в общем случае) не является группой, не существует преобразования Фурье в $L^2(X,\mu)$. Тем не менее, там можно ввести всплеск-преобразование.

Обсудим представление элементов пространства $X(\mathcal{T})$ и пополненного дерева, аналогичное разложению вещественных чисел в десятичные дроби (и $p$-адических чисел в ряды по степеням $p$).

Для каждой вершины $I$ дерева мы имеем $p_I$ убывающих ребер, выходящих из вершины, $0 \leqslant p_I < \infty$. Занумеруем все убывающие ребра числами $x_I = 0, \dots, p_I - 1$ произвольным образом. Мы рассматриваем $x_I$ как функцию от $x$ из шара $I$, где $x_I$ есть номер ребра, выходящего из вершины $I$, на убывающем пути из $I$ в $x$.

Рассмотрим точку $x \in X(\mathcal{T})$. Рассмотрим убывающий (бесконечный либо конечный) путь $\sup(R,x)x$, имеющий последовательность (убывающих) ребер $\{x_L\}$. Пусть $\gamma$ есть число (возрастающих) ребер в конечном пути $R\sup(R,x)$.

Мы сопоставляем точке $x$ последовательность номеров ребер (бесконечную для бесконечного пути и конечную для конечного пути)

$$x_{-\gamma}x_{-\gamma+1}\dots x_{-1}, x_0 \dots . \tag{3.3}$$

Элементы в вышеприведенной последовательности есть элементы последовательности $\{x_L\}$, расположенные в порядке убывания[3].

Аналогично, вершине $I \in \mathcal{T}$ сопоставляется конечная последовательность $\{x_L\}$ номеров ребер в пути $\sup(R,I)I$:

$$x_{-\gamma}x_{-\gamma+1}\dots x_{-1}, x_0 \dots x_\beta, \tag{3.4}$$

[3]Мы определяем элемент последовательности с отрицательными номерами запятой, т.е. $x_{-\gamma}$ есть номер ребра пути $\sup(R,x)x$, выходящего из $\sup(R,x)$, $x_{-\gamma+1}$ есть номер следующего ребра на этом пути, и так далее.

где $\gamma$ есть число (возрастающих) ребер в конечном пути $R\sup(R,I)$ и $x_\beta$ есть номер убывающего ребра, входящего в $I$.

Легко видеть, что последовательности (3.3) являются пределами последовательностей (3.4), соответствующих убывающим $I$, в норме (3.2). Данная конструкция есть аналог представления $p$-адического числа в виде ряда

$$x = \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^i, \qquad x_i = 0, \dots, p-1$$

(данный ряд есть аналог последовательности (3.3)), и такие ряды есть пределы в $p$-адической норме от конечных сумм вида

$$x = \sum_{i=\gamma}^{\beta} x_i p^i, \qquad x_i = 0, \dots, p-1$$

(аналогов последовательностей (3.4)).

## 3.5. Связь со стандартным определением абсолюта

Рассмотрим регулярное направленное дерево $\mathcal{T}$. Воспроизведём для сравнения более стандартное определение абсолюта направленного дерева.

Выберем класс эквивалентности $\infty$ путей в $\mathcal{T}$. Направление на множестве вершин дерева определим следующим образом: $J > I$ если $J$ принадлежит пути $I\infty$. Тогда $\infty$ будет классом эквивалентности возрастающих бесконечно продолженных путей в $\mathcal{T}$.

Абсолютом дерева $\mathcal{T}$ мы будем называть множество $\widehat{X}(\mathcal{T})$ классов эквивалентности бесконечно продолженных путей. Также рассмотрим пространство $X(\mathcal{T})$ классов эквивалентности бесконечно продолженных путей, содержащих убывающие бесконечно продолженные пути. Таким образом, $\widehat{X}(\mathcal{T}) = X(\mathcal{T}) \cup \infty$.

Фиксируем некоторую вершину $R$ дерева $\mathcal{T}$ (мы будем называть эту вершину корнем дерева).

Для точек $x$, $y$ абсолюта существует единственный путь $xy$ в дереве $\mathcal{T}$. Здесь мы обозначаем $xy$ следующее множество: в классе эквивалентности $x$ мы выбираем представитель $Ix$ (путь к точке абсолюта $x$, начинающийся в вершине $I$), аналогично выбираем

$Iy$, и рассматриваем объединение $Ix \cup Iy$. Тогда мы определяем $xy$ как пересечение всех таких объединений:

$$xy = \bigcap_I (Ix \cup Iy).$$

Множество $xy$ мы будем называть путем между двумя точками абсолюта.

Для трех таких путей $xy$, $xz$, $yz$, отвечающих попарно различным точкам абсолюта $x$, $y$, $z$, существует единственная вершина $I$ дерева $\mathcal{T}$, лежащая на всех трех путях.

Точку пересечения трёх путей $xy$, $x\infty$, $y\infty$ мы будем называть точной верхней гранью точек $x$, $y$ пространства $X(\mathcal{T})$ и обозначать $\sup(x, y)$:

$$\sup(x, y) = xy \cap x\infty \cap y\infty. \tag{3.5}$$

Определение ультраметрики 33 примет следующий вид.

Определение 38. Пусть $x, y \in X(\mathcal{T})$, $I = \sup(x, y)$ и $R$ есть корень дерева. Определим расстояние $d(x, y)$ между точками $X(\mathcal{T})$ как произведение индексов ветвления ребер вдоль конечного направленного пути $RI$

$$RI = I_0 \dots I_N, \qquad I_0 = R, \quad I_N = I$$

в степенях $\pm 1$, причем индексы ветвления возрастающих ребер $I_j I_{j+1}$ входят в произведение в степени $+1$, а индексы ветвления убывающих ребер входят в степени $-1$:

$$d(x, y) = \prod_{j=0}^{N-1} p_{I_j I_{j+1}}^{\varepsilon_{I_j I_{j+1}}}, \tag{3.6}$$

где $\varepsilon_{I_j I_{j+1}} = 1$ для $I_j < I_{j+1}$, $\varepsilon_{I_j I_{j+1}} = -1$ для $I_j > I_{j+1}$.

Если $x = y$, то расстояние $d(x, y)$ положим равным нулю.

Мы суммируем результаты, полученные в нескольких последних разделах, в следующей теореме.

Теорема 39. *Рассмотрим регулярное дерево $\mathcal{T}$, то есть направленное дерево со следующими свойствами*:

1) *число ребер, входящих в любую вершину, конечно*;

2) *индекс ветвления любой вершины* $\neq 1$;

3) *максимальная вершина (если она существует) имеет индекс ветвления* $\geqslant 2$;

4) *направление в дереве определяется при помощи конструкции теоремы* 31 *некоторой точкой абсолюта* (*то есть классом эквивалентности бесконечно продолженных путей*), *называемой бесконечной точкой и обозначаемой* $\infty$, *следующим образом*: $I > J$, *если* $I$ *лежит на пути* $J\infty$.

*Пусть* $F(I)$ *есть возрастающая положительная функция на направленном дереве* $\mathcal{T}$. *Тогда метрика на пространстве* $X(\mathcal{T})$, *определенная формулой* (3.1), *делает* $X(\mathcal{T})$ *регулярным ультраметрическим пространством.*

Следствие 40. *Если в условиях теоремы* 39 *в каждую вершину дерева* $\mathcal{T}$ *входят как минимум три ребра*, *то в абсолюте* $X(\mathcal{T})$ *внутри каждого шара существует подшар меньшего диаметра*, *и каждый шар лежит в шаре большего диаметра.*

## 3.6. Ультраметрические всплески

Пусть $\nu$ есть положительная борелевская (то есть все шары измеримы) $\sigma$-аддитивная мера со счётным либо конечным базисом в регулярном ультраметрическом пространстве $X$, $L^2(X,\nu)$ есть гильбертово пространство квадратично интегрируемых по мере $\nu$ функций на ультраметрическом пространстве $X$. В настоящем разделе будут введены ортонормированные базисы ультраметрических всплесков в гильбертовом пространстве $L^2(X,\nu)$.

Обозначим $V(I)$ пространство функций на $X$, порождаемое характеристическами функциями максимальных подшаров в шаре ненулевого радиуса $I$. Соответственно, $V_0(I)$ есть подпространство коразмерности 1 в $V(I)$ функций с нулевым средним по мере $\nu$.

Лемма 41. *Пространства* $V_0(I)$ *для различных* $I$ *ортогональны в* $L^2(X,\nu)$.

Доказательство. Если $I$, $J$ несравнимы, соответствующие пространства $V_0(I)$, $V_0(J)$ состоят из функций с непересекающимся носителям, и, следовательно, ортогональны.

Если $I > J$, то функции из $V_0(I)$ постоянны на носителе функций из $V_0(J)$. Поскольку $V_0(J)$ состоит из функций с нулевым средним, пространства $V_0(I)$, $V_0(J)$ будут ортогональны. Это завершает доказательство леммы. $\square$

В пространстве $V_0(I)$ введём некоторый ортонормированный базис $\{\psi_{Ij}\}$, где число векторов в базисе очевидным образом

меньше или равно $p_I - 1$. Следующая теорема показывает, что объединение базисов $\{\psi_{Ij}\}$ в пространствах $V_0(I)$ по всем неминимальным $I$ даёт ортонормированный базис в $L^2(X, \nu)$.

Теорема 42. 1) *Пусть мера $\nu(X)$ регулярного ультраметрического пространства $X$ бесконечна. Тогда набор функций $\{\psi_{Ij}\}$, где $I$ пробегает множество всех неминимальных вершин в дереве $\mathcal{T}$, есть ортонормированный базис в $L^2(X, \nu)$.*

2) *Пусть мера $\nu(X)$ регулярного ультраметрического пространства $X$ конечна и равна $A$. Тогда набор функций $\{\psi_{Ij}, A^{-\frac{1}{2}}\}$, где $I$ пробегает множество всех неминимальных вершин в дереве $\mathcal{T}$, есть ортонормированный базис в $L^2(X, \nu)$.*

Введенный в данной теореме базис мы будем называть базисом ультраметрических всплесков (то соответствующим образом нормированную константу мы также будем называть всплеском).

Доказательство. По лемме 41 описанные в условии теоремы наборы функций ортонормальны.

Для доказательства полноты используем равенство Парсеваля. Поскольку множество индикаторов (характеристических функций) шаров $I$ полно в $L^2(X, \nu)$, то для доказательства полноты достаточно доказать равенство Парсеваля только для индикаторов $\chi_I(x)$.

Рассмотрим характеристическую функцию $\chi_I$ шара $I$, для которого $\nu(I) > 0$ (и, следовательно, $\chi_I \neq 0$ в пространстве $L^2(X, \nu)$). Разложим характеристическую функцию $\chi_I(x)$ по всплескам. Для этого достаточно воспользоваться всплесками $\psi_{Jj}$ с $J > I$.

Обозначим $P_V$ ортогональный проектор на $V$ в $L^2(X, \nu)$. Тогда

$$P_{V_0(J)} = P_{V_J} - P_{\chi_J}.$$

Рассмотрим вектор

$$\widetilde{\chi}_I = \sum_{J \in \mathcal{T}} P_{V_0(J)} \chi_I = \sum_{J > I} (P_{V_J} - P_{\chi_J}) \chi_I = \sum_{J > I} (P_{\chi_{J,I}} - P_{\chi_J}) \chi_I,$$

где $(J, I)$ есть (единственным образом определённая) максимальная вершина, меньшая $J$ и большая $I$ (то есть максимальный подшар в $J$, содержащий шар $I$). Вышеприведенный вектор представлен в виде ряда по ортогональным векторам. Вычислим квадрат

длины $\widetilde{\chi}_I$:

$$\|\widetilde{\chi}_I\|^2 = \sum_{J>I} \|(P_{\chi_{J,I}} - P_{\chi_J})\chi_I\|^2.$$

Поскольку для $J \geqslant I$

$$P_{\chi_J}\chi_I = \frac{\nu(I)}{\nu(J)}\chi_J$$

(это выражение корректно, так как $\nu(J) > 0$ для $J \geqslant I$), мы получим

$$\begin{aligned}\|(P_{\chi_{J-1,I}} - P_{\chi_J})\chi_I\|^2 &= \left\|\frac{\nu(I)}{\nu(J,I)}\chi_{J,I} - \frac{\nu(I)}{\nu(J)}\chi_J\right\|^2 = \\ &= \left(\frac{\nu(I)}{\nu(J,I)} - \frac{\nu(I)}{\nu(J)}\right)^2 \nu(J,I) + \left(\frac{\nu(I)}{\nu(J)}\right)^2 (\nu(J) - \nu(J,I)) = \\ &= \nu^2(I)\left[\frac{1}{\nu(J,I)} - \frac{1}{\nu(J)}\right].\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\chi}_I\|^2 &= \nu^2(I)\sum_{J>I}\left[\frac{1}{\nu(J,I)} - \frac{1}{\nu(J)}\right] = \\ &= \nu^2(I)\lim_{J\to\infty, J>I}\left[\frac{1}{\nu(I)} - \frac{1}{\nu(J)}\right],\end{aligned} \tag{3.7}$$

где предел в правой части есть предел выражения в квадратных скобках для последовательности возрастающих $J$, начинающейся с $I$.

В случае 1 из (3.7) следует равенство Парсеваля для $\chi_I$.

В случае 2 мы получим для (3.7)

$$\nu^2(I)\left[\frac{1}{\nu(I)} - \frac{1}{A}\right].$$

В этом случае, поскольку для проверки равенства Парсеваля мы должны прибавить к выражению выше член, соответствующий вкладу нормированной константы:

$$\frac{\nu^2(J)}{A}.$$

Мы опять получаем равенство Парсеваля, что завершает доказательство теоремы. □

Важным примером ультраметрических всплесков являются всплески в пространстве $L^2(X,\mu)$ с однородной мерой $\mu$ (то есть мерой, определяемой условием равенства мер максимальных подшаров в каждом шаре). Такие всплески определяются как функции $\psi_{Ij}(x)$ (где $I$ есть вершина дерева и $j = 1,\dots,p_I - 1$), заданные формулами

$$\psi_{Ij}(x) = \frac{e^{2\pi i j x_I p_I^{-1}}\chi_I(x)}{\sqrt{\mu(I)}}. \tag{3.8}$$

Здесь $x_I$ есть номер убывающего ребра в нумерации рёбер, описанной в разделе 3.4, где $x_I$ есть функция от $x$, рассматриваемого как убывающий путь, начинающийся в вершине $I$ дерева $\mathcal{T}$.

Отметим, что определение всплеска (3.8) зависит от нумерации ребер дерева (но носители всплесков не зависят от этой нумерации). Поскольку введённые формулой (3.8) всплески являются частным случаем базиса, рассмотренного в теореме 42, мы будем использовать то же обозначение. Следующая лемма показывает, что функции (3.8) действительно являются ультраметрическими всплесками в смысле определения настоящего раздела.

Лемма 43. *Набор $\{\psi_{Ij}\}$ есть ортонормированная система функций в $L^2(X,\mu)$. Всплеск $\psi_{Ij}$ ортогонален характеристической функции $\chi_J$ для $J \geqslant I$ или $I$, несравнимого с $J$.*

Доказательство. Легко видеть, что интеграл от любого всплеска $\psi_{Ij}$ равен нулю. Отсюда сразу следует второе утверждение леммы, поскольку характеристическая функция $\chi_J$ для $J \geqslant I$ или $I$ несравнимого с $J$ есть константа (или даже нуль) на носителе всплеска $\psi_{Ij}$.

Отсюда следует, что $\langle \psi_{Ij}, \psi_{I'j'}\rangle$ может быть отлично от нуля только для $I = I'$, иначе один из всплесков будет константой на носителе другого. Для $I = I'$ получим для скалярного произведения

$$\langle \psi_{Ij}, \psi_{Ij'}\rangle = \frac{1}{\mu(I)}\int e^{2\pi i (j'-j) x_I p_I^{-1}}\chi_I(x)\,d\mu(x) = \delta_{jj'}. \tag{3.9}$$

Следовательно,

$$\langle \psi_{Ij}, \psi_{I'j'}\rangle = \delta_{II'}\delta_{jj'},$$

то есть векторы $\psi_{Ij}$ ортонормальны, что завершает доказательство леммы. $\square$

## 3.7. Связь со всплесками на вещественной прямой

В настоящем разделе мы рассматриваем случай, когда в дереве $\mathcal{T}$ все возрастающие и убывающие пути бесконечны. Мы показываем, что базис всплесков (3.8) порождает новый базис в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ квадратично интегрируемых на положительной полупрямой функций, являющийся обобщением базиса всплесков. В настоящем разделе (и только в этом разделе) мы будем различать между вершиной $I$ дерева $\mathcal{T}$ и соответствующим этой вершине шаром $D_I$ в ультраметрическом пространстве $X$.

Мы строим отображение $\rho\colon X \to \mathbb{R}_+$, которое мы будем называть ультраметрической заменой переменной. Мы исследуем случай, когда дерево $\mathcal{T}(X)$ не содержит минимальных и максимальных вершин и на пространстве $X$ задана однородная мера $\mu$. Для точки $x$ пространства $X$, имеющей параметризацию (3.3) вида

$$x = x_{I_\gamma} x_{I_{\gamma+1}} \dots x_{I_{-1}}, x_{I_0} x_{I_1} \dots; \qquad x_I = 0, \dots, p_I - 1, \quad \gamma \in \mathbb{Z},$$

отображение $\rho$ вводится как

$$\rho\colon x \mapsto \sum_{k=\gamma}^{-1} x_{I_k} \prod_{l=k}^{-1} p_{I_l} + \sum_{k=0}^{\infty} x_{I_k} \prod_{l=0}^{k} p_{I_l}^{-1}$$

для отрицательных $\gamma$ и как

$$\rho\colon x \mapsto \sum_{k=\gamma}^{\infty} x_{I_k} \prod_{l=0}^{k} p_{I_l}^{-1}$$

для неотрицательных $\gamma$.

Эквивалентно, это можно записать как

$$\rho(x) = \sum_{J \leqslant I} x_J \mu(D_{J-1}), \tag{3.10}$$

где суммирование идет по убывающему пути в дереве $\mathcal{T}$, соответствующему $x$, $I = \sup(R, x)$ и $J - 1$ есть наибольшая вершина, меньшая $J$, в пути $x$.

Это отображение не является взаимно однозначным (но является взаимно однозначным почти всюду). Отображение $\rho$ непрерывно и, более того, можно доказать следующую лемму:

Лемма 44. *Отображение $\rho$ удовлетворяет неравенству Гёльдера*

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant d(x, y). \tag{3.11}$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$0 \leqslant \rho(x) \leqslant \sum_{J \leqslant \sup(R,x)} (p_J - 1)\mu(D_{J-1}).$$

Рассмотрим

$$\rho(x) - \rho(y) = \sum_{J \leqslant \sup(R,x)} x_J \mu(D_{J-1}) - \sum_{L \leqslant \sup(R,y)} y_L \mu(D_{L-1}).$$

Считая без потери общности, что $\sup(R, x) \geqslant \sup(R, y)$, получим

$$\rho(x) - \rho(y) \leqslant \sum_{J \leqslant \sup(R,x)} (p_J - 1)\mu(D_{J-1}) = d(x, y),$$

что завершает доказательство леммы. □

Лемма 45. *Отображение $\rho$ удовлетворяет условиям*

$$\rho\colon D_I \to \rho(I) + [0, \mu(D_I)], \tag{3.12}$$

$$\rho\colon X \setminus D_I \to \mathbb{R}_+ \setminus \{\rho(I) + [0, \mu(D_I)]\} \tag{3.13}$$

*с точностью до конечного числа точек.*

Отметим, что здесь мы отождествляем вершину $I$ и точку пространства $X$ с нумерацией $I0\ldots$.

Доказательство. Для вершины $I$ рассмотрим точки

$$I = x_{I_\alpha} x_{I_{\alpha+1}} \ldots x_{I_{-1}}, x_{I_0} x_{I_1} \ldots x_{I_{\beta-1}} 0 \ldots$$

и

$$\tilde{I} = x_{I_\alpha} x_{I_{\alpha+1}} \ldots x_{I_{-1}}, x_{I_0} x_{I_1} \ldots x_{I_{\beta-1}} p_{I_\beta} - 1, \ldots .$$

Первая точка есть точка пространства $X$, отвечающая вершине $I$, вторая есть первая с добавлением хвоста из $p_{I_\beta} - 1, \ldots,$

$$\rho(I) = \sum_{k=\alpha}^{-1} x_{I_k} \prod_{l=k}^{-1} p_{I_l} + \sum_{k=0}^{\beta-1} x_{I_k} \prod_{l=0}^{k} p_{I_l}^{-1},$$

$$\rho(\tilde{I}) = \sum_{k=\alpha}^{-1} x_{I_k} \prod_{l=k}^{-1} p_{I_l} + \sum_{k=0}^{\beta-1} x_{I_k} \prod_{l=0}^{k} p_{I_l}^{-1} + \sum_{k=\beta}^{\infty} (p_{I_k} - 1) \prod_{l=0}^{k} p_{I_l}^{-1}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\rho(\tilde{I}) - \rho(I) &= \sum_{k=\beta}^{\infty} (p_{I_k} - 1) \prod_{l=0}^{k} p_{I_l}^{-1} = \\ &= \prod_{l=0}^{\beta-1} p_{I_l}^{-1} \sum_{k=\beta}^{\infty} (p_{I_k} - 1) \prod_{l=\beta}^{k} p_{I_l}^{-1} = \\ &= \mu(D_I) \lim_{f\to\infty} \left(1 - \prod_{l=\beta}^{f} p_{I_l}^{-1}\right) = \mu(D_I).\end{aligned}$$

Тогда

$$\rho(\tilde{I}) = \rho(I) + \mu(D_I).$$

Используя лемму 44, мы получим доказательство настоящей леммы. □

Лемма 46. *Отображение $\rho$ переводит однородную меру $\mu$ на пространстве $X$ в меру Лебега $l$ на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$: для любого измеримого подмножества $S \subset X$ имеет место*

$$\mu(S) = l(\rho(S))$$

*или, в символических обозначениях,*

$$\rho\colon d\mu(x) \mapsto dx.$$

Доказательство. Из леммы 45 следует, что шары в $X$ отображаются на замкнутые промежутки в $\mathbb{R}_+$ с сохранением меры. Отображение $\rho\colon X \to \mathbb{R}_+$ сюрьективно, и поскольку непересекающиеся шары отображаются на промежутки, которые не пересекаются или имеют пересечение меры нуль (по лемме 45), это доказывает настоящую лемму. □

Следовательно, соответствующее сопряженное отображение

$$\begin{aligned}&\rho^*\colon L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(X),\\ &\rho^* f(x) = f(\rho(x))\end{aligned} \tag{3.14}$$

есть унитарный оператор. Обратное к этому отображение будет переводить базис ультраметрических всплесков на пространстве $X$ в некоторый базис из функций на положительной вещественной полуоси.

Это и леммы 45, 46 подсказывают следующее определение:

Определение 47. Мы называем базис $\{\Psi_{Ij}\}$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, где $\Psi_{Ij} = \rho^{-1*}\psi_{Ij}$, базисом неоднородных всплесков на положительной вещественной полупрямой.

Отображение $\rho^{-1*}$ между пространствами квадратично интегрируемых функций хорошо определено, поскольку отображение $\rho$ взаимно однозначно на множестве полной меры.

Мы видим, что используя ультраметрическую замену переменной $\rho$, мы можем определить новые примеры всплесков в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Название неоднородные всплески означает, что базис $\rho^{-1*}\{\psi_{Ij}\}$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ не имеет трансляционной инвариантности (сдвиг всплеска не обязательно является всплеском, в то время как для обычных кратномасштабных всплесков это было бы так).

Базис неоднородных всплесков объединяет всплески, соответствующие $p$-адическим всплескам для разных $p$.

## 3.8. Ультраметрические ПДО

В настоящем разделе мы изучаем ультраметрический псевдодифференциальный оператор (или ПДО), определяемый как интегральный оператор вида

$$Tf(x) = \int_X T(\sup(x,y))(f(x) - f(y))\, d\nu(y). \tag{3.15}$$

Здесь $X$ есть регулярное ультраметрическое пространство, $\nu$ есть положительная борелевская счётно-аддитивная мера со счётным или конечным базисом, $T(I)$ есть комплекснозначная функция на дереве $\mathcal{T}(X)$. Таким образом, структура оператора определяется направлением на множестве $X \cup \mathcal{T}(X)$.

В случае, когда выполнены определённые условия сходимости (условие абсолютной сходимости ряда (3.19) ниже), оператор (3.15) имеет плотную область определения в $L^2(X,\nu)$, и область определения содержит локально постоянные функции с компактным носителем и нулевым средним (по мере $\nu$).

Теорема 48. *Пусть $T(I)$ есть комплекснозначная функция на направленном дереве $\mathcal{T}$. Тогда функция*

$$T(x,y) = T(\sup(x,y)) \tag{3.16}$$

*симметрична и локально постоянна по $y$ при фиксированном $x$ (вне любой окрестности $x$), и для произвольного фиксированного $x$ выполнено следующее условие:*

$$T(x,y) = \mathrm{const}, \quad \text{если} \quad d(x,y) = \mathrm{const}. \tag{3.17}$$

*Обратно, для любой такой функции $T(x,y)$ существует такая функция $T(I)$ на направленном дереве $\mathcal{T}$, что функция $T(x,y)$ определяется (3.16).*

*Это соответствие задаётся формулой*

$$T(x,y) = T(\sup(x,y)) = \sum_I T(I)\delta_{\mathrm{diam}(I),d(x,y)}\chi_I(x). \tag{3.18}$$

*Здесь $\mathrm{diam}(I)$ есть диаметр шара $I$.*

Доказательство. Очевидно, что функция (3.16) удовлетворяет (3.17). Обратно, стартуя с $T(x,y)$, удовлетворяющей (3.17), и определяя $T(I)$ как значение $T(x,y)$ для $x \in I$, $y \in I$, $d(x,y) = \mathrm{diam}(I)$, получим (3.16).

Формула (3.18) даёт описание такой процедуры. Это завершает доказательство теоремы. □

Теорема 49. *Пусть $X$ есть регулярное ультраметрическое пространство, $\nu$ есть положительная борелевская счётно аддитивная мера со счётным или конечным базисом, $T(I)$ есть комплекснозначная функция на дереве $\mathcal{T}(X)$. Пусть для некоторой вершины $R$ следующий ряд сходится абсолютно:*

$$\sum_{J>R} T(J)(\nu(J) - \nu(J,R)). \tag{3.19}$$

*Тогда оператор (3.15)*

$$Tf(x) = \int_X T(\sup(x,y))(f(x) - f(y))\, d\nu(y)$$

*имеет плотную область определения в $L^2(X,\nu)$ и диагонален в базисе ультраметрических всплесков из теоремы 42:*

$$T\psi_{Ij}(x) = \lambda_I \psi_{Ij}(x) \tag{3.20}$$

*с собственными значениями вида*

$$\lambda_I = T(I)\nu(I) + \sum_{J>I} T(J)(\nu(J) - \nu(J,I)). \tag{3.21}$$

*Оператор $T$ самосопряжен, если функция $T(I)$ вещественнозначна, и положителен, если эта функция неотрицательна.*

*Здесь $(J,I)$ есть максимальная вершина, меньшая $J$ и большая $I$ (то есть $(J,I)$ есть максимальный подшар в $J$, содержащий шар $I$).*

*Также оператор $T$ уничтожает константы.*

Доказательство. Рассмотрим действие оператора $T$ на всплеск $\psi_{Ij}$:

$$T\psi_{Ij}(x) = \int T(\sup(x,y))(\psi_{Ij}(x) - \psi_{Ij}(y))\, d\nu(y).$$

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $x$ лежит вне шара $I$. Тогда

$$T\psi_{Ij}(x) = -T(\sup(x,I)) \int \psi_{Ij}(y)\, d\nu(y) = 0$$

(как обычно, мы не указываем область интегрирования, если интегрирование производится по всему пространству $X$).

2) Пусть $x \in I$. Тогда

$$\begin{aligned}
T\psi_{Ij}(x) = \Bigg( &\int_{d(x,y)>\mathrm{diam}(I)} + \int_{d(x,y)=\mathrm{diam}(I)} + \\
&+ \int_{d(x,y)<\mathrm{diam}(I)} \Bigg) T(\sup(x,y))(\psi_{Ij}(x) - \psi_{Ij}(y))\, d\nu(y) = \\
= \Bigg( &\int_{d(x,y)>\mathrm{diam}(I)} + \int_{d(x,y)=\mathrm{diam}(I)} \Bigg) T(\sup(x,y)) \times \\
&\times (\psi_{Ij}(x) - \psi_{Ij}(y))\, d\nu(y) = \\
= \psi_{Ij}(x) &\int_{d(x,y)>\mathrm{diam}(I)} T(\sup(x,y))\, d\nu(y) + \\
&+ \int_{d(x,y)=\mathrm{diam}(I)} T(\sup(x,y))(\psi_{Ij}(x) - \psi_{Ij}(y))\, d\nu(y) = \\
= \psi_{Ij}(x) &\int_{d(I,y)>\mathrm{diam}(I)} T(\sup(I,y))\, d\nu(y) + T(I)\nu(I)\psi_{Ij}(x).
\end{aligned}$$

Для доказательства последнего равенства вычислим для $\psi \in V_0(I)$ интеграл

$$\begin{aligned}
&\int_{d(x,y)=\mathrm{diam}(I)} T(\sup(x,y))(\psi(x)-\psi(y))\,d\nu(y) = \\
&\quad = T(I)\int_{d(x,y)=\mathrm{diam}(I)} (\psi(x)-\psi(y))\,d\nu(y) = \\
&\quad = T(I)\sum_{j=0}^{p_I-1}\chi_{I_j}(x)\left[\int_{I\setminus I_j}(\psi(x)-\psi(y))\,d\nu(y)\right] = \\
&\quad = T(I)\sum_{j=0}^{p_I-1}\chi_{I_j}(x)\left[\psi(x)(\nu(I)-\nu(I_j)) - \int_{I\setminus I_j}\psi(y)\,d\nu(y)\right] = \\
&\quad = T(I)\sum_{j=0}^{p_I-1}\chi_{I_j}(x)\left[\psi(x)(\nu(I)-\nu(I_j)) + \int_{I_j}\psi(y)\,d\nu(y)\right] = \\
&\quad = T(I)\nu(I)\psi(x).
\end{aligned}$$

Здесь $I_j$ есть максимальные подшары в $I$.

Мы доказали

$$T\psi_{Ij}(x) = \lambda_I\psi_{Ij}(x),$$

где

$$\lambda_I = T(I)\nu(I) + \int_{d(I,y)>\mathrm{diam}(I)} T(\sup(I,y))\,d\nu(y).$$

Для $J > I$

$$\int_{d(I,y)=\mathrm{diam}(J)} d\nu(y) = \nu(J) - \nu(J,I).$$

Поскольку любые два возрастающие пути в направленном дереве совпадают, начиная с некоторой вершины, условие (3.19) обеспечивает сходимость интеграла $\int_{d(I,y)>\mathrm{diam}(I)} T(\sup(I,y))\,d\nu(y)$.

Отсюда следует, что

$$\lambda_I = T(I)\nu(I) + \sum_{J>I} T(J)(\nu(J)-\nu(J,I)).$$

Проверка того, что оператор $T$ уничтожает константы, выполняется непосредственно. Это завершает доказательство теоремы. □

## 3.9. Аналог оператора Владимирова

Введем ультраметрический псевдодифференциальный оператор $T^{(\alpha)}$, выбирая коэффициенты $T(I)$ следующим образом

$$T(I) = \mu^{-1-\alpha}(I), \qquad \alpha > 0.$$

Так определенное интегральное ядро по теореме 48 будет удовлетворять

$$T(x,y) = d(x,y)^{-1-\alpha},$$

где $d(x,y)$ есть ультраметрическое расстояние, то есть

$$T^{(\alpha)}f(x) = \int \frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)^{1+\alpha}}\, d\mu(y)$$

и мера $\mu$ есть однородная мера на регулярном ультраметрическом пространстве. Это показывает, что введенный ультраметрический ПДО есть аналог оператора Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования.

По теореме 49, если $\alpha > 0$, тогда оператор $T^{(\alpha)}$ есть положительный оператор с плотной областью определения, диагональный в базисе всплесков, и собственные значения оператора $T^{(\alpha)}$ в базисе всплесков $\{\Psi_{Ij}\}$ равны

$$\lambda_I = \mu^{-\alpha}(I) + \sum_{J>I} \mu^{-\alpha}(J)(1-p_J^{-1}). \tag{3.22}$$

Отметим, что для $\alpha = 1$ выражение для собственных значений (для немаксимальной вершины $I$) принимает особенно простую форму

$$\begin{aligned}\lambda_I &= \mu^{-1}(I) + \sum_{J>I} \mu^{-1}(J)(1-p_J^{-1}) = \\ &= \mu^{-1}(I) + \sum_{J>I} \big(\mu^{-1}(J) - \mu^{-1}(J+1)\big) = \mu^{-1}(I) + \mu^{-1}(I+1)\end{aligned}$$

где вершина $J+1$ есть наименьшая вершина, большая вершины $J$ (то есть для соответствующих шаров $J+1 \supset J$ и $J$ есть максимальный подшар в $J+1$).

## 3.10. Обобщённые функции на ультраметрическом пространстве

В настоящем разделе мы вводим пространства (комплекснозначных) основных и обобщённых функций на регулярных ультраметрических пространствах. Эта конструкция проводится аналогично построению пространства обобщённых функций в $p$-адическом случае.

Определение 50. Функция $f$ на (ультраметрическом) пространстве $X$ называется локально постоянной, если для любой точки $x \in X$ существует такое положительное число $r$ (зависящее от $x$), что функция $f$ постоянна на шаре с центром в $x$ радиуса $r$:

$$f(x) = f(y) \quad \forall y\colon d(x, y) \leqslant r.$$

Определение 51. Пространством основных функций $D(X)$ на (ультраметрическом) пространстве $X$ называется пространство локально постоянных функций с компактным носителем.

Напомним (см. раздел 1.4), что фильтрация линейного пространства есть согласованное с частичным порядком отображение частично упорядоченного множества индексов на некоторое множество линейных подпространств линейного пространства.

Рассмотрим дерево $\mathcal{T} = \mathcal{T}(X)$ шаров в регулярном ультраметрическом пространстве $X$. Введем фильтрацию пространства $D(X)$ основных функций конечномерными подпространствами $D(\mathcal{S})$, где $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ есть конечное поддерево следующего вида.

Определение 52. Подмножество $\mathcal{S}$ в направленном дереве $\mathcal{T}$ называется регулярным поддеревом, если:

1) $\mathcal{S}$ есть направленное поддерево в $\mathcal{T}$ (с естественной структурой поддерева, направление в $\mathcal{S}$ есть ограничение направления в $\mathcal{T}$ на $\mathcal{S}$);

2) $\mathcal{S}$ конечно (и, следовательно, имеет наибольшую вершину $K$);

3) Если $\mathcal{S}$ содержит вершину $I$ и вершину $J$: $J < I$, $d(I, J) = 1$, то поддерево $\mathcal{S}$ содержит все вершины $L$: $L < I$, $d(I, L) = 1$.

Здесь расстояние $d(I, L)$ между вершинами в дереве есть число ребер в пути, соединяющем эти вершины.

Эквивалентно, конечный набор шаров в $X$, отвечающий вершинам регулярного поддерева $\mathcal{T}(X)$, описывается следующим образом.

1) Если $\mathcal{S}$ содержит шары $I$ и $J$, тогда $\mathcal{S}$ содержит $\sup(I, J)$;

2) Если $\mathcal{S}$ содержит шары $I$ и $J$: $I \subset J$, то $\mathcal{S}$ содержит все шары $L$: $I \subset L \subset J$;

3) Если $\mathcal{S}$ содержит шары $I$ и $J$, где $J$ есть максимальный подшар в $I$, тогда $\mathcal{S}$ содержит все максимальные подшары в $I$.

Определение 53. Пространство $D(\mathcal{S})$, где $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ есть регулярное поддерево, есть линейная оболочка характеристических функций $\chi_J$, где $J \in \mathcal{S}$.

Размерность $D(\mathcal{S})$ равна числу минимальных элементов в $\mathcal{S}$. Топология на пространстве основных функций $D(X)$ вводится следующим образом.

Пространство $D(\mathcal{S})$ имеет естественную топологию (которая может быть описана как топология поточечной сходимости), поскольку пространство $D(\mathcal{S})$ конечномерно. Пространство $D(X)$ основных функций на $X$ есть индуктивный предел пространств $D(\mathcal{S})$ по возрастающим регулярным поддеревьям:

$$D(X) = \lim\operatorname{ind}_{\mathcal{S}\to\mathcal{T}} D(\mathcal{S}). \tag{3.23}$$

Эту конструкцию индуктивного предела по существу можно рассматривать как обобщение конструкции кратномасштабного приближения на пространства функций на регулярных ультраметрических пространствах общего вида.

Так как все пространства $D(\mathcal{S})$ конечномерны, сужение топологии $D(\mathcal{S})$ на каждое подпространство $D(\mathcal{S}_0)$, $\mathcal{S} \supset \mathcal{S}_0$, совпадает с топологией $D(\mathcal{S}_0)$. Таким образом, индуктивный предел (3.23) является *строгим индуктивным пределом* [86, с. 57]. По предложению 6.5, [86, с. 59], множество $B$ в строгом индуктивном пределе счётного семейства локально выпуклых пространств $\{E_n\}$ ограничено тогда и только тогда, когда существует такое $n$, что $B \subset E_n$ и ограничено в нём. Отсюда следует следующее предложение.

Предложение 54. *Последовательность $\{f_n\} \in D(X)$ является сходящейся, если эта последовательность лежит в некотором подпространстве $D(\mathcal{S})$ из упомянутой фильтрации и сходится (сходимость в данном конечномерном пространстве определяется однозначно).*

Также, по следствию из теоремы 7.4, [86, p. 103], имеет место следующее предложение.

Предложение 55. *Пространство $D(X)$ ядерно.*

Определение 56. Обобщённой функцией назовем линейный функционал на пространстве основных функций $D(X)$.

Нетрудно убедиться, что такой функционал автоматически будет непрерывен (поскольку сходимость на пространстве основных функций определена через сходимость в конечномерных подпространствах). Обобщённые функции образуют линейное пространство $D'(X)$. Сходимость в линейном пространстве $D'(X)$ определяется как слабая сходимость функционалов. Таким образом, $D'(X)$ есть сопряженное пространство к $D(X)$ со слабой топологией. В случае $X = \mathbb{Q}_p$ конструкция настоящего раздела сводится к построению пространств основных и обобщённых функций $p$-адического аргумента.

## 3.11. Пространство $D'_0(X)$

Рассмотрим пространство $D_0(X) \subset D(X)$ основных функций с нулевым средним на регулярном ультраметрическом пространстве $X$. Это пространство фильтровано подпространствами $D_0(\mathcal{S})$ основных функций с нулевым средним из $D(\mathcal{S})$, где $S$ суть регулярные поддеревья в $\mathcal{T}(X)$. В настоящем и последующих разделах данной главы мы рассматриваем пространства $X$ с борелевской мерой $\nu$, “не имеющей дырок”, т.е. не обращающейся в нуль ни на каком нетривиальном шаре в $X$ (шар нетривиален, если его диаметр не равен нулю, либо диаметр равен нулю и шар есть максимальный подшар в шаре ненулевого диаметра). Легко видеть, что в рассматриваемом случае пространство $D_0(\mathcal{S})$ есть линейная оболочка всплесков $\Psi_{Ij}$, где $I \in \mathcal{S}$ пробегает по всем неминимальным вершинам в $\mathcal{S}$. Пространство $D_0(X)$ есть линейная оболочка всех ультраметрических всплесков. Топология в $D_0(X)$ вводится как топология индуктивного предела пространств $D(\mathcal{S})$.

Определение 57. Пространством обобщённых функций $D'_0(X)$ называется пространство линейных функционалов на пространстве $D_0(X)$ основных функций с нулевым средним.

Имеют место два следующих описания пространства $D'_0(X)$.

1) Поскольку пространство $D_0(X)$ есть в точности пространство основных функций, лежащих в ядре констант (если рассматривать константы как обобщённые функции), пространство

$D_0'(X)$ совпадает с пространством классов эквивалентности обобщённых функций из $D'(X)$, равных с точностью до прибавления константы.

2) Так как пространство $D_0(X)$ есть пространство конечных линейных комбинаций ультраметрических всплесков из ортонормированного базиса $\{\Psi_{Ij}\}$ в $L^2(X,\nu)$, то пространство $D_0'(X)$ линейных функционалов на $D_0(X)$ может быть отождествлено с пространством формальных рядов по ультраметрическим всплескам, причём действие на пространстве $D_0(X)$ описывается следующим образом.

Пусть $f \in D_0(X)$ имеет вид конечной линейной комбинации всплесков

$$f = \sum_{Ij} f_{Ij}\Psi_{Ij}, \qquad f_{Ij} = \langle \Psi_{Ij}, f\rangle,$$

где $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ есть скалярное произведение в пространстве $L^2(X,\nu)$:

$$\langle f, g\rangle = \int_X \overline{f(x)}g(x)\,d\nu(x).$$

Здесь $\overline{f}$ обозначает функцию, комплексно сопряженную к $f$.

Пусть $\phi \in D_0'(X)$ имеет вид ряда по всплескам:

$$\phi = \sum_{I'j'} \phi_{I'j'}\Psi_{I'j'}, \qquad \phi_{I'j'} = \phi(\overline{\Psi_{I'j'}}).$$

Тогда действие $\phi$ на $f$ задаётся следующей линейной комбинацией

$$\phi(f) = \sum_{Ij} \phi_{Ij} f_{Ij}.$$

## 3.12. Разложение обобщённых функций по всплескам и задача Коши

В предыдущем разделе мы обсуждали разложение обобщённых функций из пространства $D_0'(X)$ в ряды по ультраметрическим всплескам. В настоящем разделе мы строим аналогичные разложения для обобщённых функций из $D'(X)$.

Лемма 58. *Пусть $I_0 \subset X$ есть нетривиальный шар и $\nu(I_0) > 0$.*

*Тогда существует единственная обобщённая функция* $u \in D'(X)$, *такая, что*

$$u(\chi_{I_0}) = u_0\nu(I_0), \qquad u(\overline{\Psi_{Ij}}) = u_{Ij} \quad \forall I, j.$$

Доказательство. Для любого регулярного поддерева $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(X)$ в дереве шаров соответствующее пространство основных функций $D(\mathcal{S})$ есть ортогональная сумма пространства $D_0(\mathcal{S})$ основных функций с нулевым средним (порожденного соответствующими всплесками) и одномерного линейного пространства порождённого характеристической функцией $\chi_{\sup(\mathcal{S})}$ шара $\sup(\mathcal{S})$. Шар $\sup(\mathcal{S})$ является наибольшим шаром в $\mathcal{S}$ и носителем пространства $D(\mathcal{S})$.

Если шар $I_0 \in \mathcal{S}$ имеет положительную меру $\nu(I_0) > 0$, то его характеристическая функция $\chi_{I_0}$ не ортогональна характеристической функции $\chi_{\sup(\mathcal{S})}$. Следовательно, объединение базиса всплесков в $D_0(\mathcal{S})$ и характеристической функции $\chi_{I_0}$ есть полное множество в $D(\mathcal{S})$.

Таким образом, действие произвольной обобщённой функции $u$ в пространстве $D(\mathcal{S})$ определяется применением этой обобщённой функции к всем всплескам из $D_0(\mathcal{S})$ и к характеристической функции $\chi_{I_0}$, $\nu(I_0) > 0$. Пространство $D(X)$ есть индуктивный предел пространств $D(\mathcal{S})$. Это завершает доказательство леммы. □

Докажем следующую важную лемму о разложении обобщённой функции из $D'(X)$ в ряд по всплескам.

Лемма 59. *Пусть* $I_0 \subset X$ *есть нетривиальный шар.*
*Тогда ряд*

$$u = u_0 + \sum_{Ij} u_{Ij}\left(\Psi_{Ij} - \frac{1}{\nu(I_0)}\Psi_{Ij}(\chi_{I_0})\right) \tag{3.24}$$

*есть обобщённая функция* $u \in D'(X)$, *удовлетворяющая условиям*

$$u(\chi_{I_0}) = u_0\nu(I_0), \qquad u(\overline{\Psi_{Ij}}) = u_{Ij}. \tag{3.25}$$

*Более того, произвольная* $u \in D'(X)$, *удовлетворяющая условиям* (3.25), *имеет вид* (3.24).

Доказательство. Чтобы доказать, что ряд (3.24) есть обобщённая функция из $D'(X)$, мы должны проверить, что применение этого ряда к любой характеристической функции $\chi_{J_0}$ даёт

сходящийся ряд. Мы имеем

$$u(\chi_{J_0}) = u_0\nu(J_0) + \sum_{Ij} u_{Ij}\left(\Psi_{Ij}(\chi_{J_0}) - \frac{\nu(J_0)}{\nu(I_0)}\Psi_{Ij}(\chi_{I_0})\right).$$

Мы видим, что для достаточно больших $I$, а именно для $I > \sup(J_0, I_0)$, мы получим

$$\nu^{-1}(I_0)\Psi_{Ij}(\chi_{I_0}) = \Psi_{Ij}(x),$$

где $x \in I_0$. Аналогично

$$\Psi_{Ij}(\chi_{J_0}) = \nu(J_0)\Psi_{Ij}(x'),$$

где $x' \in J_0$.

Так как для $I > \sup(J_0, I_0)$ мы имеем $\Psi_{Ij}(x) = \Psi_{Ij}(x')$, соответствующие члены в вышеприведенном ряду сокращаются, и ряд принимает вид конечной суммы:

$$u(\chi_{J_0}) = u_0\nu(J_0) + \sum_{Ij\colon\, J_0 < I \leqslant \sup(J_0, I_0)} u_{Ij}\Psi_{Ij}(\chi_{J_0}) - \\ - \frac{\nu(J_0)}{\nu(I_0)} \sum_{Ij\colon\, I_0 < I \leqslant \sup(J_0, I_0)} u_{Ij}\Psi_{Ij}(\chi_{I_0}).$$

Это доказывает, что ряд (3.24) есть обобщённая функция из $D'(X)$.

Применение (3.24) к $\chi_{I_0}$ показывает, что $u$ удовлетворяет условиям $u\left(\chi_{I_0}\right) = u_0\nu(I_0)$.

Аналогично, применяя (3.24) к $\overline{\Psi_{Ij}}$, и принимая во внимание, что

$$\Psi_{I'j'}(\overline{\Psi_{Ij}}) = \langle \Psi_{Ij}, \Psi_{I'j'}\rangle = \delta_{II'}\delta_{jj'},$$

мы доказываем, что $u$ удовлетворяет условию $u_{Ij} = u(\overline{\Psi_{Ij}})$.

Затем, применяя лемму 58, мы показываем, что произвольная $u \in D'(X)$, удовлетворяющая (3.25), имеет вид (3.24). Это завершает доказательство леммы. □

Замечание. Мы понимаем ряд (3.24) как предел относительно фильтрации, то есть конечная сумма ряда зависит от регулярного поддерева $\mathcal{S}$, и ряд есть предел конечных сумм при $\mathcal{S} \to \mathcal{T}(X)$.

Рассмотрим ультраметрический псевдодифференциальный оператор $T$ на регулярном ультраметрическом пространстве $X$, имеющий собственные значения $\lambda_I$ в базисе всплесков.

Для произвольной обобщённой функции $u \in D'(X)$ применение псевдодифференциального оператора $T$ к этой функции даёт обобщённую функцию из пространства $Tu \in D'_0(X)$, которая действует на всплесках следующим образом

$$Tu(\overline{\Psi_{Ij}}) = u(\overline{T^*\Psi_{Ij}}) = \lambda_I u(\overline{\Psi_{Ij}}).$$

Эта формула является прямым аналогом формулы вещественного анализа, определяющей производную обобщённой функции: $u'(\phi) = -u(\phi')$, где $u$ есть обобщённая функция и $\phi$ есть основная функция на вещественной оси.

Таким образом, ультраметрические псевдодифференциальные операторы могут рассматриваться как линейные отображения $D'(X) \to D'_0(X)$, или, аналогичным образом, как линейные отображения $D'_0(X) \to D'_0(X)$. Отметим, что в общем случае невозможно рассматривать псевдодифференциальный оператор как отображение $D'(X) \to D'(X)$.

Определение 60. Мы говорим, что обобщённая функция $u \in D'(X)$ есть решение задачи Коши для ультраметрического псевдодифференциального уравнения, если $u$ удовлетворяет уравнению

$$Tu = f, \tag{3.26}$$

где $f \in D'_0(X)$ лежит в пространстве $D'_0(X)$, и $u$ удовлетворяет начальному условию: $u(\chi_{I_0}) = u_0\nu(I_0)$, для характеристической функции $\chi_{I_0}$ некоторого шара $I_0 \subset X$, $\nu(I_0) > 0$.

Легко видеть, что имеют место необходимые условия для разрешимости задачи Коши (3.26): если $\lambda_I = 0$ для некоторого $I$, тогда все $f_{Ij} = f(\overline{\Psi_{Ij}}) = 0$.

Теорема 61. *Пусть обобщённая функция $f$ из пространства $D'_0(X)$ в правой части уравнения (3.26) удовлетворяет необходимым условиям $f_{Ij} = f(\overline{\Psi_{Ij}}) = 0$ для $I$, для которого $\lambda_I = 0$, и для всех соответствующих индексов $j$.*

*Тогда существует решение задачи Коши (3.26), и произвольное решение и задачи Коши (3.26) будет задаваться формулой*

$$u = u_0 + \sum_{Ij} \frac{1}{\lambda_I} f_{Ij} \left( \Psi_{Ij} - \frac{1}{\nu(I_0)} \Psi_{Ij}(\chi_{I_0}) \right) +$$

$$+\sum_{Jj} u_{Jj}\left(\Psi_{Jj} - \frac{1}{\nu(I_0)}\Psi_{Jj}(\chi_{I_0})\right). \tag{3.27}$$

*Суммирование идёт по $I$, для которых $\lambda_I \neq 0$, и по $J$, для которых $\lambda_J = 0$. Здесь $f_{Ij} = f(\overline{\Psi_{Ij}})$ и $u_{Jj}$ произвольны.*

Доказательство. По лемме 59 обобщённая функция $u \in D'(X)$, удовлетворяющая начальному условию $u(\chi_{I_0}) = u_0\nu(I_0)$, имеет вид (3.24).

Поскольку оператор $T$ диагонален в базисе всплесков, применяя $T$ к (3.24), мы получим из(3.26) для $I$, для которых $\lambda_I \neq 0$

$$u_{Ij} = \frac{1}{\lambda_I} f_{Ij}.$$

Применение оператора $T$ к (3.27) доказывает, что $u$ есть решение (3.26). Это завершает доказательство теоремы. □

## 3.13. Ультраметрическое случайное поле

В настоящем разделе мы строим гауссовское ультраметрическое случайное поле на регулярном ультраметрическом пространстве $X$ с борелевской не обращающейся нигде в нуль мерой $\nu$.

Определим белый шум $\phi(x)$ как обобщённое гауссовское вещественнозначное случайное поле на $X$ с нулевым средним и $\delta$-подобной ковариацией

$$\langle \phi(x)\phi(x')\rangle = \delta(x, x'),$$

где $\delta$-функция $\delta(x, x')$ понимается в смысле обобщённых функций на ультраметрическом пространстве $X$, то есть для функции $f \in D(X)$ и борелевской меры $\nu$:

$$\int \delta(x, y) f(y)\, d\nu(y) = f(x).$$

Здесь $\langle\cdot\rangle$ есть математическое ожидание.

Таким образом, $\phi(x)$ сопоставляет основной функции $f$ из $D(X)$ случайную величину

$$\phi(f) = \int \phi(x) f(x)\, d\nu(x),$$

причем $\phi(f)$ есть набор гауссовских случайных величин с нулевым средним и ковариацией

$$\langle \phi(\overline{f})\phi(g)\rangle = \int_X \overline{f(x)} g(x)\, d\nu(x).$$

Из теоремы Минлоса–Сазонова, см. приложение, следует следующее предложение.

Предложение 62. *Гауссова мера, соответствующая белому шуму $\phi(x)$, $\sigma$-аддитивна на $\sigma$-алгебре слабых борелевских подмножеств пространства обобщённых функций $D'(X)$.*

Пусть $T$ есть положительный ультраметрический ПДО на регулярном пространстве $X$ (то есть функция $T(I)$ в формуле ниже неотрицательна), $\nu$ есть борелевская положительная $\sigma$-аддитивная мера со счётным базисом на $X$, причём мера всего пространства $X$ бесконечна, и мера каждого нетривиального шара из $\mathcal{T}(X)$ отлична от нуля:

$$Tf(x) = \int T(\sup(x,y))(f(x) - f(y))\, d\nu(y).$$

Рассмотрим стохастическое псевдодифференциальное уравнение

$$Tu(x) = \phi(x), \tag{3.28}$$

где $\phi(x)$ есть белый шум.

Напомним, что оператор $T$ диагонален в базисе ультраметрических всплесков:

$$T\Psi_{Ij} = \lambda_I \Psi_{Ij},$$

причём собственные значения $\lambda_I$ не обращаются в нуль.

Будем считать белый шум обобщённым случайным полем из пространства $D_0(X)$, то есть сузим область определения $\phi$ до $D_0(X)$.

Тогда белый шум имеет разложение по всплескам

$$\phi = \sum_{Ij} d_{Ij}\Psi_{Ij}, \qquad d_{Ij} = \int \phi(x)\overline{\Psi_{Ij}(x)}\, d\nu(x).$$

Коэффициенты $d_{Ij}$ суть гауссовские случайные величины с нулевым средним и квадратичным коррелятором

$$\langle d^*_{Ij} d_{I'j'}\rangle = \iint \langle \phi(x)\phi(x')\rangle \Psi_{Ij}(x)\overline{\Psi_{I'j'}(x')}\, d\nu(x)\, d\nu(x') = \delta_{II'}\delta_{jj'},$$

вид которого следует из того, что всплески ортонормальны, откуда $d_{Ij}$ суть независимые $\delta$-коррелированные случайные величины.

Тогда, действуя как в предыдущем разделе, мы получим решение (3.28):

$$u = T^{-1}\phi = u_0 + \sum_{Ij} \lambda_I^{-1} d_{Ij} \left( \Psi_{Ij} - \frac{1}{\nu(I_0)} \Psi_{Ij}(\chi_{I_0}) \right), \tag{3.29}$$

где $u_0$ есть гауссовская случайная величина с нулевым средним, независимая от $d_{Ij}$, $I_0$ есть некоторый шар (напомним, мера шара не обращается в нуль), $u(\chi_{I_0}) = u_0 \nu(I_0)$. Решение $u$ есть гауссовское обобщённое случайное поле с нулевым средним.

Квадратичный коррелятор для (3.29) имеет вид

$$\langle \overline{u(x)} u(x') \rangle = \langle u_0^* u_0 \rangle + \sum_{Ij} \lambda_I^{-2} \overline{\left( \Psi_{Ij}(x) - \frac{1}{\nu(I_0)} \Psi_{Ij}(\chi_{I_0}) \right)} \times \\ \times \left( \Psi_{Ij}(x') - \frac{1}{\nu(I_0)} \Psi_{Ij}(\chi_{I_0}) \right). \tag{3.30}$$

Лемма 63. *Корреляционная функция* (3.30) *имеет выражение*

$$\langle \overline{u(x)} u(x') \rangle = \langle u_0^* u_0 \rangle + 2\lambda^{-2}_{\sup(x,x',I_0)} \nu^{-1}(\sup(x,x',I_0)) + \\ + \sum_{I\colon I_0 < I \leqslant \sup(x,x',I_0)} \lambda_I^{-2} \big( \nu^{-1}(I,I_0) - \nu^{-1}(I) \big) + \\ + \sum_{I\colon \sup(x,x') < I \leqslant \sup(x,x',I_0)} \lambda_I^{-2} \big( \nu^{-1}(I,I_0) - \nu^{-1}(I) \big) - \\ - \lambda^{-2}_{\sup(x,x')} \nu^{-1}(\sup(x,x')) \tag{3.31}$$

*при* $d(x,x') < d(x,I_0), d(x',I_0)$, *и*

$$\langle \overline{u(x)} u(x') \rangle = \langle u_0^* u_0 \rangle + \\ + \sum_{I\colon I_0 < I \leqslant \min(\sup(x,I_0), \sup(x',I_0))} \lambda_I^{-2} \big( \nu^{-1}(I,I_0) - \nu^{-1}(I) \big) + \tag{3.32}$$

$$+ \lambda^{-2}_{\min(\sup(x,I_0), \sup(x',I_0))} \nu^{-1}(\min(\sup(x,I_0), \sup(x',I_0))) \tag{3.33}$$

*при* $d(x,x') \geqslant \min(d(x,I_0), d(x',I_0))$.

*Здесь* $(I, I_0)$ *есть максимальный подшар в шаре* $I$, *содержащий шар* $I_0$.

Доказательство. Пусть $A$ и $B$ суть некоторые непересекающиеся шары, содержащие $x$ и $x'$ соответственно. Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $\sup(A,I_0) = \sup(A,B) > \sup(B,I_0)$. Тогда, поскольку

$$u(\chi_A) = u_0\nu(A) + \sum_{Ij\colon\, A<I<\sup(A,I_0)} \lambda_I^{-1} d_{Ij}\Psi_{Ij}(\chi_A) + \\ + \sum_j \lambda_{\sup(A,I_0)}^{-1} d_{\sup(A,I_0),j}\Psi_{\sup(A,I_0),j}\left(\chi_A - \frac{\nu(A)}{\nu(I_0)}\chi_{I_0}\right) - \\ - \frac{\nu(A)}{\nu(I_0)} \sum_{Ij\colon\, I_0<I<\sup(A,I_0)} \lambda_I^{-1} d_{Ij}\Psi_{Ij}(\chi_{I_0}),$$

мы получим

$$\frac{1}{\nu(A)\nu(B)}\langle\overline{u(\chi_A)}u(\chi_B)\rangle = \langle u_0^* u_0\rangle + \\ + \frac{1}{\nu^2(I_0)} \sum_{Ij\colon\, I_0<I\leqslant\sup(B,I_0)} \lambda_I^{-2}|\Psi_{Ij}(\chi_{I_0})|^2 - \\ - \frac{1}{\nu(B)\nu(I_0)} \sum_j \lambda_{\sup(B,I_0)}^{-2} \overline{\Psi_{\sup(B,I_0),j}(\chi_{I_0})}\Psi_{\sup(B,I_0),j}(\chi_B). \tag{3.34}$$

Вычислим сумму по $j$. Для фиксированного $I$ отметим, что

$$\sum_{j=0}^{p_I-1} \overline{\Psi_{Ij}}\Psi_{Ij} = \sum_{j=0}^{p_I-1} P_{\chi_{Ij}},$$

где $P_{\chi_I}$ есть ортогональный проектор в $L^2(X,\nu)$ на $\chi_I$.

Здесь $\Psi_{I0}$ пропорционально $\chi_I$, и $\Psi_{Ij}$, $j = 0,\dots,p-1$, образуют ортонормальный базис всплесков в пространстве, порождённом характеристическими функциями $\chi_{Ij}$, $j = 0,\dots,p-1$, максимальных подшаров в $I$.

Мы имеем для $I \geqslant J$

$$P_{\chi_I}\chi_J = \frac{\nu(J)}{\nu(I)}\chi_I$$

или, эквивалентно,

$$P_{\chi_I} = \nu^{-1}(I)\overline{\chi_I}\chi_I.$$

Поскольку

$$\Psi_{I0} = \nu^{-\frac{1}{2}}(I)\chi_I,$$

то

$$\overline{\Psi_{I0}}\Psi_{I0} = P_{\chi_I}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{p_I-1} \overline{\Psi_{Ij}}\Psi_{Ij} = \sum_{j=0}^{p_I-1} P_{\chi_{I_j}} - P_{\chi_I}. \tag{3.35}$$

Отсюда получаем для (3.34) выражение

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\nu(A)\nu(B)}\langle\overline{u(\chi_A)}u(\chi_B)\rangle = \\
&\quad = \langle u_0^* u_0\rangle + \sum_{I\colon\, I_0<I\leqslant\sup(B,I_0)} \lambda_I^{-2}\big(\nu^{-1}(I,I_0) - \nu^{-1}(I)\big) + \\
&\qquad + \lambda_{\sup(B,I_0)}^{-2}\nu^{-1}(\sup(B,I_0)),
\end{aligned}$$

где $(I, I_0)$ есть максимальный подшар в шаре $I$, содержащий шар $I_0$.

2) Аналогично для случая $\sup(B, I_0) = \sup(A, B) > \sup(A, I_0)$ мы получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\nu(A)\nu(B)}\langle\overline{u(\chi_A)}u(\chi_B)\rangle = \\
&\quad = \langle u_0^* u_0\rangle + \sum_{I\colon\, I_0<I\leqslant\sup(A,I_0)} \lambda_I^{-2}\big(\nu^{-1}(I,I_0) - \nu^{-1}(I)\big) + \\
&\qquad + \lambda_{\sup(A,I_0)}^{-2}\nu^{-1}(\sup(A,I_0)).
\end{aligned}$$

3) Пусть $\sup(B, I_0) = \sup(A, B) = \sup(A, I_0)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\nu(A)\nu(B)}\langle\overline{u(\chi_A)}u(\chi_B)\rangle = \\
&\quad = \langle u_0^* u_0\rangle + \sum_{I\colon\, I_0<I\leqslant\sup(A,B,I_0)} \lambda_I^{-2}\big(\nu^{-1}(I,I_0) - \nu^{-1}(I)\big) + \\
&\qquad + \lambda_{\sup(A,B,I_0)}^{-2}\nu^{-1}(\sup(A,B,I_0)).
\end{aligned}$$

4) Пусть $\sup(A, I_0) = \sup(B, I_0) > \sup(A, B)$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu(A)\nu(B)}\langle\overline{u(\chi_A)}u(\chi_B)\rangle &= \langle u_0^* u_0\rangle + \\ &+ 2\lambda^{-2}_{\sup(A,B,I_0)}\nu^{-1}(\sup(A,B,I_0)) + \\ &+ \sum_{I:\ I_0<I\leqslant\sup(A,B,I_0)} \lambda_I^{-2}\big(\nu^{-1}(I,I_0) - \nu^{-1}(I)\big) + \\ &+ \sum_{I:\ \sup(A,B)<I\leqslant\sup(A,B,I_0)} \lambda_I^{-2}\big(\nu^{-1}(I,I_0) - \nu^{-1}(I)\big) - \\ &- \lambda^{-2}_{\sup(A,B)}\nu^{-1}(\sup(A,B)).\end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 64. *Корреляционная функция* (3.30) *решения* (3.29) *есть положительная непрерывная билинейная форма на* $D(X)$.

Доказательство. Применение ряда (3.29) к характеристической функции любого шара содержит конечное число членов. Следовательно, квадратичная форма (3.30) будет непрерывна в любом $D(\mathcal{S})$, а значит, и в $D(X)$ (так как сходимость в $D(X)$ сводится к сходимости в конечномерных подпространствах $D(\mathcal{S})$).

Положительная определённость проверяется непосредственно. Это завершает доказательство леммы. □

Следующее определение описывает, как можно ввести аналог марковского свойства для случайных полей на ультраметрических пространствах.

Определение 65. Случайное поле $u(x)$ на ультраметрическом пространстве $X$ со значениями в $D'(X)$ называется ультраметрически марковским, если любые случайные величины $u(f)$, $u(g)$, где основные функции $f, g \in D(X)$ имеют носители в шарах $I$ и $J$ соответственно, и

$$u(f) = \int_X u(x)f(x)\,d\nu(x),$$

являются независимыми, если:

1) шары $I$, $J$, $I_0$ имеют пустые попарные пересечения,

2) по крайней мере одна из функций $f$ и $g$ имеет нулевое среднее.

Замечание. Эта конструкция является обобщением марковского свойства для $p$-адического броуновского движения, построенного в [8]. В работе [8] марковость для случайного поля $u(x)$ $p$-адического аргумента обсуждалась как марковость последовательности $u_\gamma$, параметризуемой целым $\gamma$, где

$$u_\gamma = \int_{|x|_p = p^\gamma} u(x)\,dx.$$

Сформулируем главный результат настоящего раздела.

Теорема 66. *Пусть $X$ есть регулярное ультраметрическое пространство, $\nu$ есть положительная борелевская $\sigma$-аддитивная мера со счётным базисом на $X$, причём мера всего пространства $X$ бесконечна, и мера каждого шара из $\mathcal{T}(X)$ отлична от нуля, $T$ есть положительный ультраметрический ПДО*:

$$Tf(x) = \int T(\sup(x,y))(f(x) - f(y))\,d\nu(y),$$

*диагональный в базисе ультраметрических всплесков*:

$$T\Psi_{Ij} = \lambda_I \Psi_{Ij}.$$

*Пусть $\phi(x)$ есть белый шум на $X$.*

*Тогда решение стохастического псевдодифференциального уравнения*

$$Tu(x) = \phi(x)$$

*есть гауссовское случайное поле* (3.29) *с нулевым средним и ковариацией* (3.30).

*Соответствующая гауссовская мера $\sigma$-аддитивна на $\sigma$-алгебре слабых борелевских подмножеств пространства обобщённых функций $D'(X)$.*

Доказательство. По лемме 64 мы можем применить теорему Минлоса–Сазонова, откуда следует $\sigma$-аддитивность гауссовской меры, определённой выражением (3.30), задающим случайное поле (3.29), принимающее значения в $D'(X)$. Это завершает доказательство теоремы. □

Теорема 67. *Случайное поле $u(x)$, определённое теоремой 66, удовлетворяет следующим свойствам ультраметрической марковости: все случайные величины следующего вида независимы*:

$$u_A = \int_A u(x) f(x)\,d\nu(x), \qquad u_B = \int_B u(x) g(x)\,d\nu(x).$$

*Здесь $f$ и $g$ – основные функции с носителями в шарах $A$ и $B$ соответственно, шары $A$ и $B$ не пересекаются между собой и с шаром $I_0$, и среднее по крайней мере для одной из функций $f$ или $g$ равно нулю.*

Доказательство. Мы используем гауссовость $u$ и формулы (3.31), (3.33). Благодаря гауссовости достаточно доказать независимость соответствующих случайных величин на уровне квадратичной корреляционной функции.

По (3.31), (3.33) корреляционная функция $\langle\overline{u(x)}u(x')\rangle$ локально постоянна, и условия независимости могут быть проверены непосредственно. В самом деле, вычислим

$$\int_A\int_B \overline{f(x)}g(x')\langle\overline{u(x)}u(x')\rangle\,d\nu(x)\,d\nu(x'),$$

где $f$, $g$, $A$, $B$ как в условии теоремы. Так как $\langle\overline{u(x)}u(x')\rangle$ постоянна для $x\in A$, $x'\in B$, вышеприведенная корреляционная функция сводится к

$$\langle\overline{u(x)}u(x')\rangle\int_A \overline{f(x)}\,d\nu(x)\int_B g(x')\,d\nu(x')=0.$$

Это завершает доказательство теоремы. □

Замечание. Марковское свойство для случайных процессов вещественного аргумента, то есть независимость будущего от прошлого при фиксированном настоящем, связано с упорядоченностью вещественных чисел. На $p$-адических числах и, тем более, ультраметрических пространствах общего вида не существует естественного порядка. Зато существует порядок на множестве шаров $\mathcal{T}(X)$ в ультраметрическом пространстве $X$. Ультраметрическая марковость в смысле определения 65 связана с порядком в направленном дереве шаров $\mathcal{T}(X)$.

**1. Приложение.** Следующий материал по теореме Минлоса–Сазонова взят из [40], см. также [74].

Определение 68. Пусть $X$, $Y$ являются сопряжёнными линейными пространствами со спариванием $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ и на $X$ определена квазимера $\mu$. Тогда интеграл

$$\chi_\mu(y)=\int_X e^{i\langle x,y\rangle}\,\mu(dx)$$

называется характеристическим функционалом квазимеры $\mu$, и отображение $\mu \mapsto \chi_\mu$ называется преобразованием Фурье квазимеры.

Следующая теорема называется теоремой Минлоса–Сазонова.

Теорема 69. *Пусть $X$ является ядерным локально выпуклым пространством. Для того, чтобы функция $\chi(x)$ являлась характеристическим функционалом некоторой неотрицательной меры Радона на пространстве $X'_\sigma$ достаточно, и если $X$ бочечно, также необходимо, чтобы функция $\chi(x)$ была положительно определена и непрерывна в нуле в топологии пространства $X$.*

Определение 70. Корреляционная форма неотрицательной цилиндрической меры $\mu$ с конечными вторыми моментами

$$\int_{X'} |\langle y, x\rangle|^2 \mu(dy) < \infty, \quad x \in X,$$

есть билинейный функционал на $X$, определённый выражением

$$B_\mu(x_1, x_2) = \int_{X'} \langle x_1, y\rangle \langle x_2, y\rangle \, \mu(dy).$$

Теорема 71. *Если корреляционная форма $B_\mu(x, y)$ цилиндрической меры $\mu$ в пространстве $X'$ непрерывно определена в ядерной топологии $\tau_S(X)$, тогда $\mu$ $\sigma$-аддитивна в $X'$.*

## 3.14. Квадратичное каскадное уравнение

В настоящем разделе мы изучаем пример точно решаемого нелинейного интегрального ультраметрического уравнения (результаты данного раздела изложены в работе [56]). Мы строим семейство явных решений для следующего нелинейного интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) + \iint F(\sup(x,\xi,\eta)) v(\xi,t)(v(\eta,t) - v(x,t))\, d\nu(\xi)\, d\nu(\eta) + \\ + \int G(\sup(x,\xi))(v(x,t) - v(\xi,t))\, d\nu(\xi) = 0. \tag{3.36}$$

Здесь аргумент $x \in X$ принадлежит локально компактному (регулярному) ультраметрическому пространству $X$, и время $t$

есть вещественный параметр. Для исследования этого уравнения мы будем использовать методы ультраметрического анализа всплесков.

Комплекснозначные функции $F$ и $G$ на дереве шаров $\mathcal{T}(X)$ в ультраметрическом пространстве $X$ с борелевской мерой $\nu$ должны удовлетворять условию сходимости

$$\sum_{J>I} |F(J)|(\nu(J) - \nu(J, I)) < \infty \tag{3.37}$$

(аналогично для $G$), где $\nu(J, I)$ есть мера максимального подшара в $J$, содержащего шар $I$.

Третий член в вышеприведенном уравнении содержит ультраметрический псевдодифференциальный оператор. Второй член есть интегральный оператор с квадратичной нелинейностью.

Мы покажем, что вышеприведенное уравнение имеет решения в виде произведения ультраметрического всплеска и экспоненты времени

$$v(x, t) = e^{\omega t}\psi_{Ij}(x).$$

Более того, мы также строим более общие решения для вышеприведенного уравнения. Мы строим единственное решение задачи Коши с начальным условием в пространстве $D_0(X)$ основных функций с нулевым средним. Такие решения строятся при помощи рекуррентной иерархической процедуры. Процедуры такого вида связаны с каскадными моделями турбулентности. Используя это наблюдение, мы будем называть вышеприведенное уравнение квадратичным каскадным уравнением. Впервые ультраметрический ($p$-адический) анализ был применён к описанию каскадных моделей турбулентности Зеленовым и Фищенко в [149].

Имеет место следующая важная лемма.

Лемма 72. *Рассмотрим ультраметрические всплески $\phi$, $\psi$, для которых $J$ (соответственно $I$) суть минимальные шары, содержащие носители всплеска $\psi$ (соответственно $\phi$).*

*Пусть ядро интегрирования $F$ в (3.36) удовлетворяет условию (3.37). Тогда интеграл*

$$\mathcal{I}[\phi, \psi](x) = \iint F(\sup(x, \xi, \eta))\phi(\xi)(\psi(\eta) - \psi(x))\, d\nu(\xi)\, d\nu(\eta) \tag{3.38}$$

*сходится и имеет вид*

$$\mathcal{I}[\phi, \psi](x) = \psi(x)\phi(x)\Phi_{IJ},$$

*где коэффициент $\Phi_{IJ}$ может быть не равен нулю только при $J < I$ (т.е. когда шар $J$ есть строгое подмножество шара $I$). В этом случае*

$$\Phi_{IJ} = \nu^2(I,J)F(I) - \nu^2(J)F(J) - \sum_{L\colon\, J<L<I} (\nu^2(L) - \nu^2(L,J))F(L). \tag{3.39}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{I}[\phi,\psi](x) = \iint F(\sup(x,\xi,\eta))\phi(\xi)(\psi(\eta)-\psi(x))\,d\nu(\xi)\,d\nu(\eta)$$

для случая, когда $\phi$ и $\psi$ являются ультраметрическими всплесками. Условие (3.37) обеспечивает сходимость интеграла. Обозначим $I$ и $J$ минимальные шары, содержащие носители всплесков $\phi$ и $\psi$ соответственно.

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть шары $J$ и $I$ не пересекаются. Тогда интеграл по $\xi$ даёт нуль, так как $\phi$ есть функция с нулевым средним и ядро интегрирования $F$ постоянно на шаре $I$.

2) Пусть шар $I$ является строгим подшаром шара $J$. Тогда интеграл по $\xi$ может быть ненулевым только для $x,\eta \in I$. В этом случае $\psi(\eta)$ и $\psi(x)$ сокращаются и, следовательно, интеграл равен нулю.

3) Пусть $I = J$. Тогда интеграл по $\xi$ может быть ненулевым только для $x,\eta \in I$ и, более того, для $\sup(x,\eta) < I$. В этом случае $\psi(\eta)$ и $\psi(x)$ сокращаются и интеграл обращается в нуль.

4) Пусть шар $J$ есть строгий подшар шара $I$. Рассмотрим следующие случаи.

a) Если $x \notin J$, тогда $\psi(x) = 0$ и ядро интегрирования постоянно на $J$. Следовательно, интеграл по $\eta$ равен нулю.

b) Пусть $x \in J < I$. Интеграл принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{I}[\phi,\psi](x) &= \int_{\xi\in I}\int_{\eta} F(\sup(x,\xi,\eta))\phi(\xi)(\psi(\eta)-\psi(x))\,d\nu(\eta)\,d\nu(\xi) = \\ &= \int_{\xi\in I}\int_{\eta\colon\, \sup(x,\eta)<I} F(\sup(x,\xi,\eta))\times \\ &\qquad \times\phi(\xi)(\psi(\eta)-\psi(x))\,d\nu(\eta)\,d\nu(\xi) =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\int_{\xi:\ \sup(x,\xi)=I} + \int_{\xi:\ \sup(x,\xi)<I}\right]\times \\
&\quad \times \int_{\eta:\ \sup(x,\eta)<I} F(\sup(x,\xi,\eta))\times \\
&\qquad \times \phi(\xi)(\psi(\eta)-\psi(x))\,d\nu(\eta)\,d\nu(\xi) = \\
&= -\phi(x)\nu(I,J)F(I)\int_{\eta:\ \sup(x,\eta)<I}(\psi(\eta)-\psi(x))\,d\nu(\eta) + \\
&\quad + \phi(x)\left[\int_{\xi:\ \sup(x,\xi)\leqslant J} + \int_{\xi:\ J<\sup(x,\xi)<I}\right]\times \\
&\quad \times \int_{\eta:\ \sup(x,\eta)<I} F(\sup(x,\xi,\eta))\times \\
&\qquad \times (\psi(\eta)-\psi(x))\,d\nu(\eta)\,d\nu(\xi) = \\
&= \psi(x)\phi(x)\nu^2(I,J)F(I) + \phi(x)\nu(J)\times \\
&\quad \times \int_{\eta:\ J\leqslant\sup(x,\eta)<I} F(\sup(x,\eta))(\psi(\eta)-\psi(x))\,d\nu(\eta) - \\
&\quad - \psi(x)\phi(x)\int_{\xi:\ J<\sup(x,\xi)<I} d\nu(\xi)\int_{\eta:\ \sup(x,\eta)<I} F(\sup(x,\xi,\eta))\,d\nu(\eta) = \\
&= \psi(x)\phi(x)\Bigg[\nu^2(I,J)F(I) - \nu^2(J)F(J) - \\
&\quad - \nu(J)\sum_{L:\ J<L<I} F(L)(\nu(L)-\nu(L,J)) - \\
&\quad - \sum_{L:\ J<L<I}(\nu(L)-\nu(L,J))\Bigg(F(L)\nu(J) + \\
&\quad + F(\sup(L,K))\sum_{K:\ J<K<I}(\nu(K)-\nu(K,J))\Bigg)\Bigg] = \\
&= \psi(x)\phi(x)\Bigg[\nu^2(I,J)F(I) - \nu^2(J)F(J) - \\
&\quad - 2\nu(J)\sum_{L:\ J<L<I} F(L)(\nu(L)-\nu(L,J)) - \\
&\quad - \sum_{L:\ J<L<I}(\nu(L)-\nu(L,J))\times \\
&\qquad \times \sum_{K:\ J<K<I}(\nu(K)-\nu(K,J))F(\sup(L,K))\Bigg].
\end{aligned}
$$

Поскольку

$$\sum_{L\colon J<L<I}(\nu(L)-\nu(L,J))\sum_{K\colon J<K<I}(\nu(K)-\nu(K,J))F(\sup(L,K))=$$
$$=\sum_{L\colon J<L<I}(\nu(L)-\nu(L,J))^2F(L)+$$
$$+2\sum_{L\colon J<L<I}(\nu(L)-\nu(L,J))F(L)(\nu(L,J)-\nu(J)),$$

мы получим для интеграла

$$\mathcal{I}[\phi,\psi](x)=\psi(x)\phi(x)\Bigg[\nu^2(I,J)F(I)-\nu^2(J)F(J)-$$
$$-\sum_{L\colon J<L<I}(\nu(L)-\nu(L,J))^2F(L)-$$
$$-2\sum_{L\colon J<L<I}(\nu(L)-\nu(L,J))F(L)\nu(L,J)\Bigg]=$$
$$=\psi(x)\phi(x)\Bigg[\nu^2(I,J)F(I)-\nu^2(J)F(J)-$$
$$-\sum_{L\colon J<L<I}(\nu^2(L)-\nu^2(L,J))F(L)\Bigg].$$

Это завершает доказательство леммы. □

Замечание. Если мы зафиксируем в (3.38) порядок интегрирования следующим образом:

$$\int\left[\int F(\sup(x,\xi,\eta))\phi(\xi)(\psi(\eta)-\psi(x))\,d\nu(\xi)\right]d\nu(\eta),$$

то интеграл (3.38) будет сходиться для любых $\phi$, $\psi$ из $D_0(X)$ без наложения дополнительных условий (3.37).

Пример 1. Используя лемму 72, можно построить частное решение уравнения (3.36) в виде

$$v(x,t)=e^{-\eta_I t}\psi(x),$$

где $\psi$ есть всплеск (с носителем в шаре $I$) и $\eta_I$ есть соответствующее собственное значение псевдодифференциального оператора в третьем члене в (3.36):

$$\eta_I=G(I)\nu(I)+\sum_{J>I}G(J)(\nu(J)-\nu(J,I)).$$

Введённая функция будет решением уравнения (3.36), поскольку $\mathcal{I}[\psi, \psi]$, где $\psi$ есть всплеск, равно тождественно нулю.

Пример 2. Найдём решение (3.36) в виде

$$v(x,t) = v_1(t)\psi(x) + v_2(t)\phi(x),$$

где $\psi$ и $\phi$ суть всплески с носителями в шарах $J$ и $I$ соответственно.

Если шары $I$ и $J$ не пересекаются или $I = J$, тогда $\mathcal{I}[\phi, \psi] = \mathcal{I}[\psi, \phi] = 0$, и соответствующее решение уравнения (3.36) принимает вид

$$v(x,t) = v_1(0)e^{-\eta_J t}\psi(x) + v_2(0)e^{-\eta_I t}\phi(x).$$

Пусть теперь шары $I$ и $J$ сравнимы и различны, например, пусть $J < I$. Тогда соответствующее решение (3.36) принимает вид

$$v(x,t) = v_1(0)e^{-\eta_J t + \phi(x)\Phi_{IJ} v_2(0)\eta_I^{-1}(e^{-\eta_I t}-1)}\psi(x) + v_2(0)e^{-\eta_I t}\phi(x).$$

Здесь $\Phi_{IJ}$ задаётся (3.39) и мы предполагаем $\eta_I \neq 0$.

Мы построили нетривиальное решение нелинейного уравнения (3.36). Это решение содержит двойную экспоненту (экспоненту экспоненты) времени.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3.36) для $v = v(x,t) \in D_0(X) \otimes C^1([0,\infty))$. Пространство $D_0(X) \otimes C^1([0,\infty))$ есть индуктивный предел пространств $D_0(\mathcal{S}) \otimes C^1([0,\infty))$. Это значит, что любая функция $v \in D_0(X) \otimes C^1([0,\infty))$ для любого $t$ принадлежит некоторому $D(\mathcal{S})$ (где $\mathcal{S}$ не зависит от $t$) и $v(x,t)$ непрерывно дифференцируема по $t$ для любого $x$.

Мы будем говорить, что $v \in D_0(X) \otimes C^1([0,\infty))$ есть решение задачи Коши для уравнения (3.36) с начальным условием $v_0 \in D_0(X)$, если

$$v(x,0) = v_0(x)$$

и $v$ удовлетворяет (3.36) для $t > 0$.

Следующая теорема описывает решения задач Коши для (3.36) с начальными условиями в $D_0(X)$.

Теорема 73. *Задача Коши с начальным условием $v_0 \in D_0(X)$ для интегро-дифференциального уравнения (3.36), удовлетворяющего условию (3.37), имеет единственное решение $v \in D_0(X) \otimes C^1([0,\infty))$.*

Доказательство. Любая функция $v \in D_0(X) \otimes C^1([0,\infty))$ имеет вид конечной линейной комбинации всплесков

$$v(x,t) = \sum_{Ij} v_{Ij}(t)\psi_{Ij}(x),$$

где $v_{Ij}$ лежат в $C^1([0,\infty))$ и $I$ принадлежит некоторому $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{\min}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(X)$. Подставляя это в (3.36), мы получим

$$\sum_{Ij} \psi_{Ij}(x)\left[\frac{d}{dt}v_{Ij}(t)+\eta_I v_{Ij}(t)+v_{Ij}(t)\sum_{Jj':\ J>I} v_{Jj'}(t)\psi_{Ji'}(x)\Phi_{JI}\right] = 0.$$

Поскольку всплески линейно независимы и всплески большего масштаба постоянны на носителях всплесков меньшего масштаба, вышеприведенное уравнение эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}v_{Ij}(t) = -v_{Ij}(t)\left[\eta_I + \sum_{Jj':\ J>I} v_{Jj'}(t)\psi_{Ji'}(x)\Phi_{JI}\right]. \tag{3.40}$$

Здесь суммирование пробегает по возрастающей последовательности шаров, бóльших шара $I$. Эта система нелинейна (квадратична). Отметим, что, так как $x \in I$ и всплеск $\psi_{Jj}$ для $J > I$ постоянен на $I$, коэффициент $\psi_{Ji'}(x)$ не зависит от выбора $x \in I$.

Опишем рекуррентную процедуру построения решения системы (3.40). Начальное условие для (3.36) как функция из $D_0(X)$ имеет разложение по всплескам

$$v(x,0) = \sum_{Ij} v_{Ij}(0)\psi_{Ij}(x). \tag{3.41}$$

Выберем максимальный $I$, для которого вышеприведенное начальное условие $v_{Ij}(0)$ не равно нулю (такой $I$ может быть не единственен). Поскольку для максимального $I$ соответствующее уравнение в системе (3.40) линейно, мы получим соответствующее экспоненциальное решение $v_{Ij}(t)$ задачи Коши:

$$v_{Ij}(t) = v_{Ij}(0)e^{-\eta_I t}.$$

Затем, для максимальных подшаров $I' < I$, подставим полученное решение в соответствующие уравнения из (3.40), и получим уравнения для $v_{I'j'}$. Эти уравнения будут *линейны* и будут зависеть от вычисленной на предыдущем шаге функции $v_{Ij}(t)$.

Затем мы итерируем эту процедуру и получаем решения для всех пар $(I, j)$:

$$v_{Ij}(t) = v_{Ij}(0) \exp\left\{ -\eta_I t - \int_0^t \sum_{Jj' :\ J>I} v_{Jj'}(\tau) \psi_{Ji'}(x) \Phi_{JI}\, d\tau \right\}. \tag{3.42}$$

Легко видеть, что, если $v_{Ij}(0) = 0$, тогда $v_{Ij}(t) = 0$. Следовательно, поскольку начальное условие есть конечная линейная комбинация (3.41) всплесков, описанная рекуррентная процедура даст все ненулевые $v_{Ij}(t)$ за конечное число шагов.

Единственность решения следует из наблюдения, что любое уравнение в (3.40) линейно как уравнение для $v_{Ij}(t)$ и зависит только от функций $v_{Jj'}(t)$, связанных с большими масштабами. Это завершает доказательство леммы. □

Замечание. Формула (3.42) даёт явное решение задачи Коши для уравнения (3.36). Следовательно, это уравнение является точно решаемым, и решения могут быть описаны при помощи рекуррентной иерархической процедуры.

Замечание. Если начальное условие $v_0$ для (3.36) принадлежит некоторому (конечномерному) пространству $D_0(\mathcal{S})$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(X)$, то для любого времени $t$ решение $v(x,t)$ соответствующей задачи Коши для (3.36) будет также принадлежать $D_0(\mathcal{S})$. Это наблюдение является примером отмеченного в [59] общего явления существования локализованных решений для некоторых интегральных уравнений в ультраметрическом анализе.

Замечание. Уравнение (3.36) для $v$ из $D_0(X) \otimes C^1([0,\infty))$ эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.40). Система (3.40) является примером каскадной модели. Модели такого рода используются для описания турбулентности [33], [77]. Впервые связь нелинейных ультраметрических интегральных уравнений и каскадных моделей турбулентности обсуждалась в [149].

# Глава 4

## Метод реплик и ультраметрический анализ

### 4.1. Введение

Неупорядоченные системы – это такие физические системы, гамильтонианы (энергии) которых зависят от набора случайных параметров. Такие системы представляют интерес в связи с исследованием стёкол, кластеров, макромолекул, наносистем. Например, при изготовлении наноустройств обычно невозможно избежать разброса параметров, что приводит к необходимости учитывать этот разброс при теоретическом исследовании наносистем.

Более того, даже при отсутствии разброса параметров у наносистем, что имеет место, например, для одинаковых (взятых из одного организма) белков, имеет смысл применять к таким системам подход с точки зрения статистической механики неупорядоченных систем. Для белков это может быть обосновано тем фактом, что свойства белка (в частности, его биологическая функция) могут мало меняться при некоторых заменах аминокислот в белке. Это, в частности, имеет место при рассмотрении аналогичных белков, взятых из разных, иногда весьма сильно различающихся биологических видов.

В настоящей главе мы рассматриваем важный подход в статистической механике неупорядоченных систем, называемый методом реплик. Основной технической проблемой в методе реплик являются вычисления с репличными матрицами. Было обнаружено, что в методе реплик возникают ультраметрические пространства. Развитие методов ультраметрического анализа позволяет существенно упростить и обобщить результаты метода реплик.

Настоящая глава посвящена изучению структуры репличных матриц. Эти результаты были получены в работах [111], [228]. В частности, была получена $p$-адическая параметризация для матрицы Паризи $Q = (Q_{ab})$, описывающей нарушение репличной симметрии: было показано, что матричный элемент матрицы Паризи после некоторой явно описанной перестановки строк и столбцов принимает вид

$$Q_{ij} = q(|i-j|_p),$$

где $q(x)$ есть некоторая неотрицательная функция неотрицательного аргумента.

В работах [130], [136] рассматривались матрицы Паризи, связанные с локально компактных абелевыми группами, являющимися ультраметрическими пространствами. В настоящей главе мы описываем параметризацию также для таких матриц.

В работах [178], [179], [180] был разработан анзац нарушения репличной симметрии, связанный с псевдодифференциальными операторами на произвольных ультраметрических пространствах.

## 4.2. Параметризация матриц Паризи

Матрица Паризи есть $(n \times n)$-матрица $Q = (Q_{ab})$, матричный элемент матрицы которой определяется как

$$Q_{aa} = 0, \quad Q_{ab} = q_i, \quad \left[\frac{a}{m_i}\right] \neq \left[\frac{b}{m_i}\right]; \quad \left[\frac{a}{m_{i+1}}\right] = \left[\frac{b}{m_{i+1}}\right]. \quad (4.1)$$

Здесь $m_i$ суть $k+1$ натуральных чисел, таких, что $p_i = m_{i+1}/m_i$ натуральные,

$$1 = m_0 < m_1 < \cdots < m_k < m_k = n,$$

и функция $[x]$ принимает значения в целых числах по следующему правилу: $[x] - 1 \leqslant x \leqslant [x]$, где $[x]$ целое, то есть $[x]$ есть наименьшее целое число, большее или равное $x$ (целая часть справа), $q_i$ суть $k$ неотрицательных вещественных параметров.

Пример матрицы такого вида, где $p_i = 2$ для всех $i$ есть

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 & q_2 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_1 & 0 & q_2 & q_2 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_2 & q_2 & 0 & q_1 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_2 & q_2 & q_1 & 0 & q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & 0 & q_1 & q_2 & q_2 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & q_1 & 0 & q_2 & q_2 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & q_2 & q_2 & 0 & q_1 & \dots \\ q_3 & q_3 & q_3 & q_3 & q_2 & q_2 & q_1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & & & & \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

В работах [111], [228], было показано, что для случая, когда $m_i = p^i$ (то есть все $p_i = p$), формула (4.1) эквивалентна следующей формуле $p$-адической параметризации: после соотвествующей перенумеровки индексов матрицы Паризи, матричные элементы этой матрицы выражаются как

$$Q_{ab} = q(|a - b|_p), \tag{4.3}$$

где $|\cdot|_p$ есть $p$-адическое расстояние и функция $q(x)$ имеет вид: $q(p^i) = q_i$, $q(0) = 0$.

Рассмотрим непосредственное обобщение этого результата на случай матриц Паризи, связанных с абелевыми группами следующего вида. Рассмотрим абелеву группу, являющуюся прямым произведением конечных абелевых циклических групп:

$$G = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \tag{4.4}$$

где $\mathbb{Z}$ есть группа целых чисел и $p_i$ суть натуральные числа $\geqslant 2$. Элементы группы $G$ имеют вид $x = \{x_i\} = (x_1, \dots, x_k)$, $0 \leqslant x_i \leqslant p_i - 1$, и сложение определено как поэлементное сложение по модулю $p_i$:

$$x + y = \{(x_i + y_i) \bmod p_i\}.$$

Лемма 74. *Элемены группы $G$ находятся во взаимно однозначном соответствии с натуральными числами из множества $\{1, 2, \dots, \prod_{j=1}^{k} p_j\}$. Такое соответствие задаётся отображением*

$$l\colon 1, 2, \dots, \prod_{j=1}^{k} p_j \to G.$$

$$l^{-1}: \quad x = (x_1, \ldots, x_k) \mapsto 1 + \sum_{i=1}^{k} x_i \prod_{j=1}^{i-1} p_j, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant p_i - 1. \quad (4.5)$$

*Здесь мы доопределяем* $\prod_{j=1}^{0} p_j = 1$.

Доказательство. Легко видеть, что отображение $l^{-1}$ переводит 0 в группе $G$ в 1. Также образ элемента

$$(p_1 - 1, \ldots, p_k - 1)$$

есть

$$1 + \sum_{i=1}^{k} (p_i - 1) \prod_{j=1}^{i-1} p_j = 1 + \sum_{i=1}^{k} \left( \prod_{j=1}^{i} p_j - \prod_{j=1}^{i-1} p_j \right) = \prod_{j=1}^{k} p_j.$$

Легко видеть, что образы элементов группы $G$ будут лежать между 1 и $\prod_{j=1}^{k} p_j$.

Проверим, что отображение $l^{-1}$ (которое мы называем нумерацией) отображает различные элементы группы $G$ в различные числа из $\left\{1, 2, \ldots, \prod_{j=1}^{k} p_j\right\}$.

Пусть $x \neq y$ суть элементы группы $G$ такие, что $x_i \neq y_i$, $x_j = y_j$ для $j > i$. Тогда

$$\begin{aligned} l^{-1}(x) - l^{-1}(y) &= \sum_{j=1}^{i} (x_j - y_j) \prod_{l=1}^{j-1} p_l = \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - y_j) \prod_{l=1}^{j-1} p_l + (x_i - y_i) \prod_{l=1}^{i-1} p_l. \end{aligned}$$

Сумма $\sum_{j=1}^{i-1} (x_j - y_j) \prod_{l=1}^{j-1} p_l$ по модулю не превосходит $\prod_{l=1}^{i-1} p_l - 1$. Слагаемое $(x_i - y_i) \prod_{l=1}^{i-1} p_l$ по модулю не менее $\prod_{l=1}^{i-1} p_l$, откуда вышеприведенное выражение отлично от нуля. Отсюда следует, что $l^{-1}$ отображает различные элементы $G$ в различные числа. Это завершает доказательство леммы. □

Группа $G$ является ультраметрическим пространством с ультраметрикой $|x|$, определённой как

$$|x| = m_i = \prod_{j=1}^{i} p_j,$$

где $i$ есть номер последнего ненулевого $x_i$. Доказательство того, что $|\cdot|$ есть ультраметрика, проводится так же, как в $p$-адическом случае.

Теорема 75. *Матричный элемент $Q_{ab}$, определённый формулой (4.1), зависит только от ультраметрики разности $l(a)$ и $l(b)$:*

$$Q_{ab} = q(|l(a) - l(b)|),$$

*где $q(m_i) = q_i$, $q(0) = 0$, $i = 1, \ldots, k$.*

Доказательство. Условие $\left[\frac{a}{m_i}\right] = \left[\frac{b}{m_i}\right]$ принимает вид

$$\left[\frac{1 + \sum_{i=1}^{k} a_i \prod_{j=1}^{i-1} p_j}{m_i}\right] = \left[\frac{1 + \sum_{i=1}^{k} b_i \prod_{j=1}^{i-1} p_j}{m_i}\right].$$

Отсюда $a_j = b_j$ для $j > i$.

Аналогично, условие $\left[\frac{a}{m_i}\right] \neq \left[\frac{b}{m_i}\right]$ означает, что $a_j \neq b_j$ для некоторого $j > i$.

Вместе два условия $\left[\frac{a}{m_i}\right] = \left[\frac{b}{m_i}\right]$, $\left[\frac{a}{m_{i-1}}\right] \neq \left[\frac{b}{m_{i-1}}\right]$ означают, что $a_i \neq b_i$, или $|l(a) - l(b)| = m_i$. Следовательно, матричный элемент матрицы Паризи $Q_{ab}$ зависит только от расстояния в группе $G$ между индексами $|l(a) - l(b)|$: если $|l(a) - l(b)|$ равно $m_i$, то $Q_{ab} = q_i$, откуда следует утверждение теоремы. □

Для случая, когда $m_i = p^i$, эта теорема сводится к $p$-адической параметризации матриц Паризи, полученной в [111], [228].

Замечание. Используемое для $p$-адической параметризации матрицы Паризи отображение $l$ сходно с отображением, использовавшимся для отображения $p$-адических всплесков на вещественные в главе 2. Аналогичное отображение будет использовано в главе 6 для 2-адической параметризации генетического кода. Таким образом, отображения вида (4.5) (различные варианты $p$-адической замены переменной) являются существенным компонентом различных приложений $p$-адического анализа.

# Глава 5

## Ультраметрическая динамика как модель межбассейновой кинетики

### 5.1. Метод межбассейновой кинетики

Динамика широкого класса физически важных сложных наноскопических систем (стёкла, кластеры, полимеры) описывается случайным блужданием на сложном энергетическом ландшафте [153], [156], [264], [267]. Ландшафтом называется непрерывная вещественнозначная функция (энергия) на области в $\mathbb{R}^N$. Выражение "сложный ландшафт" означает, что такая функция имеет много локальных минимумов. В частности, такие модели важны для описания функционирования белков в рамках релаксационной концепции динамики белка [9]. В связи с этим большой интерес представляет приближённое описание динамики на сложных ландшафтах. Приближение межбассейновой кинетики (interbasin kinetics) для динамики на ландшафтах изучалось с 80-х годов XX века, см., например, [219].

Динамика на энергетическом ландшафте используется для описания химических реакций, идущих по активационному механизму. В этом подходе химическая реакция описывается переходом между двумя энергетическими минимумами через энергетический барьер. Имеет место приближённая формула Аррениуса – константа скорости реакции пропорциональна больцмановскому фактору от высоты энергетического барьера

$$A \sim e^{-\beta \Delta E}$$

где $\Delta E$ есть величина барьера активации (разность между энергиями переходного и начального состояний), $\beta = \frac{1}{kT}$ есть обратная температура.

Для случая сложных ландшафтов, когда локальных минимумов много, применяют метод межбассейновой кинетики (inter-basin kinetics) – способ приближённого исследования случайного блуждания на сложных ландшафтах, основанный на описании кинетики, порождённой переходами между группами состояний (бассейнами, basins). Минимальные бассейны соответствуют локальным минимумам энергии, большие бассейны (супербассейны, объединения бассейнов) устроены иерархически. Скорость перехода между бассейнами задаётся аррениусовским фактором, зависящим от энергетического барьера между этими бассейнами.

Постулаты приближения межбассейновой кинетики:

(1) Пространство состояний разделено на бассейны, бассейны разбиваются на подбассейны иерархическим образом (образуя направленное дерево бассейнов).

(2) Энергетический барьер между двумя состояниями зависит только от бассейнов, в которых находятся эти состояния, но не зависит от выбора состояний в таких бассейнах.

Таким образом, переходы между бассейнами описываются системой кинетических уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(i,t) = -\sum_j \big[T(i,j)f(i,t) - T(j,i)f(j,t)\big]\nu(j). \tag{5.1}$$

Здесь индексы $i$, $j$ нумеруют состояния системы (отвечающие минимальным бассейнам, или локальным минимумам энергии), $T(i,j) \geqslant 0$ есть вероятность перехода в единицу времени из $i$ в $j$, $\nu(j) > 0$ суть некоторые положительные числа (объёмы бассейнов).

Описанные ограничения приближения межбассейновой кинетики на матрицу $T(i,j)$ означают, что эта матрица будет блочной с большим числом одинаковых матричных элементов. В важном частном случае матрицу $T(i,j)$ можно взять равной матрице Паризи.

Различные модели межбассейновой кинетики и иерархической динамики изучались во многих работах [162], [245], [269], [219]. В работах [124], [125] $p$-адическая диффузия обсуждалась в связи с релаксацией спиновых стёкол. Динамика белка изучалась при помощи мессбауэровской спектроскопии Г. Фрауэнфельдером [104] и В. И. Гольданским [37]. Идея об иерархичности пространства состояний белка была высказана Фрауэнфельдером, на основании

аналогии со спиновыми стёклами, см. для обзора [153]. Аналогии между белками и стёклами обсуждались также В. И. Гольданским с соавторами [37].

Автором, совместно с В. А. Аветисовым и А. Х. Бикуловым, был предложен [112] подход описания моделей межбассейновой кинетики ультраметрической диффузией, порождаемой псевдодифференциальными операторами. А именно, постулаты межбассейновой кинетики предлагается интерпретировать следующим образом:

(1) = пространство состояний ультраметрично;
(2) = вероятность перехода локально постоянна.

В простейшем случае система уравнений межбассейновой кинетики принимает вид [111], [112] $p$-адического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + D_x^\alpha f(x,t) = 0. \tag{5.2}$$

Первоначально это уравнение было введено в [20] из чисто математических соображений. Здесь $f(x,t)$ есть зависящая от времени $t$ функция распределения, $D_x^\alpha$ есть оператор Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования, действующий по переменной $x$. Эта переменная описывает дерево бассейнов для сложного энергетического ландшафта. Для моделей динамики белка $x$ есть конформационная переменная. Показатель $\alpha$ пропорционален обратной температуре $\beta = \frac{1}{kT}$.

Подробнее применение $p$-адического уравнения теплопроводности в качестве уравнения межбассейновой кинетики можно пояснить следующим образом. Система кинетических уравнений, описывающих переходы между конечным набором состояний, нумеруемых индексами $a$, имеет вид (5.1). Рассмотрим модель межбассейновой кинетики, когда $T_{ij}$ есть матрица Паризи, все $\nu(j) = 1$. Тогда, применяя $p$-адическую параметризацию матрицы Паризи, мы можем переписать систему кинетических уравнений в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} f(i,t) = \int_{p^M\mathbb{Z}_p/p^N\mathbb{Z}_p} q(|i-j|_p)(f(i,t) - f(j,t))\, d\mu(j), \quad M < N,$$

где интегрирование (суммирование) идёт по мере Хаара на дискретной группе $p^M\mathbb{Z}_p/p^N\mathbb{Z}_p$.

Применяя формальный предел $M \to -\infty$, $N \to \infty$, мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \int_{\mathbb{Q}_p} q(|x-y|_p)(f(x,t) - f(y,t))\, d\mu(y).$$

В частном случае, когда

$$q(|x|_p) = \Gamma_p^{-1}(-\alpha)|x|_p^{-1-\alpha},$$

мы получаем $p$-адическое уравнение теплопроводности (5.2). В этом случае мы имеем степенную асимптотику для фундаментального решения: для фундаментального решения $f(x,t)$ $p$-адического уравнения теплопроводности, $f(x,0) = \delta(x)$, для больших времен имеет место асимптотика

$$\int_{|x|_p \leqslant 1} f(x,t)\, d\mu(x) \sim t^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Для рассматриваемой модели показатель $1/\alpha$ пропорционален температуре $T$. Данная степенная асимптотика воспроизводится спектроскопическими экспериментами по связыванию CO и миоглобина [104].

$p$-Адические модели межбассейновой кинетики обсуждались в [111], [112], [113], [114]. Теорема 76 об эквивалентности межбассейновой кинетики общего вида и динамики на ультраметрическом пространстве, описываемой уравнением (5.3) (см. ниже), доказана автором в [55].

Процедуры построения иерархии бассейнов и моделей межбассейновой кинетики по произвольному энергетическому ландшафту изучались Стилинджером и Вебером [246], [247], Бекером и Карплусом [116]. Такие модели применялись для построения иерархии бассейнов для пептидов [116] по данным молекулярной динамики. Сложный ландшафт в таком подходе приближается деревом связности (disconnectivity graph) и функцией распределения энергий активаций.

Схематично такая процедура может быть описана следующим образом. Ландшафт энергии системы заливается водой, вода образует лужи вокруг локальных минимумов. При повышении уровня воды лужи начинают сливаться, пока не останется всего одна лужа. Результатом процедуры является направленное дерево бассейнов (луж), причем минимальным лужам ставится в соответствие их глубина (значения локальных минимумов энергии),

более крупным лужам – уровень энергии, на которых эти лужи сливаются (величина барьера активации между бассейнами). В результате мы получаем дерево бассейнов и функцию на дереве бассейнов – распределение энергий локальных минимумов и барьеров активации. После этого строится модель иерархической динамики, основанная на дереве бассейнов и функции барьеров активации на нём. Это и есть модель межбассейновой кинетики.

В настоящей главе строится уравнение ультраметрической диффузии, описывающее в приближении межбассейновой кинетики (для описанной выше процедуры) динамику на сложном энергетическом ландшафте общего вида. Такое уравнение имеет вид ультраметрического псевдодифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \int_X \frac{e^{-\beta E(\sup(x,y))}}{\nu(\sup(x,y))} \left[ e^{\beta E(x)} f(x,t) - e^{\beta E(y)} f(y,t) \right] d\nu(y) = 0. \tag{5.3}$$

Здесь $x, y \in X$ лежат в ультраметрическом пространстве, отвечающем дереву бассейнов энергетического ландшафта, $f(x,t)$ есть распределение заселённости. Для широкого класса потенциалов такие уравнения являются точно решаемыми, что позволяет исследовать динамику на таких сложных ландшафтах в приближении межбассейновой кинетики аналитически. В важном частном случае вышеприведенное уравнение примет вид $p$-адического уравнения теплопроводности (5.2).

Таким образом, модель ультраметрической диффузии в методе межбассейновой кинетики возникает как приближение вещественной модели случайного блуждания на сложном ландшафте. Такое приближение, основанное на некоторых представлениях о динамике на энергетических ландшафтах общего положения, сложно контролировать. Поэтому настоящая глава написана на физическом уровне строгости.

Настоящая глава устроена следующим образом.

В разделе 5.2 описывается процедура построения дерева бассейнов и функции на этом дереве распределения энергий активации для ландшафта энергии общего вида.

В разделе 5.3 строится соответствующая общая модель межбассейновой кинетики.

В разделе 5.4 показывается эквивалентность модели межбассейновой кинетики из раздела 5.3 и модели ультраметрической

диффузии на пространстве, отвечающем дереву бассейнов, порождаемой ультраметрическим псевдодифференциальным оператором.

В разделе 5.5 (приложение) мы обсуждаем конструкцию кластеризации.

## 5.2. Ландшафт и дерево бассейнов

Опишем процедуру, которая сопоставляет ландшафту (вещественнозначной функции на области в $\mathbb{R}^N$, описывающей распределение потенциальной энергии) дерево бассейнов, функцию на этом дереве, описывающую набор барьеров активации для случайного блуждания на ландшафте, и меру на границе дерева, отвечающую объёмам соответствующих бассейнов.

Рассмотрим энергетический ландшафт, который есть вещественная функция $U$ на конфигурационном пространстве $M$. Конфигурационное пространство есть компактное подмножество $M \subset \mathbb{R}^N$ (с мерой Лебега), являющееся некоторым многообразием с краем. Рассмотрим для функции $U$ набор всех её локальных минимумов. Мы предполагаем, что этот набор конечен.

Для локального минимума $i$ рассмотрим подмножество $R(i)$ в конфигурационном пространстве $M$ (называемое бассейном притяжения $i$), состоящее из таких точек $\xi \in M$, для которых:

1) существует путь (то есть непрерывная кривая) в конфигурационном пространстве, соединяющий $\xi$ и $i$, такой, что $U$ убывает на пути от $\xi$ к $i$;

2) если существуют пути от $\xi$ к различным локальным минимумам, вдоль которых $U$ убывает, то расстояние от $\xi$ до $i$ меньше (или равно), чем до других таких минимумов; здесь расстояние от $\xi$ до $i$ понимается в смысле расстояния вдоль энергетической поверхности, то есть как точная нижняя грань длин путей на ландшафте энергии, соединяющих эти точки.

Различные $R(i)$, $R(j)$ могут пересекаться только по множеству нулевой меры. Объединение всех $R(i)$ есть всё конфигурационное пространство.

Сопоставим бассейну $R(i)$ его объём $\#(i)$:

$$\#(i) = \int_{R(i)} dx.$$

Введём следующие определения.

1) Для точек $a$, $b$ в конфигурационном пространстве $M$ и пути $S$ в конфигурационном пространстве, соединяющего эти две точки, мы говорим, что точка $a$ отделена от точки $b$ энергетическим барьером $E$ на пути $S$ из $a$ в $b$, если следующая точная верхняя грань по точкам $\xi \in S$ равна $E$:

$$\sup_{\xi \in S} U(\xi) = E.$$

2) Для точек $a$, $b$ в конфигурационном пространстве мы говорим, что точка $a$ отделена от точки $b$ энергетическим барьером (или барьером активации) $E(a,b)$, если точная нижняя грань по путям $S$ из $a$ в $b$ в конфигурационном пространстве от энергетических барьеров на путях $S$ из $a$ в $b$ равна $E(a,b)$:

$$E(a,b) = \inf_{S} \sup_{\xi \in S} U(\xi).$$

Пусть $\beta$ есть положительное число (обратная температура). Введём на множестве локальных минимумов метрику

$$d(i,j) = e^{\beta E(i,j)}.$$

Введенная метрика будет ультраметрикой. А именно, рассмотрим три локальных минимума $a$, $b$, $c$, разделенных энергетическими барьерами $E(a,b)$, $E(b,c)$, $E(a,c)$ соответственно. Выберем из этих барьеров минимальный, например, $E(a,b)$ (такой выбор может быть не единственным). Тогда $E(a,c) = E(b,c)$. Иначе, если, скажем, $E(a,c) < E(b,c)$, можно было бы найти путь из $b$ в $c$, состоящий из комбинации путей из из $b$ в $a$ и из $a$ в $c$. Энергетический барьер на таком пути равен $E(a,c)$. Это доказывает сильное неравенство треугольника для введенной метрики, прочие необходимые свойства метрики (неотрицательность, невырожденность и симметричность) очевидны.

Фиксируем теперь шкалу энергий – возрастающую последовательность вещественных чисел $\{E_k\}$ без точек сгущения, и соответственную последовательность положительных чисел $D = \{d_k\}$, $d_k = e^{\beta E_k}$. Рассмотрим соответствующую кластеризацию $\mathcal{C}_D$ множества локальных минимумов с расстоянием $d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ (см. приложение). Кластеры будут содержать локальные минимумы с барьерами активации между минимумами, не превосходящими некоторого $E_i$ из энергетической шкалы.

Кластеры из $\mathcal{C}_D$ мы будем также называть бассейнами. Назовём направленное дерево $\mathcal{T}$ для кластеризации $\mathcal{C}_D$ деревом связности (disconnectivity graph) ландшафта $U$. По такому дереву строится ультраметрическое пространство $X(\mathcal{T})$. Точки такого пространства отвечают локальным минимумам энергетического ландшафта, шары относительно ультраметрики отвечают бассейнам. Можно сказать, что точка $x$ отвечает некоторому локальному минимуму $i$ вместе с набором вложений, соответствующих бассейнов, содержащих $i$.

На пространстве $X$ существует естественная мера $\nu$, такая что мера $\nu(x)$ точки из $X$ (пространство $X$ в рассматриваемом нами случае состоит из конечного числа точек) равна объему бассейна притяжения соответствующего локального минимума $\#(i)$.

Для того, чтобы вышеописанная процедура работала, ландшафт энергии $U$ должен быть функцией общего положения. Например, если ландшафт является постоянной функцией, все точки будут локальными минимумами, и мы получим всего один кластер при проведении кластеризации. Если ландшафт энергии допускает трансляционную инвариантность относительно сдвигов из неокторой решетки (например, такие функции, как $\sin x$ или “коробка для яиц”), то полученное при кластеризации ультраметрическое пространство не будет локально компактным. Фактически мы определяем свойство общего положения для функции $U$относительно описанной выше кластеризации как требование того, чтобы получаемое при кластеризации дерево бассейнов с метрикой на нем при пополнении давало локально компактное цепное пространство кластеризации (см. раздел 2.4). Нарушение свойства локальной компактности означало бы, что в некотором шаре цепного пространства кластеризации существует бесконечное число максимальных подшаров.

## 5.3. Анзац межбассейновой кинетики

Исследование динамики на сложном ландшафте как аналитическими, так и численными методами сталкиваются с трудностями. В связи с этим важным является развитие приближённых подходов, основанных на некоторых представлениях об общих свойствах динамики на сложном ландшафте. Важным примером

такого подхода является метод межбассейновой кинетики. В таком подходе весь сложный ландшафт делится на области (бассейны), отвечающие локальным минимумам энергии (бассейны притяжения локальных минимумов). Затем строится, по некоторым правилам, набор вероятностей перехода в единицу времени между бассейнами. Более того, бассейны образуют естественную иерархию. Следовательно, набор вероятностей перехода между бассейнами естественно считать устроенным иерархически (способ описания такой иерархии отвечает конкретной форме анзаца межбассейновой кинетики). Таким образом, блуждание на сложном ландшафте приближается иерархически устроенной системой кинетических уравнений, описывающих переходы между бассейнами. Динамикой внутри бассейнов при этом пренебрегают. Для интересующего нас режима сложного ландшафта энергии бассейны являются достаточно малыми, и пренебрежение динамикой внутри бассейнов является адекватным.

Рассмотрим дерево бассейнов для ландшафта энергии. Построим систему уравнений межбассейновой кинетики, пользуясь формулой Эйринга–Полани

$$\kappa = A\exp(-\beta\Delta F),$$

где $\kappa$ – константа скорости реакции, $\Delta F$ – свободная энергия активации, в теории Эйринга активированного комплекса $A = kT/h$, $k$, $h$ – постоянные Больцмана, Планка, $T$ – температура, $\beta$ – обратная температура. Такие формулы дают приближённое выражение для констант скоростей реакций. Напомним, что свободная энергия группы состояний (с одинаковой энергией) определяется как

$$F = E - \theta S,$$

где $E$ есть энергия группы состояний, $\theta = \beta^{-1}$ есть температура, $S$ есть энтропия группы состояний (логарифм числа состояний в группе).

Для дерева бассейнов рассмотрим систему кинетических уравнений межбассейновой кинетики вида

$$\frac{dg(i,t)}{dt} = -\sum_{j\neq i}\big[e^{\beta(F(i)-G(\sup(i,j)))}C(i,j)g(i,t) - \\ - e^{\beta(F(j)-G(\sup(i,j)))}C(j,i)g(j,t)\big].$$

Здесь $i$, $j$ – минимальные бассейны (области притяжения локальных минимумов), $g(i)$ – заселённость минимального бассейна $i$, $F(i)$ – свободная энергия бассейна $i$, $\sup(i,j)$ – минимальный супербасейн, содержащий бассейны $i$ и $j$, $G(\sup(i,j))$ – свободная энергия переходного состояния для перехода между бассейнами $i$ и $j$ (мы считаем, что такое переходное состояние определяется супербассейном $\sup(i,j)$).

Коэффициенты $C(i,j)$ выбираются положительными и симметричными, в этом случае такая система кинетических уравнений будет удовлетворять условиями детального баланса. Смысл этих коэффициентов в том, что они описывают модификацию формулы Эйринга на случай переходов не между двумя состояниями, а между набором состояний с единственным промежуточным (переходным) состоянием. Задание анзаца для коэффициентов $C(i,j)$ фиксирует модель межбассейновой кинетики. Мы предлагаем следующий выбор для таких коэффициентов :

$$C(i,j) = \frac{\#(i)\#(j)}{\#^2(\sup(i,j))}. \tag{5.4}$$

Здесь $\#(i)$ есть число состояний в бассейне $i$ (то есть объём этого бассейна). Такой анзац удовлетворяет соображениям скейлинга – при растяжении ландшафта энергии коэффициент $C(i,j)$ не меняется. За формулой (5.4) стоят следующие соображения: вероятность попадания из бассейна $i$ в переходное состояние, соответствующее супербассейну $\sup(i,j)$, берётся пропорциональной отношению объёмов бассейнов $\#(i)/\#(\sup(i,j))$. Далее, вероятность перехода из переходного состояния в бассейн $j$ берётся пропорциональной $\#(j)/\#(\sup(i,j))$. Произведение этих переходных вероятностей даст (5.4).

При таком выборе коэффициентов система уравнений межбассейновой кинетики примет вид

$$\frac{df(i,t)}{dt} = -\sum_{j\neq i} \frac{e^{-\beta G(\sup(i,j))}}{\#^2(\sup(i,j))}\left[e^{\beta E(i)} f(i,t) - e^{\beta E(j)} f(j,t)\right]\#(j).$$

Здесь $f(i) = g(i)/\#(i)$ есть плотность заселённости бассейна $i$, $E(i)$ есть энергия бассейна $i$ (то есть $e^{\beta F(i)} = e^{\beta E}/\#(i)$). Чтобы окончательно избавиться от свободных энергий, примем, что объём переходного состояния для бассейна $\sup(i,j)$ естественно считать пропорциональным объёму этого бассейна:

$$e^{S(\sup(i,j))} \sim \#(\sup(i,j), \tag{5.5}$$

где $S(\sup(i,j))$ есть энтропия переходного состояния. При таком выборе энтропии переходного состояния (игнорируя соответствующий коэффициент пропорциональности) система кинетических уравнений межбассейновой кинетики примет вид

$$\frac{df(i,t)}{dt} = -\sum_{j\neq i} \frac{e^{-\beta E(\sup(i,j))}}{\#(\sup(i,j))} \left[e^{\beta E(i)} f(i,t) - e^{\beta E(j)} f(j,t)\right] \#(j). \tag{5.6}$$

Здесь $E(\sup(i,j))$ есть энергия переходного состояния для бассейна $\sup(i,j)$, и это есть именно та энергия, которая участвует в процедуре кластеризации, см. раздел 5.5 настоящей главы.

Таким образом, развиваемый здесь анзац межбассейновой кинетики основан на процедуре построения дерева бассейнов для энергетического ландшафта, формуле Аррениуса–Эйринга и условиях (5.4), (5.5), и приводит к уравнениям (5.6).

## 5.4. Ультраметрическая диффузия

В настоящем разделе мы показываем, что система уравнений межбасейновой кинетики может быть естественным образом записана в терминах динамики на ультраметрическом пространстве $X$, отвечающем дереву бассейнов.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 76. *Система уравнений межбассейновой кинетики* (5.6) *эквивалентна ультраметрическому псевдодифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + \int_X \frac{e^{-\beta E(\sup(x,y))}}{\nu(\sup(x,y))} \left[e^{\beta E(x)} f(x,t) - e^{\beta E(y)} f(y,t)\right] d\nu(y) = 0, \tag{5.7}$$

*где ультраметрическое пространство $X$ отвечает дереву бассейнов ландшафта энергии, точки $x$ ультраметрического пространства отвечают минимальным бассейнам $i$ (областям притяжения минимумов энергии), мера $\nu$ соответствует объему бассейна (то есть для минимального бассейна $i$, отвечающего минимальному шару $x$ в ультраметрическом пространстве мы имеем $\nu(x) = \#(i)$).*

Мы не будем ограничивать рассмотрение динамики на энергетических ландшафтах ультраметрическими пространствами из

конечного числа точек, но будем рассматривать общий случай уравнений вида (5.7) на регулярных ультраметрических пространствах. Конечные деревья бассейнов получаются при рассмотрении гладких энергетических ландшафтов, в действительности ландшафты энергии сложных систем могут быть весьма сложными. Для негладкого ландшафта описанная здесь процедура построения дерева бассейнов напрямую неприменима, но мы взамен можем рассмотреть индуктивный предел направленных деревьев (интерпретируемых как деревья бассейнов) и связанных с ними пространств функций. Для предельного (бесконечного) дерева мы можем исследовать псевдодифференциальное уравнение вида (5.7) на ультраметрическом пространстве, отвечающем предельному дереву, и интерпретировать такое уравнение как описывающее динамику на сложном негладком ландшафте.

Пример. Рассмотрим случай, когда $X = \mathbb{Q}_p$, мера $\nu$ есть мера Хаара $\mu$, и энергия активации выбирается следующим образом:

$$E(|x-y|_p) = k \ln |x-y|_p, \qquad k > 0,$$

потенциал минимальных шаров (точек) $\mathbb{Q}_p$ кладётся равным нулю. Таким образом, если $|x-y|_p = p^\gamma$, то энергия активации линейна по $\gamma$. Мы получаем для вероятности перехода

$$\frac{e^{-\beta E(\sup(x,y))}}{\nu(\sup(x,y))} = \frac{e^{-\beta k \ln |x-y|_p}}{|x-y|_p} = \frac{1}{|x-y|_p^{1+\beta k}}.$$

Уравнение межбассейновой кинетики принимает вид $p$-адического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) + D_x^\alpha f(x,t) = 0,$$

где показатель $\alpha$ оператора Владимирова $p$-адического дробного дифференцирования

$$D_x^\alpha f(x,t) = \Gamma_p^{-1}(-\alpha) \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x,t) - f(y,t)}{|x-y|_p^{1+\alpha}} \, d\mu(x)$$

пропорционален обратной температуре: $\alpha = \beta k$.

Замечание. Развиваемые здесь ультраметрические модели межбассейновой кинетики важны в первую очередь для построения моделей динамики сложных систем, в которых можно в явном виде заложить характеристики энергетического ландшафта

(для которых без применения моделей межбассейновой кинетики нет пригодных для расчётов способов описания). В частности, в работе [113] были описаны $p$-адические модели межбассейновой кинетики, дающие набор различных характерных для сложных систем режимов релаксации.

Замечание. Задача Коши для $p$-адического уравнения теплопроводности является точно решаемой. Аналогично, задача Коши для уравнения (5.7) точно решаема (при помощи ультраметрического вейвлет-преобразования), если можно выбрать энергии локальных минимумов равными: $E(x) = \text{const}$. Таким образом, в приближении межбассейновой кинетики динамика для широкого класса сложных ландшафтов допускает аналитическое исследование.

Пример. Связывание Mb–CO. Получаемые при помощи применения $p$-адических методов результаты для динамики связывания миоглобина с CO [112] совпадают с данными спектроскопических экспериментов. Следует отметить, что модель связывания миоглобина с CO играет в физике белка основополагающую роль, аналогичную роли модели атома водорода в квантовой механике [156].

Миоглобин – белок из 153 аминокислот, биологическая функция которого состоит в обратимом связывании и переносе молекулы кислорода. Миоглобин может связываться (сильнее, чем с кислородом) с молекулами CO. На этом основано токсическое действие угарного газа.

Миоглобин связывает кислород при помощи иона железа, расположенного внутри глобулы миоглобина. Чтобы связаться с ионом железа, молекула субстрата должна пройти внутрь глобулы через щель, которая может открываться или закрываться в зависимости от пространственной конформации миоглобина. Диффузия кислорода (или CO) происходит гораздо быстрее, чем пространственные перестройки белка, поэтому кинетика реакции будет описываться моделью конформационной динамики белка (реакция будет конформационно контролируемой).

Чтобы построить такую модель конформационной динамики, мы должны к рассмотренному в предыдущем примере уравнению релаксации белка добавить член, описывающий химическую реакцию связывания Mb–CO. Мы записываем соответствующее

уравнение в виде уравнения $p$-адической диффузии со стоком

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + D_x^\alpha + \Omega(|x|_p)\right] f(x,t) = 0. \tag{5.8}$$

Здесь показатель $\alpha$ пропорционален обратной температуре $\beta$, конформационная координата параметризуется полем $p$-адических чисел. Величина $f(x,t)$ есть плотность населённости пространства конформаций миоглобина, не связанного с CO. Связывание Mb–CO идёт на единичном шаре с центром в нуле. Концентрация CO взята постоянная.

Данная модель есть модель диффузии со стоком. Молекула белка испытывает конформационные перестройки, и при попадании в область $|x|_p \leqslant 1$ (набор конформаций, в которых открыт проход к активному центру молекулы), может связаться с CO.

Мы исследуем функционал от фундаментального решения

$$F_\beta(t) = \int_{|x|_p<1} f(x,t)\, d\mu(x)$$

(с начальным условием в 1), получая для концентрации непрореагировавших молекул двумерную поверхность, параметризуемую временем $t$ и обратной температурой $\beta$.

Оказывается [112], что полученная из данной простой модели двумерная поверхность с высокой точностью ложится на данные, полученные из спектроскопических экспериментов. В частности, воспроизводится неэкспонециальная (степенная) релаксация и обратный ход температурной зависимости скорости релаксации при малых температурах. Таким образом, уравнение (5.8) адекватно описывает связывание CO и миоглобина, и, соответственно, $p$-адическое уравнение теплопроводности описывает релаксацию белка.

Замечание. В модели связывания миоглобина с CO (5.8) возникает оператор диффузии со стоком, имеющий вид $p$-адического оператора Шрёдингера

$$D_x^\alpha + \Omega(|x|_p).$$

Член с положительным потенциалом здесь отвечает стоку частиц (отрицательный потенциал описывал бы источник). Оператор Владимирова $D_x^\alpha$ здесь выступает как $p$-адический аналог лапласиана.

Оператор, возникающий в уравнении (5.7), имеет вид произведения операторов

$$Df(x) = \int_X \frac{e^{-\beta E(\sup(x,y))}}{\nu(\sup(x,y))} \left[e^{\beta E(x)} f(x) - e^{\beta E(y)} f(y)\right] d\nu(y) = \\ = TXf(x),$$

где

$$Tf(x) = \int_X \frac{e^{-\beta E(\sup(x,y))}}{\nu(\sup(x,y))} \left[f(x) - f(y)\right] d\nu(y),$$

то есть оператор $T$ есть ультраметрический псевдодифференциальный оператор в смысле главы 3 (в частности, спектр такого оператора вычисляется при помощи базиса всплесков), и оператор

$$Xf(x) = e^{\beta E(x)} f(x)$$

есть оператор умножения на функцию (экспоненту от потенциала).

Таким образом, в приложении к моделям межбассейновой кинетики возникают как операторы типа Шрёдингера (сумма ПДО и оператора умножения на вещественную функцию), так и менее привычные произведения ПДО и оператора умножения на положительную функцию.

## 5.5. Приложение: кластеризация

В настоящем разделе мы обсудим процедуру кластеризации для метрических пространств. Обозначим $(M, \rho)$ метрическое пространство $M$ с метрикой $\rho$.

Определение 77. Последовательность точек $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ в метрическом пространстве $(M, \rho)$ называется $\varepsilon$-цепью, соединяющей $a$ и $b$, если $\rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant \varepsilon$ для всех $0 \leqslant k < n$. Если существует $\varepsilon$-цепь, соединяющая $a$ и $b$, то говорят, что $a$ и $b$ $\varepsilon$-связываемы.

В ультраметрическом пространстве любые две точки $a$ и $b$ не $\varepsilon$-связываемы для $\varepsilon < \rho(a, b)$.

Определение 78. Пусть $(M, \rho)$ есть произвольное метрическое пространство. Определим цепное расстояние $d(a, b) = \inf(\varepsilon$: $a$, $b$ $\varepsilon$-связываемы).

Цепное расстояние $d(a,b)$ между точками $a$ и $b$ обладает всеми свойствами ультраметрики, кроме невырожденности, то есть

$$d(a,b) = d(b,a) \quad \forall a,b,$$
$$d(a,b) \leqslant \max\bigl(d(a,c), d(c,b)\bigr) \quad \forall a,b,c,$$

но может быть $d(a,b) = 0$ для некоторых $a \neq b$.

В некоторых случаях (например, если пространство $(M,\rho)$ дискретно), цепное расстояние будет невырождено, и, следовательно, будет ультраметрикой. Если исходное пространство $(M,\rho)$ ультраметрично, то цепное расстояние совпадает с исходной ультраметрикой $d(a,b) = \rho(a,b)$.

Определение 79. Назовем кластером $C(i,R)$ в метрическом пространстве $(M,\rho)$ шар относительно цепного расстояния с центром в $i$ радиуса $R$, то есть множество $\{j \in M\colon d(i,j) \leqslant R\}$. Кластеризацией пространства $M$ назовем набор кластеров в $M$ такой, что:

i) каждый элемент из $M$ лежит в некотором кластере;

ii) для каждой пары $a$, $b$ элементов из $M$ существует минимальный содержащий их кластер $\sup(a,b)$;

iii) для любых двух вложенных кластеров $A \subset B$ любая возрастающая последовательность вложенных кластеров $\{A_i\}$, $A \subset \dots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \dots \subset B$ конечна.

Различные кластеризации составляют частично упорядоченное (более того, направленное) множество: если мы имеем две кластеризации $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то $\mathcal{A} > \mathcal{B}$, если все кластеры из $\mathcal{B}$ содержатся в $\mathcal{A}$.

Поскольку цепное расстояние удовлетворяет сильному неравенству треугольника, кластеризация $\mathcal{C}$ порождает направленное дерево кластеров $\mathcal{T} = \mathcal{T}[M]$ и ультраметрику на этом дереве (цепное расстояние между кластерами). Далее, по стандартной процедуре мы строим ультраметрическое пространство $X = X(\mathcal{T})$ (цепное пространство кластеризации $\mathcal{C}$), отождествляемое с границей дерева $\mathcal{T}$.

Кластеры в пространстве $M$ в точности соответствуют шарам в пространстве $X$. Следовательно, кластеризация позволяет грубо описать метрическое пространство $(M,\rho)$ ультраметрическим пространством $(X,d)$.

Пример. Рассмотрим важный пример кластеризации. Пусть $D = \{d_i\}$ есть конечный либо счётный набор положительных чисел, не имеющий точек сгущения, кроме, может быть, нуля. Тогда кластеризация $\mathcal{C}_D$ метрического пространства $(M, \rho)$ содержит всевозможные кластеры цепных радиусов $d_i \in D$.

Пример. Примером приложения описанной в настоящем разделе техники, является применение к подмножеству $M$ метрического пространства $(L, \rho)$. В этом случае метрика на $M$ вводится как ограничение метрики на $L$.

Например, пространство $(L, \rho)$ можно выбрать вещественным евклидовым пространством $\mathbb{R}^N$ с естественной метрикой. Для непрерывных (связных) подмножеств в $\mathbb{R}^N$ соответствующее цепное пространство будет тривиальным (будет состоять из одной точки). В том случае, когда подмножество $M$ в $\mathbb{R}^N$ конечно, счётно либо фрактально, соответствующее цепное ультраметрическое пространство нетривиально.

# Глава 6

## Генетический код на двоичной плоскости

### 6.1. Введение

Генетический (аминокислотный) код есть отображение из пространства кодонов (троек нуклеотидов) на пространство аминокислот (плюс добавочный символ – стоп-кодон Ter). Имеет место хорошо известная проблема вырождения генетического кода: существует 64 кодона, но число аминокислот (включая стоп-кодоны) равно 21.

Исследование свойств генетического кода привлекает большой интерес, см. [250] (применение модели кода Грея для описания генетического кода), [167], [244]. В настоящей главе мы рассматриваем применение $p$-адических и ультраметрических методы к исследованию генетического кода. В частности, мы показываем, что вырождение генетического кода описывается локальной постоянностью отображения, определённого на некотором ультраметрическом пространстве.

В работах [175], [174] было предложено использовать 4-адическое информационное пространство (в смысле [171], [83]) для представления генетической информации. В работе [142] Б. Драговича и А. Драгович для описания вырождения генетического кода использовалось информационное 5-адическое пространство. Был предложен новый подход – генетический код был представлен как локально постоянное отображение, определённое на ультраметрическом пространстве кодонов, при этом вырождение генетического кода описывается локальным постоянством этого отображения.

Мы параметризуем пространство кодонов таблицей $8 \times 8$ (двоичной плоскостью) с естественной ультраметрикой, и представляем вырождение генетического кода при помощи локального

постоянства отображения, определённого на ультраметрическом пространстве. Наша конструкция отличается от конструкции работы [142] другой параметризацией пространства кодонов и другой конструкцией ультраметрики.

Более того, мы показываем, что вводимая ультраметрика связана с физико-химическими свойствами аминокислот. Генетический код естественным образом переносит ультраметрику на двоичной плоскости на пространство аминокислот. Мы показываем, что по отношению к такой ультраметрике гидрофобные аминокислоты будут кластеризоваться в два шара. Следовательно, физические свойства аминокислот связаны с рассматриваемой параметризацией генетического кода.

Для различных вариаций генетического кода соответствующие отображения двоичной плоскости на пространство аминокислот имеют различную степень регулярности (то есть различный характер локального постоянства). Мы можем предположить, что более регулярные отображения отвечают более старым формам генетического кода (поскольку эволюция с большей вероятностью идёт в сторону нарушения симметрии).

Результаты настоящей главы были опубликованы в [183].

Изложение настоящей главы устроено следующим образом.

В разделе 6.2 мы приводим вид генетического кода.

В разделе 6.3 мы вводим параметризацию пространства кодонов двоичной плоскостью $8 \times 8$.

В разделе 6.4 мы рассматриваем митохондриальный генетический код на двоичной плоскости и показываем, что почти всё вырождение генетического кода описывается локальным постоянством отображения генетического кода относительно 2-адической ультраметрики на двоичной плоскости.

В разделе 6.5 мы обсуждаем физико-химическую регулярность генетического кода – кластеризацию гидрофобных аминокислот на двоичной плоскости относительно ультраметрики.

В разделе 6.6 мы обсуждаем случай эукариотного генетического кода.

## 6.2. Генетический код

В настоящем разделе мы обсуждаем генетический код, см. например [266]. Основные молекулы, использующиеся в живых системах, представляют из себя линейные полимеры, такие как бе-

лок (последовательность аминокислот), и нуклеиновые кислоты – ДНК и РНК (последовательности нуклеотидов).

Генетическая информация хранится в ДНК и в РНК в виде последовательности нуклеотидов. Нуклеотиды (в ДНК) бывают четырёх сортов и обозначаются C, A, T, G (цитозин, аденин, тимин, гуанин). В РНК тимин T заменяется на урацил, обозначаемый U. В двойной спирали ДНК одна из нитей ДНК комплементарна другой, комплементарные пары нуклеотидов суть A и T, G и C. РНК строится по ДНК в процессе транскрипции по принципу комплементарности (с заменой T на U).

Белок строится по РНК в процессе трансляции. При этом для кодирования аминокислоты используется кодон – тройка стоящих рядом в РНК нуклеотидов $C_1C_2C_3$, суммарно мы имеем 64 кодона. Генетический код есть отображение, которое переводит кодоны в РНК в аминокислоты.

В биологии (кроме некоторых исключительных случаев) используется 20 аминокислот: аланин, треонин, глицин, пролин, серин, аспарагиновая кислота, аспарагин, глутаминовая кислота, глутамин, лизин, гистидин, аргинин, триптофан, тирозин, фенилаланин, лейцин, метионин, изолейцин, валин, цистеин, обозначаемых соответственно Ala, Thr, Gly, Pro, Ser, Asp, Asn, Glu, Gln, Lys, His, Arg, Trp, Tyr, Phe, Leu, Met, Ile, Val, Cys, также мы имеем стоп-кодон Ter (символ остановки трансляции). Генетический код ставит в соответствие кодону $C_1C_2C_3$ аминокислоту либо стоп-кодон Ter.

Существует несколько вариантов генетического кода. Различные варианты в основном совпадают, но могут различаться на нескольких кодонах. Следующие две таблицы описывают митохондриальный код позвоночных и стандартный эукариотный код.

## 6.3. Параметризация пространства кодонов двоичной плоскостью

В настоящем разделе мы вводим параметризацию пространства кодонов двоичной плоскостью.

Первый шаг конструкции – параметризация множества нуклеотидов парами нулей и единиц $(x, y)$: 00, 01, 10, 11. Эта параметризация описывается следующей таблицей $2 \times 2$:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A & G \\ \hline U & C \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 00 & 01 \\ \hline 10 & 11 \\ \hline \end{array} \tag{6.1}$$

Таблица 6.1. митохондриальный код позвоночных

| | | | |
|---|---|---|---|
| AAA Lys<br>AAU Asn<br>AAG Lys<br>AAC Asn | UAA Ter<br>UAU Tyr<br>UAG Ter<br>UAC Tyr | GAA Glu<br>GAU Asp<br>GAG Glu<br>GAC Asp | CAA Gln<br>CAU His<br>CAG Gln<br>CAC His |
| AUA Met<br>AUU Ile<br>AUG Met<br>AUC Ile | UUA Leu<br>UUU Phe<br>UUG Leu<br>UUC Phe | GUA Val<br>GUU Val<br>GUG Val<br>GUC Val | CUA Leu<br>CUU Leu<br>CUG Leu<br>CUC Leu |
| AGA Ter<br>AGU Ser<br>AGG Ter<br>AGC Ser | UGA Trp<br>UGU Cys<br>UGG Trp<br>UGC Cys | GGA Gly<br>GGU Gly<br>GGG Gly<br>GGC Gly | CGA Arg<br>CGU Arg<br>CGG Arg<br>CGC Arg |
| ACA Thr<br>ACU Thr<br>ACG Thr<br>ACC Thr | UCA Ser<br>UCU Ser<br>UCG Ser<br>UCC Ser | GCA Ala<br>GCU Ala<br>GCG Ala<br>GCC Ala | CCA Pro<br>CCU Pro<br>CCG Pro<br>CCC Pro |

Так как нуклеотиды A $= (0,0)$ и G $= (0,1)$ – пурины, U $= (1,0)$ и C $= (1,1)$ – пиримидины, различные первые цифры в двоичном представлении отвечают разной химической природе нуклеотидов. А именно, нуклеотиды $(x,y)$ с $x = 0$ – пурины, и нуклеотиды $(x,y)$ с $x = 1$ – пиримидины.

Вторая цифра $y = 0,1$ в рассматриваемой параметризации также имеет физический смысл – она описывает силу водородной связи для комплементарного связывания нуклеотидов в двойной спирали ($y = 0$ для слабой связи и $y = 1$ для сильной связи).

Второй шаг нашей конструкции – найти параметризацию пространства кодонов, используя введённую параметризацию множества нуклеотидов. Для этого примем во внимание важность нуклеотидов в кодоне, описываемую следующим правилом

$$2 > 1 > 3. \tag{6.2}$$

Таблица 6.2. Эукариотный код

| | | | |
|---|---|---|---|
| AAA Lys<br>AAU Asn<br>AAG Lys<br>AAC Asn | UAA Ter<br>UAU Tyr<br>UAG Ter<br>UAC Tyr | GAA Glu<br>GAU Asp<br>GAG Glu<br>GAC Asp | CAA Gln<br>CAU His<br>CAG Gln<br>CAC His |
| AUA Ile<br>AUU Ile<br>AUG Met<br>AUC Ile | UUA Leu<br>UUU Phe<br>UUG Leu<br>UUC Phe | GUA Val<br>GUU Val<br>GUG Val<br>GUC Val | CUA Leu<br>CUU Leu<br>CUG Leu<br>CUC Leu |
| AGA Arg<br>AGU Ser<br>AGG Arg<br>AGC Ser | UGA Ter<br>UGU Cys<br>UGG Trp<br>UGC Cys | GGA Gly<br>GGU Gly<br>GGG Gly<br>GGC Gly | CGA Arg<br>CGU Arg<br>CGG Arg<br>CGC Arg |
| ACA Thr<br>ACU Thr<br>ACG Thr<br>ACC Thr | UCA Ser<br>UCU Ser<br>UCG Ser<br>UCC Ser | GCA Ala<br>GCU Ala<br>GCG Ala<br>GCC Ala | CCA Pro<br>CCU Pro<br>CCG Pro<br>CCC Pro |

Это означает, что наиболее важен второй нуклеотид в кодоне, и наименее важен третий нуклеотид в кодоне.

Основная идея рассматриваемой конструкции – совместить параметризацию нуклеотидов таблицей $2 \times 2$ и вышеприведенный порядок нуклеотидов в кодоне и получить параметризацию пространства кодонов таблицей $8 \times 8$ (двоичной плоскостью).

Мы называем двоичной плоскостью квадратную таблицу $8 \times 8$, имеющую структуру группы $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (прямой суммы двух групп вычетов по модулю 8). Элементы такой группы мы обозначаем $(x, y)$:

$$x = (x_0 x_1 x_2) = x_0 + 2x_1 + 4x_2,$$
$$y = (y_0 y_1 y_2) = y_0 + 2y_1 + 4y_2, \quad x_i, y_i = 0, 1.$$

Можно сказать, что $x$ и $y$ в этой формуле есть целые числа от 0 до 7 в двоичном представлении.

Построим отображение $\rho$ пространства кодонов на двоичную плоскость. Используя правило (6.2), поставим в соответствие наиболее важному (второму) нуклеотиду в кодоне наибольший масштаб в двоичной плоскости $8 \times 8$ – пару $(x_0, y_0)$, первому нуклеотиду в кодоне мы сопоставляем пару $(x_1, y_1)$, и третьему нуклеотиду мы ставим в соответствие пару $(x_2, y_2)$. При этом нуклеотиды определяют соответствующе пары $(x_i, y_i)$ по правилу (6.1). Мы получаем для кодона $C_1C_2C_3$ следующее представление парой троек из 0 и 1 (элементов двоичной плоскости):

$$\rho\colon C_1C_2C_3 \mapsto (x, y) = (x_0x_1x_2, y_0y_1y_2).$$

Далее, мы перенумеруем номера строк и столбцов двоичной плоскости следующим образом (подобно тому, как проводилась перенумерация строк и столбцов матрицы Паризи):

$$\begin{aligned}
&\eta\colon x \mapsto \widetilde{x}, \quad y \mapsto \widetilde{y};\\
&\eta\colon x_0 + 2x_1 + 4x_2 \mapsto 1 + 4x_0 + 2x_1 + x_2;\\
&\eta\colon y_0 + 2y_1 + 4y_2 \mapsto 1 + 4y_0 + 2y_1 + y_2.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы рассматриваем взаимно однозначное соответствие номеров строк (или столбцов) на двоичной плоскости:

$$\eta\colon 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7 \mapsto 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

После перенумеровки $\eta$ таблица кодонов $8 \times 8$ на двоичной плоскости примет вид:

Таблица A

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $AAA$ | $AAG$ | $GAA$ | $GAG$ | $AGA$ | $AGG$ | $GGA$ | $GGG$ |
| $AAU$ | $AAC$ | $GAU$ | $GAC$ | $AGU$ | $AGC$ | $GGU$ | $GGC$ |
| $UAA$ | $UAG$ | $CAA$ | $CAG$ | $UGA$ | $UGG$ | $CGA$ | $CGG$ |
| $UAU$ | $UAC$ | $CAU$ | $CAC$ | $UGU$ | $UGC$ | $CGU$ | $CGC$ |
| $AUA$ | $AUG$ | $GUA$ | $GUG$ | $ACA$ | $ACG$ | $GCA$ | $GCG$ |
| $AUU$ | $AUC$ | $GUU$ | $GUC$ | $ACU$ | $ACC$ | $GCU$ | $GCC$ |
| $UUA$ | $UUG$ | $CUA$ | $CUG$ | $UCA$ | $UCG$ | $CCA$ | $CCG$ |
| $UUU$ | $UUC$ | $CUU$ | $CUC$ | $UCU$ | $UCC$ | $CCU$ | $CCC$ |

Двоичная плоскость (и, соответственно, пространство кодонов) допускает 2-мерную 2-адическую ультраметрику, отвечающую правилам (6.1), (6.2):

$$d(C_1C_2C_3, C_1'C_2'C_3') = \max(|x - x'|_2, |y - y'|_2), \tag{6.3}$$

$$(x, y) = \rho(C_1C_2C_3), \quad (x', y') = \rho(C_1'C_2'C_3').$$

Такая 2-адическая норма может принимать значения 1, 1/2, 1/4.

## 6.4. Генетический код на двоичной плоскости

В настоящем разделе мы обсуждаем митохондриальный генетический код позвоночных, который в нашем подходе выглядит более регулярным.

Отображение генетического кода в рассматриваемом подходе сопоставляет элементам двоичной плоскости аминокислоты (и стоп-кодон Ter). Мы получим для митохондриального генетического кода следующую таблицу аминокислот на двоичной плоскости:

Таблица B

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lys / Asn | Glu / Asp | Ter / Ser | Gly |
| Ter / Tyr | Gln / His | Trp / Cys | Arg |
| Met / Ile | Val | Thr | Ala |
| Leu / Phe | Leu | Ser | Pro |

Каждый маленький квадрат этой таблицы является образом (относительно отображения генетического кода) квадрата $2 \times 2$ из таблицы кодонов. Например, мы имеем следующее соответствие

$$\begin{array}{|c|c|}\hline AAA & AAG \\ \hline AAU & AAC \\ \hline \end{array} \to \boxed{\begin{array}{c}\text{Lys}\\ \hline \text{Asn}\end{array}}, \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline CCA & CCG \\ \hline CCU & CCC \\ \hline \end{array} \to \boxed{\text{Pro}}$$

Некоторые из квадратов $2 \times 2$ из таблицы кодонов отображаются на одну аминокислоту (что даёт вырождение 4 для генетического кода). Некоторые из квадратов $2 \times 2$ отображаются на две аминокислоты: первая строка квадрата $2 \times 2$ отображается на одну аминокислоту, вторая строка отображается на другую аминокислоту, что даёт вырождение 2 для генетического кода. Мы также имеем три случая дополнительного вырождения. Например, второй квадрат в последней строке таблицы и верхняя

половина первого квадрата в последней строке отображаются на аминокислоту лейцин (Leu).

2-Адические шары относительно рассмотренной выше 2-адической нормы на двоичной плоскости выглядят следующим образом. Вся таблица есть шар диаметра 1. Квадрант (четверть таблицы), такой, например, как правый нижний квадрант, содержащий аминокислоты Pro, Ser, Thr, Ala, есть шар диаметра 1/2. Квадрат из 4 кодонов (четверть квадранта), например, квадрат, содержащий аминокислоту Pro есть шар диаметра 1/4. Наконец, любой кодон можно рассматривать как шар нулевого диаметра.

Большая часть вырождения генетического кода (кроме упомянутых трёх случаев дополнительного вырождения) имеет явный 2-адический смысл на двоичной плоскости. Во первых, отображение генетического кода всегда локально постоянно по горизонтальной координате $y$ с диаметром локального постоянства 1/4, и локально постоянно на половине пространства кодонов по вертикальной координате $x$ с диаметром локального постоянства 1/4. Во вторых, множества с различным характером локального постоянства размещены на двоичной плоскости симметричным образом: генетический код в нижнем правом квадранте локально постоянен с диаметром 1/4 по $x$ и $y$, генетический код в верхнем левом квадранте локально постоянен с диаметром 1/4 по $y$ (но не по $x$), и в оставшихся двух квадрантах имеет место одинаковое распределение квадратов с различным характером локального постоянства.

Мы будем говорить, что вырождение генетического кода удовлетворяет *принципу близости* – близкие кодоны разделены малыми 2-адическими расстояниями на двоичной плоскости. Здесь близость кодонов означает, что соответствующие кодоны кодируют одну и ту же аминокислоту. Мы увидим, что принцип близости имеет более широкую область применения и также связан с физико-химическими свойствами аминокислот.

Коротко основной результат настоящей главы можно сформулировать следующим образом.

Предложение 80. *Применение отображения митохондриального генетического кода к Таблице* A *кодонов на двоичной плоскости даёт Таблицу* B *аминокислот на двоичной плоскости. При этом большая часть вырождения отображения генетического кода будет описываться локальным постоянством отоб-*

*ражения на двоичной плоскости по одной либо по двум координатам.*

## 6.5. Физико-химическая регулярность генетического кода

Отображение генетического кода переносит ультраметрику на двоичной плоскости на множество аминокислот. Мы определяем расстояние $D(A, B)$ между двумя аминокислотами $A$, $B$ как минимум расстояний между их прообразами на двоичной плоскости:

$$D(A, B) = \min d\big(G^{-1}(A), G^{-1}(B)\big),$$

где $G$ есть генетический код, то есть отображение двоичной плоскости на аминокислоты, $d$ есть ультраметрика (6.3) на двоичной плоскости. Например, расстояние между His и Gln равно $1/4$, расстояние между Pro и Ala равно $1/2$, расстояние между Asp и Ser равно 1. Эти примеры показывают, что ультраметрика существенно отличается от евклидова расстояния. Например, Asp и Ser, расположенные в соседних квадратах, имеют между собой максимальное расстояние. Это можно прокомментировать следующим образом: ультраметрическое расстояние между двумя точками связано с иерархией шаров, содержащих эти точки. Кодоны, отвечающие Asp и Ser, лежат в шарах, находящихся далеко друг от друга в этой иерархии.

Возникает естественный вопрос – имеет ли такая ультраметрика физический смысл? Мы покажем, что такой физический смысл есть и введённая ультраметрика связана с физическими свойствами аминокислот. А именно, обсудим свойство гидрофобности. Это свойство связано с полярностью молекулы и её зарядом в растворе: гидрофобные молекулы нейтральны и неполярны. Гидрофобные аминокислоты – Leu, Phe, Ile, Met, Val, Cys, Trp, имеют высокую вероятность находиться внутри белка (в гидрофобном ядре белка), в то время как гидрофильные аминокислоты с высокой вероятностью находятся на поверхности белка и имеют контакт с водой, см. книгу [76].

В таблице

| | | | |
|---|---|---|---|
| —— | —— | —— | |
| —— | —— | Trp / Cys | |
| Met / Ile | Val | | |
| Leu / Phe | Leu | | |

мы помещаем только гидрофобные аминокислоты и опускаем остальные. Легко видеть, что гидрофобные аминокислоты кластеризованы в два шара – нижний левый квадрант (Leu, Phe, Ile, Met, Val) и третий квадрат второй строки (Cys, Trp).

Мы видим, что свойство гидрофобности связано с 2-адической нормой на двоичной плоскости. Введённая в настоящей работе параметризация пространства кодонов удовлетворяет *принципу близости* – ультраметрически близкие аминокислоты имеют схожие физико-химические свойства. Используя терминологию [171], [83], можно сказать, что близость в ультраметрическом информационном пространстве индуцирует сходство химических свойств (и, более того, для гидрофобных аминокислот вызывает положение внутри белка, то есть близость в физическом пространстве).

Следующая таблица содержит полярные аминокислоты. Мы видим, что их размещение на двоичной плоскости удовлетворяет принципу близости, в частности, все семь аминокислот в верхнем левом квадранте полярны.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lys / Asn | Glu / Asp | —— / Ser | |
| —— / Tyr | Gln / His | —— | Arg |
| —— | | Thr | |
| —— | | Ser | |

## 6.6. Эукариотный код

В предыдущих разделах мы обсуждали митохондриальный генетический код. В настоящем разделе мы рассмотрим эукариотный (стандартный) генетический код. Такой генетический код отвечает следующей таблице аминокислот на двоичной плоскости:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lys / Asn | Glu / Asp | Arg / Ser | Gly |
| Ter / Tyr | Gln / His | Ter\|Trp / Cys | Arg |
| Ile\|Met / Ile | Val | Thr | Ala |
| Leu / Phe | Leu | Ser | Pro |

Эукариотный генетический код отличается от митохондриального значениями кода на кодонах AGA и AGG, AUA, и UGA. По сравнению с эукариотным кодом митохондриальный код отвечают более простому и регулярному отображению, поскольку такое отображение кодонов на аминокислоты имеет большие области локального постоянства по отношению к расстоянию на двоичной плоскости. В частности, для эукариотного кода локальное постоянство отображения на минимальном масштабе расстояний по горизонтальной координате $y$ на двоичной плоскости нарушено в двух квадратах (шарах диаметра 1/4).

Поскольку эволюция с большей вероятностью идёт в направлении нарушения симметрии, приведенная выше таблица поддерживает гипотезу, что митохондриальный генетический код является более древним, чем эукариотный код. Таким образом, чисто математические аргументы регулярности отображения генетического кода на естественных ультраметрических пространствах позволяют исследовать эволюцию генетического кода.

# Заключение

Ультраметрический и $p$-адический анализ – новая быстро развивающаяся область математики, приложения которой простираются от физики планковских масштабов и теории струн [20] до описанных в настоящей книге приложений к неупорядоченным системам и биофизике, и до приложений к когнитивным наукам и психологии [83].

Изложение данной книги весьма далеко от полноты. Выбор тем в основном связан с интересами автора и его собственными работами.

Перечислим ещё раз основные результаты, изложенные в книге. Каждый пункт списка результатов мы будем, если это возможно, сопровождать формулой, которую автор считает наиболее показательной для данного раздела.

1) Построена теория $p$-адических всплесков и описано применение $p$-адических всплесков к спектральному анализу $p$-адических псевдодифференциальных операторов:

$$\psi(x) = \chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p), \qquad D^\alpha\psi(x) = p^\alpha\psi(x).$$

Методы теории всплесков в $p$-адическом случае демонстрируют даже большую эффективность чем в вещественном.

2) Развит анализ всплесков и псевдодифференциальных операторов на общих регулярных ультраметрических пространствах:

$$Tf(x) = \int_X T(\sup(x,y))(f(x) - f(y))\,d\nu(y), \qquad T\Psi_{Ij} = \lambda_I\Psi_{Ij}.$$

Как это ни удивительно, для введения теории всплесков и псевдодифференциальных операторов оказалось возможным обойтись без групповой структуры – общие ультраметрические пространства не имеют никакой структуры группы.

3) Разработаны приложения к статистической физике неупорядоченных систем. Для матрицы Паризи построена $p$-адическая параметризация

$$Q_{ab} = q(|a-b|_p).$$

4) Для класса моделей межбассейновой кинетики, использующихся для описания динамики макромолекул, построено эквивалентное им ультраметрическое псевдодифференциальное уравнение. В простейшем случае такое уравнение принимает вид $p$-адического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + D_x^{\alpha} f(x,t) = 0, \qquad \alpha \sim \frac{1}{T}.$$

Предложено использовать такое уравнение для описание динамики белка. Для модели связывания миоглобина с CO – “модели атома водорода для биофизики” такое уравнение даёт хорошее совпадение с экспериментом.

5) Построена модель генетического кода на двоичной плоскости. В этой модели отображение генетического кода является в высокой степени симметричным. В частности, почти всё вырождение генетического кода описывается локальным постоянством отображения в двумерной 2-адической метрике. Вместо формулы в данном пункте мы поместим таблицу аминокислот на двоичной плоскости:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lys / Asn | Glu / Asp | Ter / Ser | Gly |
| Ter / Tyr | Gln / His | Trp / Cys | Arg |
| Met / Ile | Val | Thr | Ala |
| Leu / Phe | Leu | Ser | Pro |

Рассматриваемые в книге приложения ультраметрического и $p$-адического анализа являются различными примерами сложных систем из физики и молекулярной биологии. Например, такая характерная модель сложной системы, как модель динамики белка в рассматриваемом подходе описывается точно решаемым уравнением ($p$-адическим уравнением теплопроводности).

Автор хотел бы оптимистично высказать мнение, что дальнейшее развитие ультраметрического анализа и его приложений позволит достичь существенно более глубокого понимания теории сложных систем, и добиться того, чтобы математические методы в биологии демонстрировали бы столь же высокую эффективность, как и в физике.

# Список литературы


[1] В. А. Аветисов, А. Х. Бикулов, В. А. Осипов, “$p$-Адические модели ультраметрической диффузии в конформационной динамике макромолекул”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 55–65 Mi tm171, MR 2099868.

[2] С. Альбеверио, А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович, “Ассоциативные алгебры $p$-адических распределений”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 29–40 Mi tm168, MR 2099865, Zbl 1098.46032.

[3] В. С. Анашин, “Равномерно распределенные последовательности целых $p$-адических чисел”, *Матем. заметки*, **55**:2 (1994), 3–46 Mi mzm2138, MR 1275316, Zbl 0835.11031.

[4] В. С. Анашин, “Равномерно распределенные последовательности целых $p$-адических чисел II”, *Дискретная математика*, **14**:4 (2002), 3–64 Mi dm263, MR 1964120, Zbl 1054.11041.

[5] Н. М. Астафьева, “Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения”, *УФН*, **166** (1996), 1145–1170. doi 10.1070/PU1996v039n11ABEH000177.

[6] И. Я. Арефьева, “Скатывающиеся решения полевых уравнений на неэкстремальных бранах и в $p$-адических струнах”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 47–54 Mi tm170, MR 2099867.

[7] А. Х. Бикулов, “Исследования $p$-адической функции Грина”, *ТМФ*, **87** (1991), 376–390 Mi tmf5497, MR 1129672, Zbl 0741.43008.

[8] А. Х. Бикулов, И. В. Волович, “$p$-Адическое броуновское движение”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:3 (1997), 75 MR 1478560; англ. пер.: A. Kh. Bikulov, I. V. Volovich, “$p$-Adic Brownian motion”, *Russ. Math. Izv.*, **61**:3 (1997), 537–552. doi 10.1070/im1997v061n03ABEH000126. MR 1478560, Zbl 0896.60044.

[9] Л. А. Блюменфельд, *Проблемы биологической физики*, Наука, М., 1977.

[10] Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, М., 1946 MR 0043001.

[11] З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1985 MR 0816135.

[12] А. Вейль, *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972 MR 0352037.

[13] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Наука, М., 1972 MR 0190056.

[14] В. С. Владимиров, И. В. Волович, “$p$-Адическая квантовая механика”, *Докл. АН СССР*, **302** (1988), 320–322 MR 0972554.

[15] В. С. Владимиров, “Обобщённые функции над полем $p$-адических чисел”, *УМН*, **43** (1989), 17–53 Mi rm1967.

[16] В. С. Владимиров, “О спектрах некоторых псевдодифференциальных операторов над полем $p$-адических чисел”, *Алгебра и анализ*, **2**:6 (1990), 107–124 MR 1092528.

[17] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, “Спектральная теория в $p$-адической квантовой механике и теория представлений”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54** (1990), 275–302 MR 1062514, Zbl 0709.22010.

[18] В. С. Владимиров, И. В. Волович, “Применение $p$-адических чисел в математической физике”, Тр. МИАН, **200**, 1991, 88–99 MR 1143359, Zbl 0977.11505.

[19] В. С. Владимиров, “Адельные формулы Фройнда–Виттена для амплитуд Венециано и Вирасоро–Шапиро”, *УМН*, **48**:6 (1993), 3–38 Mi rm1343, MR 1264154, Zbl 0866.11068.

[20] В. С. Владимиров , И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *$p$-Адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994 MR 1349578; англ. пер. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, Ye. I. Zelenov, *$p$-Adic Analysis and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore, 1994 MR 1288093.

[21] В. С. Владимиров, “Адельные формулы для гамма и бета функций в полях алгебраических чисел”, *Докл. РАН*, **347**:1 (1996), 11–15 MR 1392769, Zbl 0916.11064.

[22] В. С. Владимиров, “Адельные формулы для гамма и бета функций пополнений полей алгебраических чисел и их применения к струнным амплитудам”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:1 (1996), 63–86 Mi im62, MR 1391118, Zbl 0916.11059.

[23] В. С. Владимиров, “Разветвлённые характеры групп иделей одноклассных квадратичных полей”, Тр. МИАН, **224**, 1999, 107–114 MR 1721357, Zbl 0956.11027.

[24] В. С. Владимиров, “Адельные формулы для гамма и бета функций одноклассных квадратичных полей. Применения к 4-частичным струнным амплитудам”, Тр. МИАН, **228**, 2000, 76–79 Mi tm492, MR 1782573.

[25] В. С. Владимиров, “Бета функции локальных полей характеристики нуль. Применения к струнным амплитудам”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 43–58 Mi im370, MR 1917536, Zbl 1033.81071.

[26] В. С. Владимиров, “Адельные формулы для 4-частичных древесных струнных и суперструнных амплитуд”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 9–28 Mi tm167, Zbl pre05071203.

[27] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, “О нелинейном уравнении динамики в теории $p$-адической струны”, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 355–368 Mi tmf36, MR 2077315; arXiv: math-ph/0306018 ADS 2003math.ph...6018V.

[28] И. В. Волович, “$p$-Адическое пространство-время и теория струн”, *ТМФ*, **71** (1987), 337–340 Mi tmf4962, MR 910270, Zbl 0636.12015.

[29] И. В. Волович, С. В. Козырев, *$p$-Адическая математическая физика: основные конструкции, применения к сложным*

*и наноскопическим системам*, http://www.mi.ras.ru/noc/irreversibility/p-adicMF1.pdf.

[30] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро, *Теория представлений и автоморфные функции*, Обобщённые функции. Вып. 6, Наука, М., 1966 MR 0220673.

[31] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, “Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертова пространства”, Обобщённые функции. Вып. 4, Наука, М., 1961.

[32] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 1–3, Наука, М., 1971–1973.

[33] Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов, *Системы гидродинамического типа и их применение*, Наука, М., 1981.

[34] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987 MR 0925004.

[35] Б. И. Голубов, “О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной”, *Матем. сб.*, **193**:4 (2002), 37–60 Mi sm643, MR 1918887, Zbl 1030.42023.

[36] Б. И. Голубов, “Модифицированный сильный двоичный интеграл и производная дробного порядка”, *Функ. анализ и прил.*, **39**:2 (2005), 64–70 Mi faa41, MR 2161517, Zbl pre05161605.

[37] В. И. Гольданский, Ю. Ф. Крупянский, К. В. Шайтан, А. Б. Рубин, “Исследование динамики белков методом мессбауэровской спектроскопии”, *Биофизика*, **3** (1987), 761–774.

[38] А. Ю. Гросберг, А. Р. Хохлов, *Статистическая физика макромолекул*, Наука, М., 1989 MR 1024308.

[39] А. Ю. Гросберг, “Неупорядоченные полимеры”, *УФН*, **167**:2 (1997), 129–166.

[40] Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения на бесконечномерных пространствах*, Наука, М., 1983 MR 0720545; англ. пер.: Yu. L. Dalecky and S. V. Fomin, *Measures and differential equations in infinite dimensional spaces*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991 MR 1140921.

[41] Г. С. Джорджевич, Б. Драгович, “$p$-Адический и адельный гармонические осцилляторы с зависящей от времени частотой”, *ТМФ*, **124**:2 (2000), 239–248 Mi tmf636, MR 1821114.

[42] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, Регулярная и хаотическая динамика, Ижевск, 2001; пер. с англ.: I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS Lecture Notes Series, SIAM, Philadelphia, 1992 MR 1162107, ADS 1992tlw..conf.....D.

[43] В. С. Доценко, “Физика спин-стекольного состояния”, *УФН*, **163**:6 (1993).

[44] Е. И. Зеленов, “$p$-Адическая квантовая механика при $p = 2$”, *ТМФ*, **80** (1989), 253–264 Mi tmf5135, MR 1021463.

[45] Е. И. Зеленов $p$-Адическая квантовая механика и когерентные состояния. 1. Системы Вейля, *ТМФ*, **86** (1991), 210–220 Mi tmf5436, MR 1107702, Zbl 0737.22014.

[46] Е. И. Зеленов, “$p$-Адическая квантовая механика и когерентные состояния. 2. Собственные функции осциллятора”, *ТМФ*, **86** (1991), 375–384 Mi tmf5454, MR 1107938, Zbl 0737.22015.

[47] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, изд-е 2, дополненное, Изд-во АФЦ, М., 1999 MR 1845025.

[48] Н. Коблиц, *$p$-Адические числа, $p$-адический анализ и дзета-функции*, Мир, М., 1982 MR 0671892.

[49] С. В. Козырев, “Ультраметрическое пространство свободных когерентных состояний”, *ТМФ*, **110**:2 (1997), 334 MR 1471690; S. V. Kozyrev, *Free coherent states and p-adic numbers*, arXiv: q-alg/9701015 ADS 1997q.alg.....1015K.

[50] С. В. Козырев, “Анализ всплесков как $p$-адический спектральный анализ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 149–158 Mi im381, MR 1918846, Zbl 1016.42025; arXiv: math-ph/0012019 ADS 2000math.ph..12019K.

[51] С. В. Козырев, “Оснащенное гильбертово пространство свободных когерентных состояний и $p$-адические числа”, *ТМФ*, **135**:2 (2003), 642–650 MR 2008765; arXiv: math-ph/0205009 ADS 2002math.ph...5009K.

[52] С. В. Козырев, “$p$-Адические псевдодифференциальные операторы и $p$-адические всплески”, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 383–394 Mi tmf31, MR 2077317; англ. пер.: S. V. Kozyrev, “$p$-Adic pseudodifferential operators and $p$-adic wavelets”, *Theoret. Math. Phys.*, **138**:3 (2004), 322–332 doi 10.1023/B:TAMP.0000018449.72502.6f, MR 2077317; arXiv: math-ph/0303045 ADS 2003math.ph...3045K.

[53] С. В. Козырев, “$p$-Адические псевдодифференциальные операторы: методы и приложения”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 154–165 Mi tm181, MR 2099878, Zbl 1098.47044.

[54] С. В. Козырев, “Всплески и спектральный анализ ультраметрических псевдодифференциальных операторов”, *Матем. сб.*, **198**:1 (2007), 103–126 Mi sm1432, MR 2330687.

[55] С. В. Козырев, “Ультраметрическая динамика как модель межбассейновой кинетики”, *Известия НАН Армении. Математика*, **41**:5 (2006), 28–38.

[56] С. В. Козырев, “К ультраметрической теории турбулентности”, *ТМФ*, 2008 (в печати); arXiv: 0803.2719.

[57] С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, “Псевдодифференциальные операторы на ультраметрических пространствах и ультраметрические всплески”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:5 (2005), 135–150 MR 2179417; arXiv: math-ph/0412062 ADS 2004math.ph..12062K.

[58] С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, “$p$-Адические псевдодифференциальные операторы и аналитическое продолжение репличных матриц”, *ТМФ*, **144**:2 (2005) MR 2195007.

[59] С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, “Пространственная локализация для свободной частицы в ультраметрической квантовой механике”, *Докл. РАН*, **411**:3 (2006), 319–322.

[60] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1989 MR 1025126.

[61] А. Н. Кочубей, “Параболические уравнения над полем $p$-адических чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:6 (1991), 1312–1330; англ. пер.: A. N. Kochubei, *Math. USSR Izv.*, **39** (1992), 1263–1280 doi 10.1070/IM1992v039n03ABEH002247, MR 1152215.

[62] А. Н. Кочубей, “Операторы типа Шрёдингера над полем $p$-адических чисел”, *ТМФ*, **86** (1991), 323–333 Mi tmf5448, MR 1107933.

[63] А. Н. Кочубей, “О $p$-адических функциях Грина”, *ТМФ*, **96**:1 (1993), 123–138 Mi tmf1495, MR 1243863.

[64] Е. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров, “Скалярные модели в $p$-адической квантовой теории поля и иерархическая модель Дайсона”, *ТМФ*, **78**:248–257 (1989) MR 994155.

[65] Ю. И. Манин, “$p$-Адические автоморфные функции”, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, **3**, 1974, 5–92 MR 422161, Zbl 0309.14021.

[66] М. Д. Миссаров, “РГ–инвариантные кривые в фермионной иерархической модели”, *ТМФ*, **114** (1998), 323–336 Mi tmf843, MR 1840302, Zbl 0991.82014.

[67] М. Д. Миссаров, “Критические явления в фермионной иерархической модели”, *ТМФ*, **117** (1998), 471–488 Mi tmf946, MR 1694026, Zbl 0942.82018.

[68] М. Д. Миссаров, “Непрерывный предел в фермионной иерархической модели”, *ТМФ*, **118** (1999), 40–50 Mi tmf684, MR 1702848, Zbl 0992.81058.

[69] М. Д. Миссаров, “Симметрия ренормализационной группы в $p$-адических моделях”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 172–181 Mi tm183, MR 2099880, Zbl 1098.81069.

[70] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

[71] И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин, “Основные конструкции всплесков”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **3**:4 (1997), 999–1028 Mi fpm267, MR 1794498, Zbl 0936.42015.

[72] И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин, “Основы теории всплесков”, *УМН*, **53**:6 (1998), 53–128 Mi rm89, MR 1702694, Zbl 0955.42019.

[73] В. П. Платонов, А. С. Рапинчук, *Алгебраические группы и теория чисел*, Наука, М., 1991 MR 1137274.

[74] О. Г. Смолянов, *Анализ на топологических векторных пространствах и его применения*, Изд-во МГУ, М., 1979.

[75] Ю. А. Фарков, “Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах”, *Функц. анализ и прил.*, **31** (1997), 86–88 Mi faa498, MR 1608928, Zbl 0914.43006.

[76] А. В. Финкельштейн, О. Б. Птицын, *Физика белка*, Книжный дом Университет, М., 2002.

[77] П. Г. Фрик, *Турбулентность: модели и подходы*, Курс лекций. Часть I, II, ПГТУ, Пермь, 1998.

[78] Т. Хида, *Броуновское движение*, Мир, М., 1987 MR 0898874.

[79] А. Ю. Хренников, “Квантовая механика над неархимедовыми числовыми полями”, *ТМФ*, **83** (1990), 406–418 Mi tmf5819, MR 1070695.

[80] А. Ю. Хренников, “Математические методы неархимедовой физики”, *УМН*, **45** (1990), 79–110 Mi rm4756, MR 1075387, Zbl 0722.46040.

[81] А. Ю. Хренников, “Вещественно-неархимедова структура пространства-времени”, *ТМФ*, **86** (1991), 177–190 Mi tmf5433, MR 1107699, Zbl 0753.46042.

[82] А. Ю. Хренников, *Неархимедов анализ и его приложения*, Физматлит, М., 2003 MR 2071665.

[83] А. Ю. Хренников, *Моделирование процессов мышления в p-адических системах координат*, Физматлит, М., 2004 MR 2289381.

[84] А. Ю. Хренников, “Представление когнитивной информации с помощью вероятностных распределений на пространстве нейронных траекторий”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 125–145 Mi tm179, MR 2099876, Zbl 1101.92012.

[85] И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, т. 1, 2, Наука, М., 1988 MR 0366916.

[86] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971 MR 0276721; пер. с англ.: H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1999 MR 1741419.

[87] *Избранные вопросы p-адической математической физики и анализа*, под ред. И. В. Воловича, М. О. Катанаева, Б. Драговича, С. В. Козырева, Тр. МИАН, **245**, 2004.

[88] L. Accardi, A. Frigerio, J. T. Lewis, “Quantum stochastic processes”, *Publications RIMS*, **18** (1982), 97 MR 660823.

[89] L. Accardi, Y. G. Lu, I. V. Volovich, *Quantum theory and its stochastic limit*, Springer-Verlag, 2002 MR 1925437.

[90] S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, *p-Adic multiresolution analysis and wavelet frames*, arXiv: 0802.1079.

[91] S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, “Harmonic analysis in the $p$-adic Lizorkin spaces: fractional operators, pseudodifferential equations, $p$-adic wavelets, Tauberian theorems”, *The*

*Journal of Fourier Analysis and Applications*, **12**:4 (2006), 393–425 doi 10.1007/s00041-006-6014-0, MR 2256931, Zbl 1110.46049.

[92] S. Albeverio, A. Khrennikov, B. Tirozzi, "$p$-Adic dynamical systems and neural networks", *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **9**:9 (1989), 1417–1437 doi 10.1142/S0218202599000634, MR 1725825.

[93] S. Albeverio, T. Hida, J. Potthoff, L. Streit, "Dirichlet forms in terms of white noise analysis", *Rev. Mod. Phys.*, **1** (1990), 291–323 MR 1160380.

[94] S. Albeverio, W. Karwowski, "A Random Walk on $p$-Adics: The Generator and Its Spectrum", *Stoch. Processes Appl.*, **53** (1994), 1–22 doi 10.1016/0304-4149(94)90054-X, MR 1290704, Zbl 0810.60065.

[95] S. Albeverio, W. Karwowsky, "A random walk on $p$-adic numbers", *Stochastic Process–Physics and Geometry II*, Proc. III Intern. Conf. (Locarno, 1991), eds. S. Albeverio, U. Cattaneo, D. Merlini, World Scientific, Singapore, 1995, 61–74.

[96] S. Albeverio, A. Khrennikov, "$p$-Adic Hilbert space representation of quantum systems with an infinite number of degrees of freedom", *Int. J. Mod. Phys.*, **10**:13/14 (1998), 1665–1673 MR 1405192, ADS 1996IJMPB..10.1665A.

[97] S. Albeverio, S. V. Kozyrev, *Coincidence of the continuous and discrete p-adic wavelet transforms*, arXiv: math-ph/0702010.

[98] S. Albeverio, S. V. Kozyrev, *Multidimensional ultrametric pseudodifferential equations* *arXiv*: 0708.2074.

[99] S. Albeverio, S. V. Kozyrev, *Frames of p-adic wavelets and orbits of the affine group* *arXiv*: 0801.4713.

[100] M. V. Altaisky, *Wavelets*: *Theory*, *Applications*, *Implementation*, Universities Press, Hyderabad (India), 2005.

[101] M. V. Altaisky, "$p$-Adic wavelet transform and quantum physics", Тр. МИАН, **245**, 2004, 41–46 Mi tm169, MR 2099866, Zbl 1098.42024.

[102] V. S. Anashin, "Uniformly distributed sequences in computer algebra, or how to construct program generators of random numbers", *J. Math. Sci.*, **89**:4 (1998), 1355–1390 doi 10.1007/BF02355442, MR 1620236, Zbl 0909.11029.

[103] V. S. Anashin, *Pseudorandom number generation by p-adic ergodic transformations*, arXiv: cs.CR/0401030, arXiv: cs.CR/0402060.

[104] A. Ansari, J. Berendzen, S. F. Bowne, H. Frauenfelder, I. E. T. Iben, T. B. Sauke, E. Shyamsunder, R. D. Young, "Protein States and Proteinquakes", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, **82** (1985), 5000–5004 doi 10.1073/pnas.82.15.5000, ADS 1985PNAS...82.5000A.

[105] I. Ya. Aref'eva, B. Dragovich, I. V. Volovich, "On the adelic string amplitudes", *Phys. Lett. B*, **209**:4 (1988), 445–450. doi 10.1016/0370-2693(88)91171-9. MR 959282, ADS 1988PhLB..209..445A.

[106] I. Ya. Aref'eva, B. Dragovich, I. V. Volovich, "Open and closed $p$-adic strings and quadratic extension of number fields", *Phys.Lett. B*, **212** (1988), 283–289 doi 10.1016/0370-2693(88)91318-4, MR 961029, ADS 1988PhLB..212..283A.

[107] I. Ya. Aref'eva, B. Dragovich, I. V. Volovich, "$p$-Adic superstrings", *Phys. Lett. B*, **214** (1988), 339–346. doi 10.1016/0370-2693(88)91374-3, MR 969982, ADS 1988PhLB..214..339A.

[108] I. Ya. Aref'eva, B. Dragovic, P. Frampton, I. V. Volovich, "Wave function of the universe and $p$-adic gravity", *Mod. Phys. Lett. A*, **6** (1991), 4341–4358 MR 1126611.

[109] I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich, "Quantum group particles and non–archimedean geometry", *Phys. Lett. B*, **268** (1991), 179–193. doi 10.1016/0370-2693(91)90801-V, MR 1131509, ADS 1991PhLB..268..179A.

[110] I. Ya. Aref'eva, P. Frampton, "Beyond Planck energy to non-archimedean geometry", *Mod. Phys. Lett. A*, **6** (1991), 313–316. doi 10.1142/S0217732391000282, MR 1093559, ADS 1991MPLA....6..313A.

[111] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, "Application of $p$-adic analysis to models of spontaneous breaking of the replica symmetry", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:50 (1999), 8785–8791 doi 10.1088/0305-4470/32/50/301, MR 1748445, Zbl 0957.82034, ADS 1999JPhA...32.8785A; arXiv: cond-mat/9904360 ADS 1999cond.mat..4360A.

[112] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov, "$p$-Adic Models of Ultrametric Diffusion Constrained by Hierarchical Energy Landscapes", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:2 (2002), 177–189 doi 10.1088/0305-4470/35/2/301, MR 1945917, Zbl 1038.82077, ADS 2002JPhA...35..177A; arXiv: cond-mat/0106506 ADS 2001cond.mat..6506A.

[113] V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, V. A. Osipov, "$p$-Adic description of characteristic relaxation in complex systems", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:15 (2003), 4239–4246 doi 10.1088/0305-4470/36/15/301, MR 1984499, Zbl 1049.82051, ADS 2003JPhA...36.4239A; arXiv: cond-mat/0210447 ADS 2002cond.mat.10447A.

[114] V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, *Are proteins ultrametric*? arXiv: 0804.4551.

[115] J. M. Bayod, N. De Grande–De Kimpe, J. Martinez–Maurica, *p-Adic functional analysis*, Marcel Dekker, New York, 1992 MR 1152563.

[116] O. M. Becker, M. Karplus, "The Topology of Multidimensional Protein Energy Surfaces: Theory and Application to Peptide Structure and Kinetics", *J. Chem.Phys.*, **106** (1997), 1495–1517 doi 10.1063/1.473299, ADS 1997JChPh.106.1495B.

[117] R. L. Benedetto, “Examples of wavelets for local fields”, *Proc. of the AMS Special Session on Wavelets, Frames, and Operator Theory* (Baltimore, January 2003) MR 2066820; arXiv: math.CA/abs/0312038.

[118] J. J. Benedetto, R. L. Benedetto, “A wavelet theory for local fields and related groups”, *The Journal of Geometric Analysis*, **14**:3 (2004), 423–456 MR 2077160, Zbl 1114.42015.

[119] G. Beylkin, R. Coifman, V. Rokhlin, “Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms. I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**:2 (1991), 141–183 doi 10.1002/cpa.3160440202, MR 1085827, Zbl 0722.65022.

[120] A. Blumen, J. Klafter, G. Zumofen, “Relaxation behaviour in ultrametric spaces”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **19**:2 (1986), L77–L84 doi 10.1088/0305-4470/19/2/010, MR 824649, Zbl 0592.60056, ADS 1986JPhA...19L..77B.

[121] S. Bosch, U. Guntzer, R. Remmert, *Non–Archimedean Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1984 MR 0746961.

[122] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, “Non-archimedian string dynamics”, *Nucl. Phys. B*, **302** (1988), 365–402. doi 10.1016/0550-3213(88)90207-6, MR 947888, ADS 1988NuPhB.302..365B.

[123] L. Brekke, P. G. O. Freund, E. Metzler, M. Olson, “Adelic $N$-point amplitudes”, *Phys. Lett. B*, **216** (1989) MR 978143.

[124] L. Brekke, M. Olson, *p-Adic diffusion and relaxation in glasses*, Preprint UTTG–16–89, EFI–89–23.

[125] L. Brekke, P. G. O. Freund, “$p$-Adic numbers in physics”, *Phys. Rep.*, **233**:1 (1993), 1–66 doi 10.1016/0370-1573(93)90043-D, MR 1238475, ADS 1993PhR...233....1B.

[126] Ch. L. Brooks III, J. N. Onuchic, D. J. Wales, “Taking a Walk on a Landscape”, *Science*, **293** (2001), 612–613 doi 10.1126/science.1062559.

[127] F. Bruhat, “Distributions sur un groupe localemont compact et applications a l’etude des representations des groupes $p$-adiques”, *Bulletin Soc. Mathem. de France*, **89** (1961), 43–75 MR 140941, Zbl 0128.35701.

[128] F. Bruhat, J. Tits, “Groupes reductifs sur un corps local”, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, **41** (1972), 5–251 doi 10.1007/BF02715544, MR 327923, Zbl 0254.14017.

[129] F. Bruhat, J. Tits Groupes reductifs sur un corps local. II. Schemas en groupes. Existence d’une donnee radicielle valuee, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, **60** (1984), 197–376 MR 756316.

[130] D. M. Carlucci, C. De Dominicis, “On the Replica Fourier Transform”, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. IIB: Mech. Phys. Chem. Astr.*, **325** (1997), 527–530 Zbl 0884.43002; arXiv: cond-mat/9709200 ADS 1997cond.mat..9200C.

[131] L. O. Chekhov, “A note on multiloop calculus in $p$-adic string theory”, *Mod. Phys. Lett. A*, **4** (1989), 1151–1158. doi 10.1142/S0217732389001337, MR 1016962, ADS 1989MPLA....4.1151C.

[132] L. O. Chekhov, A. D. Mironov, A. V. Zabrodin, “Multiloop calculation in $p$-adic string theory and Bruhat–Tits trees”, *Commun. Math. Phys.*, **125** (1989), 675–711 doi 10.1007/BF01228348, MR 1024934, Zbl 0685.22005, ADS 1989CMaPh.125..675C.

[133] F. Choucroun, “Arbres, espaces ultrametriques et bases de structure uniforme”, *Geom. Dedicata*, **53** (1994), 69–74 doi 10.1007/BF01264045, MR 1299886, Zbl 0867.54032.

[134] J. M. Cohen, F. Colonna, D. Singman, “Distributions and measures on the boundary of a tree”, *J. Math. Anal. Appl.*, **293** (2004), 89–107 doi 10.1016/j.jmaa.2003.12.015, MR 2052534, Zbl 1054.31004.

[135] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1994 MR 1303779.

[136] C. De Dominicis, D. M. Carlucci, T. Temesvari, “Replica Fourier transform on ultrametric trees and block-diagonalizing multireplica matrices”, *J. Phys. I France*, **7** (1997), 105–115 doi 10.1051/jp1:1997128, MR 1457835; arXiv: cond-mat/9703132 ADS 1997cond.mat..3132D.

[137] N. De Grande–De Kimpe, A. Khrennikov, L. Van Hamme, “The Fourier transform for $p$-adic tempered distributions.”, *$p$-Adic functional analysis*, Lecture Notes Pure and Appl. Math., **207**, Marcel Dekker, New York, 1999, 97–125 MR 1702050.

[138] G. S. Djordjevic, B. Dragovich, “$p$-Adic path integrals for quadratic actions”, *Mod. Phys. Lett. A*, **12**:20 (1997), 1455–1464. doi 10.1142/S0217732397001485, MR 1461757, ADS 1997MPLA...12.1455D.

[139] B. Dragovich, “$p$-Adic perturbation series and adelic summability”, *Phys. Lett. B*, **256** (1991), 392–396. doi 10.1016/0370-2693(91)91780-Y, MR 1100250, ADS 1991PhLB..256..392D.

[140] B. Dragovich, “On $p$-adic and adelic generalization of quantum field theory”, *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.*, **102/103** (2001), 150–155 doi 10.1016/S0920-5632(01)01550-X, MR 1922855, Zbl 1006.81090, ADS 2001NuPhS.102..150D.

[141] B. Dragovich, “$p$-Adic and adelic quantum mechanics”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 72–85 Mi tm173, MR 2099870, Zbl 1098.81010.

[142] B. Dragovich, A. Dragovich, *A $p$-Adic Model of DNA Sequence and Genetic Code*, arXiv: q-bio.GN/0607018.

[143] B. Dragovich, A. Dragovich, *$p$-Adic Modelling of the Genome and the Genetic Code*, arXiv: 0707.3043, Submitted to the Computer Journal for a special issue.

[144] B. Dragovich, A. Dragovich arXiv:0707.0764, “p-Adic Degeneracy of the Genetic Code”, *Proc. of “4th Summer School in Modern Mathematical Physics”* (September 2006, Belgrade, Serbia); arXiv:0707.0764.

[145] B. M. Dwork, *Lectures on p-adic differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977 MR 0678093.

[146] S. F. Edwards, P. W. Anderson, “Theory of spin glasses”, *J. Phys. F*, **5** (1975), 965 ADS 1975JPhF....5..965E.

[147] A. Escassut, *Analytic elements in p-adic analysis*, World Scientific, Singapore, 1995 MR 1370442.

[148] A. Escassut, *Ultrametric Banach algebras*, World Scientific, Singapore, 2003 MR 1978961.

[149] S. Fischenko, E. Zelenov, “$p$-Adic Models of Turbulence”, *p-Adic Mathematical Physcis*, 2nd International Conference, AIP Conf. Proc., **286**, eds. A. Yu. Khrennikov, Z. Rakic, I. V. Volovich, AIP, Melville, New York, 2006, 174–191.

[150] P. H. Frampton, Y. Okada, “Effective scalar field theory of $p$-adic string”, *Phys. Rev. D*, **37** (1988), 3077–3079. doi 10.1103/PhysRevD.37.3077, MR 942202, ADS 1988PhRvD..37.3077F.

[151] L. Frappat, A. Sciarrino, P. Sorba, “Crystalizing the Genetic Code”, *J. Biol. Phys.*, **27** (2001), 1–38 doi 10.1023/A:1011874407742, MR 1904043; arXiv: physics/0003037 ADS 2000physics...3037F.

[152] L. Frappat, P. Sorba, A. Sciarrino, “A crystal base for the genetic code”, *Phys. Lett. A*, **250** (1998), 214–221. doi 10.1016/S0375-9601(98)00761-0, MR 1616095, ADS 1998PhLA..250..214F; arXic: physics/9801027 ADS 1998physics...1027F.

[153] H. Frauenfelder, S. G. Sligar, P. G. Wolynes, “The Energy Landscape and Motions of Proteins”, *Science*, **254** (1991), 1598–1603 doi 10.1126/science.1749933, ADS 1991Sci...254.1598F.

[154] H. Frauenfelder, “Complexity in proteins”, *Nature Struct. Biol.*, **2**:10 (1995), 821–823 doi 10.1038/nsb1095-821.

[155] H. Frauenfelder, D. Th. Leeson, “The energy landscape in non-biological and biological molecules”, *Nature Struct. Biol.*, **5** (1998), 757–759 doi 10.1038/1784.

[156] H. Frauenfelder, B. H. McMahon, P. W. Fenimore, “Myoglobin: the hydrogen atom of biology and paradigm of complexity”, *PNAS*, **100**:15 (2003), 8615–8617 doi 10.1073/pnas.1633688100.

[157] P. G. O. Freund, M. Olson, “Non-archimedean strings”, *Phys. Lett. B*, **199** (1987), 186–190 doi 10.1016/0370-2693(87)91356-6, MR 919703, ADS 1987PhLB..199..186F.

[158] P. G. O. Freund, E. Witten, “Adelic string amplitudes”, *Phys. Lett. B*, **199** (1987), 191–194 doi 10.1016/0370-2693(87)91357-8, MR 919704, ADS 1987PhLB..199..191F.

[159] L. Gerritzen, M. van der Put, *Schottky groups and Mumford curves*, Lecture Notes in Mathematics, **817**, Springer-Verlag, Berlin MR 0590243, Zbl 0442.14009.

[160] F. Q. Gouvea, *p-Adic Numbers*, Springer, Berlin, 2003 MR 1488696.

[161] F. Hausdorff, “Erweiterung einer Homeomorphie”, *Fund. Math.*, **16** (1930), 353–360 JFM 56.0508.03; “Unber innere Abbildungen”, *Fund. Math.*, **23** (1934), 279–299.

[162] K. H. Hoffmann, P. Sibani, “Diffusion in Hierarchies”, *Phys. Rev. A*, **38** (1988), 4261–4270 doi 10.1103/PhysRevA.38.4261, MR 966368, ADS 1988PhRvA..38.4261H.

[163] B. A. Huberman, M. Kerszberg, “Ultradiffusion: the relaxation of hierarchical systems”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**:6 (1985), L331–L336 doi 10.1088/0305-4470/18/6/013, MR 792216, ADS 1985JPhA...18L.331H.

[164] I. E. T. Iben, D. Braunstein, W. Doster, H. Frauenfelder, M. K. Hong, J. B. Johnson, S. Luck, P. Ormos, A. Schulte, P. J. Steinbach, A. H. Xie, R. D. Young, “Glassy behavior of a protein”, *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989), 1916–1919 doi 10.1103/PhysRevLett.62.1916, ADS 1989PhRvL..62.1916I.

[165] J. I. Igusa, *An introduction to the theory of local zeta functions*, AMS/IP studies in advanced mathematics, **14**, 2000 MR 1743467, Zbl 0959.11047.

[166] J. Igusa, *Lectures on forms of higher degree*, Lectures on mathematics and physics, Tata institute of fundamental research, **59**, Springer-Verlag, 1978 MR 546292, Zbl 0417.10015.

[167] M. A. Jimenez-Montano, C. R. de la Mora-Basanez, Th.Pöshel, “The hypercube structure of the genetic code explains conservative and non–conservative aminoacid substitutions in vivo and in vitro”, *BioSystems*, **39** (1996), 117–125 doi 10.1016/0303-2647(96)01605-X.

[168] H. Kaneko, “A class of spatially inhomogeneous Dirichlet spaces of the $p$-adic number field”, *Stoch. Process. and Appl.*, **88** (2000), 161–174 doi 10.1016/S0304-4149(99)00124-6, MR 1761994, Zbl 1047.60077.

[169] D. Kazhdan, “An algebraic integration”, *Mathematics: frontiers and perspectives*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 93–115 MR 1754770.

[170] A. Yu. Khrennikov, “$p$-Adic quantum mechanics with $p$-adic valued functions”, *J. Math. Phys.*, **32** (1991), 932–936 doi 10.1063/1.529353, MR 1097779, ADS 1991JMP....32..932K.

[171] A. Khrennikov, *p-Adic valued distributions in mathematical physics*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994 MR 1325924.

[172] A. Khrennikov, *Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1997 MR 1746953.

[173] A. Yu. Khrennikov, "Human subconscious as a $p$-adic dynamical system", *J. Theor. Biology*, **193** (1998), 179–196 doi 10.1006/jtbi.1997.0604.

[174] A. Khrennikov, *Classical and quantum mental models and Freud's theory of unconcious mind*, Växjö University Press, Växjö:, 2002.

[175] A. Khrennikov, *Information Dynamics in Cognitive, Psychological, Social, and Anomalous Phenomena*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 2004 MR 2070325.

[176] A. Khrennikov, "$p$-Adic discrete dynamical systems and their applications in physics and cognitive sciences", *Russ. J. Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 45–70 MR 2134648, Zbl pre05018024.

[177] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, "Wavelets on ultrametric spaces", *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **19** (2005), 61–76 doi 10.1016/j.acha.2005.02.001, MR 2147062, Zbl 1079.42028.

[178] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, "Replica symmetry breaking related to a general ultrametric space I: replica matrices and functionals", *Phys. A*, **359** (2006), 222–240 doi 10.1016/j.physa.2005.05.077, MR 2238513.

[179] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, "Replica symmetry breaking related to a general ultrametric space II: RSB solutions and the $n \to 0$ limit", *Phys. A*, **359** (2006), 241–266. doi 10.1016/j.physa.2005.05.078, MR 2238513.

[180] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, "Replica symmetry breaking related to a general ultrametric space III: the case of general measure", *Phys. A*, **378**:2 (2007), 283–298 doi 10.1016/j.physa.2006.12.027, MR 2318826; arXiv: cond-mat/0603694 ADS 2006cond.mat..3694K.

[181] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, "Ultrametric random field", *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**:2 (2006), 199–213 doi 10.1142/S0219025706002317, MR 2235545, Zbl pre05045344.

[182] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, "Wavelets and the Cauchy problem for the Schrodinger equation on analytic ultrametric space", *Proc. 2-nd Conf. on Mathematical Modelling of Wave Phenomena* 2005 (14–19 August, 2005, Växjö, Sweden), AIP Conf. Proc., **834**, eds. B. Nilsson, L. Fishman, Melville, New York, 2006, 344–350 doi 10.1063/1.2205817, MR 2147062, ADS 2006AIPC..834..344K.

[183] A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, "Genetic code on the diadic plane", *Phys. A*, **381** (2007), 265–272 doi 10.1016/j.physa.2007.03.018; arXiv: q-bio.QM/0701007 ADS 2007q.bio.....1007K.

[184] A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, M. Skopina, *p-Adic refinable functions and MRA-based wavelets* *arXiv*: 0711.2820.

[185] A. Yu. Khrennikov, M. Nilsson, *P-adic Deterministic and Random Dynamics*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht–Boston–London, 2004 MR 2105195.

[186] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics, **143**, Cambridge University Press, 2001 MR 1840042, Zbl 0998.28004.

[187] N. Koblitz, *p-Adic analysis: a short course of recent work*, Mathematical Society Lecture Notes, series 46, Cambridge Univ. Press, London, 1980 MR 0591682.

[188] A. N. Kochubei, "Additive and multiplicative fractional differentiations over the field of $p$-adic numbers", *p-Adic Functional Analysis*, Lect. Notes Pure Appl. Math., **192**, Marcel Dekker, New York, 1997, 275–280 MR 1459216, Zbl 0882.26015.

[189] A. N. Kochubei, *Pseudodifferential equations and stochastics over non-archimedean fields*, Marcel Dekker, New York, 2001 MR 1848777.

[190] G. H. Kohler, A. Blumen, "Variance of random walks on Cayley trees: application to the trapping problem", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**:23 (1990), 5611–5624 doi 10.1088/0305-4470/23/23/031, MR 1086283, ADS 1990JPhA...23.5611K.

[191] G. Kohler, A. Blumen, "Subordination on ultrametric spaces", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **20**:16 (1987), 5627–5633. doi 10.1088/0305-4470/20/16/036, MR 924733, ADS 1987JPhA...20.5627K.

[192] S. V. Konyagin, I. Shparlinski, *Character sums with exponential functions and their applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999 MR 1725241.

[193] S. V. Kozyrev, "The space of free coherent states is isomorphic to space of distributions on $p$-adic numbers", *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **1**:2 (1998), 349–355 doi 10.1142/S0219025798000181, MR 1628189, Zbl 0913.46065; arXiv: q-alg/9706020 ADS 1997q.alg.....6020K.

[194] S. V. Kozyrev, *p-Adic representation of the Cuntz algebra and the free coherent states*, arXiv: math-ph/0205029.

[195] S. V. Kozyrev, V. Al. Osipov, V. A. Avetisov, "Nondegenerate ultrametric diffusion", *J. Math. Phys.*, **46** (2005), 063302 doi 10.1063/1.1858447, MR 2149838, ADS 2005JMP....46f3302K; arXiv: cond-mat/0403440 ADS 2004cond.mat..3440K.

[196] M. Krasner, "Nombres semi-reels et espaces ultrametriques", *C. R. Acad. Sci. Paris*, **219** (1944), 433–435 MR 15067, Zbl 0061.06202.

[197] S. V. Krivov, M. Karplus, "Hidden complexity of free energy surfaces for peptide (protein) folding", *PNAS*, **101**:41 (2004), 14766–14770 doi 10.1073/pnas.0406234101, ADS 2004PNAS..10114766K.

[198] W. C. Lang, “Wavelet Analysis on the Cantor Dyadic Group”, *Houston J. Math.*, **24** (1998), 533–544 MR 1686623, Zbl 0963.42024; Addendum, **24**, 757–758 Zbl 1010.42020.

[199] M. L. Lapidus, C. He, *Generalized Minkowski Content*, *Spectrum of Fractal Drums*, *Fractal Strings and the Riemann-Zeta-Function*, AMS, 1997 MR 1376743.

[200] M. L. Lapidus, *Fractal Geometry and Number Theory*, Birkhauser, Boston, 1999.

[201] M. L. Lapidus, M. van Frankenhuysen, *Fractal Geometry and Number Theory*: *Fractal Strings and Zeros of Zeta Functions*, Birkhauser, 2000 MR 1726744, Zbl 0981.28005.

[202] D. Th. Leeson, D. A. Wiersma, “Looking into the energy landscape of myoglobin”, *Nature Struct. Biol.*, **2**:10 (1995), 848–851 doi 10.1038/nsb1095-848.

[203] A. J. Lemin, “The category of ultrametric spaces is isomorpic to the category of complete, atomic, tree-like and real graduated lattices LAT”, *Algebra universalis*, **50**:1 (2003), 35–49 doi 10.1007/s00012-003-1806-4, MR 2026825, Zbl 1094.54004.

[204] E. Y. Lerner, M. D. Missarov, “$p$-Adic Feynman string amplitudes”, *Comm. Math. Phys.*, **121** (1989), 35–48 doi 10.1007/BF01218622, MR 985613, Zbl 0671.22011, ADS 1989CMaPh.121...35L.

[205] E. Yu. Lerner, M. D. Missarov, “Fixed points of renormalization group in the hierarchical fermionic model”, *J. Stat. Phys.*, **76** (1994), 805–817 doi 10.1007/BF02188686, MR 1299233, Zbl 0839.60097, ADS 1994JSP....76..805L.

[206] K. Mahler, *p-Adic numbers and their functions*, Cambrige tracts in mathematics, **76**, Cambridge Univ. Press, London, 1980 MR 0644483.

[207] Yu. I. Manin, *New dimensions in geometry*, Lecture notes in Math., **1111**, Springer, Berlin, 1985 MR 797416.

[208] Yu. I. Manin, “Reflections on arythmetical physics”, *Conformal invariance and string theory*, eds. P. Dita and P. Gergescu, Academic Press, Boston, 1989, 293–303 MR 1010662.

[209] R. Metzler, J. Klafter, J. Jortner, “Hierarchies and Logarithmic Oscillations in the Temporal Relaxation Patterns of Proteins and Other Complex Systems”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **96** (1999), 11085–11089 doi 10.1073/pnas.96.20.11085, ADS 1999PNAS...9611085M.

[210] Y. Meyer, *Wavelets and operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992 MR 1228209.

[211] M. Mezard, G. Parisi, M. Virasoro, *Spin-Glass Theory and Beyond*, World Scientific, Singapore, 1987 MR 1026102.

[212] M. Mezard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse, M. Virasoro, “Nature of the Spin-Glass Phase”, *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984), 1156–1159 doi 10.1103/PhysRevLett.52.1156, ADS 1984PhRvL..52.1156M.

[213] A. Monna, *Analyse non-Archimedienne*, Springer-Verlag, New York, 1970 MR 0295033.

[214] F. Murtagh, *Multidimensional Clustering Algorithms*, Physica-Verlag, Wurzburg, 1984 MR 0795794.

[215] F. Murtagh, “The Haar Wavelet Transform of a Dendrogram”, *J. Classification*, 2007, in press MR 2370773, Zbl pre05248112; arXiv:cs.IR/0608107 ADS 2006cs.....8107M.

[216] S. K. Nechaev, O. A. Vasilyev, “On the metric structure of ultrametric spaces”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 182–201 Mi tm184, MR 2099881, Zbl 1098.11064.

[217] M. Nilsson, “$p$-Adic monomial dynamical system”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 202–209 Mi tm185, MR 2099882, Zbl 1098.37045.

[218] M. Nilsson, R. Nyqvist, “The asymptotic number of periodic points of discrete $p$-adic dynamical systems”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 210–217 Mi tm186, MR 2099883, Zbl 1098.37048.

[219] A. T. Ogielski, D. L. Stein, “Dynamics on ultrametric spaces”, *Phys. Rev. Lett.*, **55**:15 (1985), 1634–1637. doi 10.1103/PhysRevLett.55.1634. MR 804582, ADS 1985PhRvL..55.1634O.

[220] G. Parisi, “Toward a mean field theory for spin glasses”, *Phys. Lett. A*, **73**:3 (1979), 203–205 doi 10.1016/0375-9601(79)90708-4, MR 591631, ADS 1979PhLA...73..203P.

[221] G. Parisi, “Infinite Number of Order Parameters for Spin-Glasses”, *Phys. Rev. Lett.*, **43** (1979), 1754–1756. doi 10.1103/PhysRevLett.43.1754. MR 0702601, ADS 1979PhRvL..43.1754P.

[222] G. Parisi, N. Sourlas, “Random Magnetic Fields, Supersymmetry, and Negative Dimensions”, *Phys. Rev. Lett.*, **43** (1979), 744–745 doi 10.1103/PhysRevLett.43.744, ADS 1979PhRvL..43..744P.

[223] G. Parisi, “Magnetic properties of spin glasses in a new mean field theory”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **13** (1980), 1887–1895 doi 10.1088/0305-4470/13/5/047, ADS 1980JPhA...13.1887P.

[224] G. Parisi, “A sequence of approximated solutions for the S-K model for spin glasses”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **13** (1980), L115–L121 doi 10.1088/0305-4470/13/4/009, ADS 1980JPhA...13L.115P.

[225] G. Parisi, “The order parameter for spin glasses: a function on the interval $0-1$”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **13** (1980), 1102–1112 ADS 1980JPhA...13.1101P.

[226] G. Parisi, “Order parameter for spin glasses”, *Phys. Rev. Lett.*, **50**:24 (1983), 1946–1948 doi 10.1103/PhysRevLett.50.1946, MR 702601, ADS 1983PhRvL..50.1946P.

[227] G. Parisi, “On $p$-adic functional integrals”, *Mod. Phys. Lett. A*, **4** (1988), 369–374 MR 939567.

[228] G. Parisi, N. Sourlas, “$p$-Adic numbers and replica symmetry breaking”, *Eur. Phys. J. B*, **14** (2000), 535–542. doi 10.1007/s100510051063, MR 1832689, ADS 2000EPJB...14..535P; arXiv: cond-mat/9906095 ADS 1999cond.mat..6095P.

[229] G. Parisi, *Complex Systems: a Physicist's Viewpoint*, arXiv: cond-mat/0205297.

[230] G. Parisi, *The physical Meaning of Replica Symmetry Breaking*, arXiv: cond-mat/0205387.

[231] G. Parisi, *Two spaces looking for geometer*, arXiv: cond-mat/0207334.

[232] R. Rammal, G. Toulouse, M. A. Virasoro, “Ultrametricity for physicists”, *Rev. Mod. Phys.*, **58** (1986), 765–821. doi 10.1103/RevModPhys.58.765. MR 854445, ADS 1986RvMP...58..765R.

[233] A. M. Robert, *A course in p-adic analysis*, Springer-Verlag, New York, 2000 MR 1760253.

[234] H. Schiessel, A. Blumen, “Hierarchical analogues to fractional relaxation equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**:19 (1993), 5057–5069 doi 10.1088/0305-4470/26/19/034, ADS 1993JPhA...26.5057S.

[235] W. H. Schikhoff, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984 MR 0791759.

[236] W. Schikhof, *Indag. Math. N. S.*, **6** (1995), 325–339 MR 1351151, Zbl 0837.46062.

[237] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Akademiai Kiado, Budapest, 1990 MR 1117682.

[238] J. P. Serre, *Trees*, Springer Verlag, New York–Berlin, 1980 MR 0607504.

[239] K. V. Shaitan, N. K. Balabaev, A. S. Lemak, et al., “Molecular Dynamics of Oligopeptides. 1: Using Long Trajectories and High Temperatures to Determine the Statistical Weight of Conformation Substates”, *Biofizika*, **42**:1 (1997), 47–53.

[240] K. V. Shaitan, M. D. Ermolaeva, N. K. Balabaev, et al., “Molecular Dynamics of Oligopeptides. 2: Correlation Functions of Internal Degrees of Freedom for Modified Dipeptides”, *Biofizika*, **42**:3 (1997), 558–566.

[241] K. V. Shaitan, M. D. Ermolaeva, S. S. Saraikin, “Molecular Dynamics of Oligopeptides. 3: Charts of Free Energy Levels of Modified Dipeptides and Dynamic Correlations in Amino Acid Residues”, *Biofizika*, **44**:1 (1999), 18–21.

[242] V. M. Shelkovich, M. A. Skopina, *p-Adic Haar multiresolution analysis*, arXiv: abs/0704.0736.

[243] D. Sherrington, “Landscape paradigms in physics and biology: Introduction and overview”, *Physica D*, **107** (1997), 117–121 doi 10.1016/S0167-2789(97)00076-6, MR 1491960, ADS 1997PhyD..107..117S.

[244] M. Sjöstrom, S. Wold, “A multivariate study of the relationship between the genetic code and the physical–chemical properties of amino acids”, *J. Molec. Evolut.*, **22** (1985), 272–277 doi 10.1007/BF02099756.

[245] F. H. Stillinger, “Relaxation behavior in atomic and molecular glasses”, *Phys. Rev. B*, **41** (1990), 2409–2416 doi 10.1103/PhysRevB.41.2409, ADS 1990PhRvB..41.2409S.

[246] F. H. Stillinger, T. A. Weber, “Hidden Structure in Liquids”, *Phys. Rev. A*, **25** (1982), 978–989 doi 10.1103/PhysRevA.25.978, ADS 1982PhRvA..25..978S.

[247] F. H. Stillinger, T. A. Weber, “Packing Structures and Transitions in Liquids and Solids”, *Science*, **225** (1984), 983–989 doi 10.1126/science.225.4666.983, ADS 1984Sci...225..983S.

[248] R. S. Strichartz, *Differential Equations on Fractals: A Tutorial*, Princeton University Press, 2006 MR 2246975, Zbl pre05058263.

[249] P.-A. Svensson, “Perturbed dynamical systems in $p$-adic fields”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 264–272 Mi tm192, MR 2099889, Zbl 1098.11060.

[250] R. Swanson, “A unifying concept for the amino acid code”, *Bull. Math. Biol.*, **46**:2 (1984), 187–203 MR 778255, Zbl 0536.92021.

[251] J. Tate, “Rigid analytic spaces”, *Invent. Math.*, **12** (1971), 257–289 doi 10.1007/BF01403307, MR 306196, Zbl 0212.25601, ADS 1971InMat..12..257T.

[252] L. Van Hamme, “The $p$-adic moment problem”, *$p$-Adic functional analysis*, eds. N. De Grande–De Kimpe, S. Navarro, W. Schikhof, Univ. Santiago, Santiago (Chile), 1994, 151–163.

[253] A. C. M. Van Rooij, *Non–Archimedean functional analysis*, Marcel Dekker, New York, 1978 MR 0512894.

[254] V. S. Varadarajan, “Non-Archimedean models for space–time”, *Mod. Phys. Lett. A*, **16** (2001), 387–395 doi 10.1142/S0217732301003486, MR 1832111, ADS 2001MPLA...16..387V.

[255] V. S. Varadarajan, “Arythmetic quantum physics: why, what, and whither”, Тр. МИАН, **245**, 2004, 273–280 Mi tm193, MR 2099890, Zbl 1098.11065.

[256] V. S. Vladimirov, “$p$-Adic analysis and $p$-adic quantum mechanics”, *Ann. of the NY Ac. Sci.: Symposium in Frontiers of Math.*, 1988.

[257] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, “$p$-Adic quantum mechanics”, *Comm. Math. Phys.*, **123** (1989), 659–676 doi 10.1007/BF01218590, MR 1006299, Zbl 0688.22004, ADS 1989CMaPh.123..659V.

[258] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, “$p$-Adic Schrödinger equation”, *Lett. Math. Phys.*, **18** (1989), 43–53 doi 10.1007/BF00397056, MR 1009522, Zbl 0702.35219, ADS 1989LMaPh..18...43V.

[259] V. S. Vladimirov, “On the Freund–Witten adelic formula for Veneziano amplitudes”, *Lett. Math. Phys.*, **27** (1993), 123–131 doi 10.1007/BF00750680, MR 1213611, Zbl 0779.11034, ADS 1993LMaPh..27..123V.

[260] V. S. Vladimirov, T. M. Sapuzhak, “Adelic formulas for string amplitudes in fields of algebraic numbers”, *Lett. Math. Phys.*, **37** (1996), 233–242 doi 10.1007/BF00416026, MR 1391205, Zbl 0852.11067, ADS 1996LMaPh..37..233V.

[261] V. S. Vladimirov, “Adelic formulas for gamma and beta functions in algebraic number fields”, *p-Adic functional analysis*, Lecture Notes Pure and Appl. Math., **192**, Marcel Dekker, New York, 1997, 383–395 MR 1459225, Zbl 0970.11041.

[262] I. V. Volovich, “$p$-Adic String”, *Classical Quantum Gravity*, **4** (1987), L83–L87 doi 10.1088/0264-9381/4/4/003, MR 895889, ADS 1987CQGra...4L..83V.

[263] I. V. Volovich, “Number theory as the ultimate physical theory”, *Preprint CERN-TH*, 87, 1987, 4781–4786.

[264] D. J. Wales, M. A. Miller, T. R. Walsh, “Archetypal Energy Landscapes”, *Nature*, **394** (1998), 758–760 doi 10.1038/29487, ADS 1998Natur.394..758W.

[265] D. J. Wales, “A Microscopic Basis for the Global Appearance of Energy Landscapes”, *Science*, **293** (2001), 2067–2070 doi 10.1126/science.1062565, ADS 2001Sci...293.2067W.

[266] J. D. Watson, T. A. Baker, S. P. Bell, A. Gann, M. Levine, R. Losick (eds.), *Molecular Biology of the Gene*, 5th edition, Benjamin Cummings, New York, 2003.

[267] P. G. Wolynes, J. Onuchic, D. Thirumalai, “Navigating the Folding Routes”, *Science*, **267** (1995), 1619–1620 doi 10.1126/science.7886447, ADS 1995Sci...267.1619W.

[268] K. Yasuda, “Additive processes on local fields”, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **3** (1996), 629–654 MR 1432111, Zbl 0876.60019.

[269] H. Yoshino, “Hierarchical diffusion, aging and multifractality”, *J. Phys. A*, **30** (1997), 1143 MR 1449271, ADS 1997JPhA...30.1143Y; arXiv: cond-mat/9604033 ADS 1996cond.mat..4033Y.

[270] A. V. Zabrodin, “Nonarchimedean strings and Bruhat–Tits trees”, *Comm. Math. Phys.*, **123** (1989), 463–483 doi 10.1007/BF01238811, MR 1003429, Zbl 0676.22006, ADS 1989CMaPh.123..463Z.

[271] E. I. Zelenov, “$p$-Adic path integrals”, *J. Math. Phys.*, **32**:12 (1991), 147–152 doi 10.1063/1.529137, MR 1083099, Zbl 0729.58057, ADS 1991JMP....32..147Z.

[272] E. I. Zelenov, “$p$-Adic Heisenberg group and Maslov index”, *Comm. Math. Phys.*, **155** (1993), 489–502 doi 10.1007/BF02096724, MR 1231639, Zbl 0794.22009, ADS 1993CMaPh.155..489Z.

[273] W. A. Zuniga–Galindo, “On the poles of Igusa’s local zeta function for algebraic sets”, *Bull. London Math. Soc.*, **36** (2004), 310–320 doi 10.1112/S0024609303002947, MR 2038719.

[274] *Proc. 2-nd Int. Conf. on p-Adic Mathematical Physics* (15–21 September 2005, Belgrade, Serbia and Montenegro), AIP Conference Proceedings, **826**, eds. A. Yu. Khrennikov, Z. Rakic, I. V. Volovich, Melville, New York, 2006.

[275] E. Wigner, “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13**:1 (1960), 1–14 doi 10.1002/cpa.3160130102, Zbl 0102.00703; I. M. Gelfand, “There is only one thing which is more unreasonable than the unreasonable effectiveness of mathematics in physics, and this is the unreasonable ineffectiveness of mathematics in biology”.

*Научное издание*

**Современные проблемы математики**

**Выпуск 12**

***Сергей Владимирович Козырев***

**Методы и приложения ультраметрического и $p$-адического анализа: от теории всплесков до биофизики**

Компьютерная верстка: *А. М. Малокостов*

Сдано в набор 06.11.2007. Подписано в печать 15.07.2008.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 10.625. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mi.ras.ru/spm/ e-mail: spm@mi.ras.ru