Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Современные проблемы математики

Выпуск 6

Издание выходит с 2003 года

С. П. Суетин

Сравнительная асимптотика решений и формулы следов для некоторого класса разностных уравнений

МИАН

Москва
2006

УДК 517.53+517.984+517.962
ББК (В)22.161.5
С89

С89 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). — М.: МИАН, 2006. Вып. 6: Сравнительная асимптотика решений и формулы следов для некоторого класса разностных уравнений / Суетин С. П. — 72 с.

ISBN 5-98419-015-X

Серия "Современные проблемы математики" — рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

ISBN 5-98419-015-X

Оглавление

§ 1. Введение

1. Пусть μ – положительная борелевская мера с компактным носителем $\operatorname{supp}\mu$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$,

$$\widehat{\mu}(\lambda) := \int \frac{d\mu(x)}{\lambda - x}, \quad \lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{supp}\mu, \tag{1}$$

– *марковская функция*, соответствующая мере μ. Всюду в дальнейшем мы будем считать меру μ единичной: $|\mu| = 1$. В [1] П. Л. Чебышёв с помощью классического алгоритма Евклида сопоставил функции $\widehat{\mu}$ *чебышевскую непрерывную дробь* (часто называемую теперь J-дробью):

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda - b_1 - f_1(\lambda)} = \cfrac{1}{\lambda - b_1 - \cfrac{a_1^2}{\lambda - b_2 - f_2(\lambda)}} \\ &\sim \cfrac{1}{\lambda - b_1 - \cfrac{a_1^2}{\lambda - b_2 - \cfrac{a_2^2}{\ddots}}},\end{aligned} \tag{2}$$

где все a_n, b_n – вещественны, $a_n \neq 0$ и

$$\sup_n |a_n| < \infty, \qquad \sup_n |b_n| < \infty.$$

Коэффициенты a_n и b_n строятся непосредственно по коэффициентам разложения функции $\widehat{\mu}$ в ряд Лорана в бесконечно удаленной точке $\lambda = \infty$

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{\lambda^{n+1}},$$

где

$$s_n = \int x^n d\mu(x), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-01027), INTAS (грант № 03-51-6637) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4466.2006.1).

– моменты меры μ. В дальнейшем будем считать, что все $a_n > 0$. Хорошо известно, что n-я подходящая дробь

$$\frac{P_n}{Q_n}(\lambda) := \cfrac{1}{\lambda - b_1 - \cfrac{a_1^2}{\lambda - b_2 - \cfrac{a_2^2}{\ddots \cfrac{}{\lambda - b_{n-1} - \cfrac{a_{n-1}^2}{\lambda - b_n}}}}}$$

к непрерывной дроби (2) обладает следующим *характеристическим свойством*

$$\frac{P_n}{Q_n}(\lambda) = \frac{s_0}{\lambda} + \frac{s_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{s_{2n-1}}{\lambda^{2n}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{2n+1}}\right), \quad \lambda \to \infty;$$

тем самым,

$$\widehat{\mu}(\lambda) - \frac{P_n}{Q_n}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^{2n+1}}\right), \quad \lambda \to \infty. \tag{3}$$

Многочлены Q_n имеют степень ровно n, *ортогональны* по мере μ

$$\int Q_n(\lambda)\lambda^k \, d\mu(\lambda) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

нормировкой $Q_n(\lambda) = \lambda^n + \cdots$ определены однозначно и удовлетворяют следующим трехчленным рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} &Q_n(\lambda) = (\lambda - b_n)Q_{n-1}(\lambda) - a_{n-1}^2 Q_{n-2}(\lambda), \\ &Q_0(\lambda) \equiv 1, \quad Q_1(\lambda) = \lambda - b_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Многочлены P_n, $\deg P_n = n - 1$, определяются непосредственно по Q_n:

$$P_n(\lambda) = \int \frac{Q_n(\lambda) - Q_n(x)}{\lambda - x} d\mu(x)$$

и называются *многочленами второго рода*, функция

$$R_n(\lambda) := \int \frac{Q_n(x)d\mu(x)}{\lambda - x}, \quad \lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{supp}\mu, \tag{5}$$

в теории ортогональных многочленов называется *функцией второго рода*. Все три функции Q_n, P_n и R_n связаны очевидным соотношением:

$$\big(Q_n\widehat{\mu} - P_n\big)(\lambda) = R_n(\lambda) \tag{6}$$

при этом (ср. с (3))

$$R_n(\lambda) = \frac{1}{Q_n(\lambda)} \int \frac{Q_n^2(x)d\mu(x)}{\lambda - x} = O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right), \quad \lambda \to \infty. \tag{7}$$

Все вышеуказанные соотношения[1] в достаточно ясной форме содержатся в [1] для случая общих ортогональных многочленов (см. также [2]). Другое дело, что работа [1] была написана Чебышёвым задолго до знаменитых работ Стилтьеса 1894–1895 гг. (см. [3], а также [2]), где впервые появился интеграл Стилтьеса, причем – тоже в связи с изучением непрерывных дробей. Поэтому в [1] Чебышёв имеет дело с функциями вида[2]

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\theta_j^2}{\lambda - x_j}, \qquad \lambda \neq x_j,$$

где $N < \infty$. Соответствующая непрерывная дробь (2) оказывается конечной, а ортогональные многочлены Q_k – заданными при $k = 0, 1, \ldots, N$. Но для справедливости соотношений типа (3)–(7) это не имеет значения. Самому Чебышёву была ясна общность полученных им в [1] результатов. Так, в [4], рассматривая функции вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\lambda - x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sqrt{\frac{k}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-kx^2}}{\lambda - x}dx, \quad k\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{\lambda - x}dx \tag{8}$$

при $k > 0$, он не повторял заново рассуждений [1], а пользовался уже сделанными там выводами. В связи с первой функцией (8) Чебышёв вывел явную формулу для классических многочленов Чебышёва, ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ по мере $d\mu(x) = \dfrac{1}{\pi}(1 - x^2)^{-1/2}\, dx$. В дальнейшем он доказал, что именно они дают решение задачи о многочлене с фиксированным старшим коэффициентом, наименее уклоняющемся от нуля в равномерной норме на $[-1, 1]$. В связи с разложением в непрерывную дробь второй и третьей функций (8) Чебышёв в 1860 году в [4] привел формулы и для двух других классических ортогональных

[1] А кроме них – формула Кристоффеля–Дарбу и полиномиальное воспроизводящее ядро Сегё.

[2] Подробнее см. приложение C.

многочленов, называемых теперь (см., например, [2], [5]) соответственно многочленами Чебышёва–Эрмита и Чебышёва–Лагерра:

$$
\left.\begin{aligned}
Q_n(x) &= \frac{(-1)^n}{(2k)^n} e^{kx^2} \frac{d^n e^{-kx^2}}{dx^n},\\
Q_n(x) &= \frac{(-1)^n}{k^n} \frac{d^n \left(x^n e^{-kx}\right)}{dx^n},
\end{aligned}\right.\qquad n = 1, 2, \dots .
$$

Отметим, что Эрмит рассмотрел многочлены, носящие его имя, только в 1864 году, а Лагерр – в 1879 году (см. [2]).

Тот факт, что исторически общие ортогональные многочлены впервые возникли в [1] непосредственно в связи с теорией непрерывных дробей отмечен и в монографии Сегё [6, гл. III, п. 3.5, с. 66].

2. Пусть $q_n(\lambda) = k_n \lambda^n + \cdots$, $k_n > 0$, – соответствующие мере μ *ортонормированные* многочлены:

$$
\int q_n(x) q_k(x)\, d\mu(x) = \delta_{nk}.
$$

Для них справедливо равенство $q_n(\lambda) = Q_n(\lambda)/(a_1 \dots a_n)$ и выполняется следующее трехчленное рекуррентное соотношение:

$$
a_n q_n(\lambda) = (\lambda - b_n) q_{n-1}(\lambda) - a_{n-1} q_{n-2}(\lambda), \quad n = 2, 3, \dots, \tag{9}
$$

где

$$
q_0(\lambda) \equiv 1, \quad a_1 q_1(\lambda) = \lambda - b_1, \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int \lambda q_{n-1}(\lambda) q_n(\lambda)\, d\mu(\lambda) = \frac{k_{n-1}}{k_n},\\
b_n &= \int \lambda q_{n-1}^2(\lambda)\, d\mu(\lambda).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Известно, что и наоборот, если некоторая последовательность многочленов $\{q_n(\lambda)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяет соотношениям (9)–(10) с вещественными ограниченными коэффициентами b_n и a_n, $a_n > 0$, то в соответствии с теоремой Фавара (см., например, [6]–[7]) эти многочлены ортонормированы относительно некоторой положительной борелевской меры μ на $\mathbb{R}$. Если же, кроме того, коэффициенты a_n и b_n имеют пределы, точнее

$$
a_n \to \frac{1}{2}, \quad b_n \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty, \tag{12}
$$

то в соответствии с теоремой Блюменталя (см., например, [7]–[8]) носитель меры μ состоит из отрезка $\Delta = [-1, 1]$ и не более, чем счетного множества точек на $\mathbb{R}\setminus\Delta$, которые могут накапливаться лишь к концам этого отрезка.

Для дальнейшего использования соотношений (9)–(10) удобно переписать их в следующем виде:

$$\begin{gathered} a_0 q_{-1}(\lambda) + b_1 q_0(\lambda) + a_1 q_1(\lambda) = \lambda q_0(\lambda), \\ a_{n-1} q_{n-2}(\lambda) + b_n q_{n-1}(\lambda) + a_n q_n(\lambda) = \lambda q_{n-1}(\lambda), \end{gathered} \tag{13}$$

где $n = 2, 3 \dots$, $a_0 = 1$, $q_{-1}(\lambda) \equiv 0$, $q_0(\lambda) \equiv 1$. Для соответствующих ортонормированным многочленам $q_n(\lambda)$ многочленов второго рода $p_n(\lambda)$ и функций второго рода $r_n(\lambda)$ имеем:

$$\begin{aligned} p_n(\lambda) &:= \int \frac{q_n(\lambda) - q_n(x)}{\lambda - x} d\mu(x), \\ r_n(\lambda) &:= \int \frac{q_n(x) d\mu(x)}{\lambda - x} = \frac{1}{q_n(\lambda)} \int \frac{q_n^2(x) d\mu(x)}{\lambda - x}. \end{aligned} \tag{14}$$

Тем самым (см. (6)–(7))

$$r_n(\lambda) = \big(q_n \widehat{\mu} - p_n\big)(\lambda) = \frac{1}{k_n \lambda^{n+1}} + \cdots, \quad \lambda \to \infty. \tag{15}$$

Функции $p_n(\lambda)$ и $r_n(\lambda)$ также удовлетворяют рекуррентным соотношениям (13), но с другими начальными условиями:

$$p_{-1}(\lambda) \equiv -1, \quad p_0(\lambda) \equiv 0, \quad r_{-1}(\lambda) \equiv 1, \quad r_0(\lambda) = \widehat{\mu}(\lambda).$$

Хорошо известно, что с теми же последовательностями $\{b_n\}$ и $\{a_n\}$, $a_n > 0$, можно связать ограниченный самосопряженный оператор в пространстве $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Точнее, пусть $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{\infty}$ – стандартный базис в $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Определим оператор Якоби $J : \ell^2 \to \ell^2$ на этом базисе следующим образом:

$$\begin{aligned} &J\mathbf{e}_1 = b_1 \mathbf{e}_1 + a_1 \mathbf{e}_2, \\ &J\mathbf{e}_n = a_{n-1}\mathbf{e}_{n-1} + b_n \mathbf{e}_n + a_n \mathbf{e}_{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots . \end{aligned} \tag{16}$$

Оператору J соответствует бесконечная трехдиагональная матрица Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ a_1 & b_2 & a_2 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots} & a_{n-1} & b_n & a_n & \dots \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{bmatrix}.$$

Пусть E_λ – спектральное разложение оператора J. Тогда $\mu(\lambda) := \langle E_\lambda \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle$ – неотрицательная неубывающая функция на $\mathbb{R}$, $d\mu(\lambda)$ – спектральная мера J. Функция $m(\lambda) := \big\langle (J-\lambda)^{-1}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\big\rangle$ называется *функцией Вейля* оператора J. Используя спектральную теорему, получаем для $m(\lambda)$ следующее представление:

$$m(\lambda) = \int \frac{d\mu(x)}{x-\lambda} = -\widehat{\mu}(\lambda), \quad \lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \sigma(J),$$

где $\sigma(J) = \operatorname{supp}\mu$ – спектр J. Пусть теперь $q_n(\lambda)$, $n = 0, 1, \dots,$ – последовательность многочленов, определенная рекуррентными соотношениями (13). Нетрудно увидеть, что $\mathbf{e}_n = q_{n-1}(J)\mathbf{e}_1$. Следовательно, в соответствии со спектральной теоремой, имеем:

$$\begin{aligned} \delta_{kj} &= \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j\rangle = \langle q_{k-1}(J)\mathbf{e}_1, q_{j-1}(J)\mathbf{e}_1\rangle = \langle q_{j-1}(J) q_{k-1}(J)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle \\ &= \int q_{k-1}(\lambda) q_{j-1}(\lambda)\, d\mu(\lambda). \end{aligned}$$

Тем самым, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ – последовательность полиномов, ортонормированных относительно спектральной меры $d\mu(\lambda)$.

Предположим теперь, что выполнены условия теоремы Блюменталя, т.е.

$$a_n \to \frac{1}{2}, \quad b_n \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Тогда $J = J_0 + A$, где

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

а A – компактный оператор в ℓ^2. Тем самым, J – компактное возмущение оператора J_0. Для оператора J_0 спектр $\sigma(J_0) = [-1, 1]$, а соответствующая спектральная мера $d\mu_0 = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\, dx$. В таком случае, непосредственно из теоремы Вейля о компактном возмущении оператора вытекает, что спектр J состоит из отрезка Δ и не более чем счетного множества точек на $\mathbb{R} \setminus \Delta$, которые могут накапливаться лишь к концам этого отрезка.

Вышеуказанная связь между теорией ортогональных многочленов и теорией операторов Якоби[3] давно и хорошо известна,

[3] В [7], [12]–[13] такой оператор называется дискретным оператором Штурма–Лиувилля.

см. [7]–[12]. Осознание этой связи в значительной степени стимулировало исследования и привело к новым интересным результатам как в той, так и в другой теории (см. прежде всего [7]–[16], где имеются дальнейшие ссылки). Однако как правило исследования шли в направлении "от дискретных операторов к ортогональным многочленам": с помощью общих методов теории операторов устанавливались определенные свойства оператора Якоби, порожденного рекуррентными соотношениями (16), а отсюда уже выводились те или иные асимптотические свойства ортогональных многочленов. В настоящей работе мы идем "от ортогональных многочленов к дискретным операторам" и в таком подходе *следуем Е.М.Никишину* [7], который предложил для исследования асимптотических свойств решений разностного аналога уравнения Штурма–Лиувилля использовать методы, развитые в теории ортогональных многочленов, теории непрерывных дробей и аппроксимаций Паде. В [7] он ограничился только классическим случаем (12). В дальнейшем такой подход успешно применялся им и его учениками [12]–[14] и в более общей ситуации.

3. Рассмотрим следующую систему трехчленных рекуррентных соотношений – разностный аналог уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси (см., например, [7], [11]):

$$\begin{array}{c} a_0y_0 + b_1y_1 + a_1y_2 = \lambda y_1, \\ a_1y_1 + b_2y_2 + a_2y_3 = \lambda y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1}y_{n-1} + b_ny_n + a_ny_{n+1} = \lambda y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{17}$$

где $a_0 = 1$, все a_n, b_n – вещественны, $a_n > 0$ и $\sup\limits_n a_n < \infty$, $\sup\limits_n |b_n| < \infty$ (выбор $a_0 = 1$ соответствует нормировке меры μ как единичной). Из сказанного выше вытекает, что $y_n(\lambda) = q_{n-1}(\lambda)$ – решение системы (17) с начальными условиями $y_0(\lambda) \equiv 0$, $y_1(\lambda) \equiv 1$, $y_n(\lambda) = p_{n-1}(\lambda)$ – решение (17) с начальными условиями $y_0(\lambda) \equiv -1$, $y_1(\lambda) \equiv 0$, наконец, $y_n(\lambda) = r_{n-1}(\lambda)$ – решение с начальными условиями $y_0(\lambda) \equiv 1$, $y_1(\lambda) = \widehat{\mu}(\lambda)$.

Положим $\lambda = \frac{1}{2}(z + 1/z)$, где $z \in \mathbb{D}$, $\mathbb{D} : |z| < 1$. Семейство $\{u_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $z \in \mathbb{D}$, называется *решением Йоста* для (17) (см. прежде всего [9]), если при каждом $z \in \mathbb{D}$ таком, что $\lambda = \frac{1}{2}(z + 1/z) \notin \sigma(J)$, последовательность $\{u_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ является решением системы (17) и имеет место следующее асимптотическое соотношение:

$$z^{-n}u_n(z) \to 1 \quad \text{при } n \to \infty,\ z \in \mathbb{D};$$

функция $u_0(z)$, $z \in \mathbb{D}$, называется *функцией Йоста*. В [9] было установлено, что если решение Йоста существует, то асимптотика ортогональных многочленов $q_n(\lambda)$ выражается явно в терминах функции Йоста $u_0(z)$ ([9], формулы (IV.8), (IV.17′)). Позднее в [10] было доказано, что решение Йоста существует при условии суммируемости первого момента

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\left|a_n - \frac{1}{2}\right| + |b_n|\right) < \infty. \tag{18}$$

Если условие (18) не выполняется, то решение Йоста может и не существовать. В [15] по аналогии с непрерывным случаем вместо решения Йоста было предложено рассматривать *решение Вейля* $\{w_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ системы (17):

$$w_n(z) = \left\langle \mathbf{e}_n, (\lambda - J)^{-1}\mathbf{e}_1 \right\rangle, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \notin \sigma(J), \quad z \in \mathbb{D},$$

а $w_0(z) \equiv 1$. Если решение Йоста существует, то между ним и решением Вейля имеется следующая легко устанавливаемая связь. Обозначим $v_n(z) := z^{-n}w_n(z)$. Тогда существует

$$v_\infty(z) = \lim_{n\to\infty} z^{-n}w_n(z) \neq 0 \text{ при } z \in \mathbb{D}\setminus\mathbb{R} \tag{20}$$

и $v_\infty(z) = 1/u_0(z)$, где $u_0(z)$ – функция Йоста. Ввиду такой связи асимптотику типа (20) в [15] было предложено называть *асимптотикой Йоста*. Этой терминологии мы будем придерживаться и в настоящей работе.

Так как $w_0(z) \equiv 1$, $w_1(z) = \widehat{\mu}(\lambda)$ и $\{w_n(z)\}$ – решение системы (17), то $w_n(z) = r_{n-1}(\lambda)$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, имеем: $w_n(z) = (q_{n-1}\widehat{\mu} - p_{n-1})(\lambda) = c_n(\lambda) - m(\lambda)s_n(\lambda)$, где c_n и s_n – решения (17) соответственно типа косинуса и синуса, а $m(\lambda)$ – функция Вейля. Отметим, что используемое здесь определение решения Вейля несколько отличается от стандартного (см., например, [17], где имеются дальнейшие ссылки).

Под *сильной* (или *типа Сегё*) асимптотикой для ортогональных многочленов $q_n(\lambda)$ при $\lambda \notin \sigma(J)$ будем понимать следующее. При $n \to \infty$ существует отличный от нуля предел произведения $c_n(z) := z^n q_n(\lambda)$:

$$\lim_{n\to\infty} c_n(z) = c_\infty(z) \neq 0, \qquad z \in \mathbb{D}, \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \notin \sigma(J).$$

Один из полученных в [15] в этом направлении результатов состоит в том, что при самых общих предположениях (12) на коэффициенты a_n и b_n оператора J существование сильной асимптотики для ортогональных многочленов оказывается *эквивалентным* существованию асимптотики Йоста для решения Вейля. Точнее, справедлива следующая

Теорема. (см. [15], теорема 2.2) *Пусть J – матрица Якоби, для коэффициентов a_n и b_n которой имеем: $a_n \to 1/2$, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Если $z \in \mathbb{D}$ таково, что $\lambda = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ не является собственным значением J, то существование предела $v_\infty(z) \neq 0$ для последовательности $v_n(z)$ эквивалентно существованию предела $c_\infty(z) \neq 0$ для последовательности $c_n(z)$. При этом величины $v_\infty(z)$ и $c_\infty(z)$ связаны соотношением:*

$$c_\infty(z) v_\infty(z) = \frac{1}{1 - z^2}. \tag{21}$$

В силу сказанного непосредственно из (21) вытекает следующая формула *сравнительной асимптотики* для $\{q_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{r_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$q_n(\lambda) r_n(\lambda) \to \frac{z}{1 - z^2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}, \qquad z \in \mathbb{D}, \quad \lambda \notin \sigma(J). \tag{22}$$

Таким образом, при самых общих предположениях (12) относительно оператора J асимптотические свойства двух фундаментальных решений системы (17) оказываются тесно связанными. Отметим, что правая часть (22) не зависит от J, а тем самым – и от спектральной меры μ.

Подчеркнем однако, что все приведенные выше результаты относятся к случаю, когда выполняется условие (12), т.е. параметры

a_n и b_n *имеют пределы.* При этом условии для носителя спектральной меры (т.е. меры ортогональности) μ имеем: $\operatorname{ess\,supp}\mu = [-1,1]$. Таким образом, условием (12) круг рассматриваемых вопросов заранее сужается ограничением $\operatorname{ess\,supp}\mu = [-1,1]$, накладываемым явно или неявно на класс изучаемых на полуоси операторов Якоби. Ситуация, когда в $\operatorname{ess\,supp}\mu$ имеется хотя бы одна *лакуна*, имеет принципиальные отличия от классического случая "возмущения на постоянном фоне", задаваемого условием (12), и требует иных методов исследования. Подчеркнем, что речь идет о достаточно общей ситуации, вообще говоря, отличной от случая "возмущения на периодическом фоне".

В настоящей работе рассматривается класс операторов Якоби, *порождаемых борелевской мерой* μ с носителем на $\mathbb{R}$, состоящим из *конечного числа отрезков*. При этом предполагается, что мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет специальный вид (см. ниже § 2, п. 1), на сами же отрезки не накладывается никаких условий, в частности, они могут находиться "в общем положении". *Цель настоящей работы* – при достаточно общих условиях на меру μ получить формулу *сравнительной асимптотики* двух фундаментальных решений соответствующего этой мере разностного уравнения (17): многочленов, ортогональных относительно μ, и решения Вейля, а также – *асимптотические формулы следов* для коэффициентов a_n и b_n такого уравнения. Подчеркнем еще раз, что в своем подходе мы следуем Е.М.Никишину [7], который предложил для исследования асимптотических свойств решений дискретного аналога оператора Штурма–Лиувилля использовать методы, развитые в теории ортогональных многочленов и теории аппроксимаций Паде. Отметим, что речь идет об операторе Якоби, рассматриваемом на *полуоси*, т.е. в пространстве $\ell^2(\mathbb{N})$. Пространство $\ell^2(\mathbb{Z})$ мы здесь не рассматриваем, поэтому и не обсуждаем полученных для этого случая (в том числе и в [7]) результатов.

Тот факт, что асимптотические свойства двух независимых решений разностного уравнения (17) оказываются тесно связанными и в более общей ситуации, чем задано условиями (12), давно и хорошо известен. Наиболее очевидный пример этому дает классическая *теорема Маркова* (см. [2], [6, гл. III, п. 3.5], [18]) о сходимости чебышевских непрерывных дробей для функций вида (1), в которой фактически утверждается следующее. Пусть $\{y_n^{(1)}(\lambda)\}$ – решение системы (17) с начальными данными $(0,1)$, а $\{y_n^{(2)}(\lambda)\}$

– решение этой системы с начальными данными $(-1, 0)$. Тогда (ср. [16], формула (4.2))

$$\frac{y^{(2)}(\lambda)}{y^{(1)}(\lambda)} \to \widehat{\mu}(\lambda) \quad \textit{равномерно внутри } \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Delta,$$

Δ – выпуклая оболочка $\operatorname{supp} \mu$. Другой пример – результат А. А. Гончара [20] также о сходимости чебышевских непрерывных дробей, но – с *комплексными* коэффициентами $a_n \neq 0$ и b_n. Этот результат допускает следующую интерпретацию в рамках теории разностного оператора (17) с комплексными коэффициентами $a_n \neq 0$ и b_n. Обозначим как и выше $\{y_n^{(1)}(\lambda)\}$ – решение системы (17) с начальными данными $(0, 1)$, а $\{y_n^{(2)}(\lambda)\}$ – решение этой системы с начальными данными $(-1, 0)$. Пусть $K_1 \Subset \mathbb{C}$ – множество всех предельных точек нулей функций $y_n^{(1)}(\lambda)$, $\widehat{K_1}$ – его выпуклая оболочка. Тогда множество K_2 предельных точек нулей функций $y_n^{(2)}(\lambda)$ устроено следующим образом: вне компакта $\widehat{K_1}$ оно может иметь лишь изолированные точки. При этом

$$\frac{y^{(2)}(\lambda)}{y^{(1)}(\lambda)} \to \widehat{\mu}(\lambda) \quad \textit{равномерно внутри } \widehat{\mathbb{C}} \setminus \widehat{K_1}.$$

Теорема Маркова является очевидным следствием этого результата Гончара.

Отметим, что $r_{n-1}(\lambda)$ является “*минимальным*” решением (17) в следующем смысле. Если $y_n(\lambda)$ – любое другое решение (17), линейно независимое с $r_{n-1}(\lambda)$, то $r_{n-1}(\lambda)/y_n(\lambda) \to 0$ при $n \to \infty$ и $\lambda \notin \sigma(J)$.

4. Прежде чем формулировать основные результаты настоящей работы, сделаем некоторые предварительные пояснения.

Пусть $\{w_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность функций, определенных соотношениями (19). Используя равенства $\mathbf{e}_{n+1} = q_n(J)\mathbf{e}_1$, (14) и спектральную теорему получаем следующее представление для $w_{n+1}(z)$ при $\lambda = \frac{1}{2}(z + 1/z)$, $\lambda \notin \sigma(J) = \operatorname{supp} \mu$ и $n = 0, 1, \ldots$:

$$\begin{aligned} w_{n+1}(z) &= \left\langle \mathbf{e}_{n+1}, (\lambda - J)^{-1}\mathbf{e}_1 \right\rangle = \left\langle q_n(J)\mathbf{e}_1, (\lambda - J)^{-1}\mathbf{e}_1 \right\rangle \\ &= \left\langle q_n(J)(\lambda - J)^{-1}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \right\rangle = \int \frac{q_n(x)}{\lambda - x} d\mu(x) = r_n(\lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность функций $w_n(z)$, определенная (19) и начальным условием $w_0(z) \equiv 1$, совпадает с последовательностью функций второго рода $r_{n-1}(\lambda)$, если положить $r_{-1}(\lambda) \equiv 1$. Тем самым, доказано, что последовательность $\{w_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ – решение системы (17). Отметим, что для вронскиана двух решений (17) $r_n(\lambda)$ и $q_n(\lambda)$ имеем: $W_n(q,r) = a_n(q_n r_{n-1} - r_n q_{n-1}) = 1$.

Как было отмечено выше, при условиях (12) справедлива формула сравнительной асимптотики для двух независимых решений $\{q_{n-1}(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ и $\{r_{n-1}(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ разностного уравнения (17):

$$q_n(\lambda) r_n(\lambda) \to \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \quad \text{при } n \to \infty, \text{ где } \lambda \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \sigma(J). \tag{23}$$

В [21] Е. А. Рахмановым было, в частности, установлено, что соотношение (23) имеет место для мер μ таких, что $\operatorname{supp}\mu = [-1,1]$ и $\mu' > 0$ почти всюду на $[-1,1]$. А. А. Гончар в [18] доказал, что (23) остается справедливым, если к такой мере добавить конечное число точечных масс, расположенных вне отрезка $[-1,1]$. Аналог теоремы Гончара оказывается справедлив [19] и для случая, когда в $\operatorname{ess\,supp}\mu$ имеется конечное число *лакун* (α_j, β_j), $j = 1, 2, \dots, g$, т.е. носитель меры μ состоит из $\operatorname{ess\,supp}\mu = [-1,1] \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{g} (\alpha_j, \beta_j)$ и конечного числа точек на $\mathbb{R}$, расположенных вне отрезка $[-1,1]$. Основная цель настоящей работы – получить аналог формулы (23) для случая, когда носитель меры μ *состоит из нескольких отрезков*.

Настоящая работа является фактически продолжением работ [22] и [23], § 7, результаты которых относились прежде всего к теории сходимости аппроксимаций Паде и были основаны на формулах *сильной асимптотики* для ортогональных многочленов $Q_n(\lambda)$ и функций второго рода $R_n(\lambda)$, рассматриваемых и изучаемых в этих работах соответственно как *знаменатели* диагональных аппроксимаций Паде P_n/Q_n марковской функции $\widehat{\mu}$ и *функции остатка* (см. (6)). Как хорошо известно, в g лакунах (α_j, β_j) между отрезками носителя меры μ могут располагаться $\leqslant g$ нулей ортогональных многочленов Q_n (иначе говоря, "ложных" полюсов диагональных аппроксимаций Паде, подробнее об этом понятии см. [24], где имеются дальнейшие ссылки), которые в "общем положении" всюду плотны в этих лакунах (см. [22], [23]). В [22] было показано, что этот же результат имеет место и для нулей R_n, т.е. для *дополнительных точек интерполяции* марковской функции $\widehat{\mu}$ диагональными аппроксимациями Паде P_n/Q_n. Точнее, в [22] было установлено, что по заданному набору отрезков, составляющих $\operatorname{ess\,supp}\mu$, некоторым естественным образом определяется нелинейная система из g дифференциальных уравнений относительно непрерывного переменного t, аналогичная известной системе Дубровина. Эта система интегрируется преобразованием Абеля, ее решение задается квазипериодической функцией от непрерывного переменного t со значениями в g-мерном вещественном торе. Оказывается, что динамика этого решения на торе после подстановки вместо непрерывного переменного $t \in \mathbb{R}$ дискретного переменного $n \in \mathbb{N}$ полностью определяет как динамику нулей Q_n, так и нулей R_n, оказавшихся в лакунах между отрезками. При этом "начальные данные" для решения однозначно определяются мерой μ, а роль периодов ω_j в описании квазипериодичности решения выполняют взятые в бесконечно удаленной точке гармонические меры $\omega_j(\infty)$, $j = 1, 2, \dots, g+1$, отрезков, составляющих $\operatorname{ess\,supp}\mu$. Отсюда уже, поскольку в общем положении гармонические меры $\omega_j(\infty)$ рационально независимы, и вытекали упомянутые выше утверждения о том, что как нули Q_n, так и нули R_n всюду плотны в лакунах между отрезками. Однако как [22], так и [23] были посвящены в первую очередь изучению сходимости диагональных аппроксимаций Паде, которое фактически сводится к исследованию асимптотического поведения их полюсов, т.е. нулей ортогональных полиномов Q_n. Для вывода в интересующем нас случае нескольких отрезков аналога формулы (23) сравнительной асимптотики ортогональных многочленов и функций второго рода нам придется проводить полное исследование асимптотики их нулей, причем – одновременно, т.е. при одних и тех же значениях индекса $n \in \mathbb{N}$ (ср. [22], теоремы 1 и 3). Вывод соответствующих асимптотических формул проводится по следующей ставшей уже стандартной схеме (см. [22]–[27]). Сначала при произвольном $n \in \mathbb{N}$ в "явном виде" строится решение специальной краевой задачи Римана на двулистной гиперэллиптической римановой поверхности; это решение мы будем в дальнейшем называть Ψ-функцией.[4] Затем выводится (обобщенное) сингулярное интегральное уравнение Наттолла (см. [28], где это уравнение получено впервые для классического случая одного отрезка), связывающее при каждом $n \in \mathbb{N}$ между собой Ψ-функцию,

[4]Разумеется эта функция зависит от n; подробнее см. ниже.

ортогональные многочлены Q_n и функцию остатка R_n (см. (35)–(36)). Из определения и явного представления Ψ-функции вытекает, что она обладает специальными свойствами. На этом и основываются дальнейшие рассуждения.

Настоящая работа устроена следующим образом. Во втором параграфе формулируются основные результаты работы. Третий параграф посвящен доказательству теоремы 1, четвертый – доказательству теоремы 2. В приложении A приводятся некоторые стандартные сведения о гиперэллиптических римановых поверхностях, используемые в работе. В приложении B выводится явное представление Ψ-функции в терминах абелевых дифференциалов. В приложении C кратко излагается содержание работы Чебышёва [1], в которой он впервые ввел общие ортогональные многочлены.

Автор выражает благодарность И. Е. Егоровой за полезные обсуждения.

§ 2. Формулировка основных результатов

1. Теперь нам будет удобно ввести некоторые новые обозначения. Будем считать, что носитель меры μ состоит из непересекающихся отрезков $\Delta_j=[e_{2j-1},e_{2j}]$, $j=1,\dots,g+1$, расположенных на вещественной прямой $\mathbb{R}$, $g\geqslant 1$, $e_1<\dots<e_{2g+2}$. Меру μ будем считать абсолютно непрерывной относительно меры Лебега на $S:=\bigsqcup_{j=1}^{g+1}\Delta_j$, $S=\operatorname{supp}\mu$, и такой, что

$$\frac{d\mu}{dx}=\frac{1}{\pi}\frac{\rho(x)}{\sqrt{-h(x)}}>0 \quad \text{на } S, \tag{24}$$

где $h(\lambda)=\prod\limits_{j=1}^{2g+2}(\lambda-e_j)$, причем в области $D=\widehat{\mathbb{C}}\setminus S$ выбрана та ветвь квадратного корня, которая положительна при положительных значениях аргумента. Тем самым, $\sqrt{-h(x)}>0$ при $x\in[e_{2g+1},e_{2g+2}]$, на остальных отрезках значение корня определяется аналитическим продолжением. Весовая функция ρ предполагается *голоморфной и отличной от нуля на* S. Тем самым,

$$\widehat{\mu}(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_S\frac{1}{\lambda-x}\frac{\rho(x)\,dx}{\sqrt{-h(x)}},\quad \lambda\notin\operatorname{supp}\mu. \tag{25}$$

Через $\omega_k(\lambda)=\omega(\lambda;\Delta_k,D)$, $k=1,\dots,g+1$, будем обозначать гармоническую меру (в точке $\lambda\in D$) отрезка Δ_k относительно области D, $g(\lambda,\infty)=g_D(\lambda,\infty)$ – функция Грина области $D=\widehat{\mathbb{C}}\setminus S$ с особенностью в бесконечно удаленной точке $\lambda=\infty$.

Пусть $\mathfrak{R}$ – гиперэллиптическая риманова поверхность рода g, заданная уравнением $w^2=h(\lambda)$. Будем считать, что $\mathfrak{R}$ реализована как двулистное разветвленное в точках $\{e_j\}$ накрытие римановой сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ таким образом, что переход с одного листа на другой осуществляется по верхнему Δ_j^+ и нижнему Δ_j^- берегам отрезков Δ_j. Тем самым, над каждой точкой $\widehat{\mathbb{C}}$ за исключением точек ветвления $\{e_j\}$ лежат ровно две точки римановой поверхности, а каждому отрезку Δ_j соответствует на $\mathfrak{R}$ замкнутая аналитическая (в комплексной структуре $\mathfrak{R}$) кривая $\mathbf{\Gamma}_j$, $j=1,\dots,g{+}1$, – цикл на $\mathfrak{R}$; положим $\mathbf{\Gamma}=\bigcup_{j=1}^{g+1}\mathbf{\Gamma}_j$. Выбранная в $D=\widehat{\mathbb{C}}\setminus S$ ветвь квадратного корня удовлетворяет условию $\sqrt{h(\lambda)}/\lambda^{g+1}\to 1$ при $\lambda\to\infty$. Функция $w:w^2=h(\lambda)$ однозначна на $\mathfrak{R}$. Первым (открытым) листом $D^{(1)}$ поверхности $\mathfrak{R}$ будем считать тот, на котором $w=\sqrt{h(\lambda)}$. На втором листе $D^{(2)}$ имеем: $w=-\sqrt{h(\lambda)}$. Для точек римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем использовать обозначение $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda,w)$, где $w=\pm\sqrt{h(\lambda)}$; при этом для точек первого листа $\lambda^{(1)}=(\lambda,\sqrt{h(\lambda)})$, а для точек второго $\lambda^{(2)}=(\lambda,-\sqrt{h(\lambda)})$. Вместо $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda,\pm\sqrt{h(\lambda)})$ иногда будем писать коротко $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda,\pm)$. Область $D^{(1)}$ будем как правило отождествлять с “физической” областью D. Для $\boldsymbol{\lambda}=\lambda^{(1)}$ будем часто писать просто $w(\lambda)$ вместо $w(\boldsymbol{\lambda})$; тем самым, приобретает смысл и запись $w^{\pm}(x)=\sqrt{h(x\pm i0)}$, $x\in S$. Каноническая проекция $\mathrm{pr}\,:\mathfrak{R}\to\widehat{\mathbb{C}}$ определяется соотношением $\mathrm{pr}\,\boldsymbol{\lambda}=\lambda$, в частности $\mathrm{pr}\,D^{(1)}=\mathrm{pr}\,D^{(2)}=D$, $\mathrm{pr}\,\mathbf{\Gamma}=S$. Замкнутые циклы на $\mathfrak{R}$, соответствующие замкнутым лакунам $[e_{2j},e_{2j+1}]$, $j=1,\dots,g$, будем обозначать через $\mathbf{L}_j$. Тем самым, $\mathrm{pr}\,\mathbf{L}_j=[e_{2j},e_{2j+1}]$.

Другие стандартные сведения о гиперэллиптических римановых поверхностях, которые нам здесь понадобятся, приведены в приложении A.

2. Рассмотрим следующую систему из g дифференциальных уравнений относительно (неупорядоченного) набора g точек $\boldsymbol{\lambda}_1(t),\dots,\boldsymbol{\lambda}_g(t)$ на $\mathfrak{R}$, $t\in\mathbb{R}$ (или, эквивалентно, относительно дивизора $d(t)=\boldsymbol{\lambda}_1(t)+\dots+\boldsymbol{\lambda}_g(t)$ на $S^g\mathfrak{R}$):

$$\frac{d\lambda_j}{dt}=-\frac{w(\boldsymbol{\lambda}_j)}{\prod_{k\neq j}(\lambda_j-\lambda_k)} \times\int_{e_{2g+2}}^{+\infty}\frac{\prod_{k\neq j}(x-\lambda_k)}{w(x)}dx,\quad j=1,2,\dots,g. \tag{26}$$

Как показано в [22], теорема 2 (см. также п. 6 приложения B) если все $\lambda_j(0) = \mathrm{pr}\,\boldsymbol{\lambda}_j(0) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, $j = 1, \dots, g$, то система (26) интегрируется в явном виде преобразованием Абеля, ее решение задается квазипериодической функцией непрерывного переменного t с группой периодов $\omega_1(\infty), \dots, \omega_g(\infty)$ и со значениями в g-мерном вещественном торе. Тем самым, все $\boldsymbol{\lambda}_j(t) \in \mathbf{L}_j$, $j = 1, \dots, g$, при $t > 0$. Следовательно, все $\lambda_j(t) = \mathrm{pr}\,\boldsymbol{\lambda}_j(t) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, $j = 1, \dots, g$, при $t > 0$. Отметим, что система (26) приводит к системе уравнений Видома–Рахманова [29], [30]

$$\sum_{j=1}^{g} \varepsilon_j \omega_k(\lambda_j) = (g - 2t)\omega_k(\infty) - \frac{2}{\pi} \int_S \log|\rho(\zeta)| \frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n_\zeta^+}\, d\zeta \pmod 2,$$
$$k = 1, \dots, g,$$

описывающих движение дивизора $d(t) = \boldsymbol{\lambda}_1(t) + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g(t)$ на торе $\mathbf{L}_1 \times \dots \times \mathbf{L}_g$, где $\varepsilon_j = \pm 1$ в зависимости от $\boldsymbol{\lambda}_j = (\lambda_j, \pm)$. Учитывая геометрический смысл гармонической меры (см. ниже п. 7 приложения B), эти последние уравнения естественно трактовать следующим образом: дивизор $d(t) = \boldsymbol{\lambda}_1(t) + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g(t)$, удовлетворяющий системе (26), движется с постоянной “угловой” скоростью (подробнее см. п. 6 приложения B).

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *При условии* (24) *для* $\lambda \notin \operatorname{supp} \mu$ *имеем*:

$$q_n(\lambda) r_n(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{g} \bigl(\lambda - \lambda_j(n)\bigr)}{\sqrt{h(\lambda)}} + o(\delta^n) \text{ при } n \to \infty, \tag{27}$$

где $\delta \in (0, 1)$ *зависит от* ρ, *величины* $\lambda_1(n), \dots, \lambda_g(n)$ *соответствуют решению* $\boldsymbol{\lambda}_1(t), \dots, \boldsymbol{\lambda}_g(t)$ *системы* (26), *взятому при* $t = n \in \mathbb{N}$; *начальные условия* $\boldsymbol{\lambda}_1(0), \dots, \boldsymbol{\lambda}_g(0)$ *определяются мерой* μ, *при этом*, $\lambda_j(0) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$ *для всех* $j = 1, \dots, g$.

Доказательство теоремы 1 основано на стандартной технике [22], [23] исследования асимптотических свойств многочленов, ортогональных на нескольких отрезках, и состоит в сведении задачи об асимптотике к исследованию свойств Ψ-функции и свойств решения специального сингулярного интегрального уравнения Наттолла. Эти же свойства лежат в основе доказательства следующего результата.

Теорема 2. *При условии* (24) *справедливы следующие асимптотические формулы следов для коэффициентов* b_n *и* a_n *разностного уравнения* (17):

$$b_n = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2g+2} e_j - \sum_{j=1}^{g} \lambda_j(n-1) + o(\delta^n), \quad n\to\infty, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} a_n = \operatorname{cap} S \cdot \exp\biggl\{ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g} g(\boldsymbol{\lambda}_j(n),\infty) \\ - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g} g(\boldsymbol{\lambda}_j(n-1),\infty)\biggr\}\bigl(1+o(\delta^n)\bigr),\ n\to\infty, \end{aligned} \tag{29}$$

где $\delta\in(0,1)$ *зависит от* ρ.

Здесь $g(\boldsymbol{\lambda},\infty)$ – однозначное продолжение функции Грина $g_D(\lambda,\infty)$ области D на всю риманову поверхность $\mathfrak{R}$.

Отметим, что асимптотическая формула (29) вытекает непосредственно из результатов Видома [30], § 6, теорема 6.2 и § 9, теорема 9.1, но с $o(1)$ вместо $o(\delta^n)$ как в (29).

Теорема 1 может быть эквивалентным образом переформулирована в терминах функции Грина $G(\lambda,n,m) := \bigl\langle \mathbf{e}_n, (\lambda-J)^{-1}\mathbf{e}_m\bigr\rangle$ оператора J. Точнее, пусть $G(\lambda,n,n)$ – диагональная функция Грина оператора J. Из спектральной теоремы вытекает, что $G(\lambda,n+1,n+1) = q_n(\lambda)r_n(\lambda)$. Следовательно, соотношение (27) принимает вид:

$$G(\lambda,n+1,n+1) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{g}\bigl(\lambda-\lambda_j(n)\bigr)}{\sqrt{h(\lambda)}} + o(\delta^n) \text{ при } n\to\infty.$$

3. Зафиксируем произвольное $n\in\mathbb{N}$ и рассмотрим на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ следующую краевую задачу Римана.

Задача ($\mathscr{R}$). *При фиксированном* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant g$, *найти функцию* $\Psi=\Psi_n$ *такую, что*:

1° Ψ (*кусочно*) *мероморфна на* $\mathfrak{R}\setminus\boldsymbol{\Gamma} = D^{(1)}\sqcup D^{(2)}$;
2° *дивизор* $(\Psi) = (n-g)\infty^{(2)} + \boldsymbol{\lambda}_1+\dots+\boldsymbol{\lambda}_g - n\infty^{(1)}$;
3° *на* $\boldsymbol{\Gamma}$ *выполнено краевое условие*: $\rho(x)\Psi^+(\mathbf{x}) = \Psi^-(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\boldsymbol{\Gamma}$.

В п. 2° точки $\boldsymbol{\lambda}_j$ – “свободные” нули Ψ-функции – зависят от n, под $\Psi^+(\mathbf{x})$ в п. 3° понимаются предельные значения функции

$\Psi(\boldsymbol{\lambda})$ при $D^{(1)} \ni \boldsymbol{\lambda} \to \mathbf{x} \in \boldsymbol{\Gamma}$, аналогичный смысл придается и $\Psi^{-}(\mathbf{x})$. Так как вес ρ – марковский (см. (24)), то $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbf{L}_j$, т.е. в каждой лакуне $L_j = [e_{2j}, e_{2j+1}]$ лежит ровно по одной точке λ_j. При этом допускается, чтобы какая-нибудь из точек $\boldsymbol{\lambda}_j \in \boldsymbol{\Gamma}$, т.е. совпадала бы с концом лакуны: $\boldsymbol{\lambda}_j = e_{2j}$ или $\boldsymbol{\lambda}_j = e_{2j+1}$. В таком случае эта точка считается как нулем Ψ^+, так и нулем Ψ^-. Как будет видно ниже, благодаря тому, что функция ρ голоморфна на $\boldsymbol{\Gamma}$, в такой ситуации сохраняются все основные свойства Ψ-функции, в том числе – представление (30)–(33) (см. ниже).

Функция Ψ, решающая задачу ($\mathscr{R}$), всегда существует, при этом так как род g поверхности $\mathfrak{R}$ положителен, то нули и полюсы Ψ на $\mathfrak{R}$ оказываются связанными определенными соотношениями, аналогичными соотношениям Абеля для мероморфной функции на $\mathfrak{R}$, а дивизор $d = \boldsymbol{\lambda}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_g$ является решением проблемы обращения Якоби. Анализ данных этой проблемы показывает, что при оговоренном выше условии (24) на вес ρ ее решение всегда таково, что $\lambda_j = \operatorname{pr} \boldsymbol{\lambda}_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, т.е. в каждой замкнутой лакуне L_j между отрезками $\Delta_1, \dots, \Delta_{g+1}$ лежит ровно по одной точке $\operatorname{pr} \boldsymbol{\lambda}_j$. Значит, дивизор $d = \boldsymbol{\lambda}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_g$ неспециальный, а следовательно, такая проблема обращения Якоби имеет единственной решение. Отсюда вытекает, что Ψ-функция, решающая задачу ($\mathscr{R}$), единственна с точностью до нормировки и имеет в бесконечно удаленной точке $\boldsymbol{\lambda} = \infty^{(1)}$ полюс в точности n-го порядка. При этом оказывается (подробнее см. § 3, п. 4 ниже), что равномерно внутри области $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \widehat{S}$, где $\widehat{S}$ – выпуклая оболочка S, справедлива асимптотическая формула

$$Q_n(\lambda) = \Psi(\lambda^{(1)})\bigl(1 + o(1)\bigr), \quad n \to \infty;$$

здесь полиномы Q_n нормированы так: *старший коэффициент* Q_n *равен старшему* (т.е. при λ^n) *коэффициенту* Ψ*-функции.* Такой нормировки Q_n мы будем придерживаться всюду в дальнейшем.

Нетрудно видеть, что для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ выполняется соотношение $\Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)}) \equiv \mathrm{const} \prod\limits_{j=1}^{g} (\lambda - \lambda_j)$, где $\mathrm{const} \neq 0$. В дальнейшем мы будем придерживаться следующей нормировки[5] Ψ-

[5] Таким условием Ψ-функция определяется однозначно с точностью до знака $\pm$, выбор знака мы уточним в дальнейшем.

функции:

$$\Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^{g}(\lambda-\lambda_j).$$

Нетрудно найти и явный вид этой функции. При $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{R}\setminus\boldsymbol{\Gamma}$ и в предположении, что $\lambda_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$ имеем:

$$\Psi(\boldsymbol{\lambda}) = \Phi(\boldsymbol{\lambda})^{n-g} e^{A(\boldsymbol{\lambda};\rho)}\mathscr{F}_n(\boldsymbol{\lambda}). \tag{30}$$

Здесь $\Phi(\boldsymbol{\lambda}) = e^{G(\boldsymbol{\lambda},\infty)}$ – (многозначная) отображающая функция, $G(\lambda,\infty) = g(\lambda,\infty) + ig^*(\lambda,\infty)$ – комплексная функция Грина области D,

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{\lambda};\rho) = w(\boldsymbol{\lambda})\biggl[\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\log\rho(x)}{x-\lambda}\frac{dx}{w^+(x)} + \frac{1}{2}c_{g+1} \\ + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{g} v_k\int_{\Delta_k}\frac{1}{x-\lambda}\frac{dx}{w^+(x)}\biggr], \end{aligned} \tag{31}$$

$v_k = 2\int\limits_S \log\rho(x)\,d\Omega_k^+(x)$ (при $g=0$ $\exp\{A(\lambda^{(1)};\rho)\}$ – функция Сегё). Функция

$$\mathscr{F}_n(\boldsymbol{\lambda}) = \exp\biggl[\sum_{j=1}^{g}\Omega(\boldsymbol{\lambda}_j,\infty^{(1)};\boldsymbol{\lambda}) + 2\pi i\sum_{k=1}^{g}\theta_k\Omega_k(\boldsymbol{\lambda})\biggr], \tag{32}$$

величины[6] $\theta_k = \theta_k(n) = \ell_k(n) + \{(n-g)\omega_k(\infty)\}$, целые числа $\ell_k(n) \in \mathbb{Z}$ равномерно ограничены при $n\to\infty$, а дивизор $d = \boldsymbol{\lambda}_1 + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g$, где $\boldsymbol{\lambda}_j = \boldsymbol{\lambda}_j(n)$, является (единственным) решением проблемы обращения Якоби

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{g}\Omega_k(\boldsymbol{\lambda}_j) \equiv \frac{i}{\pi}\int_S \log\rho(x)\,d\Omega_k^+(x) \\ - \sum_{j=1}^{g}\{(n-g+\tfrac{1}{2})\omega_j(\infty)\}B_{kj}, \quad k=1,\dots,g. \end{aligned} \tag{33}$$

В (31) величина $c_{g+1} = c_{g+1}(n)$, $e^{c_{g+1}} = \prod\limits_{j=1}^{g}(e_{2g+2}-\lambda_j)$. Отметим, что равномерно ограниченные целые числа $\ell_k(n)$, $k=1,\dots,g$,

[6] Здесь и в (33) $\{\,\cdot\,\}$ обозначает дробную часть соответствующего числа.

возникают в (32) в связи с неоднозначностью абелевых интегралов $\Omega_k(\boldsymbol{\lambda})$ для $\boldsymbol{\lambda} \in \partial\widetilde{\mathfrak{R}}$ при интегрировании по путям, лежащим в $\widetilde{\mathfrak{R}}$, $\widetilde{\mathfrak{R}}$ – рассеченная риманова поверхность $\mathfrak{R}$ (подробнее см. приложения A и B). Полином $X_g(\lambda) := \prod\limits_{j=1}^{g}(\lambda - \lambda_j)$ является фактически неизвестным "полиномиальным параметром" задачи ($\mathscr{R}$).

Так как функция ρ голоморфна и отлична от нуля на S, то правая часть представления (30) имеет смысл как голоморфная функция и при $\boldsymbol{\lambda} \in D^{(1)} \sqcup \boldsymbol{\Gamma}$ для дивизора $d = \boldsymbol{\lambda}_1 + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g$, удовлетворяющего условиям (33). Тем самым, под функцией $\Psi(\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} \in D^{(1)} \sqcup \boldsymbol{\Gamma}$, естественно понимать правую часть представления (30). Аналогичное справедливо и для функции $\Psi(\boldsymbol{\lambda})$ при $\boldsymbol{\lambda} \in D^{(2)} \sqcup \boldsymbol{\Gamma}$. На $\boldsymbol{\Gamma}$ эти два голоморфных продолжения не совпадают: для них выполняется краевое условие 3°, где, вообще говоря, функция $\rho \not\equiv 1$.

Вывод явных формул (30)–(33) для Ψ-функции дан в приложении B.

§ 3. Доказательство теоремы 1

1. В этом пункте мы выведем стандартным образом [22]–[27] *сингулярное интегральное уравнение Наттолла* (ср. с [28], где подобное уравнение получено несколько иным методом для классического случая $g = 0$ и $S = [-1, 1]$) для некоторой функции, мероморфной на $\mathfrak{R} \setminus \boldsymbol{\Gamma}$ и связанной с функциями Ψ, R_n и Q_n (см. ниже формулу (35)), и покажем, что асимптотика свободных нулей R_n и блуждающих нулей Q_n (т.е. ложных полюсов диагональных аппроксимаций Паде P_n/Q_n) полностью определяется асимптотическим при $n \to \infty$ поведением точек $\boldsymbol{\lambda}_1(n), \dots, \boldsymbol{\lambda}_g(n)$, удовлетворяющих проблеме обращения Якоби (33), а асимптотика самих функций R_n и Q_n – асимптотическим поведением функции $\Psi(\boldsymbol{\lambda})$ (которая, напомним, зависит от n).

Непосредственно из определения (5) функции остатка R_n и представления (25) получаем, что

$$R_n^+(x) - R_n^-(x) = \frac{2Q_n(x)\rho(x)}{w^+(x)}, \quad x \in S \setminus \{e_1, \dots, e_{2g+2}\}. \tag{34}$$

Определим кусочно мероморфную на $\mathfrak{R} \setminus \boldsymbol{\Gamma}$ функцию $F(\boldsymbol{\lambda})$ следующим образом:

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = \Psi(\boldsymbol{\lambda}) \cdot \begin{cases} R_n(\lambda)w(\lambda), & \boldsymbol{\lambda} \in D^{(1)}, \\ 2Q_n(\lambda), & \boldsymbol{\lambda} \in D^{(2)}, \end{cases} \tag{35}$$

где функция $\Psi(\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{R} \setminus \boldsymbol{\Gamma}$, определена в (30)–(33). Функция F имеет полюсы только в точках $\infty^{(1)}, \infty^{(2)}$, каждый порядка g, а из (34) вытекает, что для скачка F на $\boldsymbol{\Gamma}$ имеем:

$$F^{+}(\mathbf{x}) - F^{-}(\mathbf{x}) = V^{-}(\mathbf{x})\frac{1}{\rho(x)}, \qquad \mathbf{x} \in \boldsymbol{\Gamma},$$

где функция $V(\boldsymbol{\lambda}) = -\Psi(\boldsymbol{\lambda})R_n(\lambda)w(\lambda) = \Psi(\boldsymbol{\lambda})R_n(\lambda)w(\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} \in D^{(2)}$, мероморфна на втором листе. Действительно, положим $\Psi_1(\lambda) = \Psi(\lambda^{(1)})$, $\Psi_2(\lambda) = \Psi(\lambda^{(2)})$, $\lambda \in D$. Из краевого условия 3° задачи $(\mathscr{R})$ вытекает, что $\rho(x)\Psi_1^{\pm}(x) = \Psi_2^{\mp}(x)$ при $x \in S$. Умножим обе части (34) на $w^{+}(x)\Psi_1^{+}(x)$ и пользуясь последним краевым условием преобразуем (34) к виду:

$$\begin{aligned} R_n^{+}(x)w^{+}(x)\Psi_1^{+}(x) + \frac{1}{\rho(x)}R_n^{-}(x)w^{-}(x)\Psi_2^{-}(x)& \\ = 2Q_n(x)\Psi_2^{-}(x), \qquad x \in S.& \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(x)}R_n^{+}(x)w^{+}(x)\Psi_2^{+}(x) + R_n^{-}(x)w^{-}(x)\Psi_1^{-}(x)& \\ = 2Q_n(x)\Psi_2^{+}(x), \qquad x \in S.& \end{aligned}$$

В совокупности эти соотношения и дают нужные краевые условия для функции $F(\boldsymbol{\lambda})$, заданной равенством (35).

Интегральная формула типа Коши (A.11) для F принимает следующий вид:

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{\Gamma}^{+}} V^{-}(\boldsymbol{\zeta})\frac{1}{\rho(\zeta)}d\Omega(\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{\lambda}) + p_n(\lambda), \quad \boldsymbol{\lambda} \notin \boldsymbol{\Gamma},\ \deg p_n \leqslant g, \tag{36}$$

где дифференциал $d\Omega(\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{\lambda})$ определен (A.10). Рассмотрим эту формулу для $\boldsymbol{\lambda} \in D^{(1)}$. Так как функция $\rho(\zeta)$ голоморфна на каждой связной компоненте Δ_j компакта S, то $\rho(\zeta)$ голоморфна на каждой кривой $\boldsymbol{\Gamma}_j$. Поэтому контур $\boldsymbol{\Gamma}$ можно не меняя значения интеграла (36) покомпонентно продеформировать в близкий контур $\Gamma^{(2)}$, также состоящий из $(g+1)$-й компоненты и целиком расположенный на втором листе $D^{(2)}$ в некоторой окрестности $\mathbf{\Gamma}$, в которой голоморфна и отлична от нуля функция $\rho(\zeta)$ (напомним, что функция $V(\boldsymbol{\zeta})$ определена и голоморфна на всем втором листе $D^{(2)}$). Полученная интегральная формула задает голоморфное продолжение функции $F(\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda}\in D^{(1)}$, через контур $\mathbf{\Gamma}$ на второй лист римановой поверхности вплоть до контура $\Gamma^{(2)}$ (отметим, что для $\boldsymbol{\lambda}\in D^{(2)}$ это продолжение не совпадает с функцией $F(\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda}\in D^{(2)}$, определенной (35)). Таким образом, получаем для $\lambda\in D$:

$$F(\lambda^{(1)})=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{(2)}}V(\zeta^{(2)})\frac{1}{\rho(\zeta)}d\Omega(\zeta^{(2)};\lambda^{(1)})+p_n(\lambda).$$

Непосредственно из определения функций $F(\boldsymbol{\lambda})$ и $V(\boldsymbol{\lambda})=V(\lambda^{(2)})$ и с учетом тождества $\Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)})=X_g(\lambda)$, для $\boldsymbol{\lambda}\in D^{(2)}$ имеем:

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{\lambda})&=V(\lambda^{(2)})=R_n(\zeta)w(\zeta^{(2)})\Psi(\zeta^{(2)})\\&=-R_n(\zeta)w(\zeta^{(1)})\Psi(\zeta^{(1)})\frac{\Psi(\zeta^{(2)})}{\Psi(\zeta^{(1)})}\\&=-\Psi(\zeta^{(1)})R_n(\zeta)w(\zeta^{(1)})\frac{\Psi(\zeta^{(1)})\Psi(\zeta^{(2)})}{\Psi(\zeta^{(1)})^2}=-F(\zeta^{(1)})\frac{X_g(\zeta)}{\Psi(\zeta^{(1)})^2}.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что операция инволюции $\boldsymbol{\lambda}^*=(\lambda,\mp w)$ при $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda,\pm w)$ обладает следующим свойством: $d\Omega(\boldsymbol{\zeta}^*,\boldsymbol{\lambda})=d\Omega(\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\lambda}^*)$. Следовательно, $d\Omega(\zeta^{(2)},\lambda^{(1)})=d\Omega(\zeta^{(1)},\lambda^{(2)})$ и с учетом сохранения относительно области $D^{(1)}$ ориентации кривых интегрирования, интегральное представление для $F_1(\lambda):=F(\lambda^{(1)})=\Psi(\lambda^{(1)})R_n(\lambda)w(\lambda^{(1)})$ и $\lambda\in D$ преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned}F_1(\lambda)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^{(1)}}F(\zeta^{(1)})\frac{X_g(\zeta)}{\Psi(\zeta^{(1)})^2}\frac{1}{\rho(\zeta)}d\Omega(\zeta^{(1)};\lambda^{(2)})+p_n(\lambda)\\&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{\Gamma}^+}F^+(\zeta^{(1)})\frac{X_g(\zeta)}{\left[\Psi^+(\zeta^{(1)})\right]^2}\frac{1}{\rho(\zeta)}d\Omega^+(\zeta^{(1)};\lambda^{(2)})+p_n(\lambda).\end{aligned}\tag{37}$$

Аналогично, для $F_2(\lambda):=F(\lambda^{(2)})=2\Psi(\lambda^{(2)})Q_n(\lambda)$ при $\lambda\in D$ имеем:

$$F_2(\lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{\Gamma}^+}F^+(\zeta^{(1)})\frac{X_g(\zeta)}{\left[\Psi^+(\zeta^{(1)})\right]^2}\frac{1}{\rho(\zeta)}d\Omega^+(\zeta^{(1)};\lambda^{(1)})+p_n(\lambda)\tag{38}$$

(ср. (37)–(38) с формулой (3.9) из [28], где рассмотрен классический случай $g = 0$, $S = [-1, 1]$). Подчеркнем, что эти представления справедливы в общем случае – при любом расположении точек $\boldsymbol{\lambda}_j$ на $\mathfrak{R}$. Действительно, при $\boldsymbol{\lambda}_j \neq e_{2j}, e_{2j+1}$ функции, стоящие под знаком интеграла в (37)–(38), голоморфны на $\boldsymbol{\Gamma}_j$ и $\boldsymbol{\Gamma}_{j+1}$ так как функция Ψ не обращается в нуль на этих компонентах $\boldsymbol{\Gamma}$. Если же $\boldsymbol{\lambda}_j$ совпадает с концом лакуны, то двукратный нуль в знаменателе, происходящий от функции Ψ^2, компенсируется нулем функции $F(\boldsymbol{\lambda})$ на $\boldsymbol{\Gamma}$ в точке $\boldsymbol{\lambda}_j$ и нулем полинома $X_g(\lambda)$.

Формулы (37)–(38) лежат в основе наших последующих рассуждений. Поясним, какого рода информацию мы собираемся из них извлечь. Предположим, например, что по некоторой подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ имеем: $\lambda_j(n) \Subset (e_{2j}, e_{2j+1})$ при $n \to \infty$, $j = 1, \dots, g$. Тогда из (37) мы получим, что для $n \in \Lambda$ асимптотики функции $F_1(\lambda) := F(\lambda^{(1)})$ и полинома p_n в области D совпадают. Функция $F_1(\lambda)$ имеет в D нули в тех точках λ_j, для которых $\boldsymbol{\lambda}_j = \lambda_j^{(1)}$. Следовательно, полином p_n обращается в нуль в близких точках. Аналогичный результат вытекает из (38) для полинома p_n и функции $F_2(\lambda) := F(\lambda^{(2)})$. Из определения функций F_1 и F_2 вытекает, что их нули, порожденные нулями $\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_g$ функции Ψ, различны между собой. Следовательно, для достаточно больших $n \in \Lambda$ полином p_n, степень которого $\leqslant g$, имеет ровно g нулей в D. Тем самым, $\deg p_n = g$ и при должной нормировке асимптотика p_n совпадает с асимптотикой полинома $\prod\limits_{j=1}^{g} (\lambda - \lambda_j(n))$. Отсюда уже вытекает асимптотика оставшихся нулей функций F_1 и F_2 в D. Но их нулями в D, отличными от точек λ_j, могут быть только нули R_n и Q_n соответственно. Тем самым,

$$Q_n(\lambda) R_n(\lambda) = \varkappa_n^2 \left(\frac{\prod_{j=1}^{g} \bigl(\lambda - \lambda_j(n)\bigr)}{\sqrt{h(\lambda)}} + o(1) \right) \text{ при } n \to \infty,\ n \in \Lambda.$$

Следовательно,

$$q_n(\lambda) r_n(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{g} \bigl(\lambda - \lambda_j(n)\bigr)}{\sqrt{h(\lambda)}} + o(1) \text{ при } n \to \infty,\ n \in \Lambda.$$

2. Изложим теперь приведенные выше соображения более формально и в полной общности, не ограничиваясь каким-либо частным случаем в поведении точек $\lambda_j(n)$. Подчеркнем, что цель наших исследований – доказать, что асимптотическое поведение $\boldsymbol{\lambda}_j(n)$ как нулей функции Ψ *полностью определяет* асимптотическое поведение других возможных нулей функции $F(\boldsymbol{\lambda})$, которыми как следует из (35) могут быть лишь нули функции остатка R_n или ортогонального полинома Q_n.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$
\begin{aligned}
&D(\varepsilon) = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} : g(\lambda, \infty) > \varepsilon\},\\
&S(\varepsilon) = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} : g(\lambda, \infty) < \varepsilon\} \text{ – окрестность компакта } S,\\
&\Gamma(\varepsilon) = \partial D(\varepsilon) = \{\lambda \in \widehat{\mathbb{C}} : g(\lambda, \infty) = \varepsilon\},\\
&D(0) = D, \qquad S(0) = S.
\end{aligned}
$$

Так как $\rho \neq 0$ и голоморфна на S, то $\rho \neq 0$ и голоморфна в $S(\varepsilon_0)$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$. В дальнейшем мы рассматриваем только $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и некоторую последовательность $\{\varepsilon_n\}$ такую, что $\varepsilon_n \in (\varepsilon/3, 2\varepsilon/3)$ и

$$
\begin{aligned}
\max_{\lambda \in \Gamma(\varepsilon_n)} |p_n(\lambda)| &= O\Big(\min_{\lambda \in \Gamma(\varepsilon_n)} |p_n(\lambda)|\Big),\\
\max_{\lambda \in \Gamma(\varepsilon_n)} |X_g(\lambda)| &= O\Big(\min_{\lambda \in \Gamma(\varepsilon_n)} |X_g(\lambda)|\Big)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

при $n \to \infty$; тем самым, $X_g(\lambda) = \prod_{j=1}^{g} (\lambda - \lambda_j) \neq 0$ и $p_n(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \Gamma(\varepsilon_n)$. Так как функция $F_1(\lambda) := F(\lambda^{(1)})$ голоморфна в $D \setminus \{\infty\}$ и дифференциал $d\Omega(\zeta^{(1)}; \lambda^{(2)})$ не имеет особенности при $\lambda, \zeta \in D$ (см. (A.12)), то в (37) для $\lambda \in D$ мы можем заменить контур интегрирования $\boldsymbol{\Gamma} \subset \mathfrak{R}$ на контур $\Gamma^{(1)}(\varepsilon_n)$:

$$
F_1(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(1)}(\varepsilon_n)} F_1(\zeta) \frac{X_g(\zeta)}{\Psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; \lambda^{(2)}) + p_n(\lambda),
\tag{40}
$$

а формула (40) будет справедлива и для $\lambda \in \Gamma(\varepsilon_n) = \partial D(\varepsilon_n)$. В таком случае учитывая найденное ранее представление для функции Ψ и выбор величин ε_n (см. (39)), получаем, что равномерно по $\lambda \in \Gamma(\varepsilon_n)$ выполняется следующее соотношение

$$
\big|F_1(\lambda) - p_n(\lambda)\big| = o(1) \cdot \max_{\zeta \in \Gamma(\varepsilon_n)} \big|F_1(\zeta)\big| = o(1) \cdot M_n,
\tag{41}
$$

где $M_n = \max\limits_{\zeta\in\Gamma(\varepsilon_n)} \bigl|F_1(\zeta)\bigr|$, $o(1) = O(\delta^n)$, $\delta = \delta_n = e^{-2\varepsilon_n} < e^{-2\varepsilon/3} < 1$. Нетрудно видеть, что из (41) вытекает соотношение

$$m_n := \max_{\lambda\in\Gamma(\varepsilon_n)} |p_n(\lambda)| = M_n \cdot (1+o(1)).$$

Тем самым из (41) с учетом (39) получаем

$$\begin{aligned}\bigl|F_1(\lambda) - p_n(\lambda)\bigr| &= o(1)\cdot m_n \\ &= o(1) \min_{\lambda\in\Gamma(\varepsilon_n)} |p_n(\lambda)| < |p_n(\lambda)|, \quad \lambda\in\Gamma(\varepsilon_n).\end{aligned}$$

Отметим, что непосредственно отсюда по теореме Руше уже вытекает, что для функций F_1 и p_n разность числа их нулей и полюсов в области $D(\varepsilon_n)$ одинакова. Пусть теперь $t = 3\varepsilon/4 > \varepsilon_n$,

$$m_n(t) = \max_{\lambda\in\Gamma(t)} |p_n(\lambda)|, \qquad M_n(t) = \max_{\lambda\in\Gamma(t)} \bigl|F_1(\lambda)\bigr|.$$

Так как p_n – полином степени $\leqslant g$, то $m_n \leqslant m_n(t)$. Аналитическая функция $\bigl(F_1(\lambda) - p_n(\lambda)\bigr)/\Phi^g(\lambda)$ многозначна в D, но имеет однозначный модуль (здесь и далее $\Phi(\lambda) = e^{G(\lambda,\infty)}$ – отображающая функция). Поэтому к ней применим принцип максимума модуля. Следовательно,

$$\begin{aligned}\max_{\lambda\in\Gamma(t)} \left|\frac{F_1(\lambda)-p_n(\lambda)}{\Phi^g(\lambda)}\right| &\leqslant \max_{\lambda\in\Gamma(\varepsilon_n)} \left|\frac{F_1(\lambda)-p_n(\lambda)}{\Phi^g(\lambda)}\right| \\ &= O(1) \max_{\lambda\in\Gamma(\varepsilon_n)} |F_1(\lambda) - p_n(\lambda)|.\end{aligned}$$

Тем самым

$$\max_{\lambda\in\Gamma(t)} \bigl|F_1(\lambda) - p_n(\lambda)\bigr| = o(1)\cdot m_n = o(1)\cdot m_n(t). \tag{42}$$

Отсюда легко вытекает, что $M_n(t) = m_n(t)\cdot(1+o(1))$.

Заменим теперь в (38) для $F_2(\lambda) := F(\lambda^{(2)})$ контур интегрирования $\boldsymbol{\Gamma} \subset \mathfrak{R}$ на контур $\Gamma(\varepsilon_n) \subset D$ и рассмотрим эту формулу для $\lambda\in\Gamma(t)$ (напомним, что $t = 3\varepsilon/4 > 2\varepsilon/3 > \varepsilon_n$):

$$\begin{aligned}F_2(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\varepsilon_n)} &F_1(\zeta)\frac{X_g(\zeta)}{\Psi(\zeta^{(1)})^2} \\ &\times \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)};\lambda^{(1)}) + p_n(\lambda), \quad \lambda\in\Gamma(t).\end{aligned}$$

Тогда, учитывая выбор параметра t и полученные выше соотношения между M_n, m_n. $M_n(t)$ и $m_n(t)$, имеем

$$\max_{\lambda\in\Gamma(t)}\bigl|F_2(\lambda)-p_n(\lambda)\bigr| = o(1)\cdot M_n = o(1)\cdot m_n = o(1)\cdot m_n(t). \quad (43)$$

Введем теперь временно *новую нормировку*: положим $m_n(t)=1$ и сохраним прежние обозначения для остальных величин. Тогда из (41) и (43) для многозначных аналитических в D функций $F_1(\lambda)/\Phi^g(\lambda)$, $F_2(\lambda)/\Phi^g(\lambda)$ и $p_n(\lambda)/\Phi^g(\lambda)$, имеющих в D однозначные модули, получаем

$$\left|\frac{F_1(\lambda)}{\Phi^g(\lambda)}-\frac{p_n(\lambda)}{\Phi^g(\lambda)}\right| = o(1) \quad \text{равномерно по } \lambda\in\overline{D_t}, \quad (44)$$

$$\left|\frac{F_2(\lambda)}{\Phi^g(\lambda)}-\frac{p_n(\lambda)}{\Phi^g(\lambda)}\right| = o(1) \quad \text{равномерно по } \lambda\in\overline{D_t} \quad (45)$$

(предполагается, что в левых частях (44) и (45) выбирается одна и та же ветвь многозначной функции Φ). Рассмотрим последовательность функций $\{p_n/\Phi^g\}$. По принципу максимума модуля для аналитических функций с однозначным модулем имеем: $|p_n(\lambda)/\Phi^g(\lambda)|\leqslant e^{-tg}$ при $\lambda\in\overline{D_t}$ равномерно по n (здесь мы учли новую нормировку $m_n(t)=1$). С другой стороны, применяя принцип максимума модуля к полиномам p_n в области $S(\tau)$ при произвольном $\tau>t$, получаем: $\max\limits_{\lambda\in\Gamma(\tau)}|p_n(\lambda)|>m_n(t)=1$. Тем самым, функция, тождественно равная нулю, не является предельной точкой последовательности $\{p_n/\Phi^g\}$ (в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах области D_t). Следовательно, если мы применим к последовательностям функций F_1/Φ^g, F_2/Φ^g и p_n/Φ^g теорему Гурвица, то в силу соотношений (44) и (45) получим, что асимптотическое поведение нулей этих функций, расположенных в области D_t, одинаково. Так как $|\Phi(\lambda)|\neq 0$ в D и любая однозначная в окрестности точки $\lambda=\infty$ ветвь Φ имеет полюс первого порядка в точке $\lambda=\infty$, то значит асимптотическое поведение нулей и полюсов функций F_1, F_2 и p_n, расположенных в области D_t, также одинаково. Поскольку $\deg p_n\leqslant g$, то отсюда, в частности, сразу следует, что функции F_1 и F_2 *имеют в* D_t *не более, чем по* g *нулей.*

Сделаем теперь дальнейшие выводы из того, что функции F_1 и F_2 имеют асимптотически одинаковое поведение нулей в D_t. Из явного вида (35) функции $F(\boldsymbol{\lambda})$ вытекает, что возможные нули функции F_1 – это или точки λ_j при $\boldsymbol{\lambda}_j = \lambda_j^{(1)}$, или нули функции остатка R_n, а возможные нули функции F_2 – это или точки λ_j при $\boldsymbol{\lambda}_j = \lambda_j^{(2)}$, или нули полинома Q_n. В силу доказанного, и те, и другие точки порождают асимптотически близкие к ним нули полинома p_n. Если общее число асимптотически различных нулей функций F_1 и F_2 равно g, то значит имеется ровно g близких к ним нулей полинома p_n. Так как $\deg p_n \leqslant g$, то получаем полное асимптотическое описание полинома p_n, $\deg p_n = g$, в терминах нулей F_1 и F_2.

Предположим теперь, что для некоторой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ имеем: все $\lambda_j(n) \Subset (e_{2j}, e_{2j+1})$, $j = 1, \dots, g$, $n \in \Lambda$. Так как $t = 3\varepsilon/4$, а $\varepsilon > 0$ произвольно, то для достаточно малого ε все $\lambda_j \in D_t$ и попарно различны между собой. Те точки λ_j, для которых $\boldsymbol{\lambda}_j = \lambda_j^{(1)}$, являются нулями F_1 и в силу доказанного "притягивают" нули p_n. Остальные λ_j, $\boldsymbol{\lambda}_j = \lambda_j^{(2)}$, – это нули F_2, которые также "притягивают" нули p_n. Так как все точки $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ различны между собой и число их равно g, то мы получили полное описание всех нулей p_n. Точнее, $\deg p_n = g$ для всех достаточно больших $n \in \Lambda$ и $\alpha_n^{-1} p_n(\lambda) = X_g(\lambda) + o(1)$, $n \in \Lambda$, $n \to \infty$, где α_n – старший коэффициент p_n.

Наконец, рассмотрим случай, когда для некоторого $k \in \{1, \dots, g\}$ точка $\lambda_k(n)$ стремится к концу лакуны: $\lambda_k(n) \to e_{2k}$ или $\lambda_k(n) \to e_{2k+1}$ при $n \to \infty$. Покажем, что и в этом случае $\deg p_n = g$ для достаточно больших n и нули p_n "притягиваются" точками $\lambda_1, \dots, \lambda_g$. Выберем как и выше в представлении (40) для функции $F_1(\lambda)$ в качестве $\Gamma^{(1)}$ кривую $\Gamma^{(1)}(\varepsilon) = \{\lambda : g(\lambda, \infty) = \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, и запишем это представление для $\lambda \in D$ в следующем виде (см. (40)):

$$F_1(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(1)}(\varepsilon)} F_1(\zeta) \frac{X_g(\zeta)}{\Psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; \lambda^{(2)}) + p_n(\lambda).$$

Будем считать, что этой формулой функция F_1 задана на $D^{(1)}$, т.е. для $\boldsymbol{\lambda} \in D^{(1)}$:

$$F_1(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(1)}(\varepsilon)} F_1(\zeta^{(1)}) \frac{X_g(\zeta)}{\Psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; \boldsymbol{\lambda}^*) + p_n(\lambda). \tag{46}$$

В силу свойств дифференциала $d\Omega(\boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{\lambda})$, правая часть этого равенства голоморфно продолжается по $\boldsymbol{\lambda}$ на $D^{(2)}$ вплоть до кривой $\Gamma^{(2)}(\varepsilon)$, лежащей на втором листе $D^{(2)}$ "над" кривой $\Gamma(\varepsilon) =$

$\Gamma^{(1)}(\varepsilon)$. Тем самым, функция $F_1(\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} \in D^{(1)}$, *голоморфно продолжается на второй лист* $D^{(2)}$ *вплоть до кривой* $\Gamma^{(2)}(\varepsilon)$ (это продолжение, вообще говоря, не совпадает с с функцией $F(\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} \in D^{(2)}$). С учетом определения функции $F_1(\lambda) := F(\lambda^{(1)})$ получаем, что на второй лист голоморфно продолжается произведение $\Psi(\lambda^{(1)})R_n(\lambda)w(\lambda)$, $\lambda \in D$. Обратимся теперь к краевым условиям на функцию Ψ: $\rho(\mathbf{x})\Psi^+(\mathbf{x}) = \Psi^+(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\Gamma}$. Функция ρ голоморфна и отлична от нуля в некоторой окрестности S. Поэтому заменив в этих краевых условиях кривую $\boldsymbol{\Gamma}$ на кривую $\Gamma^{(2)}(\varepsilon)$ при произвольном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, мы, как легко увидеть, получим краевую задачу, решением которой является та же самая функция Ψ (это видно и непосредственно из явных формул (30)–(33)). Таким образом, функция $\Psi(\lambda^{(1)})$, $\lambda \in D$, голоморфно продолжается на второй лист вплоть до кривой $\Gamma^{(2)}(\varepsilon)$. Выберем теперь $\varepsilon_n \in (\varepsilon/3, 2\varepsilon/3)$ так, чтобы при $n \to \infty$ выполнялись соотношения (39). Рассуждения, вполне аналогичные приведенным выше и опирающиеся на принцип максимума модуля и теорему Гурвица для многозначных аналитических функций в области $D(n) = D^{(1)} \sqcup \boldsymbol{\Gamma} \sqcup S^{(2)}(\varepsilon_n)$ (отметим, что функция Φ также аналитически продолжается в эту область), показывают, что в этой ситуации имеет место аналог соотношения (44):

$$\left|\frac{F_1(\boldsymbol{\lambda})}{\Phi^g(\boldsymbol{\lambda})} - \frac{p_n(\boldsymbol{\lambda})}{\Phi^g(\boldsymbol{\lambda})}\right| = o(1) \quad \text{равномерно по } \boldsymbol{\lambda} \in \overline{D(n)}, \tag{47}$$

а все нули полинома p_n “притягиваются” к точкам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ при $n \to \infty$. Поясним более подробно ту часть рассуждений, которая касается аналитического продолжения функций с первого листа $D^{(1)}$ через кривую $\boldsymbol{\Gamma}$ на второй лист $D^{(2)}$. Предположим для определенности, что $\lambda_k \to e_{2k}$ при $n \to \infty$, тем самым, фактически речь идет о продолжении через кривую $\boldsymbol{\Gamma}_k$, $\operatorname{pr} \boldsymbol{\Gamma}_k = \Delta_k = [e_{2k-1}, e_{2k}]$. Будем считать для простоты, что $\Delta_k = [-1, 1]$. Тогда с помощью функции $u = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$, обратной функции Жуковского, двулистная гиперэллиптическая риманова поверхность $\mathfrak{R}$ конформно отображается на риманову сферу $\widehat{\mathbb{C}}$, из которой удалены $2g$ отрезков вида $[\alpha_j, \beta_j]$, $[1/\beta_j, 1/\alpha_j]$, $j = 1, \dots, g$, где все отрезки $[\alpha_j, \beta_j]$ лежат во внешности единичного круга $|u| > 1$, а соответствующие им парные отрезки $[1/\beta_j, 1/\alpha_j]$ – внутри него. При этом верхние берега парных отрезков отождествляются (“склеиваются”) между собой, аналогичное правило действует и для нижних берегов. При таком отождествлении получаем, очевидно, сферу с g ручками. Первому (открытому) листу $D^{(1)}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$ соответствует внешность единичного круга $|u| > 1$ с разрезами по отрезкам $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, \dots, g$, второму листу $D^{(2)}$ – внутренность единичного круга $|u| < 1$ с разрезами по отрезкам $[1/\beta_j, 1/\alpha_j]$, $j = 1, \dots, g$; см. рис. 1. Обратное отображение с помощью функции Жуковского $\lambda = \frac{1}{2}(u + 1/u)$ задает параметрическое представление $\mathfrak{R}$ и делает очевидным процесс аналитического продолжения через кривую $\mathbf{\Gamma}_k = \{\lambda(u) : |u| = 1\}$ с первого листа римановой поверхности на второй. Действительно, для весовой функции ρ имеем: $\rho(\lambda) = \rho(\frac{1}{2}(u + 1/u))$, для полинома p_n: $p_n(\lambda) = p_n(\frac{1}{2}(u + 1/u))$. Отметим, что из такого симметричного представления вытекает, что каждой точке $\lambda_k \to e_{2k}$ соответствуют два близких нуля продолженной функции $p_n(\frac{1}{2}(u + 1/u))$. Однако никакого противоречия в этом нет, так как это означает, что продолженная на второй лист функция $F_1(\boldsymbol{\lambda})$ также имеет в окрестности точки e_{2k} два нуля: один нуль происходит от функции $\Psi(\boldsymbol{\lambda})$, а второй – от функции остатка $R_n(\lambda)$ (см. (35)).

Итак, мы показали, что в общей ситуации $\deg p_n = g$ для достаточно больших n и асимптотика g нулей полинома p_n полностью определяется асимптотическим поведением точек $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, точнее,

$$\alpha_n^{-1} p_n(\lambda) = X_g(\lambda) + o(1), \qquad n \to \infty,$$

где α_n – старший коэффициент p_n. С учетом последнего равенства нетрудно видеть, что полученные выше соотношения (44)–(45) сохранятся, если вместо нормировки $m_n(t) = 1$ мы будем считать, что старший коэффициент полинома p_n равен 2: $p_n(\lambda) = 2\lambda^g + \cdots$. Тем самым,

$$\begin{aligned} &p_n(\lambda) = 2X_g(\lambda) + o(1), \quad n \to \infty, \text{ равномерно внутри } \mathbb{C}, \\ &p_n(\lambda) = 2X_g(\lambda)(1 + o(1)), \quad n \to \infty, \text{ равномерно на } \Gamma(\varepsilon_n). \end{aligned} \tag{48}$$

Следовательно, во всех полученных выше соотношениях p_n можно заменить на $2X_g$. Кроме того, как нетрудно видеть, в этих соотношениях величина $o(1) = o(\delta^n)$, где $\delta \in (0, 1)$ и зависит от ρ.

3. С помощью соотношений (44)–(45) и (48) уже легко завершается доказательство теоремы 1. Действительно, в силу опреде-

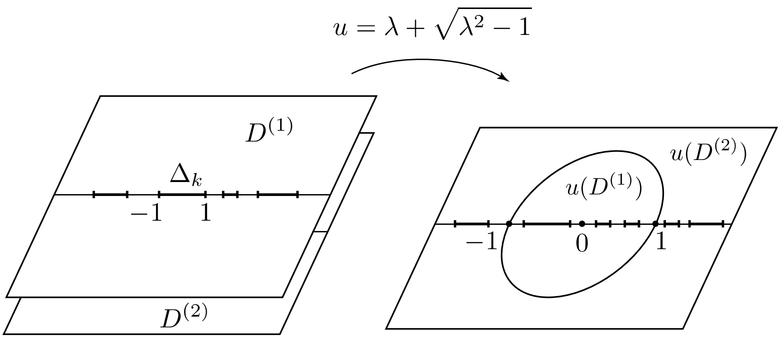

Рис. 1. При $\Delta_k = [-1,1]$ с помощью функции $u = \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$, обратной функции Жуковского, двулистная гиперэллиптическая риманова поверхность $\mathfrak{R}$ конформно отображается на риманову сферу $\widehat{\mathbb{C}}$, из которой удалены $2g$ отрезков вида $[\alpha_j,\beta_j]$, $[1/\beta_j, 1/\alpha_j]$, $j=1,\dots,g$, где все отрезки $[\alpha_j,\beta_j]$ лежат во внешности единичного круга $|u|>1$, а соответствующие им парные отрезки $[1/\beta_j,1/\alpha_j]$ – внутри него. При этом верхние берега парных отрезков отождествляются (“склеиваются”) между собой, аналогичное правило действует и для нижних берегов.

ления функций F_1 и F_2 из (44)–(45) и (48) получаем:

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda^{(1)})R_n(\lambda)w(\lambda) &= 2X_g(\lambda)(1+o(1)) \quad \text{равномерно на } \Gamma(\varepsilon_n), \\ \Psi(\lambda^{(2)})Q_n(\lambda) &= X_g(\lambda)(1+o(1)) \quad \text{равномерно на } \Gamma(\varepsilon_n). \end{aligned} \tag{49}$$

Перемножая теперь левые и правые части этих соотношений и пользуясь тем, что $\Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)}) = X_g(\lambda)$, получим

$$\begin{aligned} Q_n(\lambda)R_n(\lambda) &= \frac{2X_g(\lambda)}{w(\lambda)}(1+o(1)) \\ &= \frac{2X_g(\lambda)}{w(\lambda)} + o(1) \qquad \text{равномерно на } \Gamma(\varepsilon_n). \end{aligned}$$

Но $\varepsilon_n \in (\varepsilon/3, 2\varepsilon/3)$, тем самым, равномерно в $\overline{D(\varepsilon)} = \{\lambda : g(\lambda,\infty) \geqslant \varepsilon\}$ имеем:

$$Q_n(\lambda)R_n(\lambda) = \frac{2X_g(\lambda)}{w(\lambda)} + o(1), \quad n\to\infty.$$

Отсюда, так как

$$Q_n(\lambda)R_n(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_S \frac{Q_n^2(x)}{\lambda - x}\frac{\rho(x)\,dx}{\sqrt{-h(x)}},$$

вытекает, что

$$\frac{1}{\pi}\int_S \frac{Q_n^2(x)\rho(x)\,dx}{\sqrt{-h(x)}} = 2 + o(1), \quad n\to\infty. \tag{50}$$

Тем самым, окончательно имеем:

$$q_n(\lambda)r_n(\lambda) = \frac{X_g(\lambda)}{\sqrt{h(\lambda)}} + o(\delta^n), \qquad n\to\infty,\ \delta\in(0,1),$$

равномерно в $\overline{D(\varepsilon)} = \{\lambda : g(\lambda,\infty) \geqslant \varepsilon\}$. Поскольку $\varepsilon > 0$ – произвольно, теорема 1 доказана.

4. При подходящей нормировке полиномов $Q_n(\lambda)$ – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функции $\widehat{\mu}$ – их сильная асимптотика внутри области $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\widehat{S}$ и на компакте S описывается в терминах Ψ-функции, решающей задачу $(\mathscr{R})$, следующим образом.

Предложение. *Пусть голоморфная на S функция ρ удовлетворяет условию (24), Ψ – решение задачи $(\mathscr{R})$ при $n\in\mathbb{N}$. Тогда при подходящей нормировке полиномов $Q_n(\lambda)$ имеем:*

1°. $Q_n(\lambda) = \Psi(\lambda)\bigl(1 + o(\delta^n)\bigr)$ *при $n\to\infty$ равномерно внутри $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\widehat{S}$;*
2°. $Q_n(x)X_g(x) = (\Psi^+(x) + \Psi^-(x))X_g(x) + o(\delta^n)$ *при $n\to\infty$ равномерно на S.*

Здесь $\Psi(\lambda) = \Psi(\lambda^{(1)})$, под $\Psi^+(x)$ $(\Psi^-(x))$ понимаются верхние (соответственно, нижние) предельные значения $\Psi(\lambda)$ на S. Функция Ψ, решающая задачу $(\mathscr{R})$, имеет в точке $\boldsymbol{\lambda} = \infty^{(1)}$ полюс в точности n-го порядка. Так как $\deg Q_n = n$ при всех n и $\Psi(\lambda^{(1)})/\lambda^n \to \varkappa_n \neq 0$ при $\lambda\to\infty$, где $\varkappa_n\in\mathbb{R}$, то естественно нормировать Q_n условием: $Q_n(\lambda) = \varkappa_n\lambda^n + \cdots$. С помощью представления (30)–(33) величину $\varkappa_n$ нетрудно найти и в явном виде (см. приложение B), при этом, так как $\varkappa_n\in\mathbb{R}$, можно считать, что $\varkappa_n > 0$; таким выбором знака у $\varkappa_n$ однозначно определяется и сама Ψ-функция.

Доказательство. Пункт 1° предложения вытекает непосредственно из соотношения (49) и равенства $\Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)}) = X_g(\lambda)$.

Для доказательства п. 2° поступим следующим образом. Из (47) и (48) вытекает, что равномерно на $\mathbf{\Gamma}$ имеем: $F_1(\boldsymbol{\lambda}) = 2X_g(\lambda) + o(1)$, $n \to \infty$, $o(1) = o(\delta^n)$. Пользуясь определением функций F_1 и F перепишем последнее соотношение в виде двух равенств для $x \in S$ следующим образом:

$$\Psi^+(x)R_n^+(x)w^+(x) = 2X_g(x) + o(1),$$
$$\Psi^-(x)R_n^-(x)w^-(x) = 2X_g(x) + o(1).$$

Умножим обе части первого равенства на $\Psi^-(x)$, а второго – на $\Psi^+(x)$, сложим получившиеся соотношения и воспользуемся равенствами (34) и $\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) = X_g(x)$. Получим

$$Q_n(x)X_g(x) = \bigl(\Psi^+(x) + \Psi^-(x)\bigr)X_g(x) + o(1),$$

что и требовалось доказать. ■

§ 4. Доказательство теоремы 2

1. Доказательство первой части теоремы 2 – формулы (28) – не составляет труда и следует непосредственно из теоремы 1. Действительно, с одной стороны

$$q_n(\lambda)r_n(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_S \frac{q_n^2(x)}{\lambda - x}\frac{\rho(x)\,dx}{\sqrt{-h(x)}}, \tag{51}$$

с другой

$$\begin{gathered} q_n(\lambda)r_n(\lambda) = \frac{X_g(\lambda)}{\sqrt{h(\lambda)}} + o(\delta^n), \\ n \to \infty,\ \delta \in (0,1),\ \text{равномерно в } \overline{D(\varepsilon)}, \end{gathered} \tag{52}$$

где $\overline{D(\varepsilon)} = \{\lambda : g(\lambda, \infty) \geqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ – произвольно. Пользуясь (51) разложим функцию $q_n(\lambda)r_n(\lambda)$ в ряд по степеням $1/\lambda$ в бесконечно удаленной точке:

$$q_n(\lambda)r_n(\lambda) = \frac{d_0}{\lambda} + \frac{d_1}{\lambda^2} + \cdots,$$

где

$$d_0 = \frac{1}{\pi}\int_S \frac{q_n^2(x)\rho(x)\,dx}{\sqrt{-h(x)}} = 1, \qquad d_1 = \frac{1}{\pi}\int_S \frac{xq_n^2(x)\rho(x)\,dx}{\sqrt{-h(x)}}.$$

Непосредственно из рекуррентной формулы (9) сдедует (см. (11)), что $d_1 = b_{n+1}$. В силу (52) коэффициенты $d_0, d_1, \dots$ с точностью до $o(\delta^n)$ совпадают с соответствующими лорановскими коэффициентами $c_0, c_1, \dots$ функции $X_g(\lambda)/\sqrt{h(\lambda)}$. Так как $c_0 = 1$, то

$$c_1 = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\biggl(\frac{\lambda X_g(\lambda)}{\sqrt{h(\lambda)}} - 1\biggr) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\biggl(\frac{\lambda X_g(\lambda) - \sqrt{h(\lambda)}}{\lambda^g}\biggr).$$

Прямые вычисления дают для этой величины следующее представление:

$$c_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2g+2} e_j - \sum_{j=1}^{g} \lambda_j(n).$$

Тем самым,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2g+2} e_j - \sum_{j=1}^{g} \lambda_j(n) + o(\delta^n), \quad n\to\infty.$$

Формула (28) доказана.

2. Для доказательства (29) поступим следующим образом. Из рекуррентной формулы (9) вытекает (см. (11)), что

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_S xq_{n-1}(x)q_n(x)\frac{\rho(x)\,dx}{\sqrt{-h(x)}} = \frac{k_{n-1}}{k_n}, \tag{53}$$

$k_n > 0$ – старший коэффициент ортонормированного полинома q_n. Из (50) получаем, что k_n и $\varkappa_n > 0$ – старший коэффициент полинома Q_n – связаны соотношением $\varkappa_n = k_n(\sqrt{2} + o(1))$, где $o(1) = o(\delta^n)$. Следовательно, $a_n = \frac{\varkappa_{n-1}}{\varkappa_n}(1 + o(1))$. Но величина $\varkappa_n$ связана с нормировкой Ψ-функции: $\Psi(\lambda) = \varkappa_n\lambda^n + \cdots$ при $\lambda\to\infty$. Пользуясь явным представлением (30)–(33) для Ψ-функции найдем теперь асимптотику отношения величин $\varkappa_{n-1}$ и $\varkappa_n$ при $n\to\infty$.

Так как $\Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)}) \equiv \prod\limits_{j=1}^{g}(\lambda - \lambda_j)$, то

$$\Psi(\lambda^{(2)}) = \frac{1}{\varkappa_n\lambda^{n-g}} + \cdots, \quad \lambda\to\infty.$$

Следовательно,

$$\frac{\Psi(\lambda^{(1)})}{\Psi(\lambda^{(2)})} = \varkappa_n^2 \lambda^{2n-g} + \cdots, \quad \lambda \to \infty,$$

и

$$\varkappa_n^2 = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\Psi(\lambda^{(1)})}{\Psi(\lambda^{(2)})} \lambda^{g-2n},$$

при этом можно считать, что $\lambda > 0$. С помощью явных формул (30)–(33) получаем

$$\frac{\Psi(\lambda^{(1)})}{\Psi(\lambda^{(2)})} = \Phi^{2n-2g} e^{A(\lambda^{(1)};\rho)-A(\lambda^{(2)};\rho)} \frac{\mathscr{F}_n(\lambda^{(1)})}{\mathscr{F}_n(\lambda^{(2)})}, \tag{54}$$

где первый сомножитель ведет себя в бесконечности как

$$(\operatorname{cap} S)^{2g-2n} \lambda^{2n-2g} + \cdots,$$

а второй не зависит от n. Тем самым,

$$\frac{\varkappa_{n-1}^2}{\varkappa_n^2} = \lim_{\lambda\to\infty} \left[\frac{\lambda^2}{\Phi^2(\lambda)} \cdot \frac{\mathscr{F}_{n-1}(\lambda^{(1)})}{\mathscr{F}_{n-1}(\lambda^{(2)})} \cdot \frac{\mathscr{F}_n(\lambda^{(2)})}{\mathscr{F}_n(\lambda^{(1)})} \right]. \tag{55}$$

Преобразуем теперь величину $\mathscr{F}_n(\lambda^{(1)})/\mathscr{F}_n(\lambda^{(2)}) = \exp(\varphi_n(\lambda))$, где (см. (32))

$$\begin{aligned}\varphi_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{g} \Big[\Omega\big(\boldsymbol{\lambda}_j(n), \infty^{(1)}; \lambda^{(1)}\big) - \Omega\big(\boldsymbol{\lambda}_j(n), \infty^{(1)}; \lambda^{(2)}\big) \Big] \\ + 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \theta_j(n) \big(\Omega_j(\lambda^{(1)}) - \Omega_j(\lambda^{(2)})\big).\end{aligned} \tag{56}$$

По правилу (A.7) перестановки пределов интегрирования и параметров для a-нормированных абелевых дифференциалов имеем:

$$\begin{aligned}&\Omega(\boldsymbol{\lambda}_j, \infty^{(1)}; \lambda^{(1)}) - \Omega(\boldsymbol{\lambda}_j, \infty^{(1)}; \lambda^{(2)}) \\ &\quad = -\int_{\lambda^{(1)}}^{\lambda^{(2)}} d\Omega(\boldsymbol{\lambda}_j, \infty^{(1)}; \boldsymbol{\zeta}) \\ &\quad = -\int_{\boldsymbol{\lambda}_j}^{\infty^{(1)}} d\Omega(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}; \boldsymbol{\zeta}) \pmod{2\pi i} \\ &\quad = \int_{\infty^{(1)}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}; \boldsymbol{\zeta}) \pmod{2\pi i}.\end{aligned}$$

Так как при $x \in \mathbb{R} \setminus S$

$$dG(x^{(1)}, x^{(2)}, \boldsymbol{\zeta}) + 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \omega_j(x)\, d\Omega_j(\boldsymbol{\zeta}) + d\Omega(x^{(1)}, x^{(2)}, \boldsymbol{\zeta}) = 0$$

(см. (A.6)), то при $\lambda > e_{2g+2}$

$$\begin{aligned}
&\int_{\infty^{(1)}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}; \boldsymbol{\zeta}) \\
&\qquad = -\int_{\infty^{(1)}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} dG(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}; \boldsymbol{\zeta}) - 2\pi i \sum_{k=1}^{g} \omega_k(\lambda) \int_{\infty^{(1)}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega_k(\boldsymbol{\zeta}) \\
&\qquad = -\Big(g(\boldsymbol{\lambda}_j, \lambda) - g(\infty^{(1)}, \lambda)\Big) + i\beta_j(n) \\
&\qquad\qquad - 2\pi i \sum_{k=1}^{g} \omega_k(\lambda) \Big(\Omega_k(\boldsymbol{\lambda}_j) - \Omega_k(\infty^{(1)})\Big),
\end{aligned} \tag{57}$$

где $\beta_j(n) \in \mathbb{R}$. Воспользуемся теперь тем, что $\Omega_k(\lambda^{(1)}) - \Omega_k(\lambda^{(2)}) = 2\Omega_k(\lambda^{(1)})$, и формулой (B.12). Тогда из (56), (57) и (B.12) получим

$$\begin{aligned}
\varphi_n(\lambda) = &-\sum_{j=1}^{g} \Big[g(\boldsymbol{\lambda}_j, \lambda) - g(\infty^{(1)}, \lambda)\Big] \\
&\qquad + 2\pi i \sum_{k=1}^{g} \omega_k(\lambda) \left(\sum_{j=1}^{g} \theta_j(n) B_{kj}\right) \\
&\qquad + 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \theta_j(n) \cdot 2\Omega_j(\lambda^{(1)}) + i\beta(n) + C_1(\lambda),
\end{aligned} \tag{58}$$

где $\beta(n) \in \mathbb{R}$, $\theta_j = \theta_j(n) = \ell_j(n) + \{(n-g)\omega_j(\infty)\}$, величины $\ell_j(n) \in \mathbb{Z}$ и равномерно ограничены при $n \to \infty$, а $C_1(\lambda)$ не зависит от n. Поменяем в (58) порядок суммирования во втором слагаемом и воспользуемся тем, что (см. (A.8))

$$\sum_{k=1}^{g} \omega_k(\lambda) B_{kj} = -2i \operatorname{Im} \Omega_j(\lambda^{(1)}), \quad \lambda \in D.$$

Тогда это второе слагаемое примет вид:

$$2\pi i \sum_{k=1}^{g} \omega_k(\lambda) \left(\sum_{j=1}^{g} \theta_j B_{kj}\right) = 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \theta_j \left(\sum_{k=1}^{g} \omega_k(\lambda) B_{kj}\right) =$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \theta_j \left(-2i\ \mathrm{Im}\,\Omega_j(\lambda^{(1)})\right) = -2\pi i \sum_{j=1}^{g} \theta_j \left(2i\ \mathrm{Im}\,\Omega_j(\lambda^{(1)})\right).$$

Следовательно, из (58) имеем:

$$\varphi_n(\lambda) = -\sum_{j=1}^{g} g(\boldsymbol{\lambda}_j, \lambda) + i\beta(n) + C_2(\lambda), \tag{59}$$

где $\beta(n) \in \mathbb{R}$, а $C_2(\lambda)$ не зависит от n. Окончательно из последней формулы и (55) получаем:

$$\frac{\varkappa_{n-1}^2}{\varkappa_n^2} = (\mathrm{cap}\,S)^2 \exp\left\{\sum_{j=1}^{g} g\big(\boldsymbol{\lambda}_j(n), \infty\big) - \sum_{j=1}^{g} g\big(\boldsymbol{\lambda}_j(n-1), \infty\big)\right\},$$

тем самым,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\varkappa_{n-1}}{\varkappa_n}(1 + o(\delta^n)) \\ &= \mathrm{cap}\,S \cdot \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g} g\big(\boldsymbol{\lambda}_j(n), \infty\big) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g} g\big(\boldsymbol{\lambda}_j(n-1), \infty\big)\right\} \\ &\quad \times \big(1 + o(\delta^n)\big). \end{aligned}$$

Асимптотическая формула (29), а вместе с ней и теорема 2, доказаны.

Приложение A

1. Приведем некоторые необходимые нам стандартные сведения о гиперэллиптических римановых поверхностях. В обозначениях и терминологии мы здесь придерживаемся в основном [31] (см. также [32]–[33]).

Пусть $\mathfrak{R}$ – гиперэллиптическая риманова поверхность рода $g \geqslant 1$, заданная уравнением $w^2 = h(\lambda)$, где $h(\lambda) = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - e_j)$, $e_1 < \cdots < e_{2g+2}$. Будем считать, что $\mathfrak{R}$ реализована как двулистное разветвленное в точках $\{e_j\}$ накрытие римановой сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ таким образом, что переход с одного листа на другой осуществляется по верхнему Δ_j^+ и нижнему Δ_j^- берегам отрезков

$\Delta_j = [e_{2j-1}, e_{2j}]$, $j = 1, \dots, g+1$. Тем самым, над каждой точкой $\widehat{\mathbb{C}}$ за исключением точек ветвления $\{e_j\}$ лежат ровно две точки римановой поверхности, а каждому отрезку Δ_j соответствует на $\mathfrak{R}$ замкнутая аналитическая (в комплексной структуре $\mathfrak{R}$) кривая $\mathbf{\Gamma}_j$, $j = 1, \dots, g+1$, – цикл на $\mathfrak{R}$; положим $\mathbf{\Gamma} = \bigcup_{j=1}^{g+1} \mathbf{\Gamma}_j$. Выберем в $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$ ту ветвь квадратного корня, которая положительна при положительных значениях аргумента. Тем самым, $\sqrt{h(\lambda)}/\lambda^{g+1} \to 1$ при $\lambda \to \infty$. Функция $w : w^2 = h(\lambda)$ однозначна на $\mathfrak{R}$. Первым (открытым) листом $D^{(1)}$ поверхности $\mathfrak{R}$ будем считать тот, на котором $w = \sqrt{h(\lambda)}$. На втором листе $D^{(2)}$ имеем: $w = -\sqrt{h(\lambda)}$. Для точек римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем использовать обозначение $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, w)$, где $w = \pm\sqrt{h(\lambda)}$; при этом для точек первого листа $\lambda^{(1)} = (\lambda, \sqrt{h(\lambda)})$, а для точек второго $\lambda^{(2)} = (\lambda, -\sqrt{h(\lambda)})$. Вместо $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \pm\sqrt{h(\lambda)})$ иногда мы будем писать коротко $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \pm)$. Область $D^{(1)}$ будем как правило отождествлять с "физической" областью D. Для $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{(1)}$ будем часто писать просто $w(\lambda)$ вместо $w(\boldsymbol{\lambda})$; тем самым, приобретает смысл и запись $w^{\pm}(x) = \sqrt{h(x \pm i0)}$, $x \in S$. Каноническая проекция $\mathrm{pr} : \mathfrak{R} \to \widehat{\mathbb{C}}$ определяется соотношением $\mathrm{pr}\, \boldsymbol{\lambda} = \lambda$, в частности $\mathrm{pr}\, D^{(1)} = \mathrm{pr}\, D^{(2)} = D$, $\mathrm{pr}\, \mathbf{\Gamma} = S$. Замкнутые циклы на $\mathfrak{R}$, соответствующие замкнутым лакунам $L_j = [e_{2j}, e_{2j+1}]$, $j = 1, \dots, g$, будем обозначать через $\mathbf{L}_j$. Тем самым $\mathrm{pr}\, \mathbf{L}_j = [e_{2j}, e_{2j+1}]$.

Ориентируем кривые $\mathbf{\Gamma}_j$ так, что при обходе по $\mathbf{\Gamma}_j$ область $D^{(1)}$ остается слева, а $D^{(2)}$ – справа. Примем ориентированные кривые $\mathbf{\Gamma}_j$, $j = 1, \dots, g$, за a-циклы $\mathbf{a}_j$ на $\mathfrak{R}$ и стандартным образом [31], [32] дополним их b-циклами $\mathbf{b}_j$ до базиса гомологий $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}_{j=1,\dots,g}$ на $\mathfrak{R}$. Пусть $\{d\Omega_k\}$ – соответствующий a-нормированный базис голоморфных абелевых дифференциалов: $\oint_{\mathbf{a}_j} d\Omega_k = \delta_{kj}$, $k, j = 1, \dots, g$. Матрица $\mathbf{B} = \|B_{kj}\|_{k,j=1,\dots,g}$, где $B_{kj} = \oint_{\mathbf{b}_j} d\Omega_k$ – b-периоды базисных дифференциалов, является матрицей Римана: она симметрична, $B_{kj} = B_{jk}$, а ее мнимая часть положительно определена, $\|\operatorname{Im} B_{jk}\| > 0$. В рассматриваемом здесь нами случае, когда все точки $e_j \in \mathbb{R}$, все величины B_{kj} – чисто мнимые. Абелевы интегралы $\Omega_k(\boldsymbol{\lambda}) = \displaystyle\int_{e_{2g+2}}^{\boldsymbol{\lambda}} d\Omega_k$ определены на $\mathfrak{R}$ однозначно по модулю их a и b-периодов. Так как $\Omega_k'(\lambda) = s_k(\lambda)/w(\lambda)$, где s_k – полином степени $g-1$, то имеет смысл обозначение $d\Omega_k^{\pm}(x) = s_k(x)\, dx/w^{\pm}(x)$ при $x \in S$.

Если на $\mathfrak{R}\backslash\mathbf{\Gamma}$ задана функция $F(\boldsymbol{\lambda})$, то под $F^+(\mathbf{x})$ понимаются ее предельные значения при $\boldsymbol{\lambda} \to \mathbf{x} \in \mathbf{\Gamma}$, $\boldsymbol{\lambda} \in D^{(1)}$, если они существуют; аналогичный смысл придается и $F^-(\mathbf{x})$ при $\boldsymbol{\lambda} \in D^{(2)}$, $\boldsymbol{\lambda} \to \mathbf{x} \in \mathbf{\Gamma}$.

Фиксируем стандартный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_g$ в $\mathbb{R}^g$: $(\mathbf{e}_k)_j = \delta_{kj}$. Тогда векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_g, \mathbf{B}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{B}\mathbf{e}_g$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ и образуют базис в $\mathbb{C}^g$. Факторпространство $\mathbb{C}^g/\{\mathrm{N} + \mathbf{B}\mathrm{M}\}$ по целочисленной решетке, $\mathrm{N}, \mathrm{M} \in \mathbb{Z}^g$, является $2g$-мерным вещественным тором $\mathbb{T}^{2g}$ и называется многообразием Якоби $\operatorname{Jac}\mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^g$ однозначно представим в виде $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathrm{N} + \mathbf{B}\mathrm{M} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}$ (mod периодов), $0 \leqslant (\mathbf{x})_j, (\mathbf{y})_j < 1$, $\mathrm{N}, \mathrm{M} \in \mathbb{Z}^g$; иногда для краткости знак сравнения по модулю периодов базисных дифференциалов $\{d\Omega_k\}$ мы будем опускать и писать $\mathbf{v} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}$.

Неупорядоченные наборы точек $(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_g)$, $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathfrak{R}$, образуют g-ю симметрическую степень $S^g\mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Пусть $\boldsymbol{\lambda}_0$ – некоторая фиксированная точка[7] римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Вектор-функция $A(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_g) = (A_1, \ldots, A_g)$ с координатами

$$A_k = A_k(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_g) \equiv \sum_{j=1}^{g} \Omega_k(\boldsymbol{\lambda}_j) \equiv \sum_{j=1}^{g} \int_{\boldsymbol{\lambda}_0}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega_k, \tag{A.1}$$

где $k = 1, \ldots, g$, определяет отображение Абеля $A : S^g\mathfrak{R} \to \operatorname{Jac}\mathfrak{R}$ (пути интегрирования в (A.1) – одни и те же для всех $k = 1, \ldots, g$). Если задан вектор $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_g) \in \operatorname{Jac}\mathfrak{R}$ (точнее, класс $[\mathbf{v}]$ эквивалентных $\mathbf{v}$ векторов), то задача нахождения неупорядоченного набора точек $(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_g) \in S^g\mathfrak{R}$, для которого

$$A_k(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_g) = v_k \quad (\text{mod периодов}), \tag{A.2}$$

где $k = 1, \ldots, g$, называется проблемой обращения Якоби. Проблема обращения Якоби всегда разрешима, но, вообще говоря, не единственным образом. Неупорядоченный набора точек $(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_g) \in S^g\mathfrak{R}$ будем называть дивизором и использовать обозначение $d = \boldsymbol{\lambda}_1 + \cdots + \boldsymbol{\lambda}_g$.

2. Для любых двух различных точек $\boldsymbol{\lambda}_1$ и $\boldsymbol{\lambda}_2$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$ существует абелев дифференциал третьего рода, голоморфный всюду на $\mathfrak{R}$, за исключением этих двух точек, в которых он имеет простые полюсы с вычетами соответственно $+1$

[7] В дальнейшем мы выбираем $\boldsymbol{\lambda}_0 = e_{2g+2}$.

и -1; такой дифференциал называется нормальным. Нормальный дифференциал будет определен однозначно, если потребовать, чтобы все его a-периоды были равны нулю; будем называть такой дифференциал a-нормированным абелевым дифференциалом третьего рода и обозначать $d\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2; \boldsymbol{\lambda})$, где дифференцирование – по переменной λ. Другой способ однозначно задать (нормировать) дифференциал третьего рода – потребовать, чтобы все его периоды были чисто мнимыми. Для таких дифференциалов будем использовать обозначение $dG(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2; \boldsymbol{\lambda})$, предполагая при этом, что вычеты в точках $\boldsymbol{\lambda}_1$ и $\boldsymbol{\lambda}_2$ равны соответственно -1 и $+1$. К подобным дифференциалам относится дифференциал комплексной функции Грина с особенностью в бесконечно удаленной точке $G(\lambda, \infty) = g(\lambda, \infty) + ig^*(\lambda, \infty)$ многосвязной области $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$ (здесь $g^*(\lambda, \infty)$ – функция, гармонически сопряженная к функции Грина $g(\lambda, \infty)$). Функция $G(\lambda, \infty)$ многозначна в D и

$$G(\lambda, \infty) = \int_{e_{2g+2}}^{\lambda} \frac{P_g(\zeta)}{\sqrt{h(\zeta)}}\, d\zeta, \qquad \lambda \in D,$$

где $P_g(\lambda) = P_g(\lambda; h) = \lambda^g + \cdots$ – вещественный полином, все нули которого лежат в лакунах (e_{2j}, e_{2j+1}), $j = 1, \dots, g$. Дифференциал $dG = dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \boldsymbol{\lambda}) = P_g(\lambda)\, d\lambda / w(\boldsymbol{\lambda})$ определен на всей римановой поверхности $\mathfrak{R}$, имеет чисто мнимые периоды и простые полюсы в точках $\boldsymbol{\lambda} = \infty^{(1)}$ и $\boldsymbol{\lambda} = \infty^{(2)}$ с вычетами соответственно -1 и $+1$. Тем самым, функция $u(\boldsymbol{\lambda}) = \operatorname{Re} G(\boldsymbol{\lambda}, \infty)$, где $G(\boldsymbol{\lambda}, \infty) = \displaystyle\int_{e_{2g+2}}^{\boldsymbol{\lambda}} dG$, – однозначная функция на $\mathfrak{R}$ и для $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{(1)}$ имеем: $u(\lambda^{(1)}) = g(\lambda, \infty)$. Функция $u(\boldsymbol{\lambda})$ задает естественное продолжение функции Грина $g(\lambda, \infty)$ на всю риманову поверхность $\mathfrak{R}$: $g(\boldsymbol{\lambda}, \infty) = u(\boldsymbol{\lambda})$.

Приведем используемые в дальнейшем “явные” представления для некоторых a-нормированных абелевых дифференциалов третьего рода:

$$\begin{aligned} d\Omega(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}; \boldsymbol{\lambda}) &= \frac{w(\boldsymbol{\lambda}) + w(\boldsymbol{\lambda}_1)}{\lambda - \lambda_1} \frac{d\lambda}{2w(\boldsymbol{\lambda})} \\ &\qquad - \frac{w(\boldsymbol{\lambda}) + w(\boldsymbol{\lambda}_2)}{\lambda - \lambda_2} \frac{d\lambda}{2w(\boldsymbol{\lambda})} + \frac{p_1(\lambda)}{2w(\boldsymbol{\lambda})}\, d\lambda, \\ d\Omega(\lambda_1^{(1)}, \infty^{(2)}; \boldsymbol{\lambda}) &= \frac{w(\boldsymbol{\lambda}) + w(\boldsymbol{\lambda}_1)}{\lambda - \lambda_1} \frac{d\lambda}{2w(\boldsymbol{\lambda})} - \frac{\lambda^g + p_2(\lambda)}{2w(\boldsymbol{\lambda})}\, d\lambda, \end{aligned}$$

$$d\Omega(\infty^{(1)},\infty^{(2)};\boldsymbol{\lambda})=-\frac{\lambda^g+p_3(\lambda)}{w(\boldsymbol{\lambda})}\,d\lambda,$$

где $p_j\in\mathbb{C}[\lambda]$, $\deg p_j\leqslant g-1$.

3. Как хорошо известно [30], a-периоды дифференциала комплексной функции Грина связаны с гармоническими мерами $\omega_j(\infty)$ следующим образом:

$$\oint_{\mathbf{a}_k} dG(\infty^{(1)},\infty^{(2)};\boldsymbol{\lambda})=-2\pi i\omega_k(\infty).$$

Кроме того, из вещественности $\mathfrak{R}$ вытекает, что все

$$\oint_{\mathbf{b}_k} dG(\infty^{(1)},\infty^{(2)};\boldsymbol{\lambda})=0.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее соотношение ([25], формула (26)) между дифференциалом dG и a-нормированным дифференциалом $d\Omega$:

$$dG+2\pi i\sum_{j=1}^{g}\omega_j(\infty)\,d\Omega_j+d\Omega=0. \tag{A.3}$$

Справедливость (A.3) следует непосредственно из того, что слева в этой формуле стоит голоморфный абелев дифференциал с нулевыми a-периодами.

Рассеченная риманова поверхность $\widetilde{\mathfrak{R}}$ получается из $\mathfrak{R}$ проведением сечений по базисным циклам $\mathbf{a}_k,\mathbf{b}_k$, $k=1,\dots,g$, поверхности: $\widetilde{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}\setminus\bigl(\bigcup_{k=1}^g\mathbf{a}_k\cup\bigcup_{k=1}^g\mathbf{b}_k\bigr)$; $\widetilde{\mathfrak{R}}$ связна (переход с одного листа на другой осуществляется через $\boldsymbol{\Gamma}_{g+1}$) и односвязна. Для b-периодов a-нормированного абелева дифференциала $d\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2;\boldsymbol{\lambda})$ справедливо следующее соотношение Римана [32]:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{b}_k} d\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2;\boldsymbol{\zeta})&=-2\pi i\int_{\boldsymbol{\lambda}_1}^{\boldsymbol{\lambda}_2} d\Omega_k(\boldsymbol{\zeta})\\&=2\pi i\bigl(\Omega_k(\boldsymbol{\lambda}_1)-\Omega_k(\boldsymbol{\lambda}_2)\bigr),\qquad k=1,\dots,g,\end{aligned}\tag{A.4}$$

где интеграл берется по произвольному пути, соединяющему точки $\boldsymbol{\lambda}_1$ и $\boldsymbol{\lambda}_2$ и лежащему в $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Используя (A.4), вычислим (нулевые) b-периоды левой части (A.3). Получим следующее соотношение

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_k=\sum_{j=1}^{g}\omega_j(\infty)B_{kj},\quad k=1,\dots,g.$$

Откуда вытекает равенство

$$2\Omega_k(\infty^{(2)}) = -2\Omega_k(\infty^{(1)}) = \sum_{j=1}^{g} \omega_j(\infty) B_{kj}, \quad k = 1, \dots, g \qquad (\mathrm{A}.5)$$

(напомним, что $\Omega_k(e_{2g+2}) = 0$ в $\widetilde{\mathfrak{R}}$).

Формула (A.3) допускает следующее обобщение для $x \in \mathbb{R} \setminus S$

$$dG(x^{(1)}, x^{(2)}, \boldsymbol{\zeta}) + 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \omega_j(x)\, d\Omega_j(\boldsymbol{\zeta}) + d\Omega(x^{(1)}, x^{(2)}, \boldsymbol{\zeta}) = 0, \quad (\mathrm{A}.6)$$

где $dG(x^{(1)}, x^{(2)}, \boldsymbol{\zeta})$ – нормальный абелев дифференциал с чисто мнимыми периодами и с двумя простыми полюсами в точках $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, имеющий в них вычеты -1 и $+1$ соответственно, $d\Omega(x^{(1)}, x^{(2)}, \boldsymbol{\zeta})$ – a-нормированный абелев дифференциал с двумя простыми полюсами в точках $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, имеющий вычеты в них $+1$ и -1 соответственно. Функция $u(\boldsymbol{\lambda}; x) := \operatorname{Re} \displaystyle\int_{e_{2g+2}}^{\boldsymbol{\lambda}} dG(x^{(1)}, x^{(2)}, \boldsymbol{\zeta})$ однозначна на $\mathfrak{R}$ и при $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{(1)}$ справедливо равенство $u(\boldsymbol{\lambda}; x) = g(\lambda, x)$, где $g(\lambda, x) = g_D(\lambda, x)$ – функция Грина области D с особенностью в точке $\lambda = x$. Тем самым, $g(\lambda, x)$ продолжается на всю $\mathfrak{R}$ как однозначная гармоническая функция в $\mathfrak{R} \setminus \{x^{(1)}, x^{(2)}\}$.

Как известно (см., например, [31], формула (1.5)) справедливо следующее правило перестановки пределов интегрирования с параметрами для a-нормированного дифференциала:

$$\int_{\mathbf{z}_1}^{\mathbf{z}_2} d\Omega(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2; \boldsymbol{\zeta}) = \int_{\boldsymbol{\lambda}_1}^{\boldsymbol{\lambda}_2} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \boldsymbol{\zeta}) \pmod{2\pi i}, \qquad (\mathrm{A}.7)$$

где пути интегрирования лежат в $\widetilde{\mathfrak{R}}$.

Наконец, имеет место следующая связь между гармоническими мерами $\omega_k(\lambda)$ отрезков Δ_k, $k = 1, \dots, g$, и абелевыми интегралами $\Omega_j(\boldsymbol{\lambda})$, $j = 1, \dots, g$:

$$\sum_{k=1}^{g} B_{kj} \omega_k(\lambda) = -2i \operatorname{Im} \Omega_j(\lambda^{(1)}), \quad \lambda \in D, \qquad (\mathrm{A}.8)$$

или, эквивалентно,

$$\omega_k(\lambda) = -2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{g} B^{kj} \Omega_j(\lambda^{(1)}), \quad \lambda \in D,$$

где $\|B^{kj}\|_{k,j=1,\dots,g} = \mathbf{B}^{-1}$ (ср. [22], формула (26)). Действительно, все периоды абелева интеграла Ω_j в области D – вещественные. Тем самым, правая часть (A.8) – однозначная гармоническая функция в D. Так как величины B_{kj} чисто мнимые, то как нетрудно увидеть, эта правая часть принимает на отрезках Δ_k, $k = 1,\dots,g$, значения, равные B_{kj}, и нулевое значение – на отрезке Δ_{g+1}. Точно также, очевидно, ведет себя и левая часть (A.8).

4. Дивизором d на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем называть формальный символ $d = \nu_1\boldsymbol{\lambda}_1 + \nu_2\boldsymbol{\lambda}_2 + \dots + \nu_m\boldsymbol{\lambda}_m$, где $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathfrak{R}$, $\nu_j \in \mathbb{Z}$; $|d| = \nu_1 + \dots + \nu_g$ – степень дивизора d; если точки $\boldsymbol{\lambda}_j$ попарно различны и все $\nu_j > 0$, то дивизор d – *целый*. Произвольной функции F, мероморфной на $\mathfrak{R}$ (тем самым, $F \in \mathbb{C}(\lambda, w)$, т.е. $F = r_1(\lambda) + r_2(\lambda)w(\boldsymbol{\lambda})$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(\lambda)$ – рациональные функции переменной λ), сопоставим дивизор (F) ее нулей и полюсов: $(F) = \nu_1\boldsymbol{\lambda}_1 + \dots + \nu_\ell\boldsymbol{\lambda}_\ell - \mu_1\boldsymbol{\zeta}_1 - \dots - \mu_m\boldsymbol{\zeta}_m$, где $\boldsymbol{\lambda}_j, \boldsymbol{\zeta}_j \in \mathfrak{R}$ – соответственно нули и полюсы F, а $\nu_j, \mu_j > 0$ – их кратности; такие дивизоры называются *главными*. По теореме Абеля дивизор $d = \nu_1\boldsymbol{\lambda}_1 + \dots + \nu_\ell\boldsymbol{\lambda}_\ell - \mu_1\boldsymbol{\zeta}_1 - \dots - \mu_m\boldsymbol{\zeta}_m$ – главный тогда и только тогда, когда $|d| = 0$ и для всех $k = 1,\dots,g$

$$\sum_{j=1}^{\ell} \nu_j \Omega_k(\boldsymbol{\lambda}_j) - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \Omega_k(\boldsymbol{\zeta}_j) = 0 \quad (\text{mod периодов})$$

(пути интегрирования здесь – одни и те же для всех k). Два целых дивизора d_1 и d_2 *эквивалентны*, если их разность $d_1 - d_2$ – главный дивизор. Эквивалентные дивизоры и только они являются решением проблемы обращения Якоби для одного и того же вектора $\mathbf{v}$ из $\operatorname{Jac}\mathfrak{R}$. Дивизор $d = \nu_1\boldsymbol{\lambda}_1 + \dots + \nu_m\boldsymbol{\lambda}_m$ – *специальный*, если соответствующая проблема обращения Якоби имеет не единственное решение; тем самым, он имеет (нетривиальные) эквивалентные ему дивизоры.

Известно (см., например, [31] и [33]), что два целых дивизора степени g, $d_1 = \boldsymbol{\lambda}_1 + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g$ и $d_2 = \boldsymbol{\zeta}_1 + \dots + \boldsymbol{\zeta}_g$, заданных на гиперэллиптической римановой поверхности рода g, эквивалентны тогда и только тогда, когда $d_1 = t_1^{(1)} + t_1^{(2)} + \dots + t_{2m}^{(1)} + t_{2m}^{(2)} + \boldsymbol{\lambda}_{2m+1} + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g$, $d_2 = \tau_1^{(1)} + \tau_1^{(2)} + \dots + \tau_{2m}^{(1)} + \tau_{2m}^{(2)} + \boldsymbol{\lambda}_{2m+1} + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g$, $m \leqslant g/2$. Тем самым, имеется полное описание специальных дивизоров степени g. Непосредственно отсюда вытекает следующее свойство отображения Абеля $A : S^g\mathfrak{R} \to \operatorname{Jac}\mathfrak{R}$. Пусть $\mathscr{U} \subset S^g\mathfrak{R}$ – множество, устроенное следующим образом: $\mathscr{U}$ представляет собой (неупорядоченное) произведение g непересекающихся компактов $\mathscr{U}_j$ в $D^{(1)}$, $\mathscr{U}_j \cap \mathscr{U}_k = \varnothing$ при $j \neq k$. Тогда $A^{-1}(A(\mathscr{U})) = \mathscr{U}$ и ограничение A на $\mathscr{U}$ – биекция. Сказанное справедливо, в частности, для случая, когда $\mathscr{U} = \mathbf{L}_1 \times \cdots \times \mathbf{L}_g$.

5. Предположим, что на $\mathfrak{R} \setminus \mathbf{\Gamma}$ задана (кусочно) мероморфная функция $F(\boldsymbol{\lambda})$, имеющая полюсы только в бесконечно удаленных точках $\boldsymbol{\lambda} = \infty^{(1)}$ и $\boldsymbol{\lambda} = \infty^{(2)}$ каждый порядка $\leqslant g$, предельные "некасательные" значения которой на $\mathbf{\Gamma}$ существуют и удовлетворяют условию:

$$F^+(\boldsymbol{\zeta}) - F^-(\boldsymbol{\zeta}) = V(\boldsymbol{\zeta}), \qquad \boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{\Gamma}, \tag{A.9}$$

где функция V голоморфна на $\mathbf{\Gamma}$ как функция переменных λ и w. Тогда с помощью мероморфного абелева дифференциала

$$d\Omega(\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{\lambda}) = \frac{w(\boldsymbol{\zeta}) + w(\boldsymbol{\lambda})}{\zeta - \lambda}\,\frac{d\zeta}{2w(\boldsymbol{\zeta})}, \tag{A.10}$$

где дифференцирование – по первому аргументу $\boldsymbol{\zeta}$, функция $F(\boldsymbol{\lambda})$ восстанавливается по граничным условиям (A.9) интегралом типа Коши:

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{\Gamma}^+} V(\boldsymbol{\zeta})\,d\Omega(\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{\lambda}) + p(\lambda), \qquad \boldsymbol{\lambda} \notin \mathbf{\Gamma}, \tag{A.11}$$

где $p(\lambda)$ – некоторый многочлен, $\deg p \leqslant g$, а контур $\mathbf{\Gamma}^+$ ориентирован положительно относительно области $D^{(1)}$: область остается слева при обходе по контуру.

Действительно, легко проверяются следующие свойства дифференциала (A.10):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{\Gamma}^+} P(\zeta)\,d\Omega(\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} -P(\lambda)/2, & \boldsymbol{\lambda} \in D^{(1)}, \\ P(\lambda)/2, & \boldsymbol{\lambda} \in D^{(2)}, \end{cases}$$

где P – произвольный полином, $\deg P \leqslant g$; дифференциал $d\Omega(\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{\lambda})$ имеет полюсы только в точках $\boldsymbol{\lambda}, \infty^{(1)}, \infty^{(2)}$ с вычетами соответственно 1, $-1/2$, $-1/2$. Если функция V голоморфна на $\mathbf{\Gamma}$, то функция

$$F_V(\boldsymbol{\lambda}) := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{\Gamma}^+} V(\boldsymbol{\zeta})\,d\Omega(\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{\lambda}), \qquad \boldsymbol{\lambda} \notin \mathbf{\Gamma},$$

обладает следующими свойствами:

1) F_V голоморфна в $D^{(1)} \setminus \{\infty^{(1)}\}$ и $D^{(2)} \setminus \{\infty^{(2)}\}$;
2) $F_V(\boldsymbol{\lambda}) = O(\lambda^g)$ при $\boldsymbol{\lambda} \to \infty^{(1)}$ или $\boldsymbol{\lambda} \to \infty^{(2)}$;
3) справедлива формула Сохоцкого–Племеля

$$F_V^{\pm}(\boldsymbol{\zeta}_0) = \pm\frac{1}{2}V(\boldsymbol{\zeta}_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{\Gamma}^+} V(\boldsymbol{\zeta})\,d\Omega(\boldsymbol{\zeta};\boldsymbol{\zeta}_0),$$

где $\boldsymbol{\zeta}_0 \in \boldsymbol{\Gamma}$, а последний интеграл понимается в смысле главного значения;

4) $F_V^+(\boldsymbol{\zeta}_0) - F_V^-(\boldsymbol{\zeta}_0) = V(\boldsymbol{\zeta}_0)$, $\boldsymbol{\zeta}_0 \in \boldsymbol{\Gamma}$.

Рассмотрим разность $v(\boldsymbol{\lambda}) = F(\boldsymbol{\lambda}) - F_V(\boldsymbol{\lambda})$. В силу (A.9) и свойства 4) эта функция продолжается на всю $\mathfrak{R}$ как мероморфная функция, т.е $v \in \mathbb{C}(\lambda, w)$, а следовательно, имеет вид $v(\boldsymbol{\lambda}) = r_1(\lambda)+r_2(\lambda)w(\boldsymbol{\lambda})$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(\lambda)$. Так как v может иметь полюсы порядка $\leqslant g$ и только в точках $\infty^{(1)}$ и $\infty^{(2)}$, то $r_j = p_j \in \mathbb{C}[z]$. Следовательно, $v(\boldsymbol{\lambda}) = p_1(\lambda)+p_2(\lambda)w(\boldsymbol{\lambda})$. Учитывая, что $|w(\boldsymbol{\lambda})| \sim |\lambda|^{g+1}$ при $\boldsymbol{\lambda} \to \infty^{(1)}, \infty^{(2)}$, получаем $p_2 \equiv 0$, $\deg p_1 \leqslant g$. Формула (A.11) доказана.

Отметим наконец, что при $\boldsymbol{\zeta} = \zeta^{(1)}$, $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{(1)}$ или $\boldsymbol{\zeta} = \zeta^{(2)}$, $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{(2)}$ для дифференциала (A.10) имеем

$$d\Omega(\zeta^{(1)};\lambda^{(1)}) = d\Omega(\zeta^{(2)};\lambda^{(2)}) = \frac{\sqrt{h(\zeta)} + \sqrt{h(\lambda)}}{\zeta - \lambda}\,\frac{d\zeta}{2\sqrt{h(\zeta)}}\,;$$

а при $\boldsymbol{\zeta} = \zeta^{(2)}$, $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{(1)}$

$$d\Omega(\zeta^{(2)};\lambda^{(1)}) = \frac{\sqrt{h(\zeta)} - \sqrt{h(\lambda)}}{\zeta - \lambda}\,\frac{d\zeta}{2\sqrt{h(\zeta)}}\,, \tag{A.12}$$

т.е. в этом случае при $\zeta = \lambda$ дифференциал особенности не имеет. Кроме того, под действием операции инволюции $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda, \mp w)$ при $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \pm w)$ дифференциал (A.10) преобразуется следующим образом: $d\Omega(\boldsymbol{\zeta}^*, \boldsymbol{\lambda}) = d\Omega(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\lambda}^*)$. Следовательно,

$$d\Omega(\zeta^{(1)},\lambda^{(2)}) = d\Omega(\zeta^{(2)},\lambda^{(1)}) = \frac{\sqrt{h(\zeta)} - \sqrt{h(\lambda)}}{\zeta - \lambda}\,\frac{d\zeta}{2\sqrt{h(\zeta)}}. \tag{A.13}$$

Приложение В. Доказательство существования и вывод явных формул для Ψ-функции

Единственность. Для доказательства единственности решения задачи ($\mathscr{R}$) предположим, что существуют два решения этой задачи: Ψ с дивизором свободных нулей $d = \boldsymbol{\lambda}_1 + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g$ и $\widetilde{\Psi}$ с дивизором свободных нулей $\widetilde{d} = \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_1 + \dots + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_g$. Так как $\boldsymbol{\lambda}_j, \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_j \in \mathbf{L}_j$, то каждый из дивизоров d и $\widetilde{d}$ – неспециальный. Функция $F(\boldsymbol{\lambda}) := \Psi(\boldsymbol{\lambda})/\widetilde{\Psi}(\boldsymbol{\lambda})$ – однозначная мероморфная функция на всей римановой поверхности $\mathfrak{R}$ с дивизором $(F) = d - \widetilde{d} = \boldsymbol{\lambda}_1 + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g - \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_1 - \dots - \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_g$. Из приведенного в п. 4 приложения A свойства эквивалентных дивизоров, заданных на гиперэллиптической римановой поверхности, вытекает, что $\boldsymbol{\lambda}_j = \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}_j$, $j = 1, 2, \dots, g$, тем самым, $(F) = 0$ и $F \equiv \mathrm{const}$.

Существование. Доказательство существования Ψ-функции проведем по следующей схеме. Предположив сначала, что все $\lambda_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, найдем явный вид этой функции в терминах абелевых интегралов на $\mathfrak{R}$. После чего можно непосредственно проверить, что найденная функция является решением задачи $(\mathscr{R})$, а явная формула дает искомое решение задачи и в случае, когда хотя бы одна точка λ_j совпадает с концом лакуны e_{2j} или e_{2j+1}. При этом окажется, что точки $\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_g$ удовлетворяют проблеме обращения Якоби (A.2) с правой частью, имеющей специальный вид. Будет показано, такая специальная задача всегда имеет единственное решение притом такое, что все $\lambda_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$.

1. Итак, пусть Ψ – решение задачи $(\mathscr{R})$, причем такое, что все $\lambda_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$. Положим $v(\lambda) := \Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)})$. Нетрудно увидеть, что эта функция продолжается на всю $\widehat{\mathbb{C}}$ как (однозначная) мероморфная функция с полюсом порядка g в точке $\lambda = \infty$ и нулях в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_g$. Следовательно, $v(\lambda)$ – полином степени g, точнее $v(\lambda) \equiv \mathrm{const} \prod_{j=1}^{g} (\lambda - \lambda_g)$, где $\mathrm{const} \neq 0$. Для последующих рассуждений удобно считать, что $\mathrm{const} = 1$, тем самым,

$$\Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^{g} (\lambda - \lambda_g). \tag{B.1}$$

Этим соотношением Ψ-функция определена однозначно с точностью до знака $\pm$. В дальнейшем мы уточним выбор знака. Отметим, что фактически $X_g(\lambda) = \prod_{j=1}^{g} (\lambda - \lambda_j)$ является *неизвестным "полиномиальным параметром"* задачи. Для функции $\Psi(\lambda) = \Psi(\lambda^{(1)})$ на $S = \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \Delta_j$ выполняется следующее краевое условие[8]:

$$\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) = \prod_{j=1}^{g}(x-\lambda_j), \quad x \in S. \tag{B.2}$$

Действительно, пусть $\lambda \to x \in \Delta_j$, $j \in \{1,\ldots,g+1\}$, причем, $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Тогда $\Psi(\lambda^{(1)}) \to \Psi^+(x)$ и, в силу краевого условия $\rho(x)\Psi^+(\mathbf{x}) = \Psi^-(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{\Gamma}$, имеем: $\Psi(\lambda^{(2)}) \to \rho(x)\Psi^-(x)$. Теперь (B.2) вытекает непосредственно из (B.1).

2. Рассмотрим a-нормированные абелевы дифференциалы третьего рода $d\Omega(\infty^{(1)},\boldsymbol{\lambda}_j;\boldsymbol{\lambda})$, $j = 1,\ldots,g$, и $d\Omega(\infty^{(1)},\infty^{(2)};\boldsymbol{\lambda})$. Непосредственно из явного представления (см. приложение A, п. 2) для таких абелевых дифференциалов вытекает, что

$$\begin{aligned} d\Omega(\infty^{(1)},\boldsymbol{\lambda}_j;\boldsymbol{\lambda}) &= -\frac{w(\boldsymbol{\lambda})+w(\boldsymbol{\lambda}_j)}{\lambda-\lambda_j}\frac{d\lambda}{2w(\boldsymbol{\lambda})} \\ &\qquad - (\lambda^g + p(\lambda))\frac{d\lambda}{2w(\boldsymbol{\lambda})}, \\ d\Omega(\infty^{(1)},\infty^{(2)};\boldsymbol{\lambda}) &= -(\lambda^g + q(\lambda))\frac{d\lambda}{2w(\boldsymbol{\lambda})}, \end{aligned} \tag{B.3}$$

где p, q – полиномы степени $\leqslant g-1$. На $\mathfrak{R}\setminus\mathbf{\Gamma}$ дифференциалы (B.3) имеют периоды, кратные $2\pi i$. Следовательно, абелевы интегралы

$$\begin{aligned} \Omega(\infty^{(1)},\boldsymbol{\lambda}_j;\boldsymbol{\lambda}) &= \int_{e_{2g+2}}^{\boldsymbol{\lambda}} d\Omega(\infty^{(1)},\boldsymbol{\lambda}_j;\boldsymbol{\zeta}), \qquad j=1,\ldots,g, \\ \Omega(\infty^{(1)},\infty^{(2)};\boldsymbol{\lambda}) &= \int_{e_{2g+2}}^{\boldsymbol{\lambda}} d\Omega(\infty^{(1)},\infty^{(2)};\boldsymbol{\zeta}), \end{aligned}$$

где интегрирование ведется по кривым, целиком лежащим или в $D^{(1)}$, или в $D^{(2)}$, однозначны по модулю $2\pi i$ на $\mathfrak{R}\setminus\mathbf{\Gamma}$. Тем самым функции

$$\begin{aligned} F_1(\boldsymbol{\lambda}) &= \exp\bigl\{\Omega(\infty^{(1)},\infty^{(2)};\boldsymbol{\lambda})\bigr\} \\ F_2(\boldsymbol{\lambda}) &= \exp\Bigl\{\sum_{j=1}^{g}\Omega(\infty^{(1)},\boldsymbol{\lambda}_j;\boldsymbol{\lambda})\Bigr\} \end{aligned} \tag{B.4}$$

[8] В классическом случае $g = 0$ непосредственно из этого краевого условия уже вытекает нужное представление функций Ψ.

– однозначные (кусочно) мероморфные функции при $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{R} \setminus \boldsymbol{\Gamma}$, для дивизоров которых имеем: $(F_1) = \infty^{(1)} - \infty^{(2)}$, $(F_2) = g\infty^{(1)} - \boldsymbol{\lambda}_1 - \dots - \boldsymbol{\lambda}_g$; кроме того, $F_1(e_{2g+2}) = F_2(e_{2g+2}) = 1$. Таким образом, функция $F_3(\boldsymbol{\lambda}) = F_1^{n-g}(\boldsymbol{\lambda})F_2(\boldsymbol{\lambda})$ мероморфна в $\mathfrak{R} \setminus \boldsymbol{\Gamma}$ и дивизор $(F_3) = -(\Psi)$. Следовательно, функция $F(\boldsymbol{\lambda}) = \Psi(\boldsymbol{\lambda})F_3(\boldsymbol{\lambda}) = \Psi(\boldsymbol{\lambda})F_1^{n-g}(\boldsymbol{\lambda})F_2(\boldsymbol{\lambda})$ голоморфна и не имеет нулей в $\mathfrak{R} \setminus \boldsymbol{\Gamma}$.

Предположим теперь, что $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{(1)}$, и найдем явное представление функции $\Psi(\lambda^{(1)})$.

Непосредственно из представлений (B.3) вытекает, что при $x \in S$ выполняются следующие краевые условия:

$$
\begin{aligned}
d\Omega^+(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; x) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; x) = 0,\\
d\Omega^+(\infty^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}_j; x) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}_j; x) = -\frac{dx}{x - \lambda_j}.
\end{aligned}
$$

Тем самым, для функций F_1 и F_2 имеем:

$$
\begin{aligned}
&F_1^+(x)F_1^-(x) = C_{1,k},\\
&F_2^+(x)F_2^-(x) = \frac{C_{2,k}}{\prod\limits_{j=1}^{g}(x - \lambda_j)}, \qquad x \in \Delta_k, \quad k = 1, \dots, g+1,
\end{aligned}
$$

где постоянные равны: $C_{1,g+1} = 1$,

$$
\left.
\begin{aligned}
&C_{1,k} = \exp\biggl\{-\int_{\mathbf{b}_k} d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \boldsymbol{\zeta})\biggr\},\\
&C_{2,k} = C_{2,g+1} \cdot \exp\biggl\{-\int_{\mathbf{b}_k} \sum_{j=1}^{g} d\Omega(\infty^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}_j; \boldsymbol{\zeta})\biggr\},
\end{aligned}
\right\} \qquad k = 1, \dots, g,
$$

а $C_{2,g+1} = \prod\limits_{j=1}^{g}(e_{2g+2} - \lambda_j)$. Отсюда вытекают краевые условия для функции $F_3 = F_1^{n-g}F_2$:

$$
F_3^+(x)F_3^-(x) = \frac{C_k}{\prod\limits_{j=1}^{g}(x - \lambda_j)}, \qquad x \in \Delta_k, \quad k = 1, \dots, g+1,
$$

где постоянные

$$
\begin{aligned}
C_k = C_{g+1} \exp\biggl\{-(n-g)\int_{\mathbf{b}_k} d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \boldsymbol{\zeta})\biggr\}\\
\times \exp\biggl\{-\int_{\mathbf{b}_k} \sum_{j=1}^{g} d\Omega(\infty^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}_j; \boldsymbol{\zeta})\biggr\}, \quad k = 1, \dots, g, \quad \text{(B.5)}
\end{aligned}
$$

а $C_{g+1} = \prod\limits_{j=1}^{g}(e_{2g+2} - \lambda_j)$.

3. Воспользуемся теперь граничным условием $\rho(\zeta)\Psi^{+}(\mathbf{x}) = \Psi^{-}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{\Gamma}$, и равенством $\Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)}) = \prod\limits_{j=1}^{g}(\lambda-\lambda_j)$ при $\lambda \in D$. Из этих соотношений получаем $\rho(x)\Psi^{+}(x)\Psi^{-}(x) = \prod\limits_{j=1}^{g}(x - \lambda_j)$, $x \in S$.

Положим $f_1(\lambda) := F(\lambda^{(1)}) = \Psi(\lambda^{(1)})F_3(\lambda^{(1)})$. Тогда функция $f_1(\lambda)$ голоморфна и отлична от нуля в области D и для нее выполняются следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} f_1^{+}(x)f_1^{-}(x) &= \Psi^{+}(x)\Psi^{-}(x)F_3^{+}(x)F_3^{-}(x) \\ &= \frac{\prod\limits_{j=1}^{g}(x - \lambda_j)}{\rho(x)} \frac{C_k}{\prod\limits_{j=1}^{g}(x - \lambda_j)} = \frac{C_k}{\rho(x)}, \\ & x \in \Delta_k, \quad k = 1, \dots, g+1, \end{aligned}$$

где постоянные C_k заданы соотношениями (В.5). Функция $u_1(\lambda) = \log f_1(\lambda)$ определена при всех $\lambda \in D$, но вообще говоря многозначна в D; ее многозначность обусловлена только многосвязностью D, а периоды – целые кратные $2\pi i$. Ясно, что при надлежащем выборе целых чисел m_j, $j = 1, \dots, g$, функция $2\pi i \sum\limits_{j=1}^{g} m_j\Omega_j(\lambda)$ имеет те же периоды, что и функция u_1. Тем самым, для функции

$$u_2(\lambda) = u_1(\lambda) - 2\pi i \sum_{j=1}^{g} m_j\Omega_j(\lambda)$$

имеем:

(i) $u_2(\lambda)$ – голоморфная функция в D;

(ii) на S выполняются краевые условия:

$$u_2^{+}(x) + u_2^{-}(x) = -\log\rho(x) + c_{g+1} + 2\pi i n_{g+1}, \qquad x \in \Delta_{g+1},$$

$$u_2^{+}(x) + u_2^{-}(x) = -\log\rho(x) + c_k + 2\pi i n_k + 2\pi i \sum_{j=1}^{g} m_j B_{kj},$$

$$x \in \Delta_k, \quad k = 1, \dots, g,$$

где (см. (B.5)), $c_{g+1} = \log C_{g+1}$,

$$c_k = \log C_k = c_{g+1} + \left\{ -(n-g) \int_{\mathbf{b}_k} d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \boldsymbol{\zeta}) \right\}$$
$$+ \left\{ - \int_{\mathbf{b}_k} \sum_{j=1}^{g} d\Omega(\infty^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}_j; \boldsymbol{\zeta}) \right\}, \qquad k = 1, \dots, g; \tag{B.6}$$

в дальнейшем (см. ниже п. 5) будет показано, что при условии $\lambda_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$ все $n_k = n_{g+1}$, $k = 1, \dots, g$. В таком случае для функции $u_3(\lambda) = u_2(\lambda)/w(\lambda)$, голоморфной в D и имеющей в точке $\lambda = \infty$ нуль кратности $g+1$, выполняются следующие краевые условия

$$\begin{aligned} u_3^+(x) - u_3^-(x) &= -\frac{\log \rho(x)}{w^+(x)} + \frac{c_{g+1}}{w^+(x)} + \frac{2\pi i n_{g+1}}{w^+(x)}, \\ &\qquad x \in \Delta_{g+1}, \\ u_3^+(x) - u_3^-(x) &= -\frac{\log \rho(x)}{w^+(x)} + \frac{c_k}{w^+(x)} + \frac{2\pi i n_k}{w^+(x)} \\ &\qquad + 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \frac{m_j B_{kj}}{w^+(x)}, \quad x \in \Delta_k, \quad k = 1, \dots, g, \end{aligned} \tag{B.7}$$

Функция $u_3(\lambda)$ восстанавливается в области D по этим краевым условиям интегралом типа Коши, а нужная кратность нуля этого интеграла в бесконечно удаленной точке достигается при выполнении g условий ортогональности:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(x) \frac{x^{\ell-1}}{w^+(x)}\, dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{g+1} \left(c_k \frac{1}{\pi i} \int_{\Delta_k} \frac{x^{\ell-1}}{w^+(x)} dx + 2n_k \int_{\Delta_k} \frac{x^{\ell-1}}{w^+(x)} dx \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{g} \sum_{j=1}^{g} 2m_j B_{kj} \int_{\Delta_k} \frac{x^{\ell-1}}{w^+(x)} dx = 0, \quad \ell = 1, \dots, g. \end{aligned}$$

Заменяя в левой части последней формулы дифференциалы $x^{\ell-1} d\zeta/w(x)$ на нормированные дифференциалы $d\Omega_\ell$ и пользуясь тем, что

$$\int_{\Delta_k} d\Omega_\ell^+ = \frac{1}{2} \delta_{k\ell}, \qquad \int_{\Delta_{g+1}} d\Omega_\ell^+ = -\frac{1}{2}, \quad k, \ell = 1, \dots, g,$$

получаем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi i}&\int_S \log\rho(x)\,d\Omega_\ell^+(x)\\
&=\frac{1}{2\pi i}(c_\ell-c_{g+1})+(n_\ell-n_{g+1})+\sum_{j=1}^g m_jB_{\ell j}\\
&=\frac{1}{2\pi i}(c_\ell-c_{g+1})\quad(\mathrm{mod}\ \text{периодов}),\ \ \ell=1,\dots,g. \qquad \text{(B.8)}
\end{aligned}$$

Воспользуемся теперь в очередной раз соотношением Римана (A.4) и преобразуем выражение (B.6) к виду:

$$c_\ell=c_{g+1}+2\pi i\biggl\{\sum_{j=1}^g\int_{\infty^{(1)}}^{\boldsymbol{\lambda}_j}d\Omega_\ell(\boldsymbol{\zeta})+(n-g)\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}}d\Omega_\ell(\boldsymbol{\zeta})\biggr\}. \qquad \text{(B.9)}$$

Наконец, из (B.8) и (B.9) получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^g&\int_{\infty^{(1)}}^{\boldsymbol{\lambda}_j}d\Omega_\ell(\boldsymbol{\zeta})\\
&=\frac{1}{\pi i}\int_S\log\rho(\zeta)\,d\Omega_\ell^+(\zeta)-(n-g)\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}}d\Omega_\ell(\boldsymbol{\zeta})\\
&\qquad-(n_\ell-n_{g+1})-\sum_{j=1}^g m_jB_{\ell j}\\
&\equiv\frac{1}{\pi i}\int_S\log\rho(\zeta)\,d\Omega_\ell^+(\zeta)\\
&\qquad-(n-g)\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}}d\Omega_\ell(\boldsymbol{\zeta}),\quad \ell=1,\dots,g. \qquad \text{(B.10)}
\end{aligned}$$

Займемся теперь преобразованием к нужному виду последнего интеграла в выражении (B.10).

4. Хорошо известна ([30, § 4, (4.3)]) следующая формула для a-периодов дифференциала комплексной функции Грина: $\oint_{\mathbf{a}_k} dG(\boldsymbol{\zeta})=-2\pi i\omega_k(\infty)$, где $\omega_k(\infty)$, $k=1,\dots,g$, – гармоническая мера k-го отрезка Δ_k относительно области D в бесконечно удаленной точке, $\omega_k(\infty)>0$, $\sum\limits_{k=1}^{g+1}\omega_k(\infty)=1$. Непосредственно из этой формулы для a-периодов дифференциала $dG(\boldsymbol{\zeta})$ вытекает, что справедливо следующее тождество:

$$dG(\boldsymbol{\zeta}) + 2\pi i \sum_{k=1}^{g} \omega_k(\infty)\, d\Omega_k(\boldsymbol{\zeta}) + d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \boldsymbol{\zeta}) = 0. \qquad \text{(B.11)}$$

Действительно, слева в последней формуле стоит голоморфный абелев дифференциал, все a-периоды которого равны нулю; следовательно, этот дифференциал равен нулю тождественно. Вычисляя теперь (нулевые) b- периоды этого дифференциала и пользуясь соотношением Римана (A.4), получим (напомним, что интегрирование ведется по путям, лежащим в рассеченной римановой поверхности)

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_j(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_j} dG(\boldsymbol{\zeta}) + \sum_{k=1}^{g} \omega_k(\infty) B_{kj}, \qquad j = 1, \dots, g,$$

где в силу того, что все $e_j \in \mathbb{R}$, имеем $\displaystyle\oint_{\mathbf{b}_j} dG(\boldsymbol{\zeta}) = 0$. Тем самым,

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_j(\boldsymbol{\zeta}) = \sum_{k=1}^{g} \omega_k(\infty) B_{kj}, \qquad j = 1, \dots, g.$$

Следовательно, x-координаты вектора $v_j = \displaystyle\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_j(\boldsymbol{\zeta})$, $j = 1, \dots, g$, в многообразии Якоби $\operatorname{Jac}\mathfrak{R}$ равны 0, а y-координаты равны $\omega_j(\infty) \in (0, 1)$, $j = 1, \dots, g$. Соответственно, вектор с компонентами $v_j(n) = (n - g) \displaystyle\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_j(\boldsymbol{\zeta})$ имеет нулевые x-координаты и y-координаты, равные $\{(n-g)\omega_j(\infty)\}$; здесь и ниже $\{\,\cdot\,\}$ обозначает дробную часть числа. Из (B.10) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{g} \int_{\infty^{(1)}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega_\ell(\boldsymbol{\zeta}) &= \frac{i}{\pi} \int_S \log\rho(x)\, d\Omega_\ell^+(x) - \sum_{j=1}^{g} (n-g)\omega_j(\infty) B_{\ell j} \\ &\qquad - (n_\ell - n_{g+1}) - \sum_{j=1}^{g} m_j B_{\ell j} \\ &= \frac{i}{\pi} \int_S \log\rho(x)\, d\Omega_\ell^+(x) - \sum_{j=1}^{g} \theta_j(n) B_{\ell j} - (n_\ell - n_{g+1}) \equiv \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{i}{\pi}\int_S \log\rho(\zeta)\,d\Omega_\ell^+(\zeta)$$
$$-\sum_{j=1}^{g}\{(n-g)\omega_j(\infty)\}B_{\ell j},\ \ \ell=1,\dots,g, \tag{B.12}$$

где $\theta_k = \theta_k(n) = \ell_k(n) + \{(n-g)\omega_k(\infty)\}$, причем целые числа $\ell_k(n)\in\mathbb{Z}$ равномерно ограничены при $n\to\infty$. Последнее свойство вытекает из того, что левая часть (B.12) равномерно ограничена при $n\to\infty$, так как $\lambda_j\in[e_{2j},e_{2j+1}]$, а $n_\ell = n_{g+1}$, $\ell=1,\dots,g$. Из (B.12) в силу (A.5) и соотношения

$$\int_{\infty_{(1)}}^{e_{2g+2}} d\Omega_\ell = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}\omega_j(\infty)B_{j\ell}$$

получаем

$$\sum_{j=1}^{g}\Omega_k(\boldsymbol{\lambda}_j) = \frac{i}{\pi}\int_S \log\rho(x)\,d\Omega_\ell^+(x) - \sum_{j=1}^{g}(n-g+\tfrac{1}{2})\omega_j(\infty)B_{\ell j}$$
$$-(n_\ell - n_{g+1}) - \sum_{j=1}^{g} m_j B_{\ell j}$$
$$\equiv \frac{i}{\pi}\int_S \log\rho(\zeta)\,d\Omega_\ell^+(\zeta) - \sum_{j=1}^{g}\{(n-g+\tfrac{1}{2})\omega_k(\infty)\}B_{kj},$$

(напомним, что начальная точка интегрирования дифференциалов равна e_{2g+2}) Это и есть та проблема обращения Якоби, которую мы имели ввиду в п. 3 § 2 (ср. с [35]). Доказательство существования при каждом n решения этой задачи при условии, что функция $\widehat{\mu}$ – марковская, т.е. $i\rho(x)/w^+(x) = \rho(x)/\sqrt{-h(x)} > 0$ на S, а решение ищется такое, что все $\lambda_j\in[e_{2j},e_{2j+1}]$, будет дано ниже в п. 5; при этом будет показано, что все $n_\ell = n_{g+1}$, $\ell=1,\dots,g$. Предположим пока, что при $n\in\mathbb{N}$ существует решение задачи (B.12), притом такое, что все λ_j лежат внутри соответствующих лакун. Продолжим при этом условии вывод явной формулы для функции $\Psi(\lambda^{(1)})$.

Запишем формулы (B.7) для скачка функции $u_3(x)$ в следующем виде

$$u_3^+(x) - u_3^-(x) = -\frac{\log\rho(x)}{w^+(x)} + \frac{c_{g+1}}{w^+(x)} + \frac{2\pi i n_{g+1}}{w^+(x)}\,,\quad x\in\Delta_{g+1},$$

$$
\begin{gathered}
u_3^+(x) - u_3^-(x) = -\frac{\log\rho(x)}{w^+(x)} + \frac{c_{g+1}}{w^+(x)} + \frac{2\pi i n_{g+1}}{w^+(x)} + \frac{c_k - c_{g+1}}{w^+(x)} \\
+ \frac{2\pi i(n_k - n_{g+1})}{w^+(x)} + \sum_{j=1}^{g} \frac{2\pi i m_j B_{kj}}{w^+(x)}, \\
x \in \Delta_k, k = 1, \dots, g.
\end{gathered}
$$

Первая часть (B.8) – это точное равенство, поэтому последние краевые условия приводятся к виду

$$
\begin{gathered}
u_3^+(x) - u_3^-(x) = -\frac{\log\rho(x)}{w^+(x)} + \frac{c_{g+1}}{w^+(x)} + \frac{2\pi i n_{g+1}}{w^+(x)}\,,\ x \in \Delta_{g+1}, \\
u_3^+(x) - u_3^-(x) = -\frac{\log\rho(x)}{w^+(x)} + \frac{c_{g+1}}{w^+(x)} + \frac{2\pi i n_{g+1}}{w^+(x)} + \frac{v_k}{w^+(x)}\,, \\
x \in \Delta_k,\ k = 1, \dots, g,
\end{gathered}
\tag{B.13}
$$

где $v_k = 2\displaystyle\int_S \log\rho(t)\, d\Omega_k^+(t)$. Непосредственно из (B.13) вытекает следующее представление для функции u_3:

$$
u_3(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\log\rho(x)\,dx}{(x-\lambda)w^+(x)} + \frac{c_{g+1}}{2w(\lambda)} + \frac{\pi i n_{g+1}}{w(\lambda)} + v(\lambda),
$$

где

$$
v(\lambda) = \sum_{j=1}^{g} \frac{v_j}{2\pi i}\int_{\Delta_j} \frac{dx}{(\lambda - x)w^+(x)},
$$

а $e^{c_{g+1}} = C_{g+1} = \prod_{j=1}^{g}(e_{2g+2} - \lambda_j)$. Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
u_2(\lambda) &= w(\lambda)u_3(\lambda) \\
&= \frac{w(\lambda)}{2\pi i}\int_S \frac{\log\rho(x)\,dx}{(x-\lambda)w^+(x)} + \frac{c_{g+1}}{2} + \pi i n_{g+1} + v(\lambda)w(\lambda).
\end{aligned}
$$

Так как $u_1(\lambda) = u_2(\lambda) + 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{g} m_j\Omega_j(\lambda)$, то для функции $f_1(\lambda)$ имеем:

$$
\begin{aligned}
f_1(\lambda) = e^{u_1(\lambda)} = \exp\biggl\{&\frac{w(\lambda)}{2\pi i}\int_S \frac{\log\rho(x)\,dx}{(x-\lambda)w^+(x)} + \frac{c_{g+1}}{2} + \pi i n_{g+1} \\
&+ v(\lambda)w(\lambda) + 2\pi i\sum_{j=1}^{g} m_j\Omega_j(\lambda)\biggr\},
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

где $e^{c_{g+1}/2} = \sqrt{C_{g+1}} = \sqrt{\prod\limits_{j=1}^{g}(e_{2g+2}-\lambda_j)} > 0$. Нормировкой $\Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)}) = \prod\limits_{j=1}^{g}(\lambda-\lambda_j)$ функция Ψ определяется однозначно с точностью до сомножителя ± 1, этому факту соответствует величина $\exp\{\pi i n_{g+1}\}$ в представлении (B.14). Тем самым, в дальнейшем мы можем считать, что $n_{g+1}=0$.

Проинтегрируем теперь (тождественно нулевой) дифференциал, стоящий в левой части формулы (B.11), по пути, ведущему от точки e_{2g+2} до произвольной точки $\boldsymbol{\lambda}\in\mathfrak{R}$ и лежащему в рассеченной римановой поверхности $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Получим следующее равенство

$$\Omega(\infty^{(1)},\infty^{(2)};\boldsymbol{\lambda}) = -G(\boldsymbol{\lambda},\infty) - 2\pi i\sum_{j=1}^{g}\omega_j(\infty)\Omega_j(\boldsymbol{\lambda}). \tag{B.15}$$

Напомним, что $f_1(\lambda) = F(\lambda^{(1)}) = \Psi(\lambda^{(1)})F_3(\lambda^{(1)})$, где $F_3 = F_1^{n-g}F_2$, а функции F_1 и F_2 заданы (B.4). Учитывая (B.4) и (B.15), получаем из (B.14) следующее представление для функции $\Psi(\lambda^{(1)})$, справедливое при условии, что все $\lambda_j\in(e_{2j},e_{2j+1})$:

$$\begin{aligned}
\Psi(\lambda^{(1)}) &= e^{(n-g)G(\lambda,\infty)}\exp\biggl\{-\sum_{j=1}^{g}\Omega(\infty^{(1)},\boldsymbol{\lambda}_j;\lambda^{(1)})\biggr\}\\
&\qquad\times\exp\biggl\{\frac{w(\lambda)}{2\pi i}\int_S\frac{\log\rho(x)\,dx}{(x-\lambda)w^+(x)}+\frac{c_{g+1}}{2}+v(\lambda)w(\lambda)\biggr\}\\
&\qquad\times\exp\biggl\{2\pi i\sum_{j=1}^{g}\bigl((n-g)\omega_j(\infty)+m_j\bigr)\Omega_j(\lambda^{(1)})\biggr\}\\
&= \Phi^{n-g}(\lambda)\exp\biggl\{\sum_{j=1}^{g}\Omega(\boldsymbol{\lambda}_j,\infty^{(1)};\lambda^{(1)})\biggr\}\times\\
&\qquad\times\exp\biggl\{\frac{w(\lambda)}{2\pi i}\int_S\frac{\log\rho(x)\,dx}{(x-\lambda)w^+(x)}+\frac{c_{g+1}}{2}+v(\lambda)w(\lambda)\biggr\}\\
&\qquad\times\exp\biggl\{2\pi i\sum_{j=1}^{g}\theta_j(n)\Omega_j(\lambda^{(1)})\biggr\},
\end{aligned}\tag{B.16}$$

где $\Phi(\lambda) = e^{G(\lambda,\infty)}$ – (многозначная) отображающая функция, где $\theta_k=\theta_k(n)=\ell_k(n)+\{(n-g)\omega_k(\infty)\}$, целые числа $\ell_k(n)\in\mathbb{Z}$ равномерно ограничены при $n\to\infty$.

Положим теперь $f_2(\lambda) = F(\lambda^{(2)}) = \Psi(\lambda^{(2)})F_3(\lambda^{(2)})$. Нетрудно видеть, что для функции $\Psi_2(\lambda) = \Psi(\lambda^{(2)})$, $\lambda \in D$, выполняется краевое условие: $\Psi_2^+(x)\Psi_2^-(x) = \rho(x)X_g(x)$, $x \in S$ (ср. с (B.2)). Используя это краевое условие нетрудно доказать, что для функции f_2, голоморфной и отличной от нуля в области D, выполняется равенство $f_2(\lambda) = 1/f_1(\lambda)$, $\lambda \in D$. Отсюда уже легко вытекает следующее представление для Ψ-функции при $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
\Psi(\lambda^{(2)}) = e^{(g-n)G(\lambda,\infty)} &\exp\Biggl\{-\sum_{j=1}^{g}\Omega(\infty^{(1)},\boldsymbol{\lambda}_j;\lambda^{(2)})\Biggr\} \\
&\times \exp\Biggl\{\frac{w(\lambda)}{2\pi i}\int_S\frac{\log\rho(x)\,dx}{(\lambda-x)w^+(x)} - \frac{c_{g+1}}{2} - v(\lambda)w(\lambda)\Biggr\} \\
&\times \exp\Biggl\{2\pi i\sum_{j=1}^{g}\bigl((n-g)\omega_j(\infty)+m_j\bigr)\Omega_j(\lambda^{(2)})\Biggr\} \\
= \frac{1}{\Phi^{n-g}(\lambda)} &\exp\Biggl\{\sum_{j=1}^{g}\Omega(\boldsymbol{\lambda}_j,\infty^{(1)};\lambda^{(2)})\Biggr\} \\
&\times \exp\Biggl\{\frac{w(\lambda)}{2\pi i}\int_S\frac{\log\rho(x)\,dx}{(\lambda-x)w^+(x)} - \frac{c_{g+1}}{2} - v(\lambda)w(\lambda)\Biggr\} \\
&\times \exp\Biggl\{2\pi i\sum_{j=1}^{g}\theta_j(n)\Omega_j(\lambda^{(2)})\Biggr\}.
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

Подведем итог. Мы показали, что при условии $\lambda_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, $j = 1, \dots, g$, существование решения задачи ($\mathscr{R}$) эквивалентно тому, что точки $\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_g$ являются решением проблемы обращения Якоби (B.12) со специальной правой частью и одновременно нашли явное представление (B.16)–(B.17) функции $\Psi(\boldsymbol{\lambda})$ для $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{R} \setminus \boldsymbol{\Gamma}$ и при нормировке $\Psi(\lambda^{(1)})\Psi(\lambda^{(2)}) = \prod_{j=1}^{g}(\lambda - \lambda_j)$. Теперь уже нетрудно проверить непосредственно, что эти явные формулы сохраняют смысл, если при некотором $k \in \{1, \dots, g\}$ точка λ_k совпадает с одним из концов k-й лакуны L_k. Каждую такую точку $\boldsymbol{\lambda}_k$ будем считать как нулем предельного значения $\Psi^+(\mathbf{x})$, так и нулем предельного значения $\Psi^-(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\Gamma}$. При этом соглашении кусочно мероморфная на $\mathfrak{R}$ функция (B.16)–(B.17) дает решение задачи ($\mathscr{R}$) в общем случае. Отметим, что так как вес ρ – голоморфная на $\boldsymbol{\Gamma}$ функция, то как функция $\Psi(\lambda^{(1)})$, $\lambda^{(1)} \in D^{(1)}$, так и функция $\Psi(\lambda^{(2)})$, $\lambda^{(1)} \in D^{(2)}$ голоморфно продолжаются через

$\mathbf{\Gamma}$ на другой лист римановй поверхности. Так как, вообще говоря, $\rho \not\equiv 1$, то на $\mathbf{\Gamma}$ эти два голоморфных продолжения не совпадают.

Отметим, что классическому случаю $g = 0$ и $S = [-1, 1]$ соответствуют $\mathscr{F}(\boldsymbol{\lambda}) \equiv 1$ и

$$D(\lambda;\rho) = \exp\{A(\lambda^{(1)};\rho)\} = \exp\biggl\{\frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\log\rho(x)}{\lambda-x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\biggr\}$$

– классическая функция Сегё. Случай, когда S есть объединение непересекающихся интервалов вещественной оси, а вес ρ такой, что $i\rho/\sqrt{h} > 0$ и выполняются условия ортогональности

$$\int_S \log\rho(x)\,d\Omega_k^+(x) = 0, \qquad k = 1, \dots, g,$$

рассматривался Ахиезером [34]–[36], который для такого веса ввел оператор

$$\exp\biggl\{\frac{\sqrt{h(\lambda)}}{2\pi}\int_S\frac{\log\rho(x)}{\lambda-x}\,\frac{dx}{\sqrt{-h(x)}}\biggr\}.$$

5. Докажем теперь, что если вес ρ – марковский, т.е. $\rho(x)/\sqrt{-h(x)} > 0$ на S, то проблема обращения Якоби (B.12) всегда имеет решение $\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_g$ такое, что все $\lambda_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$. Так как такой дивизор $\boldsymbol{\lambda}_1 + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g$ неспециальный, то отсюда сразу получим, что это решение единственно.

Итак, пусть все $\lambda_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$. Нетрудно видеть, что при этом условии

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega_\ell^+(\zeta) = \frac12\sum_{k=1}^{g}\omega_k(\infty)B_{\ell k} + \frac12 - \frac12 B_{j\ell} - \frac12\theta_{\ell j} + \int_{e_{2j}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega_\ell, \tag{B.18}$$

где

$$\theta_{\ell j} = \sum_{k=j+1}^{g}\delta_{\ell k} = \begin{cases}1, & \ell > j,\\ 0, & \ell \leqslant j,\end{cases} \qquad \sum_{j=1}^{g}\theta_{\ell j} = \ell - 1, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant g,$$

а путь интегрирования в последнем интеграле берется на первом листе по части отрезка $[e_{2j}, e_{2j+1}]$, если $\boldsymbol{\lambda}_j = \lambda_j^{(1)}$, и – на втором листе, если $\boldsymbol{\lambda}_j = \lambda_j^{(2)}$. Следовательно, из (B.18) получаем

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{g}\int_{\infty^{(1)}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega_\ell^+(\zeta)\\ &= \frac{g}{2}\sum_{k=1}^{g}\omega_k(\infty)B_{\ell k} + \frac{g}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}B_{j\ell} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}\theta_{\ell j} + \sum_{j=1}^{g}\int_{e_{2j}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega_\ell\\ &= \frac{g}{2}\sum_{k=1}^{g}\omega_k(\infty)B_{\ell k} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}B_{j\ell} + \frac{g-\ell+1}{2} + \sum_{j=1}^{g}\int_{e_{2j}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega_\ell.\end{aligned}$$

Так как вес ρ – марковский, то $i\rho/w^+ = \rho(x)/\sqrt{-h(x)} > 0$ на S. Тем самым для выбранной выше ветви корня $\sqrt{h(\lambda)}$ (напомним, что $\sqrt{h(\lambda)} > 0$ при $\lambda > e_{2g+2}$) имеем: $\arg\rho(\zeta) = \arg\sqrt{h(\zeta)} - \pi/2$, $\zeta \in S$; в частности, $\arg\rho(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \Delta_{g+1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\int_S \log\rho(\zeta)\, d\Omega_\ell^+(\zeta)\\ &= \int_S \log|\rho(\zeta)|\, d\Omega_\ell^+(\zeta) + \sum_{k=1}^{g+1}(g+1-k)\pi i\int_{\Delta_k} d\Omega_\ell^+(\zeta)\\ &= \int_S \log|\rho(\zeta)|\, d\Omega_\ell^+(\zeta) + \frac{g-\ell+1}{2}\pi i.\end{aligned}$$

Таким образом, система (B.12) эквивалентна следующей системе относительно точек $\boldsymbol{\lambda}_j = \boldsymbol{\lambda}_j(n)$, $j = 1,\dots,g$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{g}\int_{e_{2j}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega_\ell(\boldsymbol{\zeta})\\ &= -\frac{g}{2}\sum_{j=1}^{g}\omega_j(\infty)B_{\ell j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}B_{\ell j} + \frac{i}{\pi}\int_S \log|\rho(\zeta)|\, d\Omega_\ell^+(\zeta) -\\ &\qquad - \sum_{j=1}^{g}(n-g)\omega_j(\infty)B_{\ell j} - (n_\ell - n_{g+1}) - \sum_{j=1}^{g}m_j B_{\ell j}\\ &\equiv -\frac{g}{2}\sum_{j=1}^{g}\omega_j(\infty)B_{\ell j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}B_{\ell j}\\ &\qquad + \frac{i}{\pi}\int_S \log|\rho(\zeta)|\, d\Omega_\ell^+(\zeta) - \sum_{j=1}^{g}\boldsymbol{\{}(n-g)\omega_j(\infty)\boldsymbol{\}}B_{\ell j}, \qquad \text{(B.19)}\end{aligned}$$

$\ell = 1, \ldots, g$. Нетрудно видеть, что из условия каноничности базиса дифференциалов $d\Omega_\ell$ (относительно заданных базисных циклов $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}$) вытекает, что каждый дифференциал $d\Omega_\ell(x)$ вещественнозначен на S и имеет ровно один нуль в каждом интервале (e_{2j-1}, e_{2j}), $j = 1, \ldots, g$, $j \neq \ell$. В лакунах (e_{2j}, e_{2j+1}), $j = 1, \ldots, g$, эти дифференциалы принимают чисто мнимые значения, отличные от нуля. Отсюда вытекает, во-первых, что все $B_{\ell j}$ чисто мнимые и, во-вторых, что и левая, и правая части (B.19) также чисто мнимые. Следовательно, поскольку первая часть (B.19) – точное равенство, то $n_\ell - n_{g+1} = 0$, $\ell = 1, \ldots, g$. Так как все точки $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbf{L}_j$, то левая часть (B.19) равномерно ограничена при $n \to \infty$. Тем самым, ограничена и правая часть (B.19). Значит, равномерно ограничены величины $1/2 - m_j - (n-g)\omega_j(\infty) - g\omega_j(\infty)/2$. Поэтому $m_j = -[(n-g)\omega_j(\infty)] + \widetilde{m}_j(n)$, где $\widetilde{m}_j(n) \in \mathbb{Z}$ – равномерно ограничены; здесь $[\,\cdot\,]$ – целая часть числа. Кроме того, матрица $\|B_{\ell j}\|$ невырождена. Следовательно, существуют такие величины $\rho_1, \ldots, \rho_g$, что все $\rho_j \in \mathbb{R}$ и

$$\sum_{j=1}^{g} \rho_j B_{\ell j} = \frac{i}{\pi} \int_S \log|\rho(\zeta)|\, d\Omega_\ell^+(\zeta), \qquad \ell = 1, \ldots, g.$$

Значит, (B.19) записывается в виде:

$$\sum_{j=1}^{g} \int_{e_{2j}}^{\boldsymbol{\lambda}_j} d\Omega_\ell(\boldsymbol{\zeta}) = \sum_{j=1}^{g} y_j B_{\ell j} \quad (\mathrm{mod\ периодов}), \tag{B.20}$$

где

$$\begin{aligned} y_j &= \frac{1}{2} - m_j - \frac{g}{2}\omega_j(\infty) + \rho_j - (n-g)\omega_j(\infty) \pmod 1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{g}{2}\omega_j(\infty) + \frac{1}{2} + \rho_j - (n-g)\omega_j(\infty) \pmod 1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{g}{2}\omega_j(\infty) + \rho_j - \{(n-g)\omega_j(\infty)\} \pmod 1, \end{aligned} \tag{B.21}$$

$y_j \in [0,1)$. В отличие от случая общего отображения Абеля (A.1), в соотношениях (B.20) точки $\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_g$ уже упорядочены тем, что интегрирование ведется от левого края лакуны e_{2j} до соответствующей точки $\boldsymbol{\lambda}_j$ и $\lambda_1 < \cdots < \lambda_g$. Тем самым, соотношения (B.20) задают отображение вещественного g-мерного тора $\mathbb{T}^g = \mathbf{L}_1 \times \cdots \times \mathbf{L}_g$ в тор $\mathbb{T}^g = [0,1) \times \cdots \times [0,1)$. Это отображение непрерывно и инъективно, следовательно, оно биективно (см. п. 4 приложения A, а также [37, гл. X]). Тем самым, при любых вещественных $y_k \in [0,1)$ система (B.20) имеет (единственное) решение $\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_g$ такое, что все $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbf{L}_j$.

6. Рассмотрим в $\operatorname{Jac}\mathfrak{R}$ множество точек с координатами

$$x_k = x_k^0, \quad y_k = \tau_k, \quad k = 1, \dots, g, \quad \text{где } \tau_k \in [0,1),$$

изоморфное g-мерному вещественному тору $\mathbb{T}^g$. Пусть $\mathbb{S} = \mathbb{S}(x^0)$ – соответствующее ему множество в $S^g\mathfrak{R}$:

$$\mathbb{S} = \Big\{ d = \boldsymbol{\lambda}_1 + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g : \\ \sum_{j=1}^{g} \Omega_k(\boldsymbol{\lambda}_j) \equiv x_k^0 + \sum_{j=1}^{g} \tau_j B_{kj}, \tau_j \in [0,1),\ k = 1, \dots, g \Big\}.$$

Если координаты x_k^0 дивизора $d^0 = \boldsymbol{\lambda}_1^0 + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g^0$ таковы, что всякий дивизор d из $\mathbb{S}$ – неспециальный, то каждый дивизор $d \in \mathbb{S}$ однозначно определяется заданными $\tau_j \in [0,1)$: $d = d(\tau_1, \dots, \tau_g)$, т.е. $\mathbb{S}$ также изоморфно $\mathbb{T}^g$. Пусть

$$\mathbb{S}_1 = \{ d \in \mathbb{S} : \tau_j = y^0 + t\omega_j(\infty) \pmod 1, t \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, g \},$$
$$\mathbb{S}_0 = \{ d \in \mathbb{S} : \tau_j = y^0 + n\omega_j(\infty) \pmod 1, n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, g \},$$

$\mathbb{S}_0 \subset \mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}$; $\mathbb{S}_1 = \{ d(t) = \boldsymbol{\lambda}_1(t) + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g(t) \}$ – прямолинейная обмотка тора $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}_0 = \{ d(n) = \boldsymbol{\lambda}_1(n) + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g(n) \}$ – счетное множество. Движение дивизора $d(t) = \boldsymbol{\lambda}_1(t) + \dots + \boldsymbol{\lambda}_g(t)$ на торе $\mathbb{S}$ – квазипериодическое с группой периодов $\omega_1(\infty), \dots, \omega_g(\infty)$ (см., например, [38], глава 10, § 51). С точки зрения изучения асимптотического поведения нулей Q_n и R_n нас интересует множество предельных точек $\mathbb{S}_0'$. Отметим следующий хорошо известный факт [38, гл. 10, § 51]: если величины $\omega_1(\infty), \dots, \omega_g(\infty)$ рационально независимы, то $\mathbb{S}_1' = \mathbb{S}$, т.е. траектория $\mathbb{S}_1$ дивизора $d(t)$ всюду плотна в $\mathbb{S}$; если же $\omega_1(\infty), \dots, \omega_g(\infty)$ и 1 рационально независимы[9], то и $\mathbb{S}_0' = \mathbb{S}$.

Функции $\lambda_j = \lambda_j(t)$ – вещественно-аналитические функции переменной $t \in \mathbb{R}$, поэтому для $d \in \mathbb{S}_1$ получаем:

$$\sum_{j=1}^{g} \Omega_k'(\boldsymbol{\lambda}_j)\dot{\lambda}_j = \sum_{j=1}^{g} \omega_j(\infty) B_{jk}, \quad k = 1, \dots, g, \tag{B.22}$$

[9] В силу соотношения $\omega_1(\infty) + \dots + \omega_{g+1}(\infty) = 1$ это условие эквивалентно тому, что $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ рационально независимы.

где $\dot{\lambda}_k = d\lambda_k/dt$. Рассмотрим (B.22) как линейную систему относительно $\dot{\lambda}_j$. Нетрудно видеть, что

$$\det \|\Omega'_k(\boldsymbol{\lambda}_j)\| = \frac{\mathrm{const}}{\prod\limits_{j=1}^{g} w(\boldsymbol{\lambda}_j)} v(\lambda_1, \dots, \lambda_g), \tag{B.23}$$

где const зависит только от точек $e_1, \dots, e_{2g+2}$, V – определитель Вандермонда от g переменных. Пусть D_k – определитель матрицы, полученной из матрицы системы (B.22) заменой k-го столбца на столбец правых частей. С помощью соотношения (A.5) получаем:

$$D_k = \mathrm{const} \cdot \int_{e_{2g+2}}^{+\infty} \frac{V_k(\lambda_1, \dots, x, \dots, \lambda_g)}{\prod\limits_{j\neq k} w(\boldsymbol{\lambda}_j)} \frac{dx}{w(x)}, \tag{B.24}$$

где const – та же, что и в (B.23), путь интегрирования – луч от e_{2g+2} до $+\infty$, V_k – определитель Вандермонда от g переменных, в котором λ_k заменено на x. Разрешая теперь систему (B.22) относительно величин $\dot{\lambda}_j$ и используя только что выведенные формулы (B.23)–(B.24), а также явную формулу для определителя Вандермонда, получаем динамическую систему (26). Система Дубровина [39] (см. также [37], глава VIII, формула (8.2.15))

$$\dot{\lambda}_k = \pm \frac{2\sqrt{-h(\lambda_k)}}{\prod\limits_{j\neq k} (\lambda_k - \lambda_j)}, \quad k = 1, \dots, g,$$

описывающая динамику нулей конечно-зонных решений уравнения Шрёдингера, получается из (26) заменой сомножителя $(\lambda - e_{2g+2})$ на $(\lambda/e_{2g+2} - 1)$ и последующим (формальным) предельным переходом при $e_{2g+2} \to \infty$.

Положим

$$\vec{\Omega}(\lambda) = \big(\Omega_1(\lambda), \dots, \Omega_g(\lambda)\big)^T, \qquad \vec{\omega}(\lambda) = \big(\omega_1(\lambda), \dots, \omega_g(\lambda)\big)^T,$$

где $\lambda \in D$, $\omega_j(\lambda) = \omega(\lambda; \Delta_j, D)$. Нетрудно проверить, что справедливо следующее представление

$$\mathrm{Re}\,\big\{\mathbf{B}^{-1}\vec{\Omega}(\lambda)\big\} = -\frac{1}{2}\vec{\omega}(\lambda), \quad \lambda \in D. \tag{B.25}$$

С учетом этой формулы соотношения (26) для дивизора $d(t) = \boldsymbol{\lambda}_1(t)+\dots+\boldsymbol{\lambda}_g(t) \in \mathbb{S}_1$ переписываются в терминах гармонических мер так:

$$\sum_{j=1}^{g} \varepsilon_j \omega_k(\lambda_j) = (g-2t)\omega_k(\infty) + \rho_k \pmod 2, \tag{B.26}$$

где $\varepsilon_j = \pm 1$ в зависимости от точки $\boldsymbol{\lambda}_j = (\lambda_j, \pm)$, а для величин ρ_k справедливо представление

$$\rho_k = \frac{1}{\pi}\int_S \log|\rho(\zeta)|\frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n_\zeta^+}\,d\zeta, \qquad k=1,\dots,g;$$

здесь $\partial/\partial n_\zeta$ означает производную по внутренней нормали к границе области D. В частности, если при переходе от $t=n$ к $t=n+1$ знаки всех величин ε_j сохраняются, то имеем

$$\sum_{j=1}^{g} \varepsilon_j \Delta\omega_k(\lambda_j) = -2\omega_k(\infty) \pmod 2$$

(ср. [29], лемма 3). Соотношения (B.26) означают, что движение дивизора $d(t) = \boldsymbol{\lambda}_1(t)+\dots+\boldsymbol{\lambda}_g(t)$ на торе $\mathbf{L}_1\times\dots\times\mathbf{L}_g$ происходит с постоянной “угловой скоростью” (см. ниже п. 7).

Подчеркнем, что здесь фактически доказано, что система сравнений относительно величин $\varepsilon_j = \pm 1$ и λ_j

$$\sum_{j=1}^{g} \varepsilon_j \omega_k(\lambda_j) = (g-2n)\omega_k(\infty) - \frac{2}{\pi}\int_S \log|\rho(\zeta)|\frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n_\zeta^+}\,d\zeta \pmod 2,\ k=1,\dots,g,$$

всегда имеет единственное решение $\lambda_1,\dots,\lambda_g$, притом такое, что все $\lambda_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$.

Соотношение (B.25) приводит к следующей формуле для y-координат τ_k, $k=1,\dots,g$, дивизора $d = \boldsymbol{\lambda}_1+\dots+\boldsymbol{\lambda}_g \in \mathbb{S}$:

$$\tau_k = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g} \varepsilon_j \omega_k(\lambda_j) \pmod 1 \tag{B.27}$$

и следующей связи между комплексными гармоническими мерами $\omega_k(\lambda) + i\omega_k^*(\lambda)$ и абелевыми интегралами:

$$\Omega_j(\lambda) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{g} B_{kj}\big(\omega_k(\lambda) + i\omega_k^*(\lambda)\big), \quad \lambda \in D.$$

7. Напомним геометрический смысл гармонической меры (см., например, [40]). В этом пункте предполагается, что D – односвязная ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница ∂D которой – аналитическая кривая. Пусть $\ell = \ell(\zeta_1, \zeta_2) \subset \partial D$ – открытая дуга на ∂D; см. рис. 2.

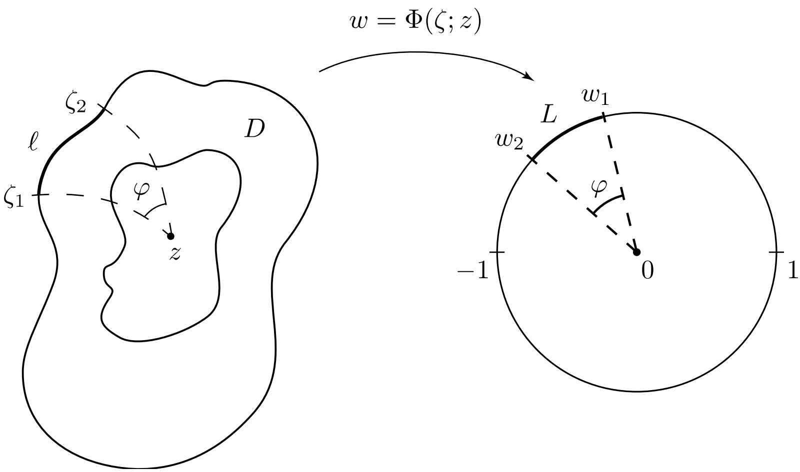

Рис. 2. Функция $w = \Phi(\zeta; z) = \exp\{-G(\zeta, z)\}$ отображает конформно и однолистно область D на внутренность единичного круга $\mathbb{D} : |w| < 1$ так, что точка $\zeta = z$ переходит в точку $w = 0$. При этом по принципу соответствия границ, дуге $\ell = \ell(\zeta_1, \zeta_2) \subset \partial D$ соответствует дуга $L = L(w_2, w_1) \subset \partial\mathbb{D}$, $w_j = \exp\{-ig^*(\zeta_j, z)\}$.

Функция $\omega(z) = \omega(z; \ell, D)$ – ограниченная гармоническая функция в области D, предельные значения которой удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{z\to\zeta} \omega(z) = \begin{cases} 1, & \zeta \in \ell, \\ 0, & \zeta \in \partial D \setminus \bar{\ell}. \end{cases}$$

Зафиксируем точку $z \in D$. Пусть $g(\zeta, z)$, $\zeta \in D$, – функция Грина области D с особенностью в точке $\zeta = z$, $g^*(\zeta, z)$ – гармонически сопряженная ей функция, $G(\zeta, z) = g(\zeta, z) + ig^*(\zeta, z)$ – (многозначная) комплексная функция Грина. Функция $w = \Phi(\zeta; z) = \exp\{-G(\zeta, z)\}$ отображает конформно и однолистно область D на внутренность единичного круга $\mathbb{D} : |w| < 1$ так, что точка $\zeta = z$ переходит в точку $w = 0$. При этом по принципу соответствия границ, дуге $\ell \subset \partial D$ соответствует дуга $L = L(w_2, w_1) \subset \partial\mathbb{D}$, $w_j = \exp\{-ig^*(\zeta_j, z)\}$. Напишем для функции $\omega(z)$ формулу Грина:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\ell \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n_\zeta} ds_\zeta, \tag{B.28}$$

где $\partial/\partial n_\zeta$ – производная по внутренней нормали к ℓ, и воспользуемся тем, что $\partial g(\zeta, z)/\partial n_\zeta = \partial g^*(\zeta, z)/\partial t_\zeta$, где $\partial/\partial t_\zeta$ – производная по касательной к кривой ℓ в точке ζ, причем вектор касательной t_ζ получается из вектора нормали n_ζ поворотом против часовой стрелки на угол $\pi/2$. Тогда (B.28) примет вид:

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_\ell \frac{\partial g^*(\zeta, z)}{\partial t_\zeta} ds_\zeta = \frac{g^*(\zeta_2, z) - g^*(\zeta_1, z)}{2\pi}\\ &= \frac{\arg w_2 - \arg w_1}{2\pi} = \frac{\varphi}{2\pi},\end{aligned}$$

где $\varphi = \arg w_2 - \arg w_1$ – угол, под которым дуга ℓ "видна" из точки z.

Рассмотрим теперь случай многосвязной области D, соответствующий ситуации, когда в носителе меры μ имеется конечное число $g \geqslant 1$ лакун (α_j, β_j), $j = 1, 2, \dots, g$, т.е. $\operatorname{supp}\mu = [-1, 1] \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{g}(\alpha_j, \beta_j)$. Пусть $g(z, \infty) = g_D(z, \infty)$ – функция Грина области D, $g^*(z, \infty)$ – гармонически сопряженная ей функция, $G(z, \infty) = g(z, \infty) + ig^*(z, \infty)$ – многозначная комплексная функция Грина. В верхней полуплоскости $\Pi_+ : \operatorname{Im} z > 0$ эта функция однозначна. Нормируем ее условием $g^*(1, \infty) = 0$. Тогда $g^*(-1, \infty) = \pi$ и функция $w = \Phi(z) = \exp\{-G(z, \infty)\}$ отображает верхнюю полуплоскость Π_+ конформно и однолистно на нижний полукруг $K_- : |w| < 1$, $\operatorname{Im} w < 0$, так, что $\Phi(1) = 1$, $\Phi(\infty) = 0$, $\Phi(-1) = -1$. При этом отрезки $\Delta_j = [\beta_{j-1}, \alpha_j]$, $j = 1, \dots, g+1$, где $\beta_0 = -1$, $\alpha_{g+1} = 1$, переходят в дуги ℓ_j единичной полуокружности $w = e^{i\varphi}$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0$, а лакуны (α_j, β_j), $j = 1, 2, \dots, g$, –

в радиальные отрезки I_j длины $|I_j| < 1$, выходящие из концов соответствующих дуг; см. рис. 3.

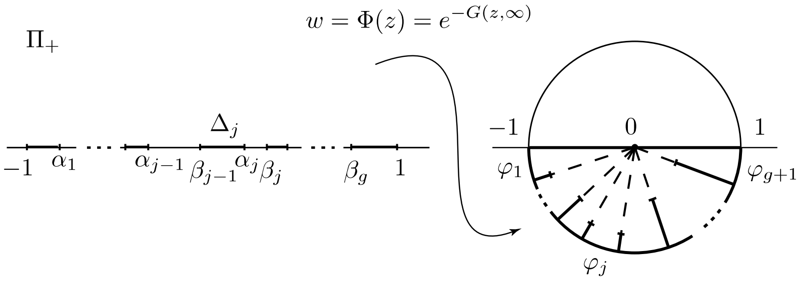

Рис. 3. Функция $w = \Phi(z) = \exp\{-G(z,\infty)\}$ отображает верхнюю полуплоскость Π_+ конформно и однолистно на нижний полукруг $K_- : |w| < 1,\ \operatorname{Im} w < 0$, так, что $\Phi(1) = 1$, $\Phi(\infty) = 0$, $\Phi(-1) = -1$. При этом отрезки $\Delta_j = [\beta_{j-1}, \alpha_j]$, $j = 1, \dots, g+1$, где $\beta_0 = -1$, $\alpha_{g+1} = 1$, переходят в дуги ℓ_j единичной полуокружности $w = e^{i\varphi}$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0$, а лакуны (α_j, β_j), $j = 1, 2, \dots, g$, – в радиальные отрезки I_j длины $|I_j| < 1$, выходящие из концов соответствующих дуг. Величина j-го угла φ_j равна $\pi\omega_j(\infty)$.

Используя формулу Грина (B.28) для гармонической меры и соотношение $\partial g(\zeta,\infty)/\partial n_\zeta = \partial g^*(\zeta,\infty)/\partial t_\zeta$, нетрудно вычислить величину j-го угла φ_j:

$$\varphi_j = g^*(\beta_{j-1},\infty) - g^*(\alpha_j,\infty)\pi\omega_j(\infty), \quad j = 1, \dots, g+1, \quad \text{(B.29)}$$

где $\omega_j(\infty) = \omega(\infty; \Delta_j, D)$. Тем самым, длина дуги $\bigcup\limits_{k=j+1}^{g+1} \ell_k$ равна

$$\theta_j* = \sum_{k=j+1}^{g+1} \varphi_k,\ j = g, \dots, 0; \quad \theta_0 = \pi(\omega_1(\infty) + \dots + \omega_{g+1}(\infty)) = \pi.$$

Так как в каждой лакуне (α_j, β_j) располагается ровно по одному нулю ζ_j производной комплексной функции Грина, то длины соответствующих лакунам радиальных отрезков, исходящих из точек $w_j = e^{-\theta_j}$, $j = 1, \dots, g$, вычисляются по следующей формуле:

$$|I_j| = 1 - \Phi(\zeta_j)e^{\theta_j} = 1 - e^{-g(\zeta_j,\infty)} < 1.$$

Непосредственно из (B.29) вытекает, что случай равных углов φ_j в точности соответствует случаю равных гармонических мер $\omega_j(\infty)$; см. [41].

Приложение C

Задача, рассматриваемая Чебышёвым в [1], состоит в следующем. Пусть некоторая функция F задана на $\mathbb{R}$ в конечном (притом достаточно большом) числе узлов x_j, $j = 1, 2, \dots, N$. Требуется по значениям $F_j = F(x_j)$ в этих узлах построить приближенное представление функции F полиномом фиксированной "малой" степени n, $n \ll N$, которое является в определенном смысле оптимальным. Оптимальность представления понимается как минимизация среднеквадратичного уклонения значений полинома в узлах x_j от значений функции F_j, притом – с некоторыми неотрицательными весами $\theta_j^2 \geqslant 0$, $\theta_1^2 + \dots + \theta_N^2 = 1$, заданными в точках x_j. Поставленная задача была решена Чебышёвым следующим образом. Рассмотрим марковскую функцию[10] (ср. с (1))

$$f(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\theta_j^2}{\lambda - x_j}, \qquad \text{где } \lambda \neq x_j.$$

Разложим ее в (конечную) непрерывную дробь:

$$f(\lambda) = \cfrac{1}{\lambda - b_1 - \cfrac{a_1^2}{\lambda - b_2 - \cfrac{a_2^2}{\ddots \, \overline{\lambda - b_{N-1} - \cfrac{a_{N-1}^2}{\lambda - b_N}}}}}. \tag{C.1}$$

[10] Отметим, что как Чебышёв, так и Марков при выводе формальных соотношений пользовались обозначением $\sum_t \frac{\theta^2(t)}{\lambda - t}$, достаточно свободно, трактуя в зависимости от контекста в этом выражении знак $\sum_t$ и как знак суммирования для $t = x_j$ и $j = 1, 2, \dots, N$ с весом $\theta_j^2 = \theta^2(x_j)$, и как знак интегрирования при $t \in [a, b] \Subset \mathbb{R}$ с весовой функцией $\theta^2(t)$.

Тогда n-я подходящая дробь P_n/O_n, $n = 1, \ldots, N$,

$$\frac{P_n}{Q_n}(\lambda) = \cfrac{1}{\lambda - b_1 - \cfrac{a_1^2}{\lambda - b_2 - \cfrac{a_2^2}{\cfrac{\ddots}{\lambda - b_{n-1} - \cfrac{a_{n-1}^2}{\lambda - b_n}}}}}$$

к непрерывной дроби (C.1) обладает следующим характеристическим свойством в классе $\mathscr{R}_n$ рациональных дробей вида $r = p/q$, где $\deg p, \deg q \leqslant n$, $q \not\equiv 0$:

$$f(\lambda) - \frac{P_n}{Q_n}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^{2n+1}}\right), \quad \lambda \to \infty. \tag{C.2}$$

Многочлены Q_n имеют степень ровно n, удовлетворяют условиям *ортогональности* с весами $\{\theta_j^2\}_{j=1,\ldots,N}$:

$$\sum_{j=1}^{N} Q_n(x_j) x_j^k \, \theta_j^2 = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

нормировкой $Q_n(\lambda) = \lambda^n + \cdots$ определены однозначно и удовлетворяют следующим трехчленным рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered} Q_n(\lambda) = (\lambda - b_n) Q_{n-1}(\lambda) - a_{n-1}^2 Q_{n-2}(\lambda), \quad n = 2, 3, \cdots, N, \\ Q_0(\lambda) \equiv 1, \qquad Q_1(\lambda) = \lambda - b_1. \end{gathered} \tag{C.3}$$

Многочлены P_n – степени $n-1$, определяются непосредственно по Q_n:

$$P_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_n(\lambda) - Q_n(x_j)}{\lambda - x_j} \, \theta_j^2 \tag{C.4}$$

и называются многочленами второго рода.

Пусть $q_n(\lambda) = k_n Q_n(\lambda) = k_n \lambda^n + \cdots$, $k_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots, N$, – соответствующие узлам $\{x_j, \theta_j^2\}_{j=1,\ldots,N}$ ортонормированные многочлены:

$$\sum_{j=1}^{N} q_n(x_j) q_m(x_j) \, \theta_j^2 = \delta_{nm}.$$

Для них выполняется следующее трехчленное рекуррентное соотношение:

$$a_n q_n(\lambda) = (\lambda - b_n) q_{n-1}(\lambda) - a_{n-1} q_{n-2}(\lambda), \qquad \text{(C.5)}$$

где $n = 2, 3, \ldots, N$, $q_0(\lambda) \equiv 1$, $a_1 q_1(\lambda) = \lambda - b_1$. В [1] Чебышёв сопоставил функции F ее "разложение" по ортонормированной системе $\{q_n(\lambda)\}_{n=0}^N$:

$$F(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{N} A_k q_k(\lambda), \qquad A_k = A_k(F) = \sum_{j=1}^{N} F(x_j) q_k(x_j)\, \theta_j^2. \quad \text{(C.6)}$$

Тем самым, $A_k(F)$ есть фактически k-й коэффициент Фурье [11] функции F по системе $\{q_k(x)\}_{k=0}^N$. Отсюда уже легко следует, что искомый оптимальный многочлен заданной степени n есть соответствующая разложению (C.6) n-я частичная сумма

$$S_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} A_k q_k(\lambda), \qquad \text{(C.7)}$$

наименее уклоняющаяся от F в среднем квадратичном с заданными весами $\{\theta^2(x_j)\}_{j=1}^N$. В [1] Чебышёв нашел и другое подставление для оптимального многочлена, использующее так называемое воспроизводящее ядро Сегё. Вместе с тем он особо отмечает, что найденное им представление (C.7) обладает тем преимуществом, что при необходимости перейти от приближения степени n к приближению степени $n+1$ не надо искать заново $(n+1)$-й оптимальный многочлен, а нужно лишь к n-му добавить одно слагаемое $A_{n+1} q_{n+1}(\lambda)$.

[11] Подчеркнем, что в [1] Чебышёв отмечает аналогию с обычными коэффициентами Фурье совершенно отчетливо.

Список литературы

[1] П. Л. Чебышёв, "О непрерывных дробях", *Ученые записки Имп. Академии Наук*, **III** (1855), С. 636–664 (На франц. языке: Tchébycheff P. Sur les fractions continues. – Journ. de math. pures et appl. Sér. 2, 1858, Vol. 3, P. 289–323; Полное собрание сочинений. Т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948, С. 103–126)

[2] Н. И. Ахиезер, "Чебышёвское направление в теории функций", *Математика XIX века*, ред. А. Н. Колмогоров и А. П. Юшкевич, Наука, М., 1987, 9–79, MR 0916262.

[3] Т. И. Стильтьес, *Исследования о непрерывных дробях*, ОНТИ, Харьков-Киев, 1936.

[4] P. Tchébycheff, "Sur le dévelopment des fonctions à une seule variable", *Bull. Acad. Sci. St.-Pétersb. Cl. Phys.-Math.*, **1** (1860), 193–200, (На русском языке: П. Л. Чебышёв, О разложении функций одной переменной. Полное собрание сочинений, Т. II. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948, С. 335–341).

[5] Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, *Лекции по квантовой механике для студентов–математиков*, РХД, Москва-Ижевск, 2001.

[6] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.

[7] Е. М. Никишин, "Дискретный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые задачи теории функций", *Труды семинара имени И. Г. Петровского.*, **10** (1984), 3–77, MR 778879, Zbl 0573.34023.

[8] Damanik D., Killip R., and Simon B., "Necessary and sufficient conditions in the spectral theory of Jacobi matrices and Schrödinger operators", *arXiv*: *math.SP*/0309206 Vol. 1, Sept. 12, 2003, MR 2041649, ADS 2003math......9206D.

[9] K. M. Case, "Orthogonal polynomials from the viewpoint of scattering theory", *J. Math. Phys.*, **15**:12 (1974), 2166–2174, doi 10.1063/1.1666597, MR 353860, Zbl 0288.42009.

[10] J. S. Geronimo and K. M. Case, "Scattering theory and polynomials orthogonal on the real line", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **258**:2 (1980), 467–494, doi 10.2307/1998068, MR 558185, Zbl 0436.42018.

[11] B. Simon, "The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator", *Adv. Math.*, **137** (1998), 82–203, doi 10.1006/aima.1998.1728, MR 1627806, Zbl 0910.44004.

[12] А. И. Аптекарев, Е. М. Никишин, "Задача рассеяния для дискретного оператора Штурма–Лиувилля", *Матем. сб.*, **121(163)**:3(7) (1983), 327–358, Mi sm2205, MR 708000, Zbl 0527.34024.

[13] А. И. Аптекарев, "Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода", *Матем. сб.*, **125(167)**:2(10) (1984), 231–258, Mi sm2080, MR 764479.

[14] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных разностных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100, Mi sm903, Zbl 0840.47026.

[15] D. Damanik and B. Simon, “Jost functions and Jost solutions for Jacobi matrices, I. A necessary and sufficient condition for Szegö asymptotics”, *arXiv*: *math.SP*/0502486 Vol. 1, Feb. 23, 2005, MR 2221136, ADS 2005math......2486D.

[16] R. Killip and B. Simon, “Sum rules for Jacobi matrices and their applications to spectral theory”, *Ann. of Math.* (2), **158** (2003), 253–321, MR 1999923, Zbl 1050.47025.

[17] I. Egorova and L. Golinskii, “Discrete spectrum for complex perturbations of periodic Jacobi matrices”, *J. Difference Equ. Appl.*, **11**:14 (2005), 1185–1203, MR 2182247.

[18] А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97 (139)** (1975), 607–629, Zbl 0341.30029.

[19] С. П. Суетин, “Спектральные свойства некоторого класса дискретных операторов Штурма–Лиувилля”, *УМН*, **61**:2 (2006), 171–172.

[20] А. А. Гончар, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **118 (160)**:4 (1982), 535–556, Mi sm2831, MR 671708, Zbl 0529.41016.

[21] Е. А. Рахманов, “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **103(145)**:2(6) (1977), 237–252, Mi sm2806, MR 445212, Zbl 0373.30034.

[22] С. П. Суетин, “Об асимптотических свойствах полюсов диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций”, *Матем. сб.*, **193**:12 (2002), 103–155, MR 1992106.

[23] А. А. Гончар, С. П. Суетин, “Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа”, *Современные проблемы математики*, 5, Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН, Москва, 2004, 3–65.

[24] С. П. Суетин, “Об интерполяционных свойствах диагональных аппроксимаций Паде эллиптических функций”, *УМН*, **59**:4 (2004), 201–202, MR 2106654.

[25] С. П. Суетин, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 81–114, Mi sm508, MR 1805599, Zbl 0980.41015.

[26] С. П. Суетин, “О динамике “блуждающих” нулей полиномов, ортогональных на нескольких отрезках”, *УМН*, **57**:2 (2002), 199–200, Mi rm507, MR 1918205, Zbl 02076326.

[27] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57**:1 (2002), 45–142, Mi rm475, MR 1914542, Zbl 1056.41005.

[28] J. Nuttall, “Pade polynomial asymptotics from a singular integral equation”, *Constr. Approx.*, **6**:2 (1990), 157–166, doi 10.1007/BF01889355, MR 1036606, Zbl 0685.41014.

[29] Е. А. Рахманов, “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **104 (146)**:2 (1977), 271–291, MR 1687726, Zbl 0376.30011.

[30] H. Widom, “Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane”, *Adv. Math.*, **3** (1969), 127–232, doi 10.1016/0001-8708(69)90005-X, MR 239059, Zbl 0183.07503.

[31] Э. И. Зверович, “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях”, *УМН*, **26**:1 (1971), 113–180, MR 409841.

[32] Дж. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, ИЛ, М., 1960, MR 0122987.

[33] Б. А. Дубровин, “Тэта-функции и нелинейные уравнения”, *УМН*, **36**:2 (1981), 11–80, Mi rm2891, MR 616797, Zbl 0478.58038.

[34] Н. И. Ахиезер, “Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах”, *Докл. АН СССР*, **134**:1 (1960), 9–12, Zbl 0101.29205.

[35] Н. И. Ахиезер, Ю. Я. Томчук, “К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах”, *Докл. АН СССР*, **138**:4 (1961), 743–746, Zbl 0109.29601.

[36] Н. И. Ахиезер, “Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов”, *Докл. АН СССР*, **141**:2 (1961), 263–266, Zbl 0109.29602.

[37] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984, MR 0771843.

[38] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989, MR 1037020.

[39] Б. А. Дубровин, “Периодические задачи для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечно-зонных потенциалов”, *Функц. анализ и его приложен.*, **9**:3 (1975), 41–52, MR 486780.

[40] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966, MR 0219714.

[41] J. S. Jeronimo and W. Van Assche, “Orthogonal polynomials with asymptotically periodic recurrrence coefficients”, *J. Approx. Theory*, **46** (1986), 251–283, doi 10.1016/0021-9045(86)90065-1, MR 840395.

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 6

Сергей Павлович Суетин

Сравнительная асимптотика решений и формулы следов для некоторого класса разностных уравнений

Компьютерная верстка: *В. М. Музафаров*

Сдано в набор 15.06.2006. Подписано в печать 06.09.2006.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 4,500. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mi.ras.ru/spm/ e-mail: spm@mi.ras.ru