



Общероссийский математический портал

В. Д. Степанов, Д. Э. Эдмундс, О мере некомпактности и аппроксимативных числах одного класса вольтерровских интегральных операторов, *Докл. РАН*, 1993, том 330, номер 6, 700–703

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.223.170.63

3 октября 2024 г., 18:32:53



УДК 517.51

О МЕРЕ НЕКОМПАКТНОСТИ И АППРОКСИМАТИВНЫХ ЧИСЛАХ ОДНОГО КЛАССА ВОЛЬТЕРРОВСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 1993 г. В. Д. Степанов, Д. Э. Эдмундс (Великобритания)

Представлено академиком С.М. Никольским 26.11.92 г.

Поступило 11.12.92 г.

В работе даются точные оценки меры некомпактности вольтерровских интегральных операторов вида

$$Kf(x) = v(x) \int_0^x k(x, y) f(y) u(y) dy, \quad (1)$$

действующих из лебеговских пространств $L^p(R^+)$ в $L^q(R^+)$, $1 < p \leq q < \infty$. Кроме этого, исследуется поведение аппроксимативных чисел $\alpha_m(K)$ оператора K , когда $K: L^2(R^+) \rightarrow L^2(R^+)$ и $k(x, y) = P_n(x - y)$, где $P_n(x)$ – полином степени n . В частности, точные оценки для $\alpha_m(K)$ установлены в случае $n = 1$ и проиллюстрированы примером с экспоненциальными весовыми функциями v и u .

1°. Предположим, что $1 \leq p < \infty$, $R^+ = [0, \infty)$, и пусть $L^p(R^+)$ – лебегово пространство всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Мы рассматриваем интегральные операторы вида (1) такие, что u и v являются измеримыми вещественными функциями, причем v почти всюду не обращается в нуль, а неотрицательное ядро k удовлетворяет следующим двум условиям:

а) $k(x, y)$ не убывает по x или не возрастает по y при $x > y \geq 0$;

Исследование первого автора по данной работе частично финансировалось из гранта GR/H53419 Научно-инженерного совета Великобритании.

Институт прикладной математики
Дальневосточного отделения Российской
Академии наук, Хабаровск
Математический факультет Университета
Сассекса, Фолмер, Брайтон, Англия

б) существует константа $D \geq 1$ такая, что

$$D^{-1}(k(x, y) + k(y, z)) \leq k(x, z) \leq D(k(x, y) + k(y, z)), \quad (2)$$

$x > y > z \geq 0$.

Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ и

$$A_0(t) = \left(\int_t^\infty k(x, t)^q |v(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_0^t |u|^{p'} \right)^{1/p'}$$

$$A_1(t) = \left(\int_t^\infty |v|^q \right)^{1/q} \left(\int_0^t k(t, x)^{p'} |u(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'}$$

$$A_0 = \sup_{t>0} A_0(t), \quad A_1 = \sup_{t>0} A_1(t), \quad A = \max(A_0, A_1).$$

Следующая теорема характеризует свойства ограниченности и компактности оператора K в лебеговских пространствах.

Теорема 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$. Тогда оператор K вида (1) с неотрицательным ядром $k(x, y)$, удовлетворяющим условиям а), б), ограничен из $L^p(R^+)$ в $L^q(R^+)$, если и только если $A < \infty$ и, более того,

$$D^{-1}A \leq \|K\| \leq \Upsilon(p, q)A,$$

где $\Upsilon(p, q)$ зависит только от p, q и D . Кроме этого, $K: L^p(R^+) \rightarrow L^q(R^+)$ компактен, если и только если $A < \infty$ и

$$\lim_{i \rightarrow 0} A_i(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i(t) = 0; \quad i = 0, 1.$$

Замечание 1. В другой форме теорема 1 получена в [1] для ядер $k(x, y)$, имеющих оба свойства монотонности, упомянутых в условии а). В настоящей форме она анонсирована в [3] для ядер без свойств монотонности а). Доказательство теоремы 1 вместе с аналогичными результатами для случаев $1 < q < p < \infty$ и $0 < q < 1 < p < \infty$ можно найти в [4]. Частные случаи теоремы 1 исследовались во многих работах (см. [5] и литературу там же).

2°. Определим меру некомпактности оператора K по формуле

$$\alpha(K) = \inf_{\text{rank } P < \infty} \|K - P\|. \quad (3)$$

Это определение совпадает с понятием шара (или множества) меры некомпактности K , часто обозначаемого $\tilde{\beta}(K)$ (см. [2, предложение 3.1]).

Введем обозначения:

$$J_L^0(z) = \sup_{0 < t < z} \left(\int_t^z k(x, t)^q |v(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_0^t |u|^{p'} \right)^{1/p'}$$

$$J_L^1(z) = \sup_{0 < t < z} \left(\int_t^z |v|^q \right)^{1/q} \left(\int_0^t k(t, x)^{p'} |u(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'}$$

$$J_L(z) = \max(J_L^0(z), J_L^1(z)), \quad J_L = \lim_{z \rightarrow 0} J_L(z);$$

$$J_R^0(z) = \sup_{z < t < \infty} \left(\int_t^\infty k(x, t)^q |v(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_z^t |u|^{p'} \right)^{1/p'}$$

$$J_R^1(z) = \sup_{z < t < \infty} \left(\int_t^\infty |v|^q \right)^{1/q} \left(\int_z^t k(t, x)^{p'} |u(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'}$$

$$J_R(z) = \max(J_R^0(z), J_R^1(z)), \quad J_R = \lim_{z \rightarrow \infty} J_R(z);$$

$$J = \max(J_L, J_R).$$

Следующее утверждение дает точные оценки меры некомпактности (3).

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и оператор K имеет вид (1) с неотрицательным ядром $k(x, y)$, удовлетворяющим условиям а), б). Если $A < \infty$, то

$$D^{-1}J \leq \alpha(K) \leq \gamma(p, q)J.$$

З а м е ч а н и е 2. Теорема 2 обобщает результаты [6, 7].

3°. Напомним, что для всякого положительного целого числа n n -е аппроксимативное число оператора $T: L^p \rightarrow L^q$ определяется по формуле

$$\alpha_n(T) = \inf\{\|T - P\|; P: L^p \rightarrow L^q, \text{rank } P < n\}.$$

Очевидно, что

$$\|T\| = \alpha_1(T) \geq \alpha_2(T) \geq \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(T) = \alpha(T).$$

При $p = q$ аппроксимативные числа связаны с собственными значениями операторов, однако в общем случае эти соотношения нетривиальны; за информацией по данному вопросу мы отсылаем читателя к монографиям [8 - 11]. В частности, в [9] содержатся оценки сверху чисел $\alpha_n(K)$ при $n \rightarrow \infty$ для интегральных операторов K с ядрами, имеющими конечные смешанные $L^p(L^q)$ -нормы. Упомянутые нормы могут расходиться для ядер, удовлетворяющих условию (2), однако даже в этом случае они могут порождать компактные операторы и, как показано в [12], для некоторых из них можно получить оценки аппроксимативных чисел не только сверху, но и снизу. Так, например, эта задача исследована в [12] для интегральных операторов вида (1) в случае, когда $k(x, y) = 1$. В данной статье мы обобщаем результаты [12] на операторы (1) с полиномиальными ядрами, при этом для простоты ограничиваемся случаем $p = q = 2$.

Пусть $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, — полином степени n с действительными коэффициентами, и определим T как

$$Tf(x) = v(x) \int_0^x P_n(x-y) f(y) u(y) dy.$$

Для исследования аппроксимативных чисел $\alpha_n(T)$ полезно ввести несколько обозначений. Пусть $I_k = [a_k, b_k] \subset R^+$, $d\mu(x) = |v(x)|^2 dx$, $\mu(I_k) = \int_{I_k} d\mu(x)$ и $\omega_{k,i}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, — последовательность функций на I_k , определяемых по индукции следующим образом:

$$\omega_{k,1}(x) = (x - a_k) - \frac{1}{\mu(I_k)} \int_{I_k} (y - a_k) d\mu(y),$$

$$\omega_{k,2}(x) = (x - a_k)^2 - \frac{1}{\mu(I_k)} \int_{I_k} (y - a_k)^2 d\mu(y) -$$

$$- \frac{\omega_{k,1}(x)}{\mu_1(I_k)} \int_{I_k} (y - a_k)^2 \omega_{k,1}(y) d\mu(y),$$

и так далее вплоть до

$$\omega_{k,n}(x) = (x - a_k)^n - \frac{1}{\mu(I_k)} \int_{I_k} (y - a_k)^n d\mu(y) - \dots$$

$$\dots - \frac{\omega_{k,n-1}(x)}{\mu_{n-1}(I_k)} \int_{I_k} (y - a_k)^n \omega_{k,n-1}(y) d\mu(y),$$

где

$$\mu_i(I_k) = \int_{I_k} |\omega_{k,i}(x)|^2 d\mu(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Далее положим

$$F_k f(x) = v(x) \int_{a_k}^x P_n(x-y) f(y) u(y) dy,$$

и пусть операторы Φ_k определены по формуле

$$\Phi_k f(x) = \chi_{I_k}(x) \{ Tf(x) - v(x) \left[F_k(x) - F_{k,0} - \sum_{i=1}^n F_{k,i} \omega_{k,i}(x) \right] \},$$

где χ_{I_k} – характеристические функции интервалов I_k и

$$F_{k,0} = \frac{1}{\mu(I_k)} \int_{I_k} F_k d\mu,$$

$$F_{k,i} = \frac{1}{\mu_i(I_k)} \int_{I_k} F_k \omega_{k,i} d\mu, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нетрудно представить $\Phi_k f$ в виде

$$\Phi_k f(x) = v(x) \chi_{I_k}(x) \sum_{j=0}^n (x - a_k)^j \int_0^{b_k} \rho_{k,j}(y) f(y) u(y) dy;$$

мы видим, что $\text{rang } \Phi_k \leq n + 1$. Далее, делая разбиение R^+ на N попарно непересекающихся интервалов $I_k = [a_k, b_k]$ так, что $[0, \infty) = \bigcup_{k=1}^N I_k$, полагаем

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \Phi_k. \text{ Очевидно, что } \text{rang } \Phi \leq N(n + 1). \text{ По-}$$

ложим $T_k f = T f - \Phi_k f, f \in L^2(I_k)$, и пусть

$$\|T_k\| = \sup_{\|f\|_{L^2(I_k)}=1} \left(\int_{I_k} |T_k f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (4)$$

$\|T_k\|$ – норма оператора $T_k: L^2(I_k) \rightarrow L^2(I_k)$.

Основной результат данного параграфа составляет следующая

Теорема 3. *Предположим, что $\alpha(T) = 0, 0 < \varepsilon < \|T\|$, и пусть целое число $N > 0$ и интервалы $I_k, k = 1, 2, \dots, N$, выбраны так, что $\|T_k\| = \varepsilon$ при $k = 1, 2, \dots, N - 1$ и $\|T_N\| \leq \varepsilon$. Тогда $\varepsilon \leq \alpha_N(T)$ и $\alpha_{(n+1)N}(T) \leq \varepsilon$.*

Заметим, что теорема 3 содержит неявный момент – нормы $\|T_k\|$. Заключительная часть работы посвящена нахождению явных оценок $\|T_k\|$ для случая $n = 1$ полиномов первого порядка. При $n = 0$ эта задача исследована в [12], причем в более общей ситуации, когда операторы действуют из L^p в L^q . Идея и схема доказательства теоремы 3 взяты нами из [12].

Таким образом, рассмотрим интервал $I = (a, b) \subset R^+$ и полином вида $P_1(x) = x$. Тогда

$$\Gamma_1 f(x) = v(x) \int_0^x (x - y) f(y) u(y) dy$$

и нахождение норм (4) сводится к оценке снизу и сверху нормы оператора $G: L^2(I) \rightarrow L^2(I)$, где

$$Gf(x) = v(x) \{F(x) - F_0 - \omega(x)F_1\}, \quad x \in I = (a, b),$$

$$F(x) = \int_a^x (x - y) f(y) u(y) dy, \quad F_0 = \frac{1}{\mu(I)} \int_I F d\mu, \quad (5)$$

$$F_{k,i} = \frac{1}{\mu(I)} \int_I F \omega d\mu,$$

$$\omega(x) = \int_I (x - y) d\mu(y), \quad \mu_1(I) = \int_I |\omega(x)|^2 d\mu(x).$$

Заметим, что если $\mu(I) > 0$, то на интервале I существуют три точки c_1, τ, c_2 такие, что $a < c_1 < \tau < c_2 < b, \omega(\tau) = 0, \mu(a, c_1) = \mu(c_1, \tau)$ и $\mu(\tau, c_2) = \mu(c_2, b)$.

Теорема 4. *Пусть Gf задано формулой (5) и существует $0 < \delta < 1$ такое, что $\mu(a, \tau) \geq \delta \mu(I)$ и*

$$\int_a^{c_1} (c_1 - s)^2 d\mu(s) \geq \delta \mu_1(I) / \mu(I)^2,$$

$$\int_{c_2}^b (s - c_2)^2 d\mu(s) \geq \delta \mu_1(I) / \mu(I)^2.$$

Тогда

$$\gamma(\delta) \mathcal{A} \leq \|G\| \leq \mathcal{A},$$

где $\gamma(\delta)$ зависит только от δ и

$$\mathcal{A} = \sup_{a < t < c_1} \left(\int_a^t (t - y)^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \left(\int_t^{c_1} u^2(y) dy \right)^{1/2} +$$

$$+ \sup_{a < t < c_1} \left(\int_a^t d\mu \right)^{1/2} \left(\int_t^{c_1} (y - t)^2 u^2(y) dy \right)^{1/2} +$$

$$+ \sup_{c_1 < t < \tau} \left(\int_{c_1}^t (y - c_1)^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \left(\int_t^{\tau} u^2(y) dy \right)^{1/2} +$$

$$+ \sup_{c_1 < t < \tau} \left(\int_t^{\tau} d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{c_1}^t (y - c_1)^2 u^2(y) dy \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_{\tau}^b d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{c_1}^{\tau} (y - c_1)^2 u^2(y) dy \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_a^{c_1} (c_1 - y)^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \left(\int_{c_1}^{\tau} u^2(y) dy \right)^{1/2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{c_2 < t < b} \left(\int_t^b (y-t)^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \left(\int_{c_2}^t u^2(y) dy \right)^{1/2} + \\
& + \sup_{c_2 < t < b} \left(\int_t^b d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{c_2}^t (t-y)^2 u^2(y) dy \right)^{1/2} + \\
& + \sup_{\tau < t < c_2} \left(\int_t^{c_2} (c_2-y)^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \left(\int_{\tau}^t u^2(y) dy \right)^{1/2} + \\
& + \sup_{\tau < t < c_2} \left(\int_{\tau}^t d\mu \right)^{1/2} \left(\int_t^{c_2} (c_2-y)^2 u^2(y) dy \right)^{1/2} + \\
& + \left(\int_a^{\tau} d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\tau}^{c_2} (c_2-y)^2 u^2(y) dy \right)^{1/2} + \\
& + \left(\int_{c_2}^b (y-c_2)^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \left(\int_{\tau}^{c_2} u^2(y) dy \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Пример. Пусть $u(x) = \exp(Ax)$, $v(x) = (-Bx)$, $0 < A < B$. Тогда, применяя теорему 4, получаем $\alpha_n(\Gamma_1) \approx n^{-2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bloom S., Kerman R. // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 113. P. 135 - 141.
2. Canavati J.A., Galaz-Fontes F. // J. London Math. Soc. 1990. V. 41. P. 551 - 525.
3. Ойнаров Р. // ДАН. 1991. Т. 319. № 5. С. 1076 - 1078.
4. Stepanov V.D. Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators. Rep. Inst. Appl. Math. Khabarovsk, 1992. 28 p.
5. Stepanov V.D. // J. London Math. Soc. 1990. V. 45. P. 232 - 242.
6. Stuart C.A. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1973. V. A71. P. 167 - 179.
7. Juberg R.K. // Duke Math. J. 1974. V. 41. P. 511 - 525.
8. Edmunds D.E., Evans W.D. Spectral theory and differential operators. Oxford: Univ. Press, 1987.
9. Konig H. Eigenvalue distribution of compact operators. Boston: Birkhauser, 1986.
10. Pietsch A. Operator ideals. B.: VEB Deutscher Verlag Wiss., 1978.
11. Мынбаев К.Т., Отелбаев М.О. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. М.: Наука, 1988.
12. Edmunds D.E., Evans W.D., Harris D.J. // J. London Math. Soc. 1988. V. 37. P. 471 - 489.