



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

T. A. Bodnar, On steady periodic waves on the surface of a fluid of finite depth,  
*Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 2011, Volume 52, Issue 3, 60–67

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.129.70.162

November 13, 2024, 03:24:23



УДК 517+532

## ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Т. А. Боднарь

Технологический институт Алтайского государственного технического университета,  
659305 Бийск  
E-mail: bta@bti.secna.ru

Найдено решение интегрального уравнения Некрасова и определена область его существования в теории распространения установившихся нелинейных волн по поверхности жидкости конечной глубины. Построены зависимости для расчета профиля волн и скоростей их распространения как функций отношения глубины жидкости к длине волны. Проведено сравнение скоростей, полученных с использованием линейной и нелинейной теорий распространения волн.

Ключевые слова: интегральное уравнение, нелинейный оператор, точка бифуркации, функция тока, комплексный потенциал.

**1. Решение интегрального уравнения Некрасова для жидкости конечной глубины.** Задача о периодических нелинейных волнах на поверхности жидкости конечной глубины  $h$ , представляющая собой обобщение задачи Некрасова ( $h = \infty$ ) [1], сформулирована в работе [2]. Там же получено интегральное уравнение, отличающееся от интегрального уравнения Некрасова лишь видом ядра, и доказано существование его решения. Ниже кратко изложен способ получения данного интегрального уравнения.

Рассмотрим установившиеся волны, движущиеся по поверхности жидкости глубиной  $h$ , измеренной в отсутствие волн, слева направо со скоростью  $c$ . Начало координат  $O$  находится на вертикальной линии, проходящей через гребень какой-либо волны на расстоянии  $h$  от дна, ось  $Oy$  направлена вертикально вверх, ось  $Ox$  — вправо (рис. 1). В системе координат, связанной с волной, дно движется справа налево со скоростью  $c$ .

При конечной глубине жидкости  $h$  область  $OACDEB$  одной волны длиной  $\lambda$  сверху ограничена неизвестным профилем волны, слева и справа — вертикалями, проходящими через две соседние впадины; снизу — плоским твердым дном. В плоскости комплексной переменной  $z = x + iy$  эта область отображается на кольцо  $OACDEB$  с внешним радиусом  $r = 1$ , внутренним радиусом  $r_0$  и расположенными на небольшом расстоянии друг от друга линиями разреза  $AC$ ,  $BE$  вдоль вещественной оси  $-1 \leq \xi \leq -r_0$  в плоскости комплексной переменной  $u = \xi + i\eta$  (см. рис. 1).

На границе области  $OACDEB$  комплексной плоскости  $u$  функция тока  $\psi$  и потенциал скоростей  $\varphi$  удовлетворяют следующим соотношениям: на внешней окружности  $\psi = 0$ ,  $-c\lambda/2 < \varphi < c\lambda/2$ ; на внутренней окружности  $\psi = ch$ ,  $-c\lambda/2 < \varphi < c\lambda/2$ ; на верхнем берегу разреза  $0 < \psi < ch$ ,  $\varphi = c\lambda/2$ ; на нижнем берегу  $0 < \psi < ch$ ,  $\varphi = -c\lambda/2$ . Этим соотношениям удовлетворяет также комплексный потенциал волны  $w = \varphi + i\psi$ , который определяется формулой  $w = (c\lambda/(2\pi i)) \ln u$ . Условия на внутренней окружности позволяют установить связь радиуса  $r_0$  с глубиной жидкости  $h$  и длиной волны  $\lambda$ :  $h_\lambda = h/\lambda = -(2\pi)^{-1} \ln r_0$ .

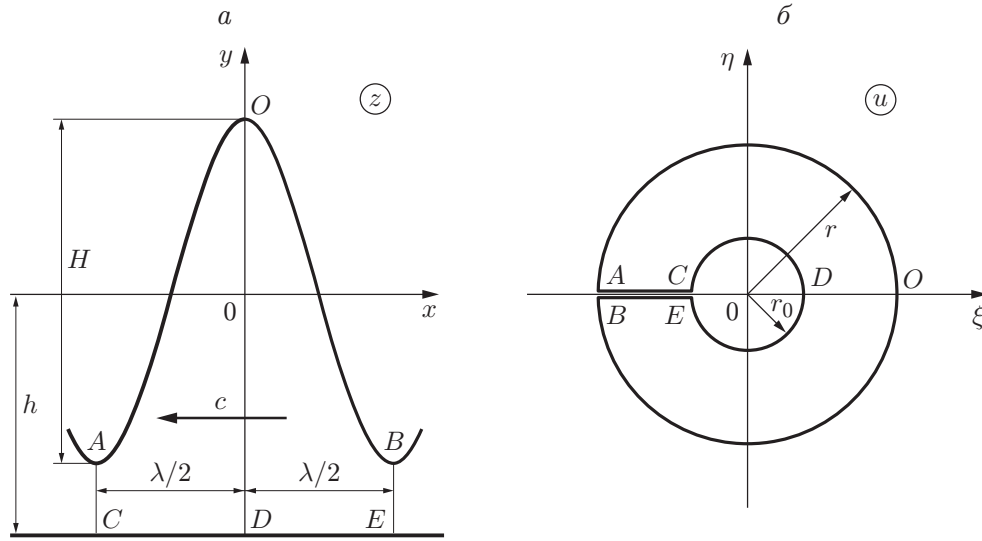


Рис. 1. Профиль волны в плоскостях комплексных переменных  $z$  (а) и  $u$  (б)

Применение приемов, аналогичных использованным при выводе уравнения Некрасова для угла  $\omega(\theta)$  между вектором скорости и горизонталью, позволило получить уравнение [2]

$$\omega(\theta) = \int_0^{2\pi} K(\theta, \sigma, h_\lambda) \frac{\mu(h_\lambda) \sin \omega(\sigma)}{1 + \mu(h_\lambda) \int_0^\sigma \sin \omega(s) ds} d\sigma \quad (1.1)$$

с ядром

$$K(\theta, \sigma, h_\lambda) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - r_0^{2k}}{1 + r_0^{2k}} \frac{\sin k\theta \sin k\sigma}{k\pi} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \text{th}(2k\pi h_\lambda) \frac{\sin k\theta \sin k\sigma}{k\pi}.$$

В [2] утверждается, что доказательство существования решения интегрального уравнения Некрасова ( $h_\lambda = \infty$ ) аналогично доказательству существования решения уравнения (1.1).

Целью данной работы является получение решения уравнения (1.1) относительно неизвестных функций  $\omega(\theta)$ ,  $\mu(h_\lambda)$  и определение для каждого фиксированного значения глубины  $h \in (0, \infty)$  области значений длины волны  $\lambda$ , при которых решение (1.1) существует.

Для решения уравнения (1.1) используем метод [3], основанный на замене ядра  $K(\theta, \sigma, h_\lambda)$  на укороченное ядро  $K_n(\theta, \sigma, h_\lambda)$ . Уравнение (1.1) отличается от уравнения Некрасова только видом ядра, что не оказывает влияния на процедуру решения интегрального уравнения, приведенную в [3]. Поэтому ниже приводятся основные обозначения и формулы из работы [3], записанные с учетом наличия в (1.1) параметра  $h_\lambda$ :

$$\omega_n(\theta) = A_n[\omega_n, h_\lambda, \mu_{1n}(h_\lambda)]. \quad (1.2)$$

Здесь

$$A_n[\omega_n(\theta), h_\lambda, \mu_{1n}(h_\lambda)] = \int_0^{2\pi} K_n(\theta, \sigma, h_\lambda) \frac{\mu_{1n}(h_\lambda) \sin \omega_n(\sigma)}{1 + \mu_{1n}(h_\lambda) \int_0^\sigma \sin \omega_n(s) ds} d\sigma,$$

$$K_n(\theta, \sigma, h_\lambda) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \operatorname{th}(2k\pi h_\lambda) \frac{\sin k\theta \sin k\sigma}{k\pi},$$

$\mu_{1n}(h_\lambda)$  — решение уравнения (1.1) относительно параметра  $\mu$  в случае укороченного ядра  $K_n(\theta, \sigma, h_\lambda)$  в окрестности первой точки бифуркации линеаризованного уравнения с собственным значением  $\mu_1 = 3 \operatorname{cth}(2\pi h_\lambda)$  [1]. Введем обозначения

$$f_n(\sigma) = \sin \omega_n(\sigma), \quad g_n(\sigma) = \int_0^\sigma \sin \omega_n(s) ds$$

и представим нелинейный оператор  $A_n[\omega_n(\theta), h_\lambda, \mu_{1n}(h_\lambda)]$  в виде суммы линейного по параметру  $\mu_{1n}(h_\lambda)$  оператора

$$\mu_{1n}(h_\lambda) B_n[\omega_n(\theta), h_\lambda] = \mu_{1n}(h_\lambda) \int_0^{2\pi} K_n(\theta, \sigma, h_\lambda) \frac{f_n(\sigma)}{1 + g_n(\sigma)} d\sigma$$

и нелинейного по тому же параметру оператора

$$C[\omega_n(\theta), h_\lambda, \mu_{1n}(h_\lambda)] = \int_0^{2\pi} K_n(\theta, \sigma, h_\lambda) \frac{f_n(\sigma) g_n(\sigma) \mu_{1n}(h_\lambda) (1 - \mu_{1n}(h_\lambda))}{(1 + g_n(\sigma))(1 + \mu_{1n}(h_\lambda) g_n(\sigma))} d\sigma.$$

Тогда уравнение (1.2) можно записать в виде

$$\omega_n(\theta) = \mu_{1n}(h_\lambda) B_n[\omega_n(\theta), h_\lambda] + C[\omega_n(\theta), h_\lambda, \mu_{1n}(h_\lambda)]. \quad (1.3)$$

Решением эквивалентных уравнений (1.2), (1.3) являются параметр  $\mu_{1n}(h_\lambda)$  и тригонометрический полином

$$\omega_n(\theta) = \sum_{k=1}^n a_k \sin k\theta \quad (1.4)$$

с коэффициентами  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), удовлетворяющими интегральным уравнениям

$$a_k = \int_0^{2\pi} \operatorname{th}(2k\pi h_\lambda) \frac{\mu_{1n}(h_\lambda) \sin k\sigma f_n(\sigma)}{3k\pi(1 + \mu_{1n}(h_\lambda) g_n(\sigma))} d\sigma. \quad (1.5)$$

Принимая в качестве нулевого приближения значение  $\mu_{11}(h_\lambda) = 1$ , можно показать, что при  $n = 1$  правая часть уравнения (1.3) является линейной функцией параметра  $\mu_{11}(h_\lambda)$ :

$$\omega_1^0(\theta) = \mu_{11}^0(h_\lambda) B_1[\omega_1^0(\theta), h_\lambda]. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) представим следующим образом:

$$\omega_1^0(\theta) = \mu_{11}^0(h_\lambda) \operatorname{th}(2\pi h_\lambda) B_1[\omega_1^0(\theta)]. \quad (1.7)$$

Здесь

$$B_1[\omega_1^0(\theta)] = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \sin \sigma f_1(\sigma)}{3\pi(1 + g_1(\sigma))} d\sigma.$$

В соответствии с [3] уравнение (1.7) имеет единственное решение

$$\omega_1^0 = a_1^0 \sin \theta, \quad \mu_{11}^0(h_\lambda) = \mu_{11}^0(\infty) \operatorname{cth}(2\pi h_\lambda),$$

где  $a_1^0 = 0,047\,452$ ;  $\mu_{11}^0(\infty) = \pi$ . Также в работе [3] доказана теорема об условиях существования и единственности решения уравнения (1.2) для жидкости бесконечной глубины ( $h_\lambda = \infty$ ). Эта теорема может быть обобщена на случай конечной глубины жидкости [4]. Действительно, функция  $\omega_1^0(\theta)$  является решением уравнения (1.2) при  $n = 1$ , если

$$A_1[\omega_1^0(\theta), \mu_{11}(h_\lambda)] - \mu_{11}^0(h_\lambda)B_1[\omega_1^0] = 0, \quad (1.8)$$

где

$$A_1[\omega_1^0(\theta), \mu_{11}(h_\lambda)] = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_{11}(h_\lambda) \sin \theta \sin \sigma f_1(\sigma)}{3\pi(1 + \mu_{11}(h_\lambda)g_1(\sigma))} d\sigma.$$

Подынтегральные функции уравнения (1.8) удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме, доказанной в [3], поэтому решение уравнения (1.2) в точке  $\omega_1^0(\theta) = a_1^0 \sin \theta$  существует и единственно, если

$$\mu_{11}^0(\infty) \leq \mu_{11}^0(h_\lambda) \leq A_1[\omega_1^0(\theta), \infty]B_1^{-1}[\omega_1^0(\theta)], \quad (1.9)$$

где

$$A_1[\omega_1^0(\theta), \infty] = \lim_{\mu_{11}(h_\lambda) \rightarrow \infty} A_1[\omega_1^0(\theta), \mu_{11}(h_\lambda)] = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \sin \sigma f_1(\sigma)}{3\pi g_1(\sigma)} d\sigma.$$

Подставляя в неравенства (1.9) решение уравнения (1.7) для  $\mu_{11}^0(h_\lambda)$ , можно показать, что первое неравенство выполняется при любых значениях  $\mu_{11}^0(h_\lambda) \geq \mu_{11}^0(\infty)$ ,  $h_\lambda \geq 0$ , а второе (с учетом того, что  $\operatorname{cth}(2\pi h_\lambda)$  является монотонно убывающей функцией  $h_\lambda$ ) — при условии

$$h_\lambda^* \leq h_\lambda \leq \infty, \quad (1.10)$$

где

$$h_\lambda^* = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{A_1[\omega_1^0(\theta), \infty] + \mu_{11}^0(\infty)B_1[\omega_1^0(\theta)]}{A_1[\omega_1^0(\theta), \infty] - \mu_{11}^0(\infty)B_1[\omega_1^0(\theta)]}.$$

Используя приведенные выше значения  $a_1^0$ ,  $\mu_{11}^0(\infty)$ , находим  $h_\lambda^* = 0,011\,348\,20$ . Следовательно, внутренний радиус  $r_0$  области отображения профиля волны на плоскость  $(\xi, \eta)$  (см. рис. 1) удовлетворяет следующему ограничению:  $r_0 < \exp(-2\pi h_\lambda^*) = 0,931\,180$ .

Функция  $\omega_n(\theta)$  является решением уравнения (1.2), если для произвольного  $h_\lambda \in [h_\lambda^*, \infty]$  и любого  $n$  коэффициент  $a_1 = a_1^0$ . При этом система  $n$  уравнений (1.5) содержит  $n$  неизвестных  $a_2, a_3, \dots, a_n, \mu_{1n}(h_\lambda)$  и имеет решение, которое не может быть тривиальным.

Решение системы (1.5) проведено методом последовательных приближений в точках  $h_\lambda = 0,08; 0,10; 0,20; 0,40; 0,60; 0,80; 1,00; 1,20; 1,40$ . Результаты расчетов параметра  $\mu_{1n}(h_\lambda)$  и коэффициентов  $a_k$  тригонометрического полинома (1.4) для ряда значений  $h_\lambda$ , удовлетворяющих условиям (1.10), показали, что при сохранении шести значащих цифр после запятой значения этих величин не меняются при  $1,4 \leq h_\lambda < \infty$ ; слабо меняются в интервале  $0,4 \leq h_\lambda < 1,4$  и существенно меняются при  $h_\lambda^* < h_\lambda < 0,4$ . Ниже приводятся результаты расчета параметра  $\mu_{11}(h_\lambda)$  и коэффициентов  $a_k$  для некоторых значений  $h_\lambda \in [h_\lambda^*, \infty]$ :

— при  $h_\lambda = 1,4$   $\mu_{15}(h_\lambda) = 3,489\,858$ ,  $a_1 = 4,745\,20 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_2 = 3,382\,66 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_3 = 3,036\,47 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_4 = 3,013\,21 \cdot 10^{-5}$ ,  $a_5 = 3,159\,15 \cdot 10^{-6}$ ;

— при  $h_\lambda = 0,4$   $\mu_{15}(h_\lambda) = 3,543\,810$ ,  $a_1 = 4,745\,20 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_2 = 3,518\,69 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_3 = 3,229\,50 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_4 = 3,274\,95 \cdot 10^{-5}$ ,  $a_5 = 3,507\,92 \cdot 10^{-6}$ ;

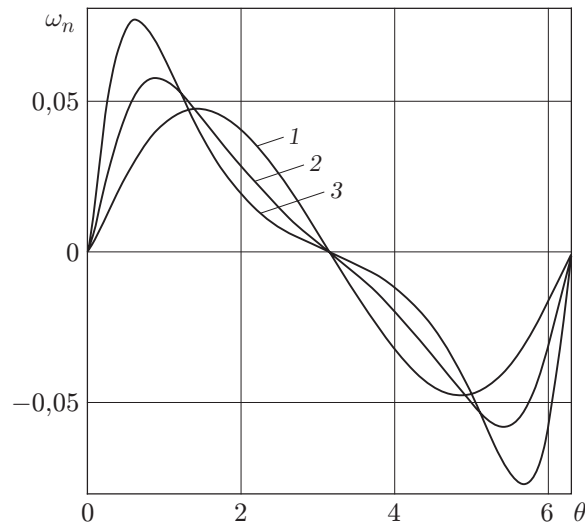


Рис. 2. Зависимость  $\omega_n(\theta)$ :  
1 —  $h_\lambda = 1,40$ ; 2 —  $h_\lambda = 0,10$ ; 3 —  $h_\lambda = 0,08$

— при  $h_\lambda = 0,2$   $\mu_{15}(h_\lambda) = 4,232\,746$ ,  $a_1 = 4,745\,20 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_2 = 5,509\,82 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_3 = 6,645\,89 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_4 = 8,700\,20 \cdot 10^{-5}$ ,  $a_5 = 1,197\,92 \cdot 10^{-5}$ ;

— при  $h_\lambda = 0,1$   $\mu_{17}(h_\lambda) = 7,449\,619$ ,  $a_1 = 4,745\,20 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_2 = 1,955\,54 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_3 = 6,062\,62 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_4 = 1,833\,19 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_5 = 5,654\,61 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_6 = 1,784\,75 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_7 = 5,688\,10 \cdot 10^{-5}$ ;

— при  $h_\lambda = 0,08$   $\mu_{110}(h_\lambda) = 10,351\,113$ ,  $a_1 = 4,745\,20 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_2 = 3,317\,71 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_3 = 1,624\,11 \cdot 10^{-2}$ ,  $a_4 = 7,398\,48 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_5 = 3,358\,48 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_6 = 1,545\,08 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_7 = 7,220\,15 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_8 = 3,419\,57 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_9 = 1,633\,32 \cdot 10^{-4}$ ,  $a_{10} = 7,772\,45 \cdot 10^{-5}$ .

Полученные в результате решения системы (1.5) многочлены  $\omega_n(\theta)$  совместно с параметрами  $\mu_{1n}(h_\lambda)$  обращают уравнение (1.2) в тождество. На рис. 2 приведены зависимости  $\omega_n(\theta)$  при  $h_\lambda = 0,08; 0,10; 1,40$ . Значения параметра  $\mu_{1n}(h_\lambda)$ , вычисленные на отрезке  $h_\lambda \in [0,08; 1,40]$ , аппроксимируются полиномом четвертой степени по  $\text{cth}(2\pi h_\lambda)$

$$\begin{aligned} \mu_1(h_\lambda) = & 1,328\,223 - 1,672\,586 \text{cth}(2\pi h_\lambda) + \\ & + 6,586\,490 \text{cth}^2(2\pi h_\lambda) - 3,582\,053 \text{cth}^3(2\pi h_\lambda) + 0,829\,784 \text{cth}^4(2\pi h_\lambda) \end{aligned} \quad (1.11)$$

с максимальной относительной погрешностью  $|(\mu_1(h_\lambda) - \mu_{1n}(h_\lambda))\mu_{1n}^{-1}(h_\lambda)| = 10^{-6}$ .

Далее у функций  $\mu_{1n}(h_\lambda)$ ,  $\omega_n(\theta)$  индекс  $n$  опускается, поскольку в области существования решения уравнения (1.1) всегда найдется такое число  $n$ , при котором  $\mu_{1n}(h_\lambda)$ ,  $\omega_n(\theta)$  могут считаться истинными решениями.

**2. Скорость и профиль волны для жидкости конечной глубины.** Отображение области  $OACDEB$  плоскости переменной  $u = \xi + i\eta$  на плоскость переменной  $z = x + iy$  задается формулой [1]

$$z = \frac{i\lambda}{2\pi} \left( \ln u + b_1 u + \frac{1}{2} b_2 u^2 + \frac{1}{3} b_3 u^3 + \dots \right), \quad (2.1)$$

из которой с учетом зависимости  $u = e^{i\theta}$  на свободной поверхности  $r = 1$  в плоскости  $(\xi, \eta)$  следует параметрическая запись координат поверхности волны в плоскости комплексной переменной  $z$

$$\begin{aligned} x = & -\frac{\lambda}{2\pi} \left( \theta + b_1 \sin \theta + \frac{1}{2} b_2 \sin 2\theta + \frac{1}{3} b_3 \sin 3\theta + \dots \right), \\ y = & \frac{\lambda}{2\pi} \left( b_1 \cos \theta + \frac{1}{2} b_2 \cos 2\theta + \frac{1}{3} b_3 \cos 3\theta + \dots \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Коэффициенты  $b_1, b_2, b_3, \dots$ , входящие в уравнения (2.1), (2.2), удовлетворяют соотношению

$$\ln R(\theta) + i\omega(\theta) = \ln(1 + b_1 e^{i\theta} + b_2 e^{2i\theta} + b_3 e^{3i\theta} + \dots) = a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{2i\theta} + a_3 e^{3i\theta} + \dots,$$

где  $\ln R(\theta) = a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + a_3 \cos 3\theta + \dots$ . Действительная и мнимая части комплексной функции  $\ln R(\theta) + i\omega(\theta)$  неявно зависят от отношения  $h_\lambda$  через коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$ . Значения действительной части  $\ln R(\theta)$ , вычисленные при  $\theta = 0$  в девяти точках  $h_\lambda = 0,08; 0,10; 0,20; 0,40; 0,60; 0,80; 1,00; 1,20; 1,40$ , аппроксимируются таким же по виду полиномом

$$\begin{aligned} \ln R_a(0) = & 7,07910 \cdot 10^{-2} - 8,27440 \cdot 10^{-2} \operatorname{cth}(2\pi h_\lambda) + 1,10196 \cdot 10^{-1} \operatorname{cth}^2(2\pi h_\lambda) - \\ & - 6,24216 \cdot 10^{-2} \operatorname{cth}^3(2\pi h_\lambda) + 1,53503 \cdot 10^{-2} \operatorname{cth}^4(2\pi h_\lambda) \end{aligned} \quad (2.3)$$

и с той же максимальной относительной погрешностью  $|(\ln R_a(0) - \ln R(0)) \ln^{-1} R(0)| = 10^{-6}$ , что и параметр  $\mu_1(h_\lambda)$  в формуле (1.11).

Коэффициенты  $b_1 = a_1$ ,  $b_2 = a_2 + a_1^2/2$ ,  $b_3 = a_3 + a_1 a_2 + a_1^3/6$ ,  $\dots$ , входящие в уравнения (2.2), известны, если известно решение (1.4) интегрального уравнения (1.1). Ниже приведены значения коэффициентов  $b_k$ :

— при  $h_\lambda = 1,4$   $b_1 = 4,74520 \cdot 10^{-2}$ ,  $b_2 = 4,50851 \cdot 10^{-3}$ ,  $b_3 = 4,81969 \cdot 10^{-4}$ ,  $b_4 = 5,42816 \cdot 10^{-5}$ ,  $b_5 = 6,29170 \cdot 10^{-6}$ ;

— при  $h_\lambda = 0,08$   $b_1 = 4,74520 \cdot 10^{-2}$ ,  $b_2 = 3,43029 \cdot 10^{-2}$ ,  $b_3 = 1,78332 \cdot 10^{-2}$ ,  $b_4 = 8,75708 \cdot 10^{-3}$ ,  $b_5 = 4,29338 \cdot 10^{-3}$ ,  $b_6 = 2,12269 \cdot 10^{-3}$ ,  $b_7 = 1,05858 \cdot 10^{-3}$ ,  $b_8 = 5,31547 \cdot 10^{-4}$ ,  $b_9 = 2,67944 \cdot 10^{-4}$ ,  $b_{10} = 1,34663 \cdot 10^{-4}$ .

В результате подстановки значений данных коэффициентов в уравнения (2.2) получены профили волн при  $h = 1$  м,  $h_\lambda = 1,40; 0,08$  (рис. 3). Из второго уравнения в (2.2) можно найти амплитуду волны  $H$  по формуле  $H = y|_{\theta=0} - y|_{\theta=\pi}$ . Полагая, например,  $h = 1$  м, в результате вычислений получаем  $H = 0,216954$  м при  $h_\lambda = 0,08$  и  $H = 0,0123768$  м при  $h_\lambda = 1,4$ .

Условие на открытой поверхности жидкости  $c^2 R^{-2}(\theta) + 2gy = \text{const}$ , следующее из теоремы Бернулли, использовалось при выводе интегрального уравнения Некрасова и урав-

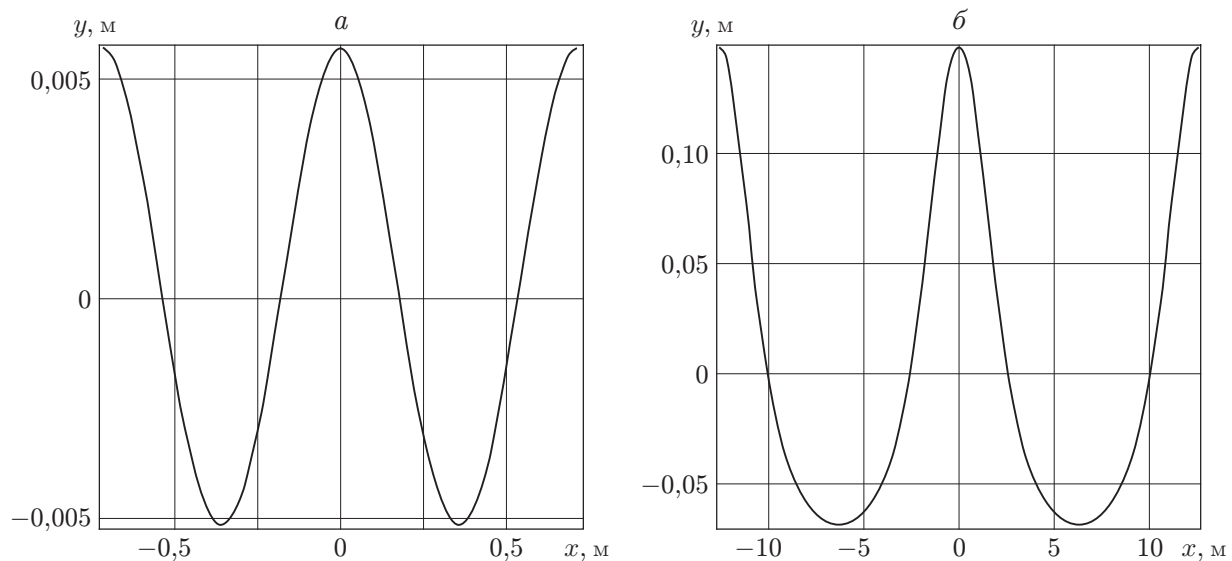


Рис. 3. Профиль волны при  $h = 1$  м:  
а —  $h_\lambda = 1,40$ ; б —  $h_\lambda = 0,08$

нения (1.1). Это условие позволяет установить связь между скоростью распространения волны  $c$ , глубиной жидкости  $h$  и длиной волны  $\lambda$  в виде уравнения [5]

$$1 + \mu(h_\lambda) \int_0^\theta \sin(\omega(\theta)) d\theta = \frac{2\pi c^2 \mu(h_\lambda)}{3g\lambda} \exp(-3 \ln R(\theta)). \quad (2.4)$$

Полагая в уравнении (2.4)  $\theta = 0$ , находим, что скорость движения вершины волны относительно дна равна

$$c = \left( \frac{3g\lambda R^3(0)}{2\pi\mu(h_\lambda)} \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Заменяя в уравнении (2.5) функции  $\mu(h_\lambda)$ ,  $R(0)$  их аппроксимациями  $\mu_1(h_\lambda)$ ,  $R_a(0)$  (формулы (1.11), (2.3) соответственно), получаем аналитическую зависимость  $c = c(\lambda, h_\lambda)$ .

Функции  $R(0)$ ,  $\mu(h_\lambda)$  в правой части уравнения (2.5) получены в результате решения интегрального уравнения (1.1) и зависят только от отношения  $h_\lambda$ . Возведя в квадрат левую и правую части (2.5), это уравнение можно записать в виде  $c^2 = \lambda F(h_\lambda)$ , где  $F(h_\lambda) = 3gR^3(0)(2\pi\mu(h_\lambda))^{-1}$ . Производная

$$\frac{dc^2(\lambda)}{d\lambda} = F(h_\lambda) - h_\lambda \frac{dF(h_\lambda)}{dh_\lambda}$$

не зависит от длины волны  $\lambda$  и обращается в нуль в точке  $h_\lambda^0 = F(h_\lambda^0)(dF(h_\lambda^0)/dh_\lambda)^{-1}$ . Следовательно, при любой глубине жидкости  $h$  максимальная скорость распространения волны, имеющей длину  $\lambda_0 = (h_\lambda^0)^{-1}h$ , равна  $c_{\max} = \sqrt{F(h_\lambda^0)(h_\lambda^0)^{-1}h}$ . Поскольку функция  $F(h_\lambda)$  известна, нетрудно получить значения  $h_\lambda^0 = 0,0926692$ ,  $F(h_\lambda^0) = 0,731607$ ,  $\lambda_0 = 10,791072h$ ,  $c_{\max} = 0,897495\sqrt{gh}$ . На рис. 4 приведена зависимость  $c(\lambda)$ , рассчитанная в окрестности точки  $\lambda_0$  при  $h = 1$  м.

Представляет интерес сравнение скорости распространения волны, найденной в результате решения точной нелинейной задачи (см. (2.5)), со скоростью распространения волн по поверхности жидкости глубиной  $h$ , полученной в рамках линейной теории [2, 5]:

$$c_1 = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}. \quad (2.6)$$

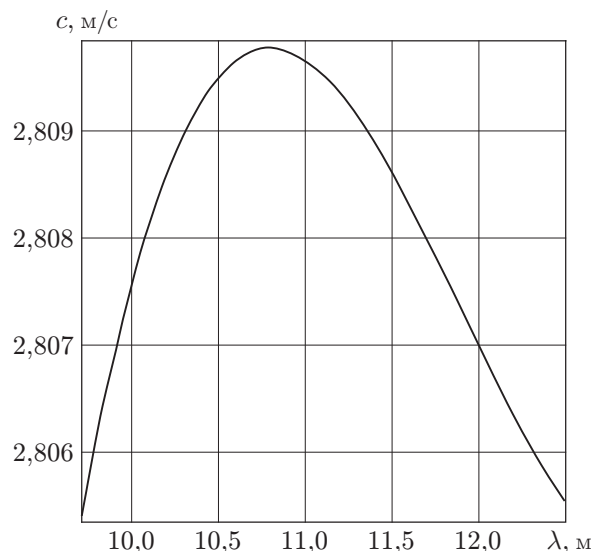


Рис. 4. Функция  $c(\lambda)$  в окрестности точки  $\lambda_0$  при  $h = 1$  м



По формулам (2.5), (2.6) рассчитаны скорости  $c(h_\lambda)$ ,  $c_1(h_\lambda)$  и их относительные отклонения  $\Delta(h_\lambda) = [c(h_\lambda) - c_1(h_\lambda)]c^{-1}(h_\lambda)$  при  $h_\lambda \in [0,08; 1,40]$ . Функция  $\Delta(h_\lambda)$  не зависит от длины волны  $\lambda$  и глубины жидкости  $h$ , а зависит только от их отношения  $h_\lambda$ . Из этого утверждения и из анализа результатов расчетов следует, что для любых  $h$  и  $\lambda$  относительные отклонения величин скоростей  $c(h_\lambda)$  и  $c_1(h_\lambda)$  имеют систематический характер, причем  $c(h_\lambda) > c_1(h_\lambda)$ , если  $h_\lambda \in (0,379\ 324; \infty)$  и  $c(h_\lambda) < c_1(h_\lambda)$ , если  $h_\lambda \in (0,08; 0,379\ 324)$ . Для всех  $h_\lambda \in (0,4; \infty)$  различие значений скоростей, полученных в рамках линейной ( $c_1(h_\lambda)$ ) и нелинейной ( $c(h_\lambda)$ ) теорий распространения волн по поверхности жидкости, составляет менее 0,12 %, в интервале  $h_\lambda \in (0,08; 0,40)$  это различие достигает 7,2 %.

Полученные выше результаты справедливы лишь для периодических волн постоянной формы, обладающих вертикальной симметрией. В работах [6, 7] изложены методы решения задач о распространении периодических и уединенных волн произвольной формы по поверхности жидкости конечной глубины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Некрасов А. И.** Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
2. **Сретенский Л. Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
3. **Боднарь Т. А.** Об одном приближенном решении задачи Некрасова // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 6. С. 50–56.
4. **Боднарь Т. А.** Об установившихся волнах на поверхности жидкости конечной глубины // 3-я Всерос. конф. с участием зарубежных ученых “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”: Тез. докл., Бийск, 28 июня — 3 июля 2008 г. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 2008. С. 25–26.
5. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
6. **Maklakov D. V.** Almost-hiest gravity waves on water of finite depth // Eur. J. Appl. Math. 2002. V. 13. P. 67–93.
7. **Карабут Е. А.** Точное решение одной нелинейной краевой задачи теории волн на поверхности жидкости конечной глубины // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 5. С. 741–762.

*Поступила в редакцию 20/VII 2009 г.,  
в окончательном варианте — 29/XII 2010 г.*