

# О гамильтоновых проективных бильярдах на границах произведений выпуклых тел<sup>\*,\*\*</sup>

А. А. Глуцук<sup>а,б,в</sup>

Поступило 22.05.2024; после доработки 10.07.2024; принято к публикации 19.09.2024

Дмитрию Валерьевичу Трещеву  
и Сергею Владимировичу Болотину  
к их юбилеям

Пусть  $K \subset \mathbb{R}_q^n$  и  $T \subset \mathbb{R}_p^n$  — два ограниченных строго выпуклых тела (открытых подмножества) с  $C^6$ -гладкими границами. Рассматривается произведение  $\overline{K} \times \overline{T} \subset \mathbb{R}_{q,p}^{2n}$ , снабженное стандартной симплектической формой  $\omega = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j$ . Орбитами  $(K, T)$ -бильярда называются непрерывные кривые на границе  $\partial(K \times T)$ , пересечения которых с открытым всюду плотным подмножеством  $(K \times \partial T) \cup (\partial K \times T)$  касаются характеристического поля направлений, заданного ядрами ограничений симплектической формы  $\omega$  на касательные пространства к границе. Для любой точки  $(q, p) \in K \times \partial T$  характеристическая прямая в  $T_{(q,p)}\mathbb{R}^{2n}$  порождается вектором  $(\vec{n}(p), 0)$ , где  $\vec{n}(p)$  — вектор внешней нормали к  $T_p\partial T$ ; аналогичное утверждение справедливо и для  $(q, p) \in \partial K \times T$ . Проекция каждой орбиты  $(K, T)$ -бильярда на  $K$  является орбитой так называемого  $T$ -бильярда в  $K$ . В случае, когда тело  $T$  центрально симметрично, это бильярд в пространстве  $\mathbb{R}_q^n$ , снабженном структурой финслерова пространства Минковского, “двойственной к  $T$ ”. Соответствующий финслеров закон отражения был введен в совместной работе С. Табачникова и Е. Гуткина в 2002 г. Исследование орбит  $(K, T)$ -бильярдов тесно связано с симплектической изопериметрической гипотезой К. Витербо (контрпример к которой недавно построили П. Хаим-Кислев и Я. Островер) и со знаменитой гипотезой Малера из выпуклой геометрии. В настоящей работе исследуется частный случай, когда закон отражения  $T$ -бильярда является проективным законом отражения, введенным Табачниковым, т.е. задается проективными инволюциями проективизированных касательных пространств  $T_q\mathbb{R}^n$ ,  $q \in \partial K$ . Показано, что это происходит тогда и только тогда, когда  $T$  — эллипсоид, или, что эквивалентно, когда все  $T$ -бильярды одновременно аффинно эквивалентны евклидовым бильярдам. В качестве приложения аналогичные результаты выводятся для финслеровых бильярдов.

**Ключевые слова:** симплектическая форма, выпуклое тело,  $(K, T)$ -бильярд, бильярд в финслеровом пространстве Минковского, проективный бильярд, квадрика.

MSC: 37J05, 37D40

DOI: <https://doi.org/10.4213/tm4438>

\*Статья представлена на английском языке. Оригинал будет опубликован в англоязычной версии журнала: *Glutsyuk A.A. On Hamiltonian projective billiards on boundaries of products of convex bodies // Proc. Steklov Inst. Math. 2024. V. 327.*

\*\*Работа выполнена в рамках проекта Министерства науки и высшего образования РФ №FSMG-2024-0048.

<sup>а</sup>Высшая школа современной математики МФТИ, Москва, Россия.

<sup>б</sup>CNRS, UMR 5669 (UMPA, ENS de Lyon), Lyon, France.

<sup>в</sup>Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия.

✉ [aglutsyu@ens-lyon.fr](mailto:aglutsyu@ens-lyon.fr)