

УДК 532.513+532.516  
DOI: 10.15372/PMTF202415489

## ВИНТОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ИХ ДВУМЕРНЫЕ АНАЛОГИ

В. В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия  
Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,  
Новосибирск, Россия  
E-mail: pukhnachev@gmail.com

Представлен обзор работ, посвященных исследованию винтовых течений жидкости, в которых векторы скорости и вихря коллинеарны. Приводятся новые решения уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости и уравнений жидкости второго порядка, которые являются двумерными аналогами винтовых течений.

Ключевые слова: винтовые течения, метод дифференциальных связей, уравнения Навье — Стокса, жидкость второго порядка

**1. Течения Громеки — Бельтрами.** Пусть  $\mathbf{u}(x, t)$  — трехмерный вектор,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  — набор декартовых координат в пространстве  $\mathbb{R}^3$ ,  $t$  — время. Ассоциируя вектор  $\mathbf{u}$  с вектором скорости жидкости, будем называть винтовым течением жидкости такое течение, для которого выполняется соотношение

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}, \quad (1)$$

где  $\alpha = \text{const}$ .

Винтовые течения были открыты в 1881 г. И. С. Громекой [1] (см. также [2]) при изучении стационарных движений идеальной несжимаемой жидкости, описываемых уравнениями Эйлера

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\rho^{-1} \nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $p$  — давление;  $\rho = \text{const} > 0$  — плотность жидкости. Предполагается, что на жидкость не действует поле внешних сил или эти силы потенциальны (в последнем случае уравнения движения можно привести к виду (2) путем введения модифицированного давления). Тогда вследствие (1), (2) давление связано с полем скоростей соотношением

$$p + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})/2 = C \equiv \text{const}. \quad (3)$$

Равенство (3) имеет вид интеграла Бернулли, справедливого для потенциальных стационарных движений идеальной жидкости, несмотря на то что исследуемое движение является вихревым при  $\alpha \neq 0$ . Применяя к соотношению (1) операцию  $\operatorname{rot}$ , получаем векторное уравнение Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{u} + \alpha^2 \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

В 1889 г. Э. Бельтрами независимо обнаружил винтовые течения идеальной жидкости [3]. Перевод работы [3] на английский язык опубликован в 1985 г. [4]. В зарубежной

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 24-21-00213).