

УДК 517.5

К-ФУНКЦИОНАЛЫ И ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ**М. Ш. Шабозов, Р. А. Каримзода**

В работе получены точные неравенства типа Джексона — Стечкина в пространстве Харди $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$), в которых величины наилучших полиномиальных приближений оцениваются сверху через $\mathcal{K}$ -функционалы r -х производных. Для классов функций, определённых посредством указанных характеристик, в пространстве $H_{q,\rho}$ вычислены точные значения бернштейнских и колмогоровских n -поперечников.

Ключевые слова: неравенство типа Джексона — Стечкина, наилучшее полиномиальное приближение, $\mathcal{K}$ -функционал, n -поперечники.

M. Sh. Shabozov, R. A. Karimzoda. $\mathcal{K}$ -Functionals and exact values of n -widths for some classes of functions in the Hardy space.

In this work, we obtain exact Jackson–Stechkin type inequalities in the Hardy space $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$), in which the values of the best polynomial approximations are estimated from above in terms of the $\mathcal{K}$ -functionals of the r th derivatives. For function classes defined by the mentioned characteristics, exact values of Bernstein and Kolmogorov n -widths in the space $H_{q,\rho}$ are calculated.

Keywords: Jackson–Stechkin type inequality, best polynomial approximation, $\mathcal{K}$ -functional, n -widths.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-301-308

*К 85-летию юбилею академика РАН
Виталия Ивановича Бердышева*

1. Введение

Экстремальные задачи, связанные с наилучшим полиномиальным приближением аналитических в единичном круге функций и вычислением точных значений различных n -поперечников, изучались, например, в работах К. И. Бабенко, В. М. Тихомирова, Л. В. Тайкова, М. З. Двейрина, С. Б. Вакарчука и многих других математиков (см., например, [1–3] и приведенную там литературу.)

В данной работе доказаны некоторые точные теоремы в более общем пространстве Харди $H_{q,\rho}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $0 < \rho \leq R$), в которых величины наилучших полиномиальных приближений функций, аналитических в круге $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, оцениваются сверху через $\mathcal{K}$ -функционалы r -х производных. Полученный результат позволяет найти точные значения бернштейнского и колмогоровского n -поперечников в $H_{q,\rho}$.

Введем необходимые для дальнейшего следующие понятия и обозначения:

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, целых неотрицательных, вещественных и комплексных чисел;

$U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ — открытый круг радиуса ρ ($0 < \rho \leq R$) с центром в нуле;

$A(U_\rho)$ — множество функций, аналитических в круге U_ρ ;

$H_{q,R}$ ($1 \leq q \leq \infty$, $R > 0$) — пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U_R)$, для которых

$$\|f\|_{q,R} := \|f\|_{H_{q,R}} = \lim_{\rho \rightarrow R-0} M_q(f, \rho) < \infty,$$