

Глава 1

Теория Морса. Степень отображения. Индекс пересечения

В разделе ?? мы рассматривали достаточно гладкие *невыврожденные* отображения, якобиан которых имел максимальный ранг. При изучении глобальных свойств многообразий часто встречаются отображения, которые вырождаются в некоторых точках. Эти отображения и являются предметом исследования в настоящей главе. Мы начнем с формулировки теоремы Сарда и теорем вложения, на которые опирается последующий анализ. Затем кратко изложим теорию Морса, в которой гладкие функции на многообразии используются для изучения его глобальной структуры. После этого изучим гомотопические классы отображений замкнутых ориентируемых многообразий одинаковой размерности. Особый интерес при этом представляют собой сферы \mathbb{S}^n . Несмотря на простоту определений степени отображения, степени векторного поля и индекса пересечения многообразий, которые, по существу, используют только понятие якобиана преобразования координат, будут доказаны глубокие и совершенно неочевидные утверждения. В частности, будет дана классификация ориентируемых замкнутых двумерных поверхностей (формула Гаусса–Бонне). Изложение, представленное ниже, близко к главам 2 и 3 монографии [?].

1.1 Теорема Сарда

Рассмотрим достаточно гладкое отображение двух многообразий $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ размерностей $m := \dim \mathbb{M}$ и $n := \dim \mathbb{N}$.

Определение. Пусть $C = C(f) \subset \mathbb{M}$ – множество таких точек $x \in \mathbb{M}$, что дифференциал отображения $f_{*x} : \mathbb{T}_x(\mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{T}_{f(x)}(\mathbb{N})$ имеет ранг, меньший n . Подмножество $C \subset \mathbb{M}$ называется *множеством критических точек* отображения f , а подмножество $f(C) \subset \mathbb{N}$ – *множеством критических значений* отображения f . \square

Пример 1.1.1. Рассмотрим гладкую функцию одного переменного

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}.$$

Тогда критические точки определяются условием $f' = 0$, т.е. являются обычными критическими точками функции, среди которых встречаются максимумы и минимумы. \square

Пример 1.1.2. Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция на гладком многообразии M . Тогда точки, в которых она имеет локальные максимумы или минимумы, являются критическими точками функции f . При этом могут существовать и другие критические точки, например, седловые. \square

Пример 1.1.3. В частном случае, когда $\dim M < \dim N$, все точки M являются критическими. То есть в общем случае критические точки не являются изолированными. \square

Пример 1.1.4. Рассмотрим функцию $f(x, y) := x^2$ на евклидовой плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ее критические точки $C(f)$ образуют прямую $x = 0$ и не являются изолированными. Множество критических точек $C(f)$ является в данном случае подмногообразием в \mathbb{R}^2 .

Пусть $f(x, y) := x^2y^2$. Тогда множество критических точек $C(f)$ состоит из двух пересекающихся прямых $x = 0$ и $y = 0$ и не образует подмногообразие в \mathbb{R}^2 . \square

Напомним, что подмножество $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет (n -мерную) меру нуль, если для любого $\epsilon > 0$ множество D можно покрыть счетным числом n -мерных кубов таких, что их суммарный объем будет меньше ϵ . Из курса математического анализа известно, что дополнение $\mathbb{R}^n \setminus D$ – всюду плотное множество в \mathbb{R}^n . Это определение переносится на n -мерные многообразия: подмножество $D \subset M$ имеет меру нуль, если для любого координатного отображения $\varphi : M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ образ $\varphi(U \cap D)$ имеет меру нуль в \mathbb{R}^n .

Теорема 1.1.1 (Сард). Пусть $f : M \rightarrow N$ – гладкое отображение гладких многообразий. Тогда множество критических значений $f(C)$ имеет меру нуль в N .

Доказательство. [?]. См., например, [?], глава 2, §10, теорема 2. \square

Следствие. Подмножество $N \setminus f(C)$ всюду плотно в N . \square

Следствие. Если $f : M \rightarrow N$ – гладкое отображение и $\dim M < \dim N$, то мера образа $f(M)$ равна нулю в N . В частности, образ $f(M)$ не заполняет все N . \square

Пример 1.1.5. Рассмотрим постоянную функцию на M :

$$f(x) := y_0 \in N, \quad \forall x \in M.$$

Тогда все точки многообразия M являются критическими. Множество критических значений функции f состоит из одной точки и имеет меру нуль в N . \square

Теорема Сарда утверждает, что множество критических значений гладкого отображения всегда имеет меру нуль в N , в то время как множество критических точек в M может быть и не малым.

1.2 Теоремы вложения

Нетривиальные многообразия можно представлять как подмногообразия некоторого евклидова пространства. Наглядным примером является вложение сферы $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Оказывается, что произвольное многообразие можно и вложить, и погрузить в евклидово пространство достаточно большой размерности. Сформулируем “слабую теорему Уитни”.

Теорема 1.2.1 (Уитни). Любое связное гладкое замкнутое n -мерное многообразие \mathbb{M} можно гладко вложить в евклидово пространство \mathbb{R}^{2n+1} и погрузить в \mathbb{R}^{2n} . Всякое непрерывное отображение $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ ($\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$) аппроксимируется гладким вложением (погружением).

Доказательство. См., например, [?], глава 2, §11. □

В сформулированной теореме “аппроксимация” понимается в топологии, индуцированной в бесконечномерном векторном пространстве непрерывных отображений $\mathcal{C}(\mathbb{M})$ метрикой, которая задается следующим образом. Пусть f и h – два непрерывных отображения компактного многообразия \mathbb{M} в евклидово пространство, тогда расстояние между ними определяется по формуле

$$l(f, h) := \max_{x \in \mathbb{M}} |f(x) - h(x)|, \quad (1.1)$$

где $|\cdot|$ – обычное евклидово расстояние, то есть L_∞ -нормой (??). Если пространством-мишень является не евклидово пространство, а многообразие, то расстояние в нем вводится с помощью римановой метрики, которая всегда существует согласно теореме ???. В дальнейшем мы будем использовать именно эту норму для непрерывных отображений.

Замечание. В теореме Уитни не предполагается, что на многообразии \mathbb{M} задана какая-либо метрика и ее возможная связь с метрикой, индуцированной вложением $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. Конечно, задача об изометрическом вложении представляет большой интерес и требует отдельного исследования. □

В доказательстве “слабой теоремы Уитни”, которое приведено в ??, использован “метод проектирования”. Этот метод не позволяет улучшить данную выше оценку размерности объемлющего евклидова пространства. Действительно, пусть окружность \mathbb{S}^1 вложена в \mathbb{R}^3 , образуя нетривиальный узел, как показано на рис.1.1. В этом

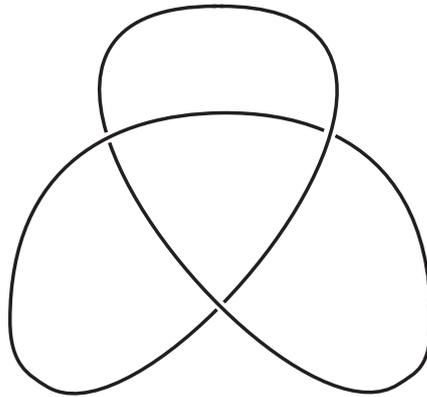


Рис. 1.1: Вложение $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, которое образует нетривиальный узел.

случае $n = 1$ и $2n + 1 = 3$. Ясно, что проектирование этой заузленной окружности на любую плоскость даст кривую с самопересечениями. Это указывает на то, что использованный метод для доказательства “слабой теоремы Уитни” не позволяет продвинуться дальше по пути уменьшения размерности пространства.

Тем не менее использование более тонкой методики позволяет доказать, что произвольное n -мерное замкнутое многообразие можно гладко вложить в евклидово пространство \mathbb{R}^{2n} и погрузить в \mathbb{R}^{2n-1} (**сильная теорема Уитни**). Однако вложения

$\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ уже не плотны в пространстве непрерывных отображений $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. В общем случае эта оценка вложения уже не улучшаема. В качестве контрпримера можно доказать, что замкнутое двумерное неориентируемое многообразие нельзя вложить в \mathbb{R}^3 .

В некоторых частных случаях приведенные выше оценки можно улучшить. Так, например, любое двумерное *ориентируемое* замкнутое многообразие (поверхность) вкладывается в \mathbb{R}^3 , что следует из классификации таких многообразий. В то же время вложение произвольной замкнутой *неориентируемой* поверхности требует \mathbb{R}^4 .

Если многообразие \mathbb{M} вложено в \mathbb{N} , то мы, как правило, будем отождествлять в дальнейшем само многообразие с его образом.

1.3 Теория Морса

Пусть задано гладкое отображение $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ гладких многообразий размерностей $\dim \mathbb{M} = m$ и $\dim \mathbb{N} = n$.

Определение. Точку $x \in \mathbb{M}$ назовем *регулярной* для гладкого отображения $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$, если она не является критической, т.е. если ранг дифференциала отображения f_* равен $n := \dim \mathbb{N}$. Точку $y \in \mathbb{N}$ назовем *правильной (регулярной)* для гладкого отображения $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$, если все ее прообразы – регулярные точки в \mathbb{M} (если $f^{-1}(y) = \emptyset$, то точка y также является правильным значением по определению). Если $y \in \mathbb{N}$ есть правильная точка отображения f , то само отображение f назовем *правильным по отношению к точке y* . \square

Из определения следует, что дополнение в \mathbb{M} к множеству регулярных точек совпадает с множеством критических точек отображения f , а дополнение в \mathbb{N} к множеству правильных значений совпадает с множеством критических значений отображения f .

Пример 1.3.1. Если $\dim \mathbb{M} < \dim \mathbb{N}$, то правильными (регулярными) являются только те точки, у которых прообраз пуст. \square

Пример 1.3.2. Если отображение $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ – диффеоморфизм, то все точки этого отображения правильные. \square

Из теоремы о неявной функции следует, что если $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ – гладкое отображение и $y \in \mathbb{N}$ – правильное значение, то $f^{-1}(y)$ – гладкое подмногообразие в \mathbb{M} .

Из теоремы Сарда вытекает

Следствие. Множество гладких отображений $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$, для которых $y \in \mathbb{N}$ – правильное значение, всюду плотно в пространстве гладких отображений. \square

Доказательство. См., например, [?], глава 2, §10. \square

Рассмотрим гладкое многообразие \mathbb{M} с локальной системой координат x^α , $\alpha = 1, \dots, m$. Особый интерес представляет собой гладкое отображение многообразия в вещественную прямую $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{N}$. В этом случае отображение – это просто гладкая вещественнозначная функция $f(x)$ на многообразии \mathbb{M} . Критические точки функции f находятся из системы уравнений $\partial_\alpha f = 0$ для всех значений индекса α (градиент функции равен нулю).

Определение. Критическая точка $x_0 \in \mathbb{M}$ гладкой функции $f(x)$ называется *невырожденной*, если гессиан $\partial_{\alpha\beta}^2 f|_{x_0}$ не вырожден. Функция $f(x)$ называется *функцией Морса*, если все ее критические точки не вырождены. *Индексом* невырожденной критической точки x_0 для функции Морса f называется максимальная размерность подпространств $V \subset T_{x_0}(\mathbb{M})$, на которых гессиан $d^2 f$ отрицательно определен, т.е. число отрицательных квадратов после приведения гессиана (квадратичной формы) $d^2 f$ к диагональному виду. \square

Предложение 1.3.1. В критических точках гладкой функции и только в них гессиан задает квадратичную форму в касательных пространствах к этим точкам.

Доказательство. Рассмотрим преобразование координат $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x)$ в некоторой окрестности критической точки. Тогда гессиан преобразуется по правилу

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\frac{\partial f}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} + \frac{\partial f}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}}.$$

Для тензорного закона преобразования необходимо и достаточно, чтобы второе слагаемое обратилось в нуль. Для произвольных преобразований координат это требование выполнено только в критических точках. \square

Заметим, что в некритических точках гессиан не задает квадратичной формы, т.к. вторая частная производная функции является нековариантным объектом.

Из доказанного предложения вытекает, что невырожденность гессиана функции в критической точке не зависит от выбора системы координат, т.к. якобиан преобразования координат не вырожден по определению. Поэтому предложение 1.3.1 доказывает корректность определения невырожденных критических точек. Гессиан функции Морса задает невырожденную симметричную билинейную квадратичную форму $d^2 f$ в касательном пространстве $T_{x_0}(\mathbb{M})$ для всех критических точек x_0 . Ясно, что за счет выбора системы координат квадратичную форму $d^2 f$ всегда можно привести к диагональному виду в любой критической точке. Кроме того, индекс невырожденной точки также не зависит от выбора системы координат.

Пример 1.3.3. Рассмотрим функцию на евклидовой плоскости:

$$f(x, y) := \operatorname{re} (x + iy)^k, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

Единственной критической точкой этой функции является начало координат $x = y = 0$.

Если $k = 2$, то $f = x^2 - y^2$, гессиан равен

$$\partial_{\alpha\beta}^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

и критическая точка не вырождена. Индекс критической точки равен -1 . График этой функции имеет вид “седла” (см. рис. 1.2, а).

При $k = 3$ функция (1.2) имеет вид $f = x^3 - 3xy^2$, и ее график показан на рис. 1.2, б. Это – “обезьянье седло” с тремя направлениями спуска для ног и хвоста. Ее гессиан равен

$$\partial_{\alpha\beta}^2 f = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что критическая точка $x = y = 0$ вырождена, и ее индекс не определен.

Аналогичная ситуация имеет место для всех $k > 3$. \square

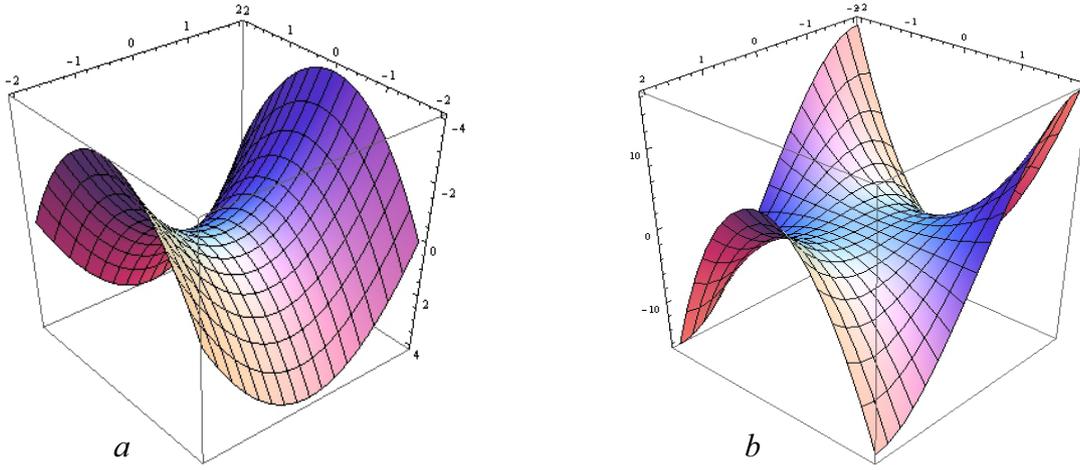


Рис. 1.2: “Седло” (a) и “обезьянье седло” (b).

Рассмотренный пример можно рассматривать как пример критических точек функции высоты $h(x, y, z) = z$ (проекция на ось z) в \mathbb{R}^3 , суженной на подмногообразии, заданное графиком функции $z = f(x, y)$. В общем случае критические точки сужений гладких функций на подмногообразия описываются следующим утверждением.

Предложение 1.3.2. Пусть \mathbb{M} , $\dim \mathbb{M} = m$, – гладкое подмногообразие в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{m+k} , выделенное уравнениями:

$$F^1(x) = F^2(x) = \dots = F^k(x) = 0, \quad x = (x^\alpha) \in \mathbb{R}^{m+k}, \quad \alpha = 1, \dots, m+k.$$

Пусть $f : \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция и $h := f|_{\mathbb{M}}$ – ее сужение на подмногообразии $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$. Точка $x_0 \in \mathbb{M}$ является критической точкой функции h тогда и только тогда, когда в этой точке $\text{grad } f$ линейно выражается через $\text{grad } F^1$, $\text{grad } F^2$, \dots , $\text{grad } F^k$.

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы Лагранжа об условном экстремуме, известной из курса математического анализа. Она утверждает, что точка x_0 является критической точкой функции f , суженной на \mathbb{M} , если и только если существуют такие постоянные $\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0$ (значения множителей Лагранжа), что для функции

$$F(x, \lambda) := f(x) + \lambda_M F^M(x), \quad M = 1, \dots, k,$$

точка (x_0, λ^0) является критической. Действительно, в этом случае критическая точка x_0 лежит в подмногообразии \mathbb{M} , так как

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_M} = F^M = 0,$$

и $\text{grad } f$ линейно выражается через $\text{grad } F^M$:

$$\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \lambda_M \frac{\partial F^M}{\partial x^\alpha} = 0$$

при $\alpha = 1, \dots, m+k$. □

Теорема 1.3.1. Пусть x_0 – невырожденная критическая точка функции $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ с индексом k . Тогда в некоторой окрестности этой точки существует такая система координат x^α , что $x_0 = (0, \dots, 0)$ – начало координат и

$$f(x) = f(x_0) - (x^1)^2 - \dots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \dots + (x^m)^2. \quad (1.3)$$

Доказательство. См., например, [?], теорема 12.3. \square

Обратим внимание на отсутствие кубических и слагаемых более высокого порядка в представлении (1.3).

Следствие. Невырожденная критическая точка гладкой функции является изолированной, т.е. в достаточно малой ее окрестности нет других критических точек этой функции. \square

Теперь возникают естественные вопросы: существуют ли на многообразии \mathbb{M} функции Морса и как их много? Например, будут ли они плотны в пространстве всех гладких функций на \mathbb{M} ? Ответ на оба вопроса положительный.

Теорема 1.3.2.

1. На любом гладком многообразии \mathbb{M} существуют функции Морса.
2. Функции Морса плотны в пространстве всех гладких функций $C^\infty(\mathbb{M})$.
3. Каждая функция Морса на компактном многообразии имеет только конечное число критических точек (в частности, все они изолированные) x_i , $i = 1, \dots, N$.
4. Существует всюду плотное подмножество \mathcal{R} в множестве функций Морса такое, что у любой функции $f \in \mathcal{R}$ каждому ее критическому значению отвечает только одна критическая точка на \mathbb{M} , т.е. $f(x_i) \neq f(x_j)$, если $i \neq j$.

Доказательство. См., например, [?], глава 2, §10, теорема 5. \square

В сформулированной теореме топология в бесконечномерном векторном пространстве гладких функций $C^\infty(\mathbb{M})$ определяется L_∞ -нормой (1.1).

Сформулированная теорема показывает, что существование и всюду плотность функций Морса являются фактом “общего положения”, т.е. эти функции “типичны” в пространстве гладких функций $C^\infty(\mathbb{M})$.

1.3.1 Функция высоты

Используя вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ с достаточно большим N , которое существует согласно теореме Уитни, пример функции Морса дает функция высоты. При этом мы отождествляем многообразие \mathbb{M} с его образом в \mathbb{R}^N .

Определение. Пусть в евклидовом пространстве \mathbb{R}^N задана прямая $\gamma_l(t)$, $t \in \mathbb{R}$, проходящая через начало координат в направлении вектора l . Тогда функцией высоты называется функция $h_l(x)$, которая ставит в соответствие каждой точке $x \in \mathbb{M}$ число, равное расстоянию от начала координат до той точки на прямой γ_l , в которую ортогонально проектируется образ точки x при вложении $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. \square

Пример 1.3.4. Пусть двумерная поверхность вложена в трехмерное евклидово пространство $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Допустим, что кривая $\gamma_l(t)$ совпадает с осью z . Тогда функция высоты на \mathbb{R}^3 имеет вид $h(x, y, z) = z$ (проектирование на ось z), и поверхность $z = f(x, y)$ задается с помощью функции высоты. \square

Функция высоты имеет следующие очевидные свойства.

1. Множество функций высоты находится во взаимно однозначном соответствии с парами диаметрально противоположных точек сферы \mathbb{S}^{n-1} или с точками проективного пространства \mathbb{RP}^{n-1} (количество прямых в \mathbb{R}^n , проходящих через начало координат).
2. Точка $x_0 \in \mathbb{M}$ является критической для функции высоты $h_l(x)$ тогда и только тогда, когда вектор l ортогонален подмногообразию $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ в точке x_0 .

Выясним, когда критическая точка $x_0 \in \mathbb{M}$ для функции высоты $h_l(x)$ является невырожденной. Рассмотрим частный случай гиперповерхности, когда многообразие \mathbb{M} размерности n вложено в евклидово пространство \mathbb{R}^{n+1} . В этом случае многообразие \mathbb{M} ориентируемо согласно следствию из теоремы 1.6.1.

Напомним, что для достаточно гладких ориентируемых гиперповерхностей $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ определено гауссово отображение $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^n$, которое ставит каждой точке $x \in \mathbb{M}$ точку на единичной сфере \mathbb{S}^n по правилу $f(x) := N(x)$, где $N(x)$ – единичный вектор внешней (или внутренней) нормали к гиперповерхности в точке x .

Пример 1.3.5. Допустим, что в трехмерном евклидовом пространстве задана плоскость, $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Тогда гауссово отображение отображает все точки плоскости \mathbb{R}^2 в одну точку на сфере (единственный единичный вектор, ортогональный к плоскости), если зафиксировать внешнее направление. \square

Пример 1.3.6. Пусть задано стандартное вложение сферы единичного радиуса в евклидово пространство $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда гауссово отображение $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ является тождественным. \square

Лемма 1.3.1. Пусть направляющий вектор l функции высоты перпендикулярен к гиперповерхности $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ в точке x_0 . Тогда точка x_0 является невырожденной критической точкой функции высоты $h_l(x)$ если и только если она является регулярной точкой гауссова отображения $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^n$.

Доказательство. См., например, [?], глава 2, §11, лемма 1. \square

Теорема 1.3.3. Функция высоты $h_l(x)$ на гиперповерхности $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ является функцией Морса тогда и только тогда, когда точка $l \in \mathbb{S}^n$ является регулярным значением для гауссова отображения $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^n$. В частности, почти все функции высоты $h_l(x)$ являются функциями Морса.

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из леммы 1.3.1. Второе утверждение следует из теоремы Сарда 1.6.1, т.к. регулярные значения гауссова отображения всюду плотны. \square

В конце следующего раздела мы покажем, что приведенную теорему можно перенести на случай вложения в евклидово пространство более высокой размерности $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $N > n + 1$.

1.3.2 Фокальные точки

В предыдущем разделе в качестве функций Морса были рассмотрены функции высоты. Существуют и другие достаточно простые конструкции функций Морса. Опишем еще один.

Рассмотрим гладкое вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $N > n := \dim \mathbb{M}$ и отождествим многообразие \mathbb{M} с его образом. Зафиксируем произвольную точку $p \in \mathbb{R}^N$ и свяжем с ней функцию L_p на вложенном подмногообразии \mathbb{M} , положив

$$L_p(x) := |p - x|^2, \quad (1.4)$$

где $x \in \mathbb{M}$ и $|p - x|$ – евклидово расстояние между точками p и x . Ниже будет доказано, что для почти всех точек $p \in \mathbb{R}^N$ функция $L_p(x)$ является функцией Морса на \mathbb{M} . Множество функций $L_p(x)$ не совпадает с множеством функций высоты $h_l(x)$.

Интуитивно, если точку p устремить к бесконечности вдоль прямой γ_l и вычесть из L_p бесконечную постоянную надлежащим образом, то функция $L_p(x)$ перейдет в функцию высоты $h_l(x)$.

Выясним, для каких точек p функция $L_p(x)$ будет функцией Морса. Для этого обозначим через \mathbb{N} совокупность пар (x, v) , где $x \in \mathbb{M}$ и $v \in \mathbb{R}^N$ – вектор, ортогональный к подмногообразию \mathbb{M} в точке x . Ясно, что векторов v много: они образуют евклидово пространство \mathbb{R}^{N-n} . Легко проверить, что \mathbb{N} есть гладкое N -мерное многообразие, а именно, векторное расслоение с базой \mathbb{M} и типичным слоем \mathbb{R}^{N-n} . Это расслоение называется *нормальным расслоением* $\mathbb{N}(\mathbb{M})$ многообразия \mathbb{M} , вложенного в \mathbb{R}^N , с естественной проекцией $\pi : (x, v) \mapsto x$.

Рассмотрим гладкое отображение

$$f : \mathbb{N} \ni (x, v) \mapsto f(x, v) := x + v \in \mathbb{R}^N, \quad (1.5)$$

относящее паре (x, v) конец вектора v , отложенного из точки x . Здесь мы рассматриваем \mathbb{R}^N как аффинное пространство (см. раздел ??).

Определение. Точка $P \in \mathbb{R}^N$ называется *фокальной точкой* для \mathbb{M} , если $P = f(x_0, v_0)$ и точка (x_0, v_0) является критической для отображения f (1.5). \square

Пример 1.3.7. Рассмотрим гладкую кривую $\mathbb{M} = \gamma$ на плоскости \mathbb{R}^2 . Выберем произвольную точку $x_0 \in \gamma$ и построим окружность, которая касается кривой γ в точке x_0 , как показано на рис. 1.3. Тогда центр окружности является фокальной точкой для x_0 . Для точек перегиба, которые обозначены закрашенными кружками на кривой γ , радиус касательной окружности равен бесконечности, и фокальные точки отсутствуют. Для гладкой кривой $\gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ множество фокальных точек \mathbb{F} в общем случае является гладким, возможно, несвязным одномерным подмногообразием в \mathbb{R}^2 . Однако вложение $\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ может быть негладким и содержать острия. На рисунке множество фокальных точек \mathbb{F} обозначено жирной пунктирной линией. \square

Пример 1.3.8. Для окружности $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ множество фокальных точек состоит из одной точки – центра окружности. \square

Пример 1.3.9. У прямой $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ фокальные точки отсутствуют. \square

В силу теоремы Сарда почти все точки $p \in \mathbb{R}^N$ не являются фокальными для вложения $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. В частности, мера множества фокальных точек в \mathbb{R}^N равна нулю. Множество фокальных точек отображения (1.5) в общем случае может не быть подмногообразием в \mathbb{R}^N .

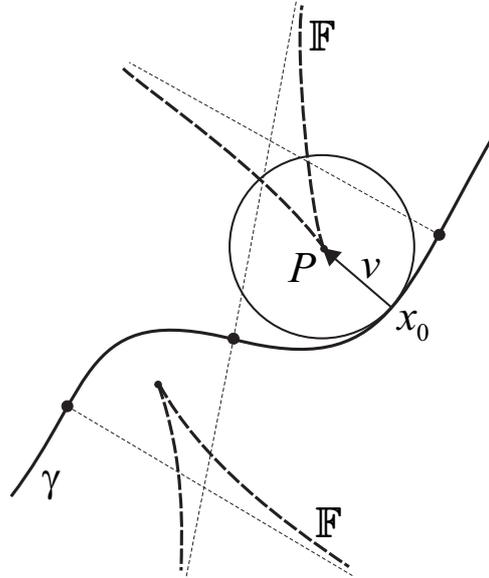


Рис. 1.3: Множество фокальных точек \mathbb{F} для кривой $\gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Точка P является фокальной для $x_0 \in \gamma$.

Теорема 1.3.4. Пусть задана гиперповерхность $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\dim \mathbb{M} = n$. Тогда фокальные точки для $x \in \mathbb{M}$ находятся на нормали к гиперповерхности в точке x на расстояниях $|v| = 1/k_i(x)$, где $k_i(x)$ – главные ненулевые кривизны вложения $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. В частности, вдоль v существует не более n фокальных точек.

Доказательство. См., например, [?], раздел 16, теорема 1. □

Заметим, что расположение фокальных точек гиперповерхности не зависит от выбора ориентации, т.к. изменение знака нормали v влечет изменение знаков главных кривизн.

Теорема 1.3.5. Пусть задана гиперповерхность $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $\dim \mathbb{M} = n$. Пусть точка p лежит на нормали v к \mathbb{M} в точке x . Тогда функция $L_p(x)$ (1.4) достигает локального минимума в точке p в том и только в том случае, если между точками p и x нет фокальных точек.

Доказательство. См., например, [?], раздел 16, теорема 2. □

В общем случае вложения $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $N > n := \dim \mathbb{M}$, справедлива

Теорема 1.3.6. 1. Точка $x_0 \in \mathbb{M}$ является критической точкой функции $L_p(x)$ тогда и только тогда, когда вектор $v = x_0 - p$ ортогонален к подмногообразию \mathbb{M} в точке x_0 .

2. Критическая точка x_0 функции $L_p(x)$ является вырожденной тогда и только тогда, когда точка $P = x_0 + v_0$ является фокальной точкой, отображение f (1.5) имеет особенность в точке (x_0, v_0) и индекс точки x_0 равен степени вырождения матрицы Якоби отображения f в точке $(x_0, v_0) \in \mathbb{N}$.

Напомним, что степень вырождения симметричной матрицы называется кратность нуля ее характеристического многочлена.

Доказательство. 1. Пусть (u^i) – локальные координаты на \mathbb{M} . Рассмотрим фиксированную точку $p \in \mathbb{R}^N$ и функцию $L_p(x) := (x - p, x - p)$, где $x(u) \in \mathbb{M}$ и круглые скобки обозначают евклидово скалярное произведение. Тогда

$$\frac{\partial L_p}{\partial u^i} = 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, x - p \right).$$

Векторы $\frac{\partial x}{\partial u^i}$ образуют базис касательного пространства к \mathbb{M} . Поэтому точка x является критической для функции L_p тогда и только тогда, когда вектор $v := x - p$ ортогонален этим векторам и, следовательно, ортогонален подмногообразию \mathbb{M} .

2. Пусть x_0 – критическая точка отображения L_p . Продифференцируем L_p еще раз и получим выражение для гессиана

$$\frac{\partial^2 L_p}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}, x - p \right) + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j} \right).$$

Теперь вычислим матрицу Якоби отображения f в точке (x_0, v_0) . Пусть базис касательного пространства в точке (x_0, v_0) состоит из ортонормальных векторов $(e_\alpha) = (e_i, e_\mu)$, где e_i , $i = 1, \dots, n$, – ортонормальный базис касательного пространства к \mathbb{M} в критической точке и e_μ , $\mu = n + 1, \dots, N$, ортонормальный базис подпространства \mathbb{R}^{N-n} , ортогонального к \mathbb{M} в критической точке. В декартовой системе координат, натянутой на векторы (e_i, e_μ) , произвольная точка имеет вид $x = x^i e_i + x^\mu e_\mu \in \mathbb{R}^N$, при этом критическая точка $x_0 \in \mathbb{M}$ соответствует началу координат. В окрестности критической точки подмногообразии \mathbb{M} можно задать $N - n$ уравнениями

$$G^\mu := x^\mu - \varphi^\mu(x^1, \dots, x^n) = 0, \quad \mu = n + 1, \dots, N, \quad (1.6)$$

Тогда векторы, компоненты которых запишем в декартовой системе координат,

$$\text{grad } G_\mu = \left(-\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^1}, \dots, -\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^n}, \delta_{\mu n+1}, \dots, \delta_{\mu N} \right),$$

где $G_\mu := G^\nu \delta_{\nu\mu}$, $\varphi_\mu := \varphi^\nu \delta_{\nu\mu}$, ортогональны подмногообразию в каждой его точке. Поэтому в качестве локальных координат на нормальном расслоении \mathbb{N} можно выбрать $(u^i := x^i, v^\mu)$, где $v = v^\mu \text{grad } G_\mu$ – векторы, ортогональные к $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. Тогда отображение f в координатах примет вид

$$f(u, v) = \left(u^i - v^\nu \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u^i}, \varphi^\mu + v^\mu \right),$$

где использованы равенства (1.6) и опускание индекса проведено с помощью евклидовой метрики, $u_i := u^j \delta_{ji}$, т.к. мы работаем в декартовой системе координат. Теперь можно вычислить матрицу Якоби отображения f :

$$J = \begin{pmatrix} \partial f / \partial u \\ \partial f / \partial v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i - v^\nu \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial u^i \partial u^j} & \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial u^j} \\ * & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

В точке $(x_0, v) \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\frac{\partial \varphi^\mu}{\partial u^j} = 0, \quad \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial x_k}{\partial u^j} = \delta_j^i, \quad v^\nu \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u^i \partial u^j} v^\nu.$$

Поэтому

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial x_k}{\partial u^j} - \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u^i \partial u^j} v^\nu & 0 \\ * & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial L_p}{\partial u^i \partial u^j} & 0 \\ * & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Отсюда вытекает второе утверждение теоремы. \square

Следствие. Если точка p не является фокальной точкой для $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, то L_p – есть функция Морса на \mathbb{M} .

В заключение раздела приведем пример использования понятия фокальных точек.

Определение. Пусть имеется гладкое вложение $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, где $N > n + 1$. Рассмотрим множество $(N - n)$ -мерных шаров (дисков) $\mathbb{B}_\epsilon^{N-n}(x)$ достаточно малого радиуса $\epsilon > 0$ с центрами в точках $x \in \mathbb{M}$. Объединение этих шаров дает N -мерное гладкое многообразие, которое называется *трубчатой окрестностью подмногообразия* $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. Край трубчатой окрестности \mathbb{M} является $(N - 1)$ -мерным гладким подмногообразием. \square

Предложение 1.3.3. Пусть $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ – гладкое подмногообразие размерности $n < N - 1$. Тогда существует такое $\epsilon > 0$, что трубчатая окрестность

$$\mathbb{N}_\epsilon(\mathbb{M}) := \{y \in \mathbb{R}^N : \rho(y, \mathbb{M}) < \epsilon\}, \quad (1.7)$$

где

$$\rho(y, \mathbb{M}) := \min_{x \in \mathbb{M}} |y - x|$$

– расстояние от точки y до подмногообразия \mathbb{M} , является гладким N -мерным подмногообразием в \mathbb{R}^N с краем $\partial\mathbb{N}_\epsilon(\mathbb{M})$, который представляет собой гладкое $(N - 1)$ -мерное подмногообразие в \mathbb{R}^N . В частности, $\mathbb{N}_\epsilon(\mathbb{M})$ расслаивается на $(N - n)$ -мерные шары $\mathbb{B}_\epsilon^{N-n}(x)$, $x \in \mathbb{M}$, т.е. $\mathbb{N}_\epsilon(\mathbb{M}) = \mathbb{M} \times \mathbb{B}_\epsilon^{N-n}$, а его край $\partial\mathbb{N}_\epsilon(\mathbb{M})$ расслаивается на сферы $\mathbb{S}_\epsilon^{N-n+1}(x)$.

Доказательство. Достаточно выбрать $\epsilon < \min_{i,x} \lambda_i^{-1}(x)$ по всем $x \in \mathbb{M}$ и $1 \leq i \leq n$. Тогда в трубчатой окрестности $\mathbb{N}_\epsilon(\mathbb{M})$ не будет фокальных точек, и, следовательно, все утверждения теоремы выполнены. \square

При достаточно малом ϵ край $\partial_\epsilon\mathbb{N}(\mathbb{M})$ является вложенным подмногообразием (гиперповерхностью) в \mathbb{R}^N и отображается гауссовым отображением в сферу \mathbb{S}^{N-1} . Пусть $h_l(x)$ – функция высоты на \mathbb{M} и $\partial_\epsilon\mathbb{N}(\mathbb{M})$. Можно проверить, что каждая критическая точка $x_0 \in \mathbb{M}$ для функции $h_l(x)$ порождает ровно две критические точки y_0 и y'_0 на крае $\partial_\epsilon\mathbb{N}(\mathbb{M})$, которые являются двумя точками пересечения прямой l , проходящей через x_0 ортогонально многообразию \mathbb{M} .

Далее, можно проверить, что критическая точка $x_0 \in \mathbb{M}$ для функции высоты $h_l(x)$ является невырожденной тогда и только тогда, когда точки y_0 и y'_0 невырождены (они одновременно либо вырождены, либо не вырождены). Таким образом, если функция $h_l(x)$ является функцией Морса на $\partial_\epsilon\mathbb{N}(\mathbb{M})$, то она будет функцией Морса и на \mathbb{M} . Отсюда следует, что все утверждения относительно существования и всюду плотности функций Морса среди множества функций высоты, доказанные в предыдущем разделе для гиперповерхности, автоматически переносятся на подмногообразии произвольной размерности. Таким образом, рассмотрение гиперповерхности $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ в лемме 1.3.1 не ограничивает общность построения.

С физической точки зрения, край трубчатой окрестности $\partial_\epsilon\mathbb{N}(\mathbb{M})$ можно представить себе как положение в момент времени ϵ/c , где c – скорость света, фронта электромагнитной волны света от вспышки на всем подмногообразии $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ в момент времени $\epsilon = 0$. При достижении фронтом волны фокальной точки на нем появляются особенности в виде острий или складок (вложение края $\partial_\epsilon\mathbb{N}(\mathbb{M}) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ перестает быть гладким).

1.4 Степень отображения

Рассмотрим достаточно гладкое отображение

$$f : \mathbb{M} \ni x \mapsto f(x) = y \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

двух достаточно гладких ориентируемых связных многообразий одинаковой размерности, $\dim \mathbb{M} = \dim \mathbb{N} = n$. Будем считать, что на обоих многообразиях выбрана ориентация и атласы, согласованные с ориентацией, т.е. с положительными якобианами перехода между локальными координатами. Предположим, что отображение f является *правильным* по отношению к некоторой точке $y_0 \in \mathbb{N}$, т.е. полный прообраз точки y_0 состоит из конечного числа точек $x_i \in \mathbb{M}$, $i = 1, \dots, N$, причем якобианы отображения $\det(\partial y_0^\alpha / \partial x_i^\beta)$, где x_i^α, y_0^β – локальные координаты в окрестностях точек x_i и y_0 , соответственно, отличны от нуля во всех точках x_i .

Пример 1.4.1. Чтобы пояснить понятие правильной точки, рассмотрим отображение $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ замкнутой кривой $\gamma = \{\varphi_i(x)\} \in \mathbb{R}^2$, которая задается несколькими ветвями φ_i , $i = 1, 2, \dots$, на ось абсцисс \mathbb{R} при вертикальной проекции, показанной на рис.1.4. Точки $a_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ для этого отображения – правильные, т.к. их полный прообраз состоит либо из двух точек (a_1 и a_3), либо из четырех (a_2) и якобиан преобразования координат в точка прообраза (в данном случае это – обратная производная $(\varphi_1')^{-1}$) отличен от нуля. Точки $c_{1,2,3,4}$ – неправильные, потому что по крайней мере в одной из точек прообраза якобиан равен нулю. Заметим, что количество точек прообраза в правильных точках \mathbb{R} всегда отличается между собой на четное число, причем с одинаковым числом положительных и отрицательных якобианов, что связано с замкнутостью одномерного многообразия γ . Точки оси абсцисс, лежащие вне отрезка $[c_1, c_4]$ вообще не имеют прообразов, поскольку отображение $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ не является сюръективным. Эти точки, по определению, – правильные.

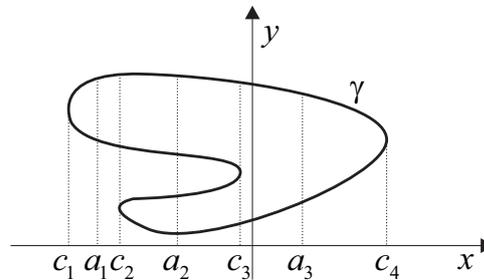


Рис. 1.4: Проекция замкнутой кривой γ на ось абсцисс. Точки $a_{1,2,3}$ – правильные, а $c_{1,2,3,4}$ – нет.

□

Пример 1.4.2. Рассмотрим N -листное накрытие ориентируемых многообразий $p : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ (см. главу ??). Тогда каждая точка $y \in \mathbb{M}$ является правильной, и полное число прообразов каждой точки равно числу листов накрытия. □

В общем случае полное число прообразов точек в \mathbb{N} может зависеть от точки, и некоторые точки в \mathbb{N} могут не быть правильными. Поскольку мы допускаем, что дифференциал отображения (1.8) в некоторых точках может обращаться в нуль, то отображение (1.8) может не быть ни погружением, ни накрытием.

Определение. Степенью отображения связных ориентированных замкнутых многообразий $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ в правильной точке $y_0 \in \mathbb{N}$ называется число

$$\deg f := \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial y_0^\alpha}{\partial x_i^\beta} \right), \quad (1.9)$$

где $\operatorname{sgn} = 1$, если якобиан преобразования координат положителен, и $\operatorname{sgn} = -1$, если якобиан отрицателен. \square

Якобианы отображения f при фиксированных атласах корректно определены. При этом изменение ориентации одного из многообразий приводит к изменению знака степени отображения. Из определения немедленно следует, что степень отображения всегда является целым числом.

Иногда мы будем также рассматривать степень отображения для некомпактных многообразий, которая определяется тем же равенством (1.9). В этом случае степень отображения может быть бесконечна.

Теорема 1.4.1. Степень отображения f не зависит от выбора правильной точки $y_0 \in \mathbb{N}$ и не меняется при гомотопиях (см. раздел ??).

Доказательство. См., например, [?], глава 3, §13, теорема 1. \square

Правильные точки отображений являются точками общего положения в \mathbb{N} , и сформулированная теорема позволяет характеризовать гомотопные отображения.

Пример 1.4.3. Если отображение f не является сюръективным, то существуют точки в \mathbb{N} , у которых нет прообразов. Из определения и теоремы 1.4.1 следует, что степень такого отображения всегда равна нулю, т.е. многообразие \mathbb{M} ни разу не накрывает \mathbb{N} . \square

Понятие степени отображения можно обобщить на многообразия с краем. Будем считать, что края многообразий представляют собой замкнутые ориентируемые достаточно гладкие многообразия на единицу меньшей размерности (коразмерности 1). Рассмотрим отображение

$$f : (\mathbb{M}, \partial\mathbb{M}) \rightarrow (\mathbb{N}, \partial\mathbb{N}),$$

которое отображает внутренние точки во внутренние и край в край. Для этого отображения полный прообраз точек края $\partial\mathbb{N}$ лежит в крае $\partial\mathbb{M}$, и для правильных точек края определена степень отображения.

Теорема 1.4.2. Степень отображения края совпадает со степенью отображения внутренних точек многообразий:

$$\deg f|_{\partial\mathbb{M}} = \deg f|_{\operatorname{int}\mathbb{M}}.$$

Доказательство. См., например, [?], глава 3, §13, теорема 2. \square

В силу сформулированной теоремы можно говорить про степень всего отображения f многообразий с краем.

Степень отображения можно определить также для неориентируемых многообразий. Однако в этом случае, поскольку знаки якобианов не имеют инвариантного смысла, степень отображения равна либо нулю (четное число якобианов), либо единице (нечетное число якобианов).

Пример 1.4.4. Согласно предложению ?? любое неориентируемое многообразие имеет двулистное ориентируемое накрытие. Степень этого накрытия равна нулю, т.к. количество якобианов равно двум. \square

Продолжим обсуждение ориентируемых многообразий.

Теорема 1.4.3. Два отображения $f, g : M \rightarrow S^n$ замкнутого n -мерного ориентированного многообразия в сферу S^n гомотопны в том и только в том случае, если их степени равны.

Доказательство. См., например, [?], глава 3, §13, теорема 3. \square

Теперь рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.4.5. Всякий многочлен $f(x)$ степени n с вещественными коэффициентами задает правильное отображение $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, т.к. уравнение $f(x) = \text{const}$ имеет не более n корней. Степень отображения равна 1, если n нечетно, и 0, если n четно (рис.1.5). В последнем случае отображение не является сюръективным. Доказательство следует из рисунка. Все точки отображения являются правильными, за исключением точек, в которых кривые касаются прямых линий, параллельных оси абсцисс, $f' = 0$. Заметим, что полное число точек прообраза правильной точки зависит от выбора точки. \square

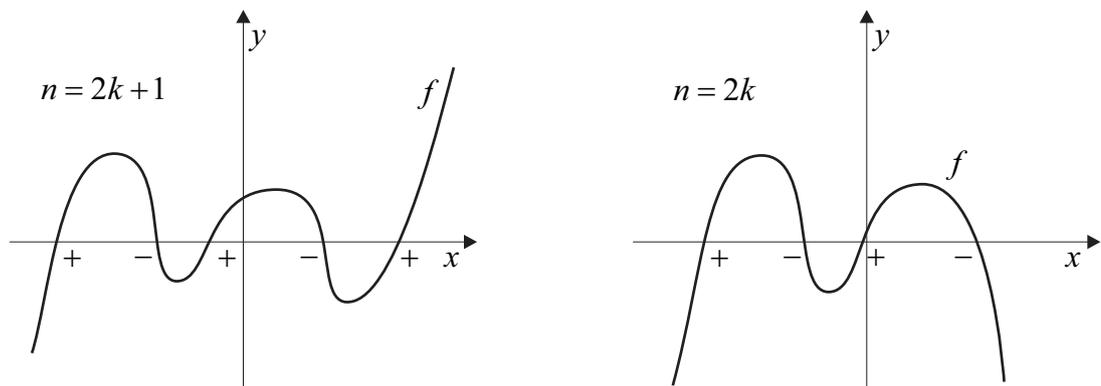


Рис. 1.5: Корни полиномов нечетной и четной степеней.

Пример 1.4.6. Рассмотрим отображение $f : S_b^1 \ni x \mapsto y \in S_a^1$ окружности радиуса $b > 0$ в окружность радиуса $a > 0$. Представим окружность как прямую, у которой отождествлены точки: $x \sim x + 2\pi b$ и $y \sim y + 2\pi a$. Функция $y = f(x)$ задает отображение окружности на окружность, если $f(x + 2\pi b) = f(x) + 2\pi a k$ для некоторого целого числа k . На рис. 1.6 слева изображена функция $f(x)$ при $k = 2$. Из рассмотрения графика следует, что степень отображения можно выразить через интеграл от функции по окружности:

$$\deg f = \frac{1}{\text{vol } S_a^1} \int_0^{2\pi b} dx \frac{df}{dx} = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} dx' \frac{df}{dx'} = k \in \mathbb{Z}. \quad (1.10)$$

где мы заменили переменную интегрирования: $x \mapsto x' := x/b$. Кроме того, в равенстве $\text{vol } S_a^1 = 2\pi a$ предположено, что метрика на прямой евклидова. Словами: мы проинтегрировали якобиан отображения f по исходной окружности и разделили

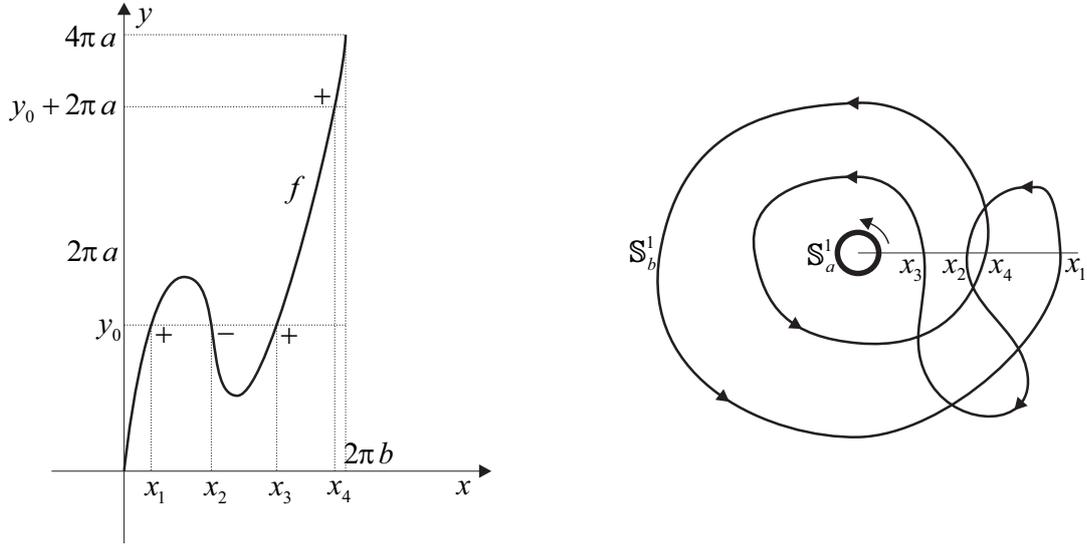


Рис. 1.6: Отображение $f : \mathbb{S}_b^1 \rightarrow \mathbb{S}_a^1$ степени 2 окружности радиуса b в окружность радиуса a . Ориентации окружностей справа показаны стрелками. Точка $y_0 \in \mathbb{S}_a^1$ имеет четыре прообраза: x_1 , x_2 , x_3 и x_4 .

на “объем” окружности-мишени, который равен $2\pi a$. Ясно, что окружности можно непрерывно деформировать, при этом индекс отображения меняться не будет.

Окружность единичного радиуса можно представить в виде кривой $|z| = 1$ на комплексной плоскости. Тогда всякое отображение $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ гомотопно каноническому $z \mapsto z^k$, где k – степень отображения. В общем случае отображение $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ может не являться накрытием (могут быть неправильные точки), хотя каноническое отображение – накрытие окружности.

Отображение окружности на окружность можно представить также следующим образом. Пусть окружность-мишень изображена на рис.1.6 справа в виде маленькой окружности \mathbb{S}_a^1 с центром в начале координат, а исходная окружность \mathbb{S}_b^1 в виде замкнутой линии, целиком лежащей вне \mathbb{S}_a^1 . Зададим на окружностях ориентацию, как показано стрелками. Определим отображение $f : \mathbb{S}_b^1 \rightarrow \mathbb{S}_a^1$ с помощью проекции вдоль радиуса-вектора. Тогда степень отображения f равна полному числу обходов внешней окружности вокруг маленькой окружности или, что эквивалентно, вокруг начала координат. При этом каждый обход против часовой стрелки входит со знаком плюс, а против – со знаком минус. Если уравнение исходной окружности задано параметрически в полярной системе координат:

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad t \in [0, 1],$$

то степень отображения можно записать в виде интеграла

$$\deg f = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 dt \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.11)$$

Степень отображения окружности в окружность широко используется в комплексном анализе. Запишем комплексное число в полярной форме $z = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$. Тогда $dz = e^{i\varphi} dr + i r e^{i\varphi} d\varphi$ и

$$\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + i d\varphi = d(\ln r) + i d\varphi.$$

При обходе вдоль замкнутой кривой γ вокруг начала координат изменение $\operatorname{In} \gamma$ равно нулю, и индекс отображения f задается интегралом

$$\operatorname{deg} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Это есть ни что иное как интегральная формула Коши, которая лежит в основе теории вычетов (теорема ??). \square

Пример 1.4.7. Рассмотрим отображение f замкнутого n -мерного многообразия \mathbb{M} в евклидово пространство \mathbb{R}^n . Это отображение является правильным по отношению к некоторой точке, как и любое отображение замкнутого многообразия куда угодно. Поэтому степень отображения определена и равна нулю. Для этого достаточно заметить, что, в силу компактности \mathbb{M} , в \mathbb{R}^n имеются точки y_0 , полный прообраз $f^{-1}(y_0)$ которых пуст, – это достаточно удаленные точки в \mathbb{R}^n (отображение не может быть сюръективным). Заметим, например, что стереографическая проекция сферы на плоскость не подходит, т.к. при стереографической проекции на плоскость отображается не вся сфера, а сфера с выколотой точкой, которая является некомпактным многообразием. Отсюда следует, что прообраз любой правильной точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из четного числа точек, одна половина которых дает положительный вклад в степень, а другая – отрицательный. \square

Пример 1.4.8. Рассмотрим отображение ориентированных многообразий с краем

$$f : (\mathbb{M}, \partial\mathbb{M}) \rightarrow (\mathbb{N}, \partial\mathbb{N}),$$

сужение которого на край является диффеоморфизмом: $\partial\mathbb{M} \approx \partial\mathbb{N}$. Пусть этот диффеоморфизм сохраняет ориентацию. Тогда из теоремы 1.4.2 следует, что $\operatorname{deg} f = 1$. В частности, если задана замена координат $y = y(x)$ в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\mathbb{U}$, и эта замена координат взаимно однозначна на границе, то отображение f имеет степень 1 и во внутренних точках. Впрочем, это следует уже из определения замены координат: любой диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию, имеет степень 1. \square

Пример 1.4.9. Всякий комплексный многочлен $f(z)$ степени n задает правильное отображение комплексной плоскости $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ или отображение между римановыми сферами $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ (после компактификации). Чтобы увидеть это, заметим, что если $f(z) = a_0 z^n$ ($a_0 \neq 0$), то это отображение имеет степень n . Теперь построим гомотопию. Все многочлены степени n

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (1.12)$$

с ненулевым старшим членом задают гомотопные ему отображения. Гомотопия, например, имеет вид

$$F(z, t) := a_0 z^n + (1 - t)[a_1 z^{n-1} + \dots + a_n], \quad t \in [0, 1].$$

Тем самым произвольный полином степени n задает отображение той же степени. \square

Следствие (Теорема Гаусса). Комплексный многочлен (1.12) степени $n \geq 1$ имеет корень. \square

Доказательство. Действительно, если уравнение $f(z) = 0$ не имеет решений, то полный прообраз $f^{-1}(0)$ пуст, и степень $\operatorname{deg} f = 0$. Пришли к противоречию. \square

Замечание. Все известные доказательства теоремы Гаусса основаны на этом топологическом соображении. Чисто алгебраического доказательства “основной теоремы алгебры” до сих пор не существует. \square

Рассмотрим голоморфное отображение замкнутых комплексных многообразий $f : M \rightarrow N$ одинаковых размерностей.

Теорема 1.4.4. Если степень $\deg f = n$, то $n \geq 0$ и правильное значение $y_0 \in N$ отображения f имеет ровно n прообразов, причем знак якобиана для каждого прообраза положителен.

Доказательство. Для определения степени отображения комплексные многообразия надо овегествить (??). Определитель комплексного линейного преобразования, которое задается комплексной матрицей A , всегда положителен:

$$\det_{\mathbb{R}} A^{\mathbb{R}} = |\det_{\mathbb{C}} A|^2 \geq 0,$$

где в левой части равенства стоит овегествление матрицы A (см. Предложение ??). Поэтому из определения следует равенство

$$\deg f = \sum_{i=1}^n (+1) = n. \quad \square$$

Следствие. Уравнение $f(z) = 0$, где $f(z)$ – комплексный полином степени $n \geq 1$ имеет ровно n решений. \square

Доказательство. Если 0 для многочлена является правильной точкой, то, согласно теореме 1.4.4, она имеет ровно n прообразов. То есть все корни различны. Если 0 является неправильной точкой, то два или более корней совпадают. В этом случае из теоремы Гаусса следует, что существует по крайней мере один корень, который обозначим через z_1 . Тогда полином представим в виде $f(z) = (z - z_1)f_1(z)$, где $f_1(z)$ – полином степени $n - 1$. Если 0 – правильная точка полинома $f_1(z)$, то снова приходим к утверждению следствия. При совпадении корней полинома $f_1(z)$, опять воспользуемся теоремой Гаусса. Этот процесс рано или поздно оборвется, поскольку степень полинома конечна. \square

1.5 Применения степени отображения

1.5.1 Степень отображения и интеграл

Пусть задано отображение (1.8) замкнутых ориентированных связных многообразий одинаковой размерности n . Локальные координаты на M и N обозначим, соответственно, через x^α и y^α , $\alpha = 1, \dots, n$. Предположим, что на многообразии-мишени N задана n -форма, которая в локальной системе координат имеет вид

$$A = dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n A_{1\dots n}.$$

Тогда определен интеграл

$$\int_N A.$$

Возврат отображения f индуцирует n -форму f^*A на исходном многообразии \mathbb{M} , которая в локальных координатах имеет вид

$$f^*A = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n A_{1\dots n} J, \quad J := \det \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}.$$

Тем самым определен интеграл

$$\int_{\mathbb{M}} f^*A.$$

Теорема 1.5.1. *Справедлива формула*

$$\int_{\mathbb{M}} f^*A = (\deg f) \int_{\mathbb{N}} A. \quad (1.13)$$

Доказательство. Рассмотрим область $\mathbb{V} \subset \mathbb{N}$, целиком состоящую из правильных значений отображения f и лежащую в достаточно малой окрестности правильного значения $y_0 \in \mathbb{N}$. Полный прообраз $f^{-1}(y_0)$ состоит из конечного числа точек x_i , $i = 1, \dots, M \geq N$, где N – степень отображения. Полный прообраз $f^{-1}(\mathbb{V})$ есть объединение

$$f^{-1}(\mathbb{V}) = \mathbb{U}_1 \cup \dots \cup \mathbb{U}_M, \quad \mathbb{U}_i \in \mathbb{M},$$

непересекающихся подмножеств многообразия \mathbb{M} с координатами x_i^α . По построению, каждая область \mathbb{U}_i диффеоморфна \mathbb{V} . По формуле замены переменных интегрирования справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{U}_i} dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^n A_{1\dots n}(y(x_j)) J = \operatorname{sgn} \det \frac{\partial y^\alpha}{\partial x_i^\beta} \int_{\mathbb{V}} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n A_{1\dots n}(y).$$

Обратим внимание, что под знаком интеграла в левой части равенства стоит якобиан преобразования, а не его модуль, который возникает при замене переменных интегрирования (??). Именно по этой причине в правой части возник общий множитель sgn . Суммируя по всем областям, получаем равенство

$$\int_{f^{-1}(\mathbb{U})} f^*A = \left(\sum_{i=1}^M \operatorname{sgn} \det \frac{\partial y^\alpha}{\partial x_i^\beta} \right) \int_{\mathbb{V}} A = \deg f \int_{\mathbb{V}} A.$$

Далее, если на некотором подмножестве $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ якобиан отображения f обращается в нуль, то на этом подмножестве \mathbb{U} индуцированная форма f^*A также равна нулю. По лемме Сарда множество правильных точек многообразия \mathbb{M} является открытой всюду плотной областью. Ввиду аддитивности интеграла (??) теорема доказана. \square

Замечание. Теорема верна также для отображений некомпактных ориентируемых многообразий, если форма A имеет компактный носитель, и, следовательно, интеграл (2.41) сходится, а также для многообразий с краем. \square

Формула (2.41) предоставляет конструктивный способ вычисления индекса отображения. Допустим, что на ориентируемом многообразии-мишени \mathbb{N} задана риманова метрика $h_{\alpha\beta}(y)$. Она определяет форму объема

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \sqrt{\det h_{\alpha\beta}}.$$

Тогда возврат отображения f определяет на исходном многообразии \mathbb{M} симметричную квадратичную форму

$$g := f^*h \quad \Leftrightarrow \quad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\delta}{\partial x^\beta} h_{\gamma\delta}.$$

В общем случае это – не метрика, т.к. мы допускаем вырожденность отображения f в некоторых точках. Для квадратичной формы g отображение f является изометрией только в некоторых окрестностях правильных точек (почти всюду). Поскольку

$$A = dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \sqrt{\det h_{\alpha\beta}} = \frac{1}{n!} dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy^{\alpha_n} \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \sqrt{\det h_{\alpha\beta}},$$

где $\hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ – полностью антисимметричная тензорная плотность ранга n (см. приложение ??), то индуцированная n -форма на \mathbb{M} равна

$$f^*A = \frac{1}{n!} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n} \hat{\varepsilon}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \det \left(\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\delta} \right) \sqrt{\det h_{\alpha\beta}}.$$

Тогда из формулы (2.41) следует выражение для индекса отображения:

$$\deg f = \frac{1}{\text{vol}_h \mathbb{N}} \int_{\mathbb{M}} f^*A = \frac{1}{\text{vol}_h \mathbb{N}} \int_{\mathbb{M}} dx \det \left(\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\delta} \right) \sqrt{\det h_{\alpha\beta}}. \quad (1.14)$$

Этот интеграл явно инвариантен относительно замены координат и на \mathbb{M} , и на \mathbb{N} (в последнем случае надо сохранить ориентацию).

Допустим, что отображение f является диффеоморфизмом, сохраняющим ориентацию. Тогда в интеграле (1.14) можно перейти к интегрированию по координатам y и получить единицу:

$$\deg f = \frac{1}{\text{vol}_h \mathbb{N}} \int_{\mathbb{N}} dy \sqrt{\det h_{\alpha\beta}} = 1,$$

как и должно быть. Эту же замену переменных интегрирования можно сделать и в общем случае, однако область интегрирования будет другой. Интегрировать по многообразию-мишени с учетом знака нужно будет столько раз, сколько раз многообразие \mathbb{M} “накрывает” \mathbb{N} . Это согласуется с интуитивным представлением об индексе отображения, и хорошо видно в простейшем примере отображения окружностей 1.4.6.

В приложениях важную роль играют нелинейные сигма-модели, в частности, $\mathbb{O}(N)$ -модель (см. раздел ??). В таких моделях поля $y(x)$ рассматриваются в качестве независимых переменных, по которым производится варьирование действия. Тогда все решения уравнений Эйлера–Лагранжа можно разделить на гомотопически эквивалентные классы, вычислив интеграл (1.14). В этом случае степень отображения (1.14) принято называть “топологическим зарядом”.

Пример 1.5.1. Рассмотрим $\mathbb{SO}(3)$ -модель, которая описывается полем $\mathbf{n}(x) = (n^i(x))$, $i = 1, 2, 3$, принимающим значения на единичной двумерной сфере \mathbb{S}^2 , $\mathbf{n}^2 = 1$. Допустим, что многообразие $x \in \mathbb{M}$, на котором принимает значения поле \mathbf{n} , также является сферой \mathbb{S}^2 (компактифицированной плоскостью). Параметризуем n -поле азимутальным и полярным углами $(n^i(x)) \mapsto (\Theta(x), \Phi(x))$:

$$n^1 := \sin \Theta \cos \Phi, \quad n^2 := \sin \Theta \sin \Phi, \quad n^3 := \cos \Theta,$$

разрешив тем самым связь $\mathbf{n}^2 = 1$. Тогда формула (1.14) примет вид

$$Q := \deg f = \frac{1}{4\pi} \int dx \det \frac{\partial(\Theta, \Phi)}{\partial(x^1, x^2)} \sin \Theta = \frac{1}{4\pi} \int dx (\partial_1 \Theta \partial_2 \Phi - \partial_2 \Theta \partial_1 \Phi) \sin \Theta. \quad (1.15)$$

Прямые вычисления показывают, что формулу для индекса отображения (1.15) можно переписать в следующем “более инвариантном” виде без разрешения связи

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int dx \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} \hat{\varepsilon}_{ijk} n^i \partial_\alpha n^j \partial_\beta n^k, \quad (1.16)$$

где $\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta}$ и $\hat{\varepsilon}_{ijk}$ – полностью антисимметричные тензорные плотности второго и третьего ранга соответственно (см. приложение ??). Значение Q в теории поля обычно называют *топологическим зарядом* заданного n -поля, который принимает целочисленные значения, $Q \in \mathbb{Z}$.

Из определения индекса отображения следует, что если два n -поля имеют разные значения топологического заряда, то они гомотопически неэквивалентны, т.е. не могут быть непрерывно деформированы друг в друга. Следовательно, если добавить время $\mathbf{n}(x) \mapsto \mathbf{n}(x, t)$, $t \in \mathbb{R}$, то в процессе эволюции топологический заряд будет сохраняться. И это происходит независимо от того, какое действие выбрано для n -поля. Единственное требование заключается в непрерывном характере эволюции. Здесь проявляется существенное отличие от теоремы Нетер, где “заряды” сохраняются только на уравнениях движения.

Отметим, что формулу (1.15) нельзя переписать в виде

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d\Theta d\Phi \sin \Theta,$$

т.к. отображение $(\Theta, \Phi) \mapsto (x^1, x^2)$ в общем случае не определено из-за многозначности. Обратим внимание, что целочисленность интегралов (1.15) и (1.16) для произвольных дифференцируемых функций Θ , Φ и \mathbf{n} отнюдь не очевидна.

В теории поля решения уравнений Эйлера–Лагранжа для n -поля ищутся, как правило, на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 . Если на бесконечности поставить надлежащие граничные условия

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{n}(x) = \mathbf{n}_0,$$

где \mathbf{n}_0 – некоторый фиксированный единичный вектор, и достаточно быстрое убывание всех частных производных, то для таких решений евклидову плоскость можно компактифицировать и снова вернуться к отображению $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. \square

1.5.2 Степень векторного поля на гиперповерхности

Определение. Рассмотрим достаточно гладкое векторное поле $X = X^\alpha \partial_\alpha \in \mathcal{X}(\mathbb{U})$, заданное в некоторой области $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ евклидова пространства. Допустим, что в этой области векторное поле всюду отлично от нуля. Тогда в области \mathbb{U} определено единичное векторное поле $N(x) := X/|X|$. Тем самым определено *сферическое (гауссово) отображение* области \mathbb{U} в сферу \mathbb{S}^{n-1} :

$$f : \mathbb{U} \ni x \mapsto N(x) \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

При этом вектор N рассматривается как вектор в начале координат фиксированного евклидова пространства-мишени \mathbb{R}^n , с которым мы отождествили касательные пространства во всех точках $x \in \mathbb{U}$. Если \mathbb{Q} – любая замкнутая достаточно гладкая гиперповерхность, целиком лежащая в \mathbb{U} , то определена степень отображения $\deg f|_{\mathbb{Q}}$,

суженного на \mathbb{Q} . Согласно следствию из теоремы 1.6.1 произвольная замкнутая гиперповерхность в \mathbb{R}^n ориентируема. Эта степень отображения называется *степенью векторного поля* X на гиперповерхности $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$. \square

Рассмотрим евклидово пространство-мишень \mathbb{R}^n с декартовыми координатами y^i , $i = 1, \dots, n$. На сфере единичного радиуса $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ и даже во всем евклидовом пространстве без начала координат $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ определена замкнутая дифференциальная форма Ω степени $n-1$ (форма объема, индуцированная стандартным вложением $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$), которая имеет вид

$$\Omega = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{y^i}{((y^1)^2 + \dots + (y^n)^2)^{n/2}} dy^1 \wedge \dots \wedge \check{d}y^i \wedge \dots \wedge dy^n,$$

где символ $\check{d}y^i$ означает, что этот дифференциал пропущен, и σ_{n-1} – объем единичной сферы \mathbb{S}^{n-1} (??). Тогда

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega = 1.$$

Пример 1.5.2. На плоскости ($n = 2$) с декартовыми координатами x, y 1-форма Ω имеет вид

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

или, в полярных координатах,

$$\Omega = \frac{d\varphi}{2\pi}. \quad \square$$

Пример 1.5.3. В трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 с декартовыми координатами x, y, z 2-форма Ω равна

$$\Omega = \frac{1}{4\pi} \frac{x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.17)$$

или, в сферических координатах,

$$\Omega = \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\varphi. \quad \square$$

Предположим, что гиперповерхность \mathbb{Q} локально задана в параметрическом виде

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1}),$$

где u^1, \dots, u^{n-1} – локальные координаты на гиперповерхности, а x^i , $i = 1, \dots, n$, – декартовы координаты в \mathbb{R}^n . Тогда из теоремы 1.5.1 и вида формы Ω , где надо произвести замену $y^i \mapsto X^i$, следует

Теорема 1.5.2. Степень произвольного векторного поля X на гиперповерхности $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$, на которой оно отлично от нуля, равна

$$\deg_{\mathbb{Q}} X := \deg f = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\mathbb{Q}} du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1} \frac{1}{|X|^n} \det \begin{pmatrix} X^1 & \dots & X^n \\ \frac{\partial X^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial X^n}{\partial u^1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial X^1}{\partial u^{n-1}} & \dots & \frac{\partial X^n}{\partial u^{n-1}} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}. \quad (1.18)$$

Пример 1.5.4. Степень отличного от нуля векторного поля, определенного на плоскости ($n = 2$), равна

$$\deg_{\mathbb{Q}} X = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{dt}{|X|^2} \left(X^1 \frac{dX^2}{dt} - X^2 \frac{dX^1}{dt} \right), \quad (1.19)$$

где интегрирование ведется вдоль гладкой замкнутой кривой $\gamma = x(t) \in \mathbb{R}^2$. \square

Пример 1.5.5. Степень отличного от нуля векторного поля, определенного в трехмерном евклидовом пространстве ($n = 3$), равна

$$\deg_{\mathbb{Q}} X = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{Q}} \frac{dudv}{|X|^3} \det \begin{pmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \\ \frac{\partial X^1}{\partial u} & \frac{\partial X^2}{\partial u} & \frac{\partial X^3}{\partial u} \\ \frac{\partial X^1}{\partial v} & \frac{\partial X^2}{\partial v} & \frac{\partial X^3}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{Q}} \frac{dudv}{|X|^3} \left(X, \left[\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right] \right). \quad (1.20)$$

где интегрирование ведется по гладкой замкнутой поверхности $\mathbb{Q} = x(u, v) \in \mathbb{R}^3$. В последнем выражении круглые скобки обозначают скалярное, а квадратные – векторное произведения в евклидовом пространстве. \square

Рассмотрим особо случай единичного векторного поля $N(x)$, $|N| = 1$, в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , которое направлено ортогонально к гиперповерхности \mathbb{Q} во внешнюю сторону. В этом случае индуцированная форма объема имеет вид

$$f^* \Omega = K \sqrt{g} du^1 \wedge \dots \wedge u^{n-1},$$

где K – гауссова кривизна гиперповерхности (произведение главных кривизн) и $d\sigma = \sqrt{g} du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1}$ – элемент объема гиперповерхности, индуцированный вложением $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ (см. [?], глава 4, §26, теорема 2). Таким образом, доказана

Теорема 1.5.3. Степень единичного векторного поля N , перпендикулярного к гиперповерхности $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ и направленного во внешнюю сторону, равна

$$\deg_{\mathbb{Q}} N = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int_{\mathbb{Q}} du \sqrt{g} K. \quad (1.21)$$

Замечание. Гауссову кривизну гиперповерхности \mathbb{Q} , которая равна произведению главных кривизн вложения $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, мы обозначаем K – буквой из шрифта sans serif, чтобы отличать ее от другого удобного обозначения $K := -R/n(n-1)$, где R – скалярная кривизна (2.83). Последняя нормировка такова, что для n -мерной сферы $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ единичного радиуса с индуцированной метрикой $K = 1$. Эти кривизны имеют разные размерности:

$$[K] = l^{-n}, \quad K = l^{-2},$$

но при $n = 2$ совпадают: $K = K$.

Заметим, что гауссова кривизна, как произведение главных кривизн, определяется не только самим многообразием, но и его вложением в \mathbb{R}^n . В то же время скалярная кривизна определяется целиком во внутренних терминах – метрикой. И то, что $R = -2K$ в двумерном случае необходимо доказывать (пример ??). \square

Пример 1.5.6. Рассмотрим замкнутую кривую на плоскости $\gamma = x(t) \in \mathbb{R}^2$. Тогда гауссова кривизна равна кривизне кривой $K(t) = 1/\rho(t)$ (см. раздел ??) и элемент объема равен длине кривой: $d\sigma = dl$ (канонический параметр). В этом случае для единичного векторного поля имеем формулу

$$\deg_{\gamma} N = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{dl}{\rho}. \quad (1.22)$$

Этот интеграл представляет собой топологический инвариант (одинаков для всех гомотопных кривых) и принимает только целочисленные значения, что довольно неожиданно, если забыть способ, которым он был получен. Целочисленность легко проверить для окружности радиуса $r = \rho$. Действительно, кривизна окружности постоянна и степень отображения легко считается в полярных координатах:

$$\deg_{\gamma} N = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{\rho d\varphi}{\rho} = 1.$$

Ясно, что, если кривая γ проходит окружность k раз, то $\deg_{\gamma} N = k$. \square

Пример 1.5.7. Пусть единичное векторное поле N задано в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 и является перпендикулярным к некоторой замкнутой поверхности \mathbb{Q} . В этом случае K – это гауссова кривизна поверхности (произведение главных кривизн) и $d\sigma = \sqrt{g} du \wedge dv$ – элемент площади поверхности, метрика которой индуцирована вложением $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (см. пример ??). Тогда степень векторного поля на \mathbb{Q} имеет вид

$$\deg_{\mathbb{Q}} N = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{Q}} dudv \sqrt{g} K = -\frac{1}{8\pi} \iint_{\mathbb{Q}} dudv \sqrt{g} R, \quad (1.23)$$

где $R = -2K$ – скалярная кривизна, построенная по метрике g .

Теперь можно забыть о том, что поверхность \mathbb{Q} вложена в евклидово пространство \mathbb{R}^3 , поскольку последний интеграл (1.23) целиком записан во внутренних терминах: у нас есть замкнутое двумерное многообразие (поверхность) с некоторой римановой метрикой g , по которой строится скалярная кривизна $R(g)$ и вычисляется интеграл. Этот интеграл является топологическим инвариантом (половиной эйлеровой характеристики) и равен целому числу. Целочисленность интеграла (1.23) далеко не очевидна. Ее легко проверить для сферы единичного радиуса, на которой метрика индуцирована вложением. В этом случае $K = 1 \Leftrightarrow R = -2$, а площадь поверхности сферы равна 4π . Это значит, что эйлерова характеристика сферы равна двум. В дальнейшем мы увидим, что этот интеграл не зависит от выбора римановой метрики на поверхности. \square

1.5.3 Число Уитни

Рассмотри дифференцируемую замкнутую кривую $\gamma = (x(t), y(t))$ общего положения на евклидовой плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Это означает, что $x(t) = x(t + 2\pi)$, $y(t) = y(t + 2\pi)$, касательный вектор (\dot{x}, \dot{y}) отличен от нуля при всех t и все самопересечения кривой γ двойные, причем касательные векторы к ветвям кривой в точке самопересечения линейно независимы (рис.1.7).

Зафиксируем на кривой точку t_0 , не являющуюся точкой самопересечения. Теперь припишем каждой точке самопересечения либо число 1, либо -1 следующим образом: зададим в плоскости ориентирующий репер $(1, 2)$; затем пойдем вдоль кривой в

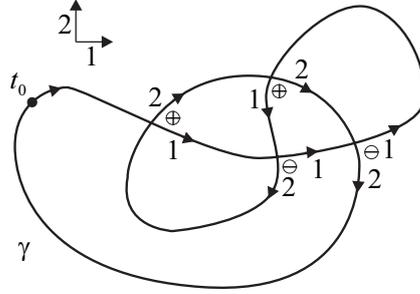


Рис. 1.7: Число Уитни для кривой с четырьмя точками самопересечения: $W(\gamma) = 0$.

какую-либо сторону от точки t_0 ; когда мы в первый раз встречаем точку самопересечения, то ставим номер 1 на касательном векторе в точке самопересечения; когда встречаем эту же точку второй раз, то ставим номер 2; в результате в каждой точке самопересечения возникает репер; если репер в точке самопересечения имеет ту же ориентацию, что и ориентирующий репер, то приписываем ей число 1; если ориентация противоположна, то -1 . Таким образом, всем точкам самопересечения, которые мы пронумеруем индексом i , поставлены в соответствие числа ± 1 .

Определение. Числом Уитни замкнутой дифференцируемой кривой $\gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ называется сумма

$$W(\gamma) := \sum_i (\pm 1), \quad (1.24)$$

где сумма берется по всем точкам самопересечения. \square

Число точек самопересечения может быть как четным, так и нечетным. При этом справедлива

Теорема 1.5.4. Четность числа точек самопересечения кривой $\gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ противоположна четности числа $\deg_\gamma N$

Доказательство. Проводится по индукции, см., например, [?], глава 3, §14, теорема 3. \square

1.5.4 Формула Гаусса–Бонне

В настоящем разделе мы вычислим степень гауссова отображения $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{S}^2$ гладкой замкнутой ориентированной поверхности $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Эта степень играет ключевую роль в классификации замкнутых двумерных многообразий.

Будем считать что единичная сфера-мишень $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ вложена в евклидово пространство стандартным образом. Не ограничивая общности, можно считать, что северный и южный полюса сферы с декартовыми координатами $y_0 = (0, 0, 1)$ и $y_0^* = (0, 0, -1)$ являются правильными точками гауссова отображения (в противном случае сферу можно повернуть). При этих условиях справедлива

Лемма 1.5.1. Рассмотрим функцию высоты h на поверхности $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ значение которой в точке $p \in \mathbb{Q}$ совпадает с z -координатой этой точки: $h(p) := z_p$. Пусть также задано гладкое гауссово отображение $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{S}^2$. Тогда все критические точки этой функции высоты не вырождены, и множество критических точек совпадает с объединением двух прообразов $f^{-1}(y_0)$ и $f^{-1}(y_0^*)$.

Доказательство. Градиент функции $h(p) = z$ обращается на \mathbb{Q} в нуль там и только там, где ось z ортогональна к \mathbb{Q} . Эти точки и являются объединением прообразов $f^{-1}(y_0)$ и $f^{-1}(y_0^*)$ обоих полюсов. Якобиан гауссова отображения $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{S}^2$ в точках прообраза северного полюса $f^{-1}(y_0)$ в специальных координатах в точности совпадает с определителем гессиана функции высоты $h = z$, который равен гауссовой кривизне. Для прообразов южного полюса сферы $f^{-1}(y_0^*)$ то же верно для функции $h = -z$. Тем самым невырожденность прообразов $f^{-1}(y_0) \cup f^{-1}(y_0^*)$ равносильна условию $K \neq 0$ или условию отличия от нуля гессиана функции h или $-h$, что верно для правильных точек. \square

Заметим теперь, что имеет место очевидное равенство

$$\det \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^i \partial u^j} \right) = (-1)^{n-1} \det \left(\frac{\partial^2 (-h)}{\partial u^i \partial u^j} \right),$$

где u^i $i = 1, \dots, u^{n-1}$, – локальные координаты вблизи любой точки на поверхности \mathbb{Q} произвольной размерности $n - 1$. В рассматриваемом случае $n - 1 = 2$, и, следовательно, знаки якобианов гауссова отображения во все точки $f^{-1}(y_0) \cup f^{-1}(y_0^*)$ те же, что и знаки гауссовой кривизны K в этих точках. Таким образом, при определении знаков якобиана отображения f нет нужды различать направления внешней и внутренней нормали к поверхности \mathbb{Q} и функции высоты h и $-h$. Суммированием вкладов всех критических точек получается

Лемма 1.5.2. *Имеет место равенство*

$$2 \deg f = \sum_i (-1)^{\alpha_i}, \quad (1.25)$$

где суммирование проводится по всем критическим точкам p_i функции высоты $h = z$ и α_i – числа, которые определены следующим образом: $\alpha_i = 0$ для минимумов и максимумов, где $\operatorname{sgn} K = 1$, и $\alpha_i = 1$ для седел, где $\operatorname{sgn} K = -1$.

Множитель 2 в левой части формулы (1.25) возник из-за того, что мы суммируем по прообразам двух правильных точек (северный и южный полюса), а не одной.

Теперь покажем, что для замкнутых ориентируемых поверхностей $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, которые с топологической точки зрения представляют собой сферу с g ручками, число, стоящее в правой части (1.25), равно $2 - 2g$. Действительно, всегда можно предъявить такую поверхность и ее вложение в \mathbb{R}^3 так, что функция высоты h будет иметь 1 минимум, 1 максимум и ровно $2g$ седел. Напомним, что при вложении поверхность \mathbb{Q} можно непрерывно деформировать. Такой случай схематично показан на рис.1.8. Число ручек g называется *родом* поверхности. Обычная сфера имеет род нуль и изображена на рис.1.8 слева. Сфера с одной ручкой является тором, имеет род 1 и изображена на рис.1.8 в центре. И так далее.

С учетом формулы (1.23) получаем знаменитую формулу для поверхностей рода g :

$$2 \deg f = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{Q}} du \sqrt{g} K = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{Q}} du \sqrt{g} R = 2 - 2g. \quad (1.26)$$

Конечно, возможны другие вложения поверхностей в \mathbb{R}^3 . Однако, последний интеграл записан во внутренних терминах, и не меняется при малых изменениях метрики.

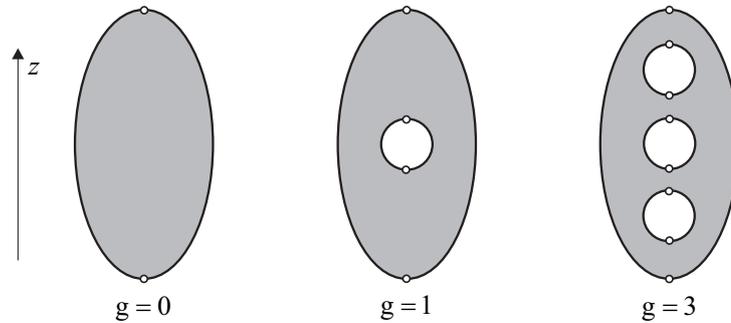


Рис. 1.8: Вложение поверхностей рода g в \mathbb{R}^3 . Маленькими кружками показаны критические точки.

Действительно, вариация интеграла равна нулю, $\delta \int du \sqrt{g} R = 0$, поскольку подынтегральное выражение является полной производной, что было показано с помощью прямых вычислений (??):

$$\sqrt{|g|} R = 2\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \omega_\beta,$$

где $\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta} = \pm 1$ – антисимметричная тензорная плотность второго ранга и ω_α – компоненты $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$ -связности. (В рассматриваемом случае $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$ -связность строится по реперу и связности Леви–Чивиты.) Рассмотрим семейство метрик

$$g_{\alpha\beta}(t) := t g_{\alpha\beta}^{(1)} + (1-t) g_{\alpha\beta}^{(2)}, \quad t \in [0, 1],$$

где $g_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $g_{\alpha\beta}^{(2)}$ – две произвольные римановы метрики. Метрика $g_{\alpha\beta}(t)$ является римановой при всех t . Поскольку

$$\frac{d}{dt} \int du \sqrt{g} R = -4\pi \int du \frac{\delta(2 \deg f)}{\delta g_{\alpha\beta}} \dot{g}_{\alpha\beta} = 0,$$

то отсюда следует, что интеграл (1.26) не зависит от выбора римановой метрики. Тем самым доказана

Теорема 1.5.5 (Гаусс–Бонне). *Для замкнутой ориентируемой поверхности \mathbb{Q} с римановой метрикой и g ручками справедлива формула*

$$\chi(\mathbb{Q}) := 2 \deg f = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{Q}} du \sqrt{g} R = 2 - 2g, \quad (1.27)$$

где f – степень гауссова отображения $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{S}^2$.

Подчеркнем, что формула Гаусса–Бонне (2.28) не зависит от вложения $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ поскольку записана во внутренних терминах.

Как уже отмечено, интеграл (2.28) является топологическим инвариантом. Он называется *эйлеровой характеристикой* замкнутой ориентированной поверхности и принимает только целочисленные значения.

1.5.5 Индекс особой точки векторного поля

Рассмотрим достаточно гладкое векторное поле $X(x)$, заданное в некоторой окрестности \mathbb{U}_0 некоторой точки x_0 евклидова пространства \mathbb{R}^n .

Определение. Мы говорим, что точка x_0 есть *особая точка* векторного поля X , если в этой точке оно обращается в нуль, $X(x_0) = 0$. Особая точка векторного поля называется *изолированной*, если оно отлично от нуля в некоторой окрестности $\mathbb{U}_0 \setminus \{x_0\}$. Особая точка называется *невырожденной*, если

$$\det \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x_0} \neq 0.$$

Корнями невырожденной особой точки называются собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы $\partial X^\alpha / \partial x^\beta \Big|_{x_0}$. *Индексом* невырожденной особой точки называется знак

$$\operatorname{sgn} \det \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x_0} = \operatorname{sgn} (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n). \quad \square$$

Данные выше определения не зависят от выбора координат в окрестности особой точки \mathbb{U}_0 . Поэтому с равным успехом можно говорить об особых точках векторных полей на многообразии \mathbb{M} размерности n .

Из теоремы о неявной функции следует

Лемма 1.5.3. *Невырожденная особая точка векторного поля всегда изолирована.*

Если векторное поле является потенциальным: $X^\alpha := \partial \varphi / \partial x^\alpha$ для некоторой достаточно гладкой функции φ , то индекс особой точки совпадает со знаком гессиана:

$$\operatorname{sgn} \det \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x_0} = \operatorname{sgn} \det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \Big|_{x_0} = (-1)^{i(x_0)},$$

где $i(x_0)$ – число отрицательных квадратов в каноническом (диагональном) виде квадратичной формы $d^2 \varphi \Big|_{x_0}$. То есть индекс невырожденной особой точки потенциального векторного поля совпадает с индексом критической точки потенциала φ .

Рассмотрим сферу $\mathbb{S}_\epsilon^{n-1}$ достаточно малого радиуса $\epsilon > 0$, окружающую особую точку x_0 , такую, что векторное поле X не обращается на ней в нуль. Тогда определено гауссово отображение

$$f_{x_0} : \quad \mathbb{S}_\epsilon^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}.$$

Определение. *Индексом* изолированной особой точки x_0 векторного поля X называется степень гауссова отображения:

$$\operatorname{ind}_{x_0}(X) := \operatorname{deg} f_{x_0}. \quad \square \tag{1.28}$$

Оказывается, что если особая точка не вырождена, то это определение совпадает с предыдущим:

Теорема 1.5.6. *Для невырожденной особой точки x_0 векторного поля $X(x)$ имеет место равенство*

$$\operatorname{deg} f_{x_0} = \operatorname{sgn} \det \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_{x_0}.$$

Доказательство. См., например, [?], глава 3, §14, теорема 5. □

Пример 1.5.8. В примере ?? рассмотрены векторные поля на плоскости ($n = 2$) с изолированными особыми точками. Их индексы в общем случае и для потенциального поля приведены в таблице 1.1. □

Особая точка	Индекс
Седло (корни вещественные и разных знаков)	-1
Узел (корни вещественные и одного знака)	+1
Фокус (корни комплексно сопряжены)	+1
Центр (корни чисто мнимые)	-1
Особая точка для потенциального поля	Индекс
Минимум φ	+1
Седло φ	-1
Максимум φ	+1

Таблица 1.1: Индексы изолированных особых точек векторных полей на плоскости.

Особая точка	Индекс
Выталкивающая особая точка ($\operatorname{re} \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3$)	+1
Седло 1-го типа ($\operatorname{re} \lambda_{1,2} \geq 0, \lambda_3$ вещественно, $\lambda_3 < 0$)	-1
Седло 2-го типа (λ_1 вещественно, $\lambda_1 > 0, \operatorname{re} \lambda_{2,3} \leq 0$)	+1
Всасывающая особая точка ($\operatorname{re} \lambda_i \leq 0, i = 1, 2, 3$)	-1
Особая точка потенциального поля	Индекс
Минимум φ	+1
Седло 1-го типа (один отрицательный квадрат формы $d^2\varphi$)	-1
Седло 2-го типа (два отрицательных квадрата формы $d^2\varphi$)	+1
Максимум φ	-1

Таблица 1.2: Индексы изолированных особых точек векторных полей в \mathbb{R}^3 .

Пример 1.5.9. Рассмотрим векторные поля в трехмерном евклидовом пространстве ($n = 3$). Возможные изолированные особые точки в общем случае и для потенциального поля приведены в таблице 1.2. \square

В заключение сформулируем теорему, связывающую степень векторного поля с индексами его особых точек.

Теорема 1.5.7. Пусть X – векторное поле в \mathbb{R}^n с изолированными особыми точками x_1, \dots, x_m , и пусть \mathbb{Q} – замкнутая ориентированная гиперповерхность в \mathbb{R}^n , не проходящая через особые точки и ограничивающая некоторую область $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда степень векторного поля X на гиперповерхности \mathbb{Q} , т.е. степень гауссова отображения $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, равна сумме индексов всех особых точек, лежащих в \mathbb{D} .

Доказательство. См., например, [?], глава 3, §14, теорема 6. \square

1.5.6 Трансверсальная поверхность векторного поля

Особый интерес представляет случай, когда гиперповерхность $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ гомотопна сфере большого радиуса $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, и векторное поле X ее нигде не касается. Такую гиперповерхность \mathbb{Q} назовем *трансверсальной поверхностью* векторного поля X .

Лемма 1.5.4. Степень векторного поля X на трансверсальной поверхности \mathbb{Q} равна степени нормального векторного поля N к этой же поверхности 1.21. Если поверхность \mathbb{Q} гомотопна сфере \mathbb{S}^{n-1} , то степень этого поля равна единице.

Доказательство. Трансверсальное векторное поле на гиперповерхности \mathbb{Q} гомотопно (в классе полей, не касающихся \mathbb{Q}) нормальному единичному векторному полю к этой поверхности. Степень есть инвариант гомотопии. \square

Следствие. Векторное поле X на \mathbb{R}^n , трансверсальное к какой-либо сфере \mathbb{S}^{n-1} , имеет по крайней мере одну особую точку внутри этой сферы. \square

Доказательство. Индекс неособой точки равен нулю. Если особой точки нет, то по теореме 1.5.7 степень векторного поля равна нулю. Получили противоречие. \square

Информация об особых точках и трансверсальных поверхностях может быть очень важной при качественном описании поведения интегральных кривых векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, особенно в плоскости. Поэтому рассмотрим особо случай $n = 2$, когда гиперповерхность $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ становится замкнутой кривой на плоскости. Допустим, что векторное поле X таково, что среди его интегральных кривых есть замкнутые. Если векторное поле X трансверсально к некоторой кривой, гомотопной окружности, то внутри этой кривой есть хотя бы одна особая точка. Рассмотрим случай, когда векторное поле направлено внутрь \mathbb{Q} , и внутри \mathbb{Q} векторное поле имеет ровно одну особую точку выталкивающего типа (узел или фокус) (см. рис.1.9).

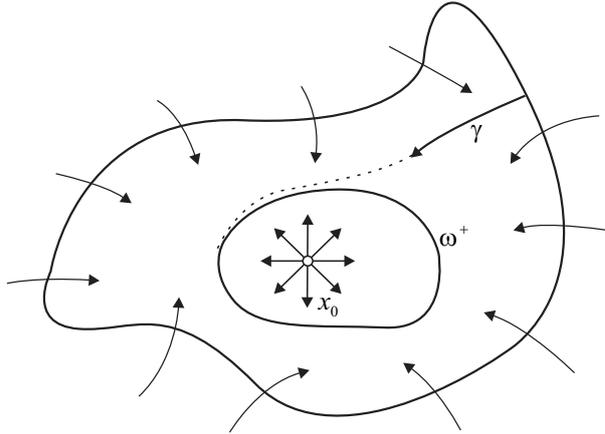


Рис. 1.9: Предельный цикл ω^+ для интегральной кривой γ .

При таких условиях интегральная кривая $\gamma = (x(t), y(t))$, $t \in [0, \infty)$ векторного поля X с началом на \mathbb{Q} не может ни дойти до особой точки x_0 , поскольку особая точка является отталкивающей, ни выйти из области, ограниченной кривой \mathbb{Q} (трансверсальность). Рассмотрим предельное множество $\omega^+(\gamma)$ этой траектории, точками которого являются предельные точки в \mathbb{R}^2 последовательностей $\{\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots\}$, где $t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Множество ω^+ компактно, замкнуто и не содержит особой точки x_0 . При этих условиях справедлива

Теорема 1.5.8 (Пуанкаре–Бендиксон). Множество $\omega^+(\gamma)$ является периодической интегральной кривой векторного поля X , на которую кривая γ наматывается извне (“предельный цикл”).

Доказательство. См., например, [?], глава 3, §14. \square

Отметим, что на один и тот же предельный цикл могут наматываться различные кривые γ .

Пример 1.5.10. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(\dot{x}), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad (1.29)$$

с нечетной правой частью: $f(-\dot{x}) := -f(\dot{x})$. Допустим, что функция $f(y)$ монотонна и имеет вид, указанный на рис.1.10. На фазовой плоскости $x, y := \dot{x}$ имеем векторное поле X с компонентами

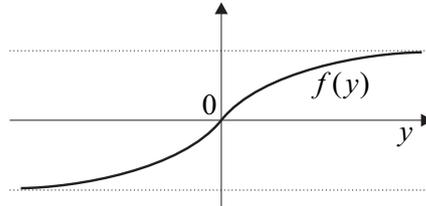


Рис. 1.10: Правая часть уравнения (1.29).

$$X^1 := \dot{x} = y, \quad X^2 := \dot{y} = -ay - bx - f(y).$$

Окружность \mathbb{S}^1 достаточно большого радиуса трансверсальна векторному полю X , и поле X направлено внутрь этой окружности. В конечной части плоскости x, y поле X имеет одну особую точку – начало координат $x_0 = (0, 0)$. Матрица производных компонент векторного поля в особой точке имеет вид

$$\left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a + f'(0) \end{pmatrix},$$

и ее собственные значения таковы:

$$\lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - b},$$

где $p := f'(0) - a$. Особая точка будет выталкивающей, если $\operatorname{re} \lambda_{1,2} > 0$ или, в нашем случае, $f'(0) > a$. Согласно теореме Пуанкаре–Бендиксона уравнение (1.29) при этом условии имеет предельный цикл. \square

1.6 Индекс пересечения многообразий

Рассмотрим гладкое многообразие \mathbb{M} , $\dim \mathbb{M} = n$.

Определение. Подмногообразия $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{M}$ ($\dim \mathbb{P} = p < n$, $\dim \mathbb{Q} = q < n$) называются *трансверсально пересекающимися* (или, как мы будем иначе говорить, находящимися в *общем положении*), если в любой точке пересечения $x \in \mathbb{P} \cap \mathbb{Q}$ касательные пространства к \mathbb{P} и \mathbb{Q} линейно порождают касательное пространство к \mathbb{M} . Основным свойством общего положения является то, что пересечение $\mathbb{P} \cap \mathbb{Q}$ является гладким $(p + q - n)$ -мерным подмногообразием в \mathbb{M} .

Пример 1.6.1. Пусть прямая в \mathbb{R}^3 пересекает плоскость под любым углом α , $0 < \alpha \leq \pi/2$. Тогда прямая и плоскость трансверсально пересекаются. При этом точка пересечения является 0-мерным подмногообразием в \mathbb{R}^3 . \square

Рассмотрим случай, когда $p + q = n$, т.е. пересечение $\mathbb{P} \cap \mathbb{Q}$ состоит из конечного числа точек x_i , $i = 1, \dots, m$. Если многообразия $\mathbb{M}, \mathbb{P}, \mathbb{Q}$ ориентированы, то припишем каждой точке пересечения знак по следующему правилу. Пусть $\tau_{(i)}^p$ и $\tau_{(i)}^q$ – ориентирующие касательные реперы в точке x_i к подмногообразиям \mathbb{P} и \mathbb{Q} соответственно. Тогда точке пересечения приписываем знак “+”, если репер $\tau := (\tau_{(i)}^p, \tau_{(i)}^q)$ (его невырожденность следует из трансверсальности) является ориентирующим для многообразия \mathbb{M} в точке x_i и знак “–” в противном случае. Этот знак обозначим через $\text{sgn } x_i(\mathbb{P} \circ \mathbb{Q})$. Тогда *индексом пересечения* многообразий \mathbb{P} и \mathbb{Q} называется целое число

$$\mathbb{P} \circ \mathbb{Q} := \sum_{i=1}^m \text{sgn } x_i(\mathbb{P} \circ \mathbb{Q}). \quad (1.30)$$

В неориентируемом случае индекс пересечения $\mathbb{P} \circ \mathbb{Q}$ определяется как вычет по $\text{mod } 2$ числа m точек пересечения, т.е. равен нулю или единице при четном или нечетном числе точек пересечения, соответственно. \square

Поскольку размерности подмногообразий p и q строго меньше размерности n объемлющего многообразия, то подмногообразия \mathbb{P} и \mathbb{Q} являются замкнутыми, в смысле общей топологии, подмножествами многообразия \mathbb{M} .

Пример 1.6.2. Рассмотрим случай $n = 3$, $p = 2$ и $q = 1$. Типичный случай общего положения показан на рис.1.11. Здесь τ , τ^p и τ^q – ориентирующие реперы многообразий \mathbb{M} , \mathbb{P} и \mathbb{Q} соответственно. Имеются только две точки пересечения с реперами противоположной ориентации. Поэтому индекс пересечения равен нулю. \square

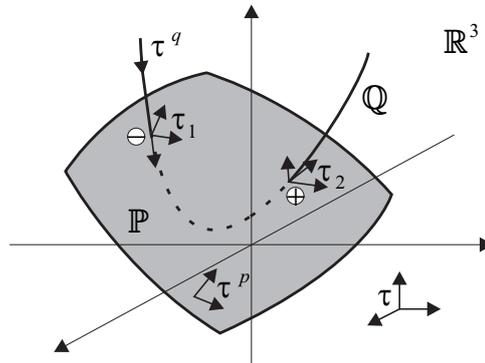


Рис. 1.11: Трансверсальное пересечение подмногообразий $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ при $n = 3$, $p = 2$ и $q = 1$. Индекс пересечения $\mathbb{P} \circ \mathbb{Q} = 0$.

Лемма 1.6.1. *Имеет место равенство*

$$\mathbb{P} \circ \mathbb{Q} = (-1)^{pq} \mathbb{Q} \circ \mathbb{P}. \quad \square$$

Доказательство. Определитель перехода от репера $(\tau_{(i)}^p, \tau_{(i)}^q)$ к реперу $(\tau_{(i)}^q, \tau_{(i)}^p)$ равен $(-1)^{pq}$ во всех точках пересечения x_i . \square

Теорема 1.6.1. *Если подмногообразия $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \subset \mathbb{M}$ гомотопны, т.е. являются образами гомотопных вложений $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{M}$, то их индексы пересечения с любым $\mathbb{P} \subset \mathbb{M}$ совпадают:*

$$\mathbb{Q}_1 \circ \mathbb{P} = \mathbb{Q}_2 \circ \mathbb{P}.$$

Доказательство. См., например, [?], глава 3, §15, теорема 1. \square

Замечание. Теорема верна также для неориентируемых многообразий для вычетов $\text{mod } 2$. \square

Следствие. Индекс пересечения двух замкнутых подмногообразий \mathbb{P} и \mathbb{Q} евклидова пространства \mathbb{R}^n всегда равен нулю. \square

Доказательство. Трансляцией на вектор $a \in \mathbb{R}^n$ сдвинем \mathbb{Q} так далеко, что подмногообразие $\mathbb{Q}_2 := \mathbb{Q} + a$ не будет пересекаться с \mathbb{P} (это можно сделать ввиду компактности \mathbb{P} и \mathbb{Q}). Тогда $\mathbb{Q}_2 \circ \mathbb{P} = 0$ и, следовательно, $\mathbb{Q} \circ \mathbb{P} = 0$ в силу теоремы 1.6.1. \square

Следствие. Замкнутое связное $(n - 1)$ -мерное подмногообразие $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$ (гиперповерхность) всегда разделяет евклидово пространство \mathbb{R}^n ровно на две части и поэтому ориентируемо. \square

Доказательство. Предположим противное: подмногообразие \mathbb{Q} не разделяет \mathbb{R}^n . Возьмем две точки $y_{1,2} \in \mathbb{R}^n$ около точки $x \in \mathbb{Q}$ по разные стороны от \mathbb{Q} (локально это имеет смысл). Соединим точки y_1 и y_2 путем γ в \mathbb{R}^n , не пересекающимся с \mathbb{Q} . Замкнем путь γ до петли \mathbb{S} в \mathbb{R}^n с помощью малого отрезка, нормального к \mathbb{Q} в \mathbb{R}^n . Эта петля пересекается с \mathbb{Q} ровно в одной точке. Тогда индекс пересечения $\mathbb{S} \circ \mathbb{Q}$ равен ± 1 (ровно одна точка общего положения). Это противоречит предыдущему следствию.

Связная гиперповерхность не может разделить \mathbb{R}^n на три и более частей, т.к. тогда она не будет являться многообразием.

Гиперповерхность является краем каждой из компонент связности, на которые делится евклидово пространство. Поскольку каждая компонента ориентируема, то ее край также ориентируем согласно теореме ???. \square

Замечание. Последнее следствие перестает быть верным, если в нем подмногообразие $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ заменить погружением, т.е. допустить самопересечения. В этом случае образ многообразия \mathbb{Q} в \mathbb{R}^n уже не будет подмногообразием. Имеются, например, погружения $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ в \mathbb{R}^3 , имеющие самопересечения. \square

1.6.1 Суммарная особенность векторного поля

Пусть задано векторное поле X на гладком замкнутом многообразии \mathbb{P} , $\dim \mathbb{P} = p$. Рассмотрим пространство линейных элементов \mathbb{M} (касательное расслоение $\mathbb{T}(\mathbb{P})$ размерности $n = 2p$, точками которого являются пары (x, Y) , где $x \in \mathbb{P}$ и Y – касательный вектор в точке x . Векторное поле X определяет вложение $f_X : \mathbb{P} \hookrightarrow \mathbb{M}$ (сечение касательного расслоения) по правилу $f_X(x) := (x, X(x))$. Обозначим образ этого вложения через $\mathbb{P}(X)$. Многообразие $\mathbb{P}(0)$, как обычно, отождествим с \mathbb{P} (тривиальное сечение касательного расслоения).

Определение. Векторное поле X называется *полем общего положения*, если многообразия $\mathbb{P}(X)$ и $\mathbb{P}(0)$ находятся в общем положении в \mathbb{M} . Векторное поле общего положения имеет лишь изолированные особые точки $X(x_i) = 0$. Если многообразие \mathbb{P} ориентировано с помощью репера τ^p в точке x , то многообразие линейных элементов \mathbb{M} также ориентировано с помощью репера (τ^p, τ^p) во всех точках (x, Y) . \square

Доказательство следующих леммы и теоремы можно найти в [?], глава 3, §15, лемма 2 и теорема 2.

Лемма 1.6.2. Все особые точки x_i векторного поля X не вырождены. Знак особой точки x_i , как точки пересечения $\mathbb{P}(0) \cap \mathbb{P}(X)$, входящей в определение индекса пересечения $\mathbb{P}(0) \circ \mathbb{P}(X)$, совпадает с индексом особой точки $\text{sgn det}(\partial X^\alpha / \partial x^\beta)_{x_i}$.

Теорема 1.6.2. Для любого замкнутого ориентированного многообразия \mathbb{P} сумма индексов особых точек любого векторного поля X общего положения равна индексу пересечения $\mathbb{P}(0) \circ \mathbb{P}(X)$ в многообразии \mathbb{M} линейных элементов и не зависит от векторного поля X .

Следствие. Если p нечетно, то сумма индексов особых точек векторного поля на замкнутом ориентируемом многообразии p -мерном многообразии \mathbb{P} равна нулю. \square

Доказательство. Согласно лемме 1.6.2 справедливо равенство $\mathbb{P}(0) \circ \mathbb{P}(X) = (-1)^{p^2} \mathbb{P}(X) \circ \mathbb{P}(0)$. С другой стороны, т.к. векторные поля 0 и X гомотопны, то $\mathbb{P}(0) \circ \mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(X) \circ \mathbb{P}(0)$. Следовательно, $\mathbb{P}(0) \circ \mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(X) \circ \mathbb{P}(0) = 0$. \square

Следствие. Для любой гладкой функции $\varphi(x)$ с невырожденными особыми точками x_i на замкнутом ориентируемом p -мерном многообразии \mathbb{P} выражение $\sum_{x_i} (-1)^{i(x_i)}$ не зависит от функции φ и равно нулю, если p нечетно. Здесь $i(x_i)$ – индекс особой точки x_i , т.е. число отрицательных квадратов формы $d^2\varphi|_{x_i}$. \square

Это следует из совпадения чисел $(-1)^{i(x_i)}$ с индексами особых точек векторного поля $X := \text{grad } \varphi$ (см. раздел 1.5.5).

Определение. Число

$$\chi(\mathbb{P}) := \sum_{x_i} (-1)^{i(x_i)} \quad (1.31)$$

называется *эйлеровой характеристикой* многообразия \mathbb{P} . \square

Эйлерову характеристику можно определить по-другому через так называемую триангуляцию многообразия \mathbb{P} . Рассмотрим случай двумерной поверхности \mathbb{P} , $\dim \mathbb{P} := p = 2$. Предположим, что замкнутая ориентируемая поверхность \mathbb{P} разбита на замкнутые треугольники со следующими условиями: а) каждая точка $x \in \mathbb{P}$ принадлежит хотя бы одному треугольнику; б) два треугольника пересекаются либо по одной вершине, либо по целому ребру.

Определение. Эйлеровой характеристикой поверхности \mathbb{P} называется число

$$\chi(\mathbb{P}) := \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2, \quad (1.32)$$

где α_0 – число вершин, α_1 – число ребер, α_2 – число самих треугольников. \square

Теорема 1.6.3 (Хопф). Эйлерова характеристика поверхности \mathbb{P} , разбитой на треугольники, совпадает с суммой индексов особых точек векторного поля общего положения на этой поверхности.

Доказательство. В силу теоремы 1.6.2 достаточно предъявить одно гладкое векторное поле $X(x)$ на поверхности \mathbb{P} , для которого теорема верна. Предъявим такое поле. В центрах треугольников поместим выталкивающие особые точки типа узла. В вершинах поместим всасывающие особые точки. В центре каждого ребра поместим по седлу. Такое векторное поле существует, и его можно построить. На рис.1.12 указаны интегральные кривые искомого поля, которое отдельно строится в каждом треугольнике. Всасывающие и выталкивающие особые точки имеют индексы $+1$ при $p = 2$, а седло -1 . \square

Можно проверить, что для поверхностей с g ручками эйлерова характеристика равна $2 - 2g$. Для сферы $g = 0$, и эйлерова характеристика равна 2.

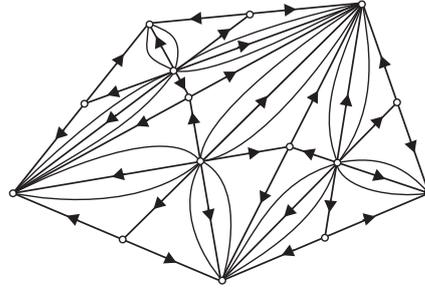


Рис. 1.12: Триангуляция поверхности тремя треугольниками. В центрах находятся выталкивающие особые точки, в вершинах – втягивающие, а на ребрах – седла.

1.6.2 Алгебраическое число неподвижных точек

Пусть задано достаточно гладкое отображение $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ замкнутого ориентированного n -мерного многообразия в себя. В общем случае это отображение может не быть сюръективным. Будем изучать *неподвижные точки* отображения f , т.е. решения уравнения $f(x) = x$. Допустим, что x_i – неподвижная точка с локальными координатами x_i^α , $\alpha = 1, \dots, n$. В координатах отображение f имеет вид $x_i^\alpha = f^\alpha(x_i^1, \dots, x_i^n)$.

Определение. Неподвижная точка x_i отображения $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ называется *невырожденной*, если матрица

$$\left[\delta_\alpha^\beta - \left(\frac{\partial f^\beta}{\partial x^\alpha} \right)_{x_i} \right] = (\mathbb{1} - df)_{x_i}$$

невырождена. Знак $\text{sgn det } (\mathbb{1} - df)_{x_i}$ называется знаком неподвижной точки x_i . Сумма

$$L(f) := \sum_i \text{sgn det } (\mathbb{1} - df)_{x_i} \quad (1.33)$$

называется *алгебраическим числом неподвижных точек (числом Лефшеца)*. Отображение f называется *отображением общего положения*, если все его неподвижные точки невырождены. \square

Рассмотрим прямое произведение многообразий $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ и выделим в нем два подмногообразия:

- *диагональ* Δ , состоящую из точек вида (x, x) ;
- *график* $\Delta(f)$ отображения f , состоящий из точек $(x, f(x))$.

Диагональ Δ и график $\Delta(f)$ представляют собой подмногообразия прямого произведения $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$, каждое из которых диффеоморфно \mathbb{M} . Диагональ является частным случаем графика, когда f – тождественное отображение: $x \mapsto x$ для всех $x \in \mathbb{M}$.

Теорема 1.6.4. *Индекс пересечения $\Delta(f) \circ \Delta$ совпадает с алгебраическим числом неподвижных точек.*

Доказательство. Точки пересечения $\Delta(f) \cap \Delta$ соответствуют неподвижным точкам отображения f . Пусть τ – ориентирующий репер многообразия \mathbb{M} в неподвижной точке x_i . Тогда $\tau \times \tau$ является ориентирующим репером в точке $(x_i, x_i) \in \Delta$. Ориентирующий репер для графика $\Delta(f)$ имеет вид $\tau \times df(\tau)$, где df – дифференциал

отображения f в точке x_i . Матрица перехода от репера (τ, τ) , ориентирующего $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$, к составному реперу $(\tau \times df(\tau), \tau \times \tau)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ df & \mathbb{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ df & \mathbb{1} - df \end{pmatrix},$$

где вторая матрица получена вычитанием столбцов, и ее определитель равен $\det(\mathbb{1} - df)$. \square

Следствие. Если отображение $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ гомотопно нулю (отображению в одну точку), то $L(f) = \pm 1$, и отображение f имеет хотя бы одну неподвижную точку. \square

Доказательство. По тереме 1.6.1 индекс пересечения не изменится, если отображение f подвергнуть гомотопии (непрерывно деформировать). Если отображение $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ переводит все в одну точку $x_0 = f(\mathbb{M})$, то индекс пересечения $\Delta(f) \circ \Delta$ равен ± 1 , т.к. пересечение диагонали с множителем $\Delta(f) = \mathbb{M} \times x_0$ состоит ровно из одной точки (x_0, x_0) общего положения. \square

Следствие (Теорема Брауэра). Всякое непрерывное отображение $f : \bar{\mathbb{B}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{B}}^n$ замкнутого шара в замкнутый шар имеет хотя бы одну неподвижную точку для любого $n = 1, 2, \dots$. \square

Доказательство. Представим шар $\bar{\mathbb{B}}^n$ как нижнюю полусферу на сфере $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим отображение складки $\psi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, которое неподвижно на нижней полусфере и проектирует верхнюю полусферу на нижнюю. Тогда можно построить отображение

$$\mathbb{S}^n \xrightarrow{\psi} \bar{\mathbb{B}}^n \xrightarrow{f} \bar{\mathbb{B}}^n \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{S}^n,$$

где id – тождественное отображение. Это отображение $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ гомотопно нулю и, по предыдущему следствию, имеет неподвижную точку. Эта неподвижная точка лежит в $\bar{\mathbb{B}}^n$ и является также неподвижной точкой отображения f . \square

Замкнутость шара в теореме Брауэра важна, т.к. неподвижная точка может лежать на крае.

Пример 1.6.3. Рассмотрим гладкое отображение интервала $(-1, 1)$ в себя, которое задано функцией

$$f(x) := \frac{x+1}{2}.$$

Это отображение сдвигает все точки интервала вправо, и не может иметь неподвижную точку. В то же время, если рассмотреть данное отображение на отрезке $[-1, 1]$, то оно будет иметь неподвижную точку $x = 1$, которая лежит на крае. \square

В качестве применения теоремы Брауэра, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.6.4. Предположим, что у нас есть географическая карта мира. Положим ее на стол. Тогда на карте будет существовать точка, которая находится в точности над изображаемой точкой. \square

Пример 1.6.5. Отображение f окружности на себя, которое задано преобразованием комплексного переменного $z \rightarrow z^n$, $n = 1, 2, \dots$, является n -листным накрытием, имеет степень $\deg f = n$ и ровно $n-1$ неподвижных точек, которые определены уравнением $z^n = z$, $|z| = 1$. Эти неподвижные точки суть корни из единицы, $z^{n-1} = 1$. Отсюда в силу гомотопической инвариантности числа Лефшеца $L(f)$ получаем, что для отображения $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ степени n число Лефшеца равно $L(f) = n - 1$. \square

Пример 1.6.6. Отображение римановой сферы $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ вида $z \rightarrow z^n$ в комплексных координатах имеет ровно n конечных неподвижных точек в \mathbb{C} (одна находится в начале координат и $n - 1$ – на единичной окружности) и одну бесконечно удаленную. Все эти точки не вырождены и имеют знак $+1$, т.к. отображение задано голоморфной функцией. Поэтому $L(f) = n + 1$. \square

1.6.3 Коэффициент зацепления

Определение. Рассмотрим пару гладких замкнутых регулярных кривых $\gamma_1 = \mathbf{x}_1(t)$ и $\gamma_2 = \mathbf{x}_2(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , не пересекающихся друг с другом. Коэффициентом зацепления этих кривых называется число (интеграл Гаусса)

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} := \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{([d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2], \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3}, \quad \mathbf{x}_{12} := \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad (1.34)$$

где квадратные и круглые скобки обозначают соответственно векторное и скалярное произведения векторов в \mathbb{R}^3 . \square

Из определения сразу следует равенство

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} = \{\gamma_2, \gamma_1\}.$$

Интуитивно, коэффициент зацепления представляет собой алгебраическое число витков с которыми один контур (например, провод) охватывает другой. Выражением этого является

Теорема 1.6.5.

- Коэффициент зацепления является целым числом и не меняется при непрерывных деформациях (гомотопиях) замкнутых кривых γ_1 и γ_2 , при которых они взаимно не пересекаются.
- Рассмотрим отображение замкнутого диска $F : \bar{\mathbb{B}}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, совпадающее с γ_1 на крае $\mathbb{S}^1 := \partial\bar{\mathbb{B}}^2$ и находящееся в общем положении на кривой γ_2 . Тогда индекс пересечения $F(\bar{\mathbb{B}}^2) \circ \gamma_2$ совпадает с коэффициентом зацепления $\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

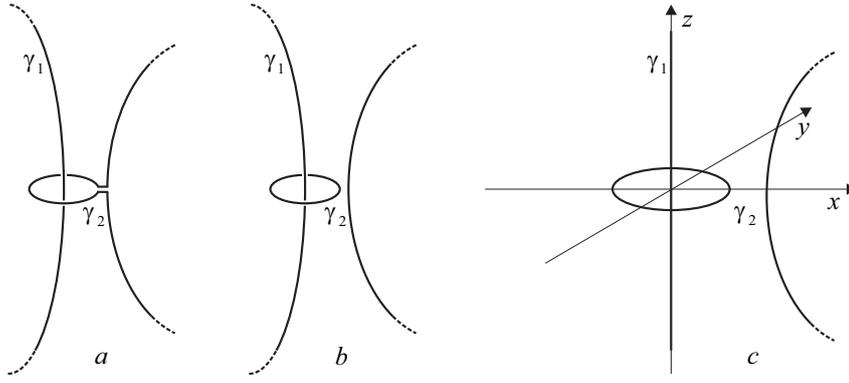
Доказательство. Замкнутые кривые $\gamma_{1,2} = \mathbf{x}_{1,2}(t)$ определяют двумерную замкнутую (компактную без края) ориентированную поверхность

$$\gamma_1 \times \gamma_2 : \quad \mathbb{R}^2 \ni \quad (t^1, t^2) \mapsto (\mathbf{x}_1(t^1), \mathbf{x}_2(t^2)) \quad \in \mathbb{R}^6,$$

где $t^{1,2}$ – координаты на поверхности. Допустим, что кривые γ_1 и γ_2 не пересекаются. Тогда определено отображение f поверхности $\gamma_1 \times \gamma_2$ в сферу \mathbb{S}^2 :

$$f(t^1, t^2) := \frac{\mathbf{x}_1(t^1) - \mathbf{x}_2(t^2)}{|\mathbf{x}_1(t^1) - \mathbf{x}_2(t^2)|}.$$

Степень этого отображения как раз дается интегралом Гаусса (1.34). Следовательно, интеграл равен целому числу. При непрерывных деформациях замкнутых кривых γ_1 и γ_2 , при которых они не пересекаются, отображение f меняется на гомотопное. Поэтому коэффициент зацепления $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \deg f$ при таких деформациях не меняется.

Рис. 1.13: Простейшее зацепление двух кривых γ_1 и γ_2 .

Если кривые не зацеплены, т.е. их можно растащить без взаимных пересечений по разные стороны от одной двумерной плоскости, то $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \deg f = 0$. Поэтому с помощью гомотопии, указанной на рис.1.13, *a, b*, задачу вычисления коэффициента зацепления можно свести к простейшему случаю, показанному на рис.1.13, *c*. Это вычисление становится особенно простым, если радиус первой окружности γ_1 устремить к бесконечности. Таким образом, кривые γ_1 и γ_2 параметрически задаются в виде

$$\mathbf{x}_1(t^1) := (0, 0, t^1), \quad -\infty < t^1 < \infty, \quad \mathbf{x}_2(t^2) := (\cos t^2, \sin t^2, 0), \quad 0 \leq t^2 \leq 2\pi.$$

Коэффициент зацепления таких кривых легко считается:

$$\begin{aligned} \{\gamma_1, \gamma_2\} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{dt^1 dt^2}{[1 + (t^1)^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt^1}{[1 + (t^1)^2]^{3/2}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{1}{2} \operatorname{th} z \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1, \end{aligned}$$

где сделана подстановка $t^1 := \operatorname{sh} z$.

Итак, для простейшего зацепления (рис.1.13, *c*) коэффициент зацепления $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ равен 1, а для незацепленных кривых – нулю. Отсюда вытекает утверждение теоремы. \square

Глава 2

Трехмерная гравитация

В последнее время модели гравитации в двух и трех измерениях привлекают большое внимание. Основная причина сводится к тому, что с понижением числа измерений модель существенно упрощается, что позволяет продвинуться намного дальше в анализе уравнений движения. Например, в главе ?? была рассмотрена модель двумерной гравитации, где было, в частности, найдено общее решение уравнений движения при отсутствии полей материи. Это – важный результат, который позволяет глубже понять модели гравитации в большем числе измерений. Кроме того, модели гравитации в четырех измерениях при некоторых предположениях сводятся к моделям с меньшим числом измерений. Например, если рассматривать только сферически симметричные решения в общей теории относительности, то возникает эффективная двумерная модель, где в качестве координат выступает время и радиус. Если же изучаются только такие решения в общей теории относительности, которые инвариантны относительно трансляций вдоль одной из пространственных координат, то возникает некоторая трехмерная модель.

В настоящей главе будет рассмотрен ряд моделей гравитации в трех измерениях. Они имеют свою специфику, т.к. тензор Вейля в трехмерном пространстве-времени тождественно равен нулю (см. раздел ??). Кроме того, в трехмерии возникает новая возможность рассмотрения действия Черна–Саймонса, которое отсутствует в четном числе измерений. При этом в трех измерениях имеется своя специфика. А именно, на группе Пуанкаре $\mathbb{ISO}_0(1, 2)$ существует не одна, а две двусторонне инвариантные квадратичные формы: форма Киллинга–Картана (она вырождена, т.к. группа Пуанкаре не является полупростой) и вторая невырожденная метрика, которая задается полностью антисимметричным тензором третьего ранга. Поэтому в трехмерном случае существуют две модели гравитации, основанные на действии Черна–Саймонса.

В настоящей главе будет рассмотрено пять вариантов выбора действия для трехмерной гравитации: действие Гильберта–Эйнштейна, две модели, основанные на действии Черна–Саймонса, действие Коттона и топологически массивная гравитация. В общем случае эти действия приводят к неэквивалентным теориям, но каждая из них, на наш взгляд, заслуживает внимания.

2.1 Действие Черна–Саймонса

В трехмерном пространстве-времени возможно построение моделей, основанных на действии Черна–Саймонса, которое может быть использовано как в моделях гравитации, так и в калибровочных теориях. Действие Черна–Саймонса в трех измерениях

возникает как граничное слагаемое для характеристического класса Понтрягина в четырехмерных моделях. Это слагаемое впервые было рассмотрено в статье [?].

2.1.1 Четырехмерное многообразие

Начнем с общего построения. Рассмотрим *четырёхмерное* многообразие \mathbb{M} с системой локальных координат x^α . Значения индексов $\alpha = 0, 1, 2, 3$ или $\alpha = 1, 2, 3, 4$ в рассматриваемом случае не играют никакой роли, т.к. существование метрики на \mathbb{M} не предполагается. Все многообразия в настоящей главе предполагаются ориентируемыми, что необходимо для определения интегралов. Допустим, что задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ со структурной группой Ли \mathbb{G} . Проекция $\pi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{M}$ обозначена так же, как и в разделе ???. Предположим, что на \mathbb{P} задана связность (см. раздел ???). Связность на \mathbb{P} взаимно однозначно с точностью до калибровочных преобразований определяет семейство локальных форм связности на координатном покрытии \mathbb{M} , которые принимают значения в алгебре Ли \mathfrak{g} :

$$\omega = \omega^\Lambda L_\Lambda = dx^\alpha \omega_\alpha^\Lambda L_\Lambda, \quad (2.1)$$

где L_Λ , $\Lambda = 1, \dots, \dim \mathbb{G}$, – базис алгебры Ли \mathfrak{g} группы Ли \mathbb{G} , и $\omega_\alpha^\Lambda(x)$ – компоненты локальной формы связности.

Выше выписана локальная форма связности только в одной карте. В общем случае локальная форма связности (2.1) задается на каждой карте выбранного координатного покрытия \mathbb{M} . В областях пересечения карт локальные формы связности связаны между собой некоторым преобразованием координат и некоторым калибровочным преобразованием, которое мы выпишем ниже.

Связность на \mathbb{M} порождает локальную 2-форму кривизны (??)

$$R_{\alpha\beta}{}^\Lambda = \partial_\alpha \omega_\beta^\Lambda - \partial_\beta \omega_\alpha^\Lambda - \omega_\alpha{}^\mathbb{B} \omega_\beta{}^\mathbb{C} f_{\mathbb{B}\mathbb{C}}{}^\Lambda,$$

где $f_{\mathbb{B}\mathbb{C}}{}^\Lambda$ – структурные константы группы Ли \mathbb{G} , или, в обозначениях форм,

$$R^\Lambda := \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta R_{\alpha\beta}{}^\Lambda = d\omega^\Lambda - \frac{1}{2} \omega^\mathbb{B} \wedge \omega^\mathbb{C} f_{\mathbb{B}\mathbb{C}}{}^\Lambda, \quad (2.2)$$

где буква d в правой части равенства обозначает внешнее дифференцирование, а символ \wedge – внешнее умножение (см. главу ???).

Произвольный элемент алгебры Ли \mathfrak{g} имеет вид $X = X^\Lambda L_\Lambda$. Допустим, что в алгебре Ли \mathfrak{g} задана симметричная квадратичная форма, инвариантная относительно присоединенного действия группы (двусторонне инвариантная метрика, см. раздел ???),

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni X, Y \mapsto (X, Y) := X^\Lambda Y^\mathbb{B} \eta_{\Lambda\mathbb{B}} \in \mathbb{R},$$

где $\eta_{\Lambda\mathbb{B}} = \eta_{\mathbb{B}\Lambda}$ – некоторая симметричная матрица, возможно, вырожденная. Условие инвариантности означает выполнение равенства

$$\eta_{\Lambda\mathbb{B}} = S_\Lambda{}^\mathbb{C} S_\mathbb{B}{}^\mathbb{D} \eta_{\mathbb{C}\mathbb{D}},$$

где $S_\Lambda{}^\mathbb{B}$ – матрица присоединенного представления. В инфинитезимальной форме условие инвариантности имеет вид

$$f_{\Lambda\mathbb{B}}{}^\mathbb{D} \eta_{\mathbb{D}\mathbb{C}} + f_{\Lambda\mathbb{C}}{}^\mathbb{D} \eta_{\mathbb{D}\mathbb{B}} = 0. \quad (2.3)$$

Отсюда вытекает, что структурные константы $f_{\Lambda\mathbb{B}\mathbb{C}} := f_{\Lambda\mathbb{B}}{}^\mathbb{D} \eta_{\mathbb{D}\mathbb{C}}$ со всеми опущенными индексами антисимметричны относительно перестановки любой пары индексов.

Теорема 2.1.1. *Инвариантная 4-форма*

$$R^A \wedge R^B \eta_{AB}. \quad (2.4)$$

является внешней производной:

$$R^A \wedge R^B \eta_{AB} = d \left(d\omega^A \wedge \omega^B \eta_{AB} - \frac{1}{3} \omega^A \wedge \omega^B \wedge \omega^C f_{ABC} \right) \quad (2.5)$$

Доказательство. Из определения кривизны (2.2) вытекает равенство

$$R^A \wedge R^B \eta_{AB} = d\omega^A \wedge d\omega^B \eta_{AB} - d\omega^A \wedge \omega^E \wedge \omega^F f_{EF}{}^B \eta_{AB} + \frac{1}{4} \omega^C \wedge \omega^D \wedge \omega^E \wedge \omega^F f_{CD}{}^A f_{EF}{}^B \eta_{AB}.$$

Последнее слагаемое обращается в нуль в силу инвариантности квадратичной формы (2.3) и тождеств Бианки:

$$\begin{aligned} \omega^C \wedge \omega^D \wedge \omega^E \wedge \omega^F f_{CD}{}^A f_{EFA} &= -\omega^C \wedge \omega^D \wedge \omega^E \wedge \omega^F f_{CD}{}^A f_{EAF} = \\ &= -\omega^C \wedge \omega^D \wedge \omega^E \wedge \omega^F \frac{1}{3} (f_{CD}{}^A f_{EAF} + f_{DE}{}^A f_{CAF} + f_{EC}{}^A f_{DAF}) = 0, \end{aligned}$$

где во втором равенстве проведена антисимметризация по индексам C, D и E. Первые два слагаемых дают ответ (2.5). \square

Доказанная теорема локальна, т.к. доказана в одной карте. Это значит, что форма (2.4) замкнута и в общем случае может не быть точной.

В принципе, инвариантная квадратичная форма η_{AB} в формуле (2.4) может быть вырождена, т.к. обратная матрица η^{AB} нигде не использована.

В приложениях часто удобнее работать с некоторым представлением алгебры Ли \mathfrak{g} в векторном пространстве \mathbb{V} . Пусть $L_A \mapsto L_{Ai}{}^j$, $i, j = 1, \dots, \dim \mathbb{V}$, – точное представление базиса алгебры Ли \mathfrak{g} в векторном пространстве \mathbb{V} . Тогда вместо 1-форм со значениями в алгебре Ли (2.1) будем рассматривать матричнозначные 1-формы (пример ??)

$$\omega_i{}^j := dx^\alpha \omega_{\alpha i}{}^j := -dx^\alpha \omega_\alpha{}^A L_{Ai}{}^j. \quad (2.6)$$

Компоненты локальных 1-форм связности $\omega_{\alpha i}{}^j(x)$ для данного координатного атласа многообразия \mathbb{M} зависят только от точки базы $x \in \mathbb{M}$ и взаимно однозначно (с точностью до преобразования координат и калибровочных преобразований) определяют связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$.

Локальная 2-форма кривизны (пример ??) равна

$$R_i{}^j := -R^A L_{Ai}{}^j = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta R_{\alpha\beta i}{}^j = dx^\alpha \wedge dx^\beta (\partial_\alpha \omega_{\beta i}{}^j - \omega_{\alpha i}{}^k \omega_{\beta k}{}^j), \quad (2.7)$$

В обозначениях дифференциальных форм выражение для локальной формы кривизны имеет вид

$$R_i{}^j = d\omega_i{}^j - \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j \quad (2.8)$$

или, без матричных индексов,

$$R = d\omega - \omega \wedge \omega. \quad (2.9)$$

(Не путать со скалярной кривизной!)

Замечание. При рассмотрении действия Черна–Саймонса мы будем широко использовать обозначения дифференциальных форм, т.к. это – один из немногих случаев, когда обозначения дифференциальных форм действительно упрощают вычисления. \square

Если на четырехмерном многообразии \mathbb{M} задана 2-форма кривизны (2.7), то можно построить инвариантную 4-форму

$$\mathrm{tr} R \wedge R := R_i^j \wedge R_j^i = \frac{1}{4} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta R_{\alpha\beta i}^j R_{\gamma\delta j}^i$$

и проинтегрировать:

$$\int_{\mathbb{M}} \mathrm{tr} R \wedge R = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{M}} dx \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta i}^j R_{\gamma\delta j}^i, \quad (2.10)$$

где $\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ – полностью антисимметричная тензорная плотность четвертого ранга (см. приложение ??) и $dx := dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$. В этом месте предполагается ориентируемость многообразия \mathbb{M} , т.к. в противном случае интеграл не определен.

Ввиду наличия полностью антисимметричной тензорной плотности, интеграл (2.10) является псевдоскаляром, т.е. меняет знак при отражении нечетного числа координат (например, обращение времени или пространственное отражение).

Если главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ задано, то интеграл (2.10) инвариантен относительно общих преобразований координат на базе \mathbb{M} и калибровочных преобразований локальной формы связности:

$$\omega \mapsto \omega' := S\omega S^{-1} + dSS^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_\alpha \mapsto \omega'_\alpha := S\omega_\alpha S^{-1} + \partial_\alpha SS^{-1}, \quad (2.11)$$

где $S_i^j(x)$ – матрица локальных \mathbb{G} -преобразований (представление элемента структурной группы \mathbb{G} в векторном пространстве \mathbb{V} , который дифференцируемо зависит от точки базы $x \in \mathbb{M}$). При калибровочных преобразованиях (2.11) форма кривизны преобразуется по тензорному закону

$$R \mapsto SRS^{-1},$$

и из цикличности следа вытекает инвариантность функционала (2.10).

Замечание. На данном этапе полупростота структурной группы не важна. Инвариант (2.10) строится для любой матричной структурной группы Ли \mathbb{G} . \square

След “квадрата кривизны” имеет вид

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} R \wedge R &= \mathrm{tr} [(d\omega - \omega \wedge \omega) \wedge (d\omega - \omega \wedge \omega)] = \\ &= \mathrm{tr} (d\omega \wedge d\omega - 2d\omega \wedge \omega \wedge \omega + \omega \wedge \omega \wedge \omega \wedge \omega), \end{aligned}$$

где опущены матричные индексы и мы воспользовались цикличным свойством следа. Из-за цикличности следа и правила перестановки сомножителей во внешнем произведении (??) последнее слагаемое обращается в нуль:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k \wedge \omega_k^l \wedge \omega_l^i = -\omega_l^i \wedge \omega_i^j \wedge \omega_j^k \wedge \omega_k^l = 0.$$

Поэтому след “квадрата кривизны” равен внешней производной,

$$\mathrm{tr} R \wedge R = \mathrm{tr} (d\omega \wedge d\omega - 2d\omega \wedge \omega \wedge \omega) = d \mathrm{tr} \left(d\omega \wedge \omega - \frac{2}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega \right), \quad (2.12)$$

в соответствии с теоремой 2.1.1.

Мы видим, что след “квадрата кривизны” локально является внешней производной от некоторого выражения, и, следовательно, 4-форма (2.12) является замкнутой, но, возможно, неточной. По формуле Стокса (??) интеграл (2.10) можно выразить в виде поверхностного интеграла для любой компактной подобласти $U \subset M$:

$$\int_U \text{tr} R \wedge R = \int_{\partial U} \text{tr} \left(d\omega \wedge \omega - \frac{2}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega \right), \quad (2.13)$$

где ∂U – край многообразия U .

Явное выражение для формы кривизны (2.8) позволяет переписать след “квадрата кривизны” в виде

$$\text{tr} R \wedge R = d \text{tr} \left(R \wedge \omega + \frac{1}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega \right). \quad (2.14)$$

Предложение 2.1.1. *Допустим, что на главном расслоении $\mathbb{P}(M, \pi, \mathbb{G})$ с четырехмерной базой M заданы две локальные формы связности ω и $\bar{\omega} := \omega - \alpha$, где α – некоторая 1-форма со значениями в алгебре Ли \mathfrak{g} . Тогда справедлива формула*

$$\text{tr} R \wedge R - \text{tr} \bar{R} \wedge \bar{R} = dQ, \quad (2.15)$$

где

$$Q := \text{tr} \left(2R \wedge \alpha - d\alpha \wedge \alpha + 2\omega \wedge \alpha \wedge \alpha - \frac{2}{3} \alpha \wedge \alpha \wedge \alpha \right). \quad (2.16)$$

Доказательство. Поскольку в левой части равенства (2.15) стоит разность двух внешних производных, то справа также должна быть внешняя производная. Остается только вычислить 3-форму Q . \square

Смысл Предложения (2.1.1) состоит в нахождении явного вида 3-формы Q .

Для замкнутых (компактных и без края) ориентируемых четырехмерных многообразий определен интеграл

$$I := \int_M \text{tr} (R \wedge R). \quad (2.17)$$

Предложение 2.1.2. *Функционал (2.17) не зависит от выбора связности на главном расслоении $\mathbb{P}(M, \pi, \mathbb{G})$.*

Доказательство. Поскольку подынтегральное выражение является замкнутой формой, то вариационная производная функционала I равна нулю. Допустим, что компоненты связности $\omega_{\alpha i}^j(x, t)$ дифференцируемо зависят от некоторого параметра $t \in \mathbb{R}$. Тогда производная функционала (2.17) по t равна нулю:

$$\frac{dI}{dt} = \int_M dx \frac{\delta I}{\delta \omega_{\alpha i}^j} \dot{\omega}_{\alpha i}^j = 0.$$

Поскольку любые две связности на $\mathbb{P}(M, \pi, \mathbb{G})$ гомотопны, то функционал I не зависит от связности. \square

Следствие. В левой части равенства (2.15) стоят две замкнутые формы, а в правой – точная, т.е. 3-форма Q (2.16) определена на всем M . \square

Таким образом, функционал (2.17) является топологическим инвариантом, который называется *характеристическим классом Понтрягина*. При фиксированной базе \mathbb{M} и структурной группе \mathbb{G} главные расслоения могут быть не изоморфны: это зависит от склеивающего коцикла (см. раздел ??). При соответствующей нормировке функционал I принимает только целочисленные значения, характеризующие топологические свойства главных расслоений $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$ с фиксированной базой и структурной группой. Нормировочный множитель зависит от выбора структурной группы Ли \mathbb{G} и ее представления.

Пример 2.1.1. Если структурная группа Ли является прямым произведением, $\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2$, то интегралы складываются: $I = I_1 + I_2$. Тем самым значение интеграла зависит от выбора структурной группы. Это же относится и к прямому произведению представлений фиксированной группы Ли. \square

2.1.2 Трехмерное многообразие

Предыдущее построение позволяет рассматривать в трехмерном пространстве или пространстве-времени действие Черна–Саймонса, которое приводит к ковариантным уравнениям первого порядка для компонент связности. Пусть теперь \mathbb{M} – *трехмерное* ориентируемое многообразие с координатами x^α , где $\alpha = 1, 2, 3$ или $\alpha = 0, 1, 2$. Рассмотрим главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{G})$. Допустим, что задано координатное покрытие \mathbb{M} и семейство матричнозначных локальных форм связности $\omega_i^j := dx^\alpha \omega_{\alpha i}^j$, компоненты которых достаточно гладко зависят от точки $x \in \mathbb{M}$. Действием Черна–Саймонса для локальной формы связности ω называется интеграл

$$S_{CS}[\omega] := \int_{\mathbb{M}} \text{tr} \left(d\omega \wedge \omega - \frac{2}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega \right) = \int_{\mathbb{M}} \text{tr} \left(R \wedge \omega + \frac{1}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega \right), \quad (2.18)$$

где использовано выражение (2.8) для 2-формы кривизны. Это есть ни что иное как правая часть равенства (2.13).

Поскольку подынтегральное выражение является 3-формой, то этот интеграл не зависит от выбора координат на \mathbb{M} . Кроме того, в дальнейшем мы увидим, что действие Черна–Саймонса инвариантно относительно калибровочных преобразований (2.11) с матрицей S , гомотопной тождественному преобразованию. В частности, оно инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований. Это означает, что уравнения Эйлера–Лагранжа, вытекающие из вариации действия (2.18), ковариантны. Это будет показано ниже с помощью прямых вычислений.

Мы увидим также, что численное значение самого действия Черна–Саймонса может быть произвольным: это зависит от связности и многообразия \mathbb{M} . Оно не инвариантно относительно калибровочных преобразований с матрицей S , негомотопной единичной матрице. В таких случаях действие Черна–Саймонса для замкнутых многообразий при соответствующей нормировке, зависящей от структурной группы и представления, меняется на целое число. Мы пишем, что действие Черна–Саймонса для замкнутых многообразий при фиксированных \mathbb{M} и \mathbb{G} со связностью Γ принимает значения в \mathbb{R}/\mathbb{Z} . То есть его значения “скачут” при негомотопных калибровочных преобразованиях. В этом существенное отличие действия Черна–Саймонса от действия Янга–Миллса, которое инвариантно относительно любых калибровочных преобразований.

В компонентах действие Черна–Саймонса выглядит следующим образом

$$S_{CS} = \int_{\mathbb{M}} dx L_{CS}, \quad (2.19)$$

где лагранжиан Черна–Саймонса имеет вид

$$\begin{aligned} L_{\text{cs}} &= \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} \left(R_{\alpha\beta i}{}^j \omega_{\gamma j}{}^i + \frac{2}{3} \omega_{\alpha i}{}^j \omega_{\beta j}{}^k \omega_{\gamma k}{}^i \right) = \\ &= \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} \left(\partial_{\alpha} \omega_{\beta i}{}^j \omega_{\gamma j}{}^i - \frac{2}{3} \omega_{\alpha i}{}^j \omega_{\beta j}{}^k \omega_{\gamma k}{}^i \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Выше $\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma}$ – полностью антисимметричная тензорная плотность третьего ранга, $\hat{\varepsilon}^{123} = 1$. Напомним, что компоненты полностью антисимметричной тензорной плотности третьего ранга $\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma}$ определяются знаком перестановки координат и либо равны нулю, либо ± 1 во всех системах координат.

Важным является то обстоятельство, что лагранжиан Черна–Саймонса (2.20) полиномиален по компонентам связности и не зависит от репера или метрики, которые вообще могут быть не заданы на базе \mathbb{M} .

Поскольку лагранжиан (2.20) содержит полностью антисимметричную тензорную плотность, то действие является псевдоскаляром, т.е. меняет свой знак при отражении нечетного числа координат.

Компоненты связности имеют размерность обратной длины, $[\omega_{\alpha i}{}^j] = l^{-1}$, как и производная. Поэтому действие Черна–Саймонса (2.18) безразмерно. Следовательно, если перед действием Черна–Саймонса написать константу связи, то она должна быть безразмерной.

При калибровочных преобразованиях локальные формы связности и кривизны преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega &\mapsto \omega' = S\omega S^{-1} + dSS^{-1}, \\ R &\mapsto R' = SR S^{-1}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $S_i{}^j(x)$ – матрица локального преобразования. Прямые вычисления приводят к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} S_{\text{cs}}[\omega'] &= S_{\text{cs}}[\omega] + \int \text{tr} \left[SR S^{-1} \wedge dSS^{-1} + S\omega S^{-1} \wedge S\omega S^{-1} \wedge dSS^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + S\omega S^{-1} \wedge dSS^{-1} \wedge dSS^{-1} + \frac{1}{3} dSS^{-1} \wedge dSS^{-1} \wedge dSS^{-1} \right] = \\ &= S_{\text{cs}}[\omega] + \int \text{tr} \left[(R + \omega \wedge \omega) S^{-1} \wedge dS + \omega S^{-1} \wedge dSS^{-1} \wedge dS + \frac{1}{3} dSS^{-1} \wedge dSS^{-1} \wedge dSS^{-1} \right], \end{aligned}$$

где мы объединили первые два слагаемых под знаком интеграла и сократили множители $S^{-1}S = 1$. Воспользовавшись выражением (2.9) для тензора кривизны и равенством $S^{-1}dS + dS^{-1}S = 0$, получаем действие Черна–Саймонса для преобразованной связности,

$$S_{\text{cs}}[\omega'] = S_{\text{cs}}[\omega] + \int \text{tr} \left[d(\omega \wedge S^{-1}dS) + \frac{1}{3} dSS^{-1} \wedge dSS^{-1} \wedge dSS^{-1} \right] \quad (2.22)$$

Мы видим, что последнее слагаемое не имеет вида внешней производной в терминах матрицы преобразования S .

Для того, чтобы получить уравнения Эйлера–Лагранжа для действия Черна–Саймонса, можно проварьировать действие, записанное с помощью дифференциаль-

ных форм (2.18):

$$\begin{aligned}\delta S_{\text{CS}} &= \delta \int \text{tr} \left(d\omega \wedge \omega - \frac{2}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega \right) = \\ &= \int \text{tr} \left[d\delta\omega \wedge \omega + d\omega \wedge \delta\omega - \frac{2}{3} (\delta\omega \wedge \omega \wedge \omega + \omega \wedge \delta\omega \wedge \omega + \omega \wedge \omega \wedge \delta\omega) \right] = \\ &= 2 \int \text{tr} (d\omega \wedge \delta\omega - \omega \wedge \omega \wedge \delta\omega) = 2 \int \text{tr} R \wedge \delta\omega,\end{aligned}$$

где мы проинтегрировали первое слагаемое по частям и воспользовались цикличностью следа. Если структурная группа полупроста, то отсюда вытекает, что уравнения Эйлера–Лагранжа для действия Черна–Саймонса – это просто равенство нулю кривизны связности:

$$R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{\alpha\beta i}{}^j = 0. \quad (2.23)$$

Чтобы получить вариационную производную в компонентах, можно использовать действие в виде (2.19). Простые вычисления приводят к следующему выражению для вариационной производной

$$\frac{\delta S_{\text{CS}}}{\delta \omega_{\alpha i}{}^j} = \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} R_{\beta\gamma j}{}^i. \quad (2.24)$$

В этом месте проявляется специфика трехмерия: количество независимых компонент формы связности равно числу независимых компонент формы кривизны в силу наличия полностью антисимметричной тензорной плотности третьего ранга.

При получении уравнений Эйлера–Лагранжа существенную роль сыграла полупростота структурной группы, т.к. действие Черна–Саймонса (2.18) содержит след. Действительно, для присоединенного представления справедливо равенство

$$\text{tr} (R \wedge \delta\omega) = R^A L_{Ai}{}^j \wedge \delta\omega^B L_{Bj}{}^i = -R^A \wedge \delta\omega^B \eta_{AB},$$

где η_{AB} – форма Киллинга–Картана (??). Если бы форма Киллинга–Картана была вырождена, то равенство $R^A \wedge \delta\omega^B \eta_{AB} = 0$ для всех $\delta\omega^B$ не влекло бы за собой равенство $R_{\alpha\beta}{}^A = 0$.

Уравнения Эйлера–Лагранжа (2.23) явно ковариантны, что свидетельствует об инвариантности действия относительно *инфинитезимальных* калибровочных преобразований.

Так как действие Черна–Саймонса инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований, то, согласно второй теореме Нетер, между уравнениями движения существует линейная зависимость. Матрица бесконечно малого калибровочного преобразования имеет вид

$$S_i{}^j(x) \approx \delta_i^j + \epsilon_i{}^j(x), \quad \epsilon_i{}^j \ll 1.$$

При этом вариация компонент локальной формы связности равна ковариантной производной от параметра преобразования:

$$\delta\omega_{\alpha i}{}^j = \nabla_{\alpha} \epsilon_i{}^j := \partial_{\alpha} \epsilon_i{}^j - \omega_{\alpha i}{}^k \epsilon_k{}^j + \epsilon_i{}^k \omega_{\alpha k}{}^j.$$

Инвариантность действия означает справедливость равенства

$$\delta S_{\text{CS}} = \int dx \frac{\delta S_{\text{CS}}}{\delta \omega_{\alpha i}{}^j} \nabla_{\alpha} \epsilon_i{}^j = 0.$$

Поскольку линейная комбинация параметров $L_{Aj}{}^i \epsilon_i{}^j$ произвольна, после интегрирования по частям получаем зависимость уравнений движения:

$$\hat{\epsilon}^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha R_{\beta\gamma}{}^j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\epsilon}^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha R_{\beta\gamma}{}^A = 0. \quad (2.25)$$

Это есть ни что иное, как тождества Бианки (??).

При выводе зависимости уравнений Эйлера–Лагранжа (2.25) важна точность представления структурной группы и ее полупростота, чтобы квадратичная форма $L_{Ai}{}^j L_{Bj}{}^i$ была невырожденной.

Таким образом, без полей материи (в данном случае, дополнительных полей, взаимодействующих со связностью) действие Черна–Саймонса для полупростых групп Ли приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа $R_{\alpha\beta}{}^j = 0$ (плоская связность), при этом инвариантность действия сводится к тождествам Бианки для тензора кривизны. Если к действию добавить источники (поля материи), то связность перестанет быть плоской. Подчеркнем, что само действие Черна–Саймонса не зависит от метрики на \mathbb{M} , которая вообще может не быть задана. Однако при построении инвариантов из полей материи метрика понадобится.

Последние выкладки были проведены для некоторого точного представления группы Ли \mathbb{G} , и в качестве инвариантной метрики был выбран след, что соответствует форме Киллинга–Картана. Если в качестве инвариантной метрики выбрана другая квадратичная форма, то формулы необходимо изменить, и вернуться к теореме 2.1.1. В общем случае действие Черна–Саймонса имеет вид

$$\begin{aligned} S_{CS} &:= \int_{\mathbb{M}} \left(d\omega^A \wedge \omega^B \eta_{AB} - \frac{1}{3} \omega^A \wedge \omega^B \wedge \omega^C f_{ABC} \right) = \\ &= \int_{\mathbb{M}} \left(R^A \wedge \omega^B \eta_{AB} + \frac{1}{6} \omega^A \wedge \omega^B \wedge \omega^C f_{ABC} \right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где η_{AB} – произвольная (возможно, вырожденная) инвариантная симметричная квадратичная форма в алгебре Ли \mathfrak{g} и использовано выражение (2.2) для тензора кривизны. Ниже, в разделе 2.3 мы увидим, что в трехмерном случае для группы Пуанкаре существует две “естественные” инвариантные квадратичные формы в алгебре Ли. Следовательно, существует два различных действия Черна–Саймонса, для которых мы воспользуемся формулой (2.26).

Если калибровочная группа является абелевой, то любая симметричная невырожденная матрица η_{AB} задает метрику в алгебре Ли, инвариантную относительно присоединенного действия группы, которое в данном случае тривиально. Поэтому действие Черна–Саймонса для абелевых групп имеет вид

$$S_{CS} := \int_{\mathbb{M}} d\omega^A \wedge \omega^B \eta_{AB} = \int_{\mathbb{M}} R^A \wedge \omega^B \eta_{AB}. \quad (2.27)$$

Оно квадратично по компонентам связности и приводит к линейным уравнениям Эйлера–Лагранжа $R_{\alpha\beta}{}^A = 0$ для невырожденных квадратичных форм.

В некоторых случаях действие Черна–Саймонса и его изменение при калибровочных преобразованиях, негомомогенных тождественному, можно вычислить в явном виде. Приведем относительно простой и нетривиальный пример, который наиболее часто встречается и в математической, и в физической литературе.

Пример 2.1.2. Вычислим действие Черна–Саймонса для группы $SU(2)$, которая, как многообразие, диффеоморфна трехмерной сфере S^3 . Кроме того, будем считать, что

базой главного расслоения также является трехмерная сфера (компактифицированное евклидово пространство). То есть рассмотрим главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{S}^3, \pi, \text{SU}(2))$.

Сначала вычислим само действие Черна–Саймонса для достаточно общего однопараметрического семейства связностей, которое будет определено ниже.

Стратегия вычислений следующая. Мы фиксируем глобальный базис в касательном расслоении к базе $\mathbb{T}(\mathbb{S}^3)$. В этом базисе задаем семейство локальных форм связностей и вычисляем действие Черна–Саймонса.

Поскольку базой главного расслоения является трехмерная сфера, то для вычислений мы отождествим ее с группой Ли $\text{SU}(2)$ (не с той, что в слое главного расслоения). Чтобы задать локальную форму связности на базе \mathbb{S}^3 , выберем в касательном расслоении базис, состоящий из левоинвариантных векторных полей (см. раздел ??):

$$L_a = e^\alpha_a \partial_\alpha,$$

где $e^\alpha_a(x)$ – репер, осуществляющий переход между координатным ∂_α и левоинвариантным L_a базисами касательного пространства (в разделе ?? он обозначен через L^A_B). Базис левоинвариантных векторных полей удовлетворяет коммутационным соотношениям для группы $\text{SU}(2)$:

$$[L_a, L_b] = -\varepsilon_{ab}^c L_c, \quad (2.28)$$

Удобство левоинвариантного базиса заключается в том, что он определен глобально на \mathbb{S}^3 , несмотря на то, что сфера не покрывается одной картой.

Зададим однопараметрическое семейство локальных форм связностей на базе равенством

$$\omega_{ai}{}^j := -A \varepsilon_{ai}{}^j, \quad A = \text{const}, \quad (2.29)$$

где $A \in \mathbb{R}$ – параметр, определяющий локальную форму связности в левоинвариантном неголономном базисе $dx^\alpha e_\alpha^a$ кокасательного пространства. Эта формула задает достаточно большое семейство связностей, которое параметризуется постоянной A . При $A = \frac{1}{2}$ связность совпадает со связностью Леви–Чивиты для произвольной левоинвариантной метрики $g_{\alpha\beta} = e_\alpha^a e_\beta^b g_{ab}$, где g_{ab} – произвольная постоянная симметричная невырожденная матрица. В дальнейшем мы положим $g_{ab} = \delta_{ab}$. При $A = 1$ параллельный перенос, который определяет связность, отождествлен с групповым действием справа на группе $\text{SU}(2)$ (пространство абсолютного параллелизма) (см. разделы ??, ??).

Конечно, связность, определенная формулой (2.29), не является связностью общего вида, но ее достаточно для демонстрации общих свойств действия Черна–Саймонса.

Выберем лагранжиан Черна–Саймонса в компонентах (2.20) и запишем действие в виде

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}} &= \frac{1}{2} \int dx \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} e_\alpha^a e_\beta^b e_\gamma^c \text{tr} \left(R_{ab} \omega_c + \frac{2}{3} \omega_a \omega_b \omega_c \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int dx \sqrt{|g|} \varepsilon^{abc} \text{tr} \left(R_{ab} \omega_c + \frac{2}{3} \omega_a \omega_b \omega_c \right), \quad (2.30) \end{aligned}$$

где $R_{ab} := e^\alpha_a e^\beta_b R_{\alpha\beta}$ и $\omega_a := e^\alpha_a \omega_\alpha$ – компоненты тензора кривизны и связности Леви–Чивиты относительно левоинвариантного базиса. Компоненты тензора кривизны и

кручения для связности (2.29) в неголономном базисе вычисляются по формулам (??) и (??):

$$R_{abi}{}^j = A(A-1)\varepsilon_{ab}{}^c\varepsilon_{ci}{}^j = A(A-1)(\delta_{ai}\delta_b^j - \delta_{bi}\delta_a^j), \quad T_{ij}{}^k = -(2A-1)\varepsilon_{ij}{}^k. \quad (2.31)$$

Как видим, все компоненты постоянны в левоинвариантном базисе. Отсюда следует, что для связности Леви–Чивиты ($A = \frac{1}{2}$) кручение равно нулю и кривизна в неголономном базисе имеет вид

$$\tilde{R}_{abi}{}^j = -\frac{1}{4}\varepsilon_{ab}{}^c\varepsilon_{ci}{}^j.$$

Если действие группы справа отождествлено с параллельным переносом ($A = 1$), то, наоборот, кривизна равна нулю, а кручение нетривиально:

$$R_{abi}{}^j = 0, \quad T_{ij}{}^k = -\varepsilon_{ij}{}^k.$$

Теперь нетрудно вычислить слагаемые в лагранжиане Черна–Саймонса:

$$\varepsilon^{abc} \operatorname{tr}(R_{ab}\omega_c) = 12A^2(A-1), \quad \varepsilon^{abc} \operatorname{tr}(\omega_a\omega_b\omega_c) = -6A^3. \quad (2.32)$$

Поскольку полученные выражения не зависят от точки базы, то интеграл (2.30) сводится к вычислению объема трехмерной сферы:

$$S_{\text{CS}} = 2A^2(2A-3) \int dx \sqrt{|g|} = 2A^2(2A-3) \operatorname{vol}_g \mathbb{S}\mathbb{U}(2), \quad (2.33)$$

на которой задана метрика g .

Последний шаг вычислений – определение объема группы Ли $\mathbb{S}\mathbb{U}(2) \approx \mathbb{S}^3$ с метрикой g . Поскольку в процессе вычислений была использована формула $\hat{\varepsilon}^{abc} = \sqrt{|g|}\varepsilon^{abc}$, связывающая полностью антисимметричный тензор третьего ранга с плотностью, то это означает ортонормальность репера. То есть в процессе вычислений мы неявно предположили, что в левоинвариантном базисе задана евклидова метрика δ_{ab} , а не форма Киллинга–Картана, которая отличается множителем. Для определения объема стандартной трехмерной сферы, вложенной в четырехмерное евклидово пространство, необходимо знать ее радиус. Для его определения запишем тензор кривизны (2.31) для связности Леви–Чивиты со всеми опущенными индексами:

$$\tilde{R}_{abij} = -\frac{1}{4}(\delta_{ai}\delta_{bj} - \delta_{aj}\delta_{bi}). \quad (2.34)$$

Сравнение полученного выражения с формулой (??) показывает, что группа $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ с метрикой g представляет собой пространство постоянной кривизны с нормированной скалярной кривизной $K = 1/4$. С другой стороны, трехмерная сфера радиуса a , вложенная в \mathbb{R}^4 стандартным образом, также является пространством постоянной кривизны с $K = 1/a^2$ (??). Сравнение постоянной K определяет радиус сферы, на которой вложение $\mathbb{S}_a^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ индуцирует метрику g :

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Таким образом, объем группы Ли $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ равен объему сферы радиуса $a = 2$, вложенной в четырехмерное евклидово пространство. Последний объем уже был вычислен (??). Поэтому справедливо равенство

$$\operatorname{vol}_g \mathbb{S}\mathbb{U}(2) = 2\pi^2 a^3 = 16\pi^2. \quad (2.35)$$

Следовательно, действие Черна–Саймонса для группы $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$, на которой задана локальная форма связности (2.29) в левоинвариантном базисе, равно

$$S_{\text{CS}} = 32\pi^2 A^2 (2A - 3). \quad (2.36)$$

Поскольку постоянная A , определяющая связность, произвольна, то мы видим, что действие Черна–Саймонса может принимать любые значения – это зависит от связности.

В данном примере рассмотрено семейство связностей (2.29) на сфере \mathbb{S}^3 . С другой стороны, трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 можно компактифицировать, добавив бесконечно удаленную точку, и в результате получить сферу \mathbb{S}^3 . Это значит, что с тем же успехом можно рассматривать действие Черна–Саймонса на трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , наложив соответствующие граничные условия на бесконечности, например,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega_\alpha = 0 \quad (2.37)$$

таким образом, чтобы после компактификации связность оказалась достаточно гладкой функцией на сфере \mathbb{S}^3 .

Теперь рассмотрим, как меняется действие Черна–Саймонса при калибровочных преобразованиях. Пусть задана унитарная матрица $S \in \mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ калибровочного преобразования (2.21). Перепишем правило преобразования действия Черна–Саймонса (2.22) в виде суммы трех слагаемых:

$$S_{\text{CS}}[\omega'] = S_{\text{CS}}[\omega] + \int d \operatorname{tr} (\omega \wedge S^{-1} dS) + I, \quad (2.38)$$

где

$$\begin{aligned} I &:= \frac{1}{3} \int \operatorname{tr} (dSS^{-1} \wedge dSS^{-1} \wedge dSS^{-1}) = \\ &= \frac{1}{3} \int dx \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \operatorname{tr} (\partial_\alpha SS^{-1} \partial_\beta SS^{-1} \partial_\gamma SS^{-1}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Заметим, что функционал I вообще не зависит от связности.

Рассмотрим второе слагаемое в (2.38). Под знаком следа стоит внешнее произведение двух 1-форм ω и $S^{-1}dS$, каждая из которых принимает значения в алгебре Ли. Поскольку алгебра Ли является векторным пространством, то след во втором слагаемом дает точную 3-форму со значениями в \mathbb{R} . Согласно формуле Стокса второе слагаемое сводится к интегралу по краю $\partial\mathbb{S}^3 = \emptyset$ и, следовательно, равно нулю.

Теперь вычислим третье слагаемое (2.39). Поскольку и базой, и слоем главного расслоения являются трехмерные сферы, то матрица S задает отображение

$$S : \mathbb{M} = \mathbb{S}^3 \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{S}\mathbb{U}(2) \approx \mathbb{S}^3. \quad (2.40)$$

Здесь мы обозначили координаты на базе, как и раньше, x^α , $\alpha = 1, 2, 3$, а координаты в пространстве-мишени – буквами из середины греческого алфавита y^μ , $\mu = 1, 2, 3$.

Чтобы вычислить интеграл (2.39), введем в касательном расслоении к пространству-мишени базис левоинвариантных векторных полей L_A , $A = 1, 2, 3$, с коммутационными соотношениями (2.28). Этот базис связан с координатным базисом некоторым репером:

$$\partial_\mu = e_\mu^A L_A.$$

Мы изменили шрифт для нумерации базиса левоинвариантных векторных полей в пространстве-мишени, чтобы отличать их от левоинвариантных векторных полей на базе \mathbb{M} , которые были введены ранее. В каждой точке y пространства-мишени задана ортогональная матрица S . Следовательно, в действии Черна–Саймонса мы рассматриваем ее, как сложную функцию $S(y(x))$. Тогда справедливы равенства:

$$\partial_\alpha S_i^j = \partial_\alpha y^\mu \partial_\mu S_i^j = \partial_\alpha y^\mu e_\mu^A L_A S_i^j = -\frac{i}{2} \partial_\alpha y^\mu e_\mu^A \sigma_{Ai}^k S_k^j,$$

где $\sigma_A = (\sigma_{Ai}^j)$ – матрицы Паули (см. приложение ??). Следовательно,

$$(\partial_\alpha S S^{-1})_i^j = -\frac{i}{2} \partial_\alpha y^\mu e_\mu^A \sigma_{Ai}^j.$$

Теперь, с учетом равенства

$$\text{tr}(\sigma_A \sigma_B \sigma_C) = 2i \hat{\varepsilon}_{ABC},$$

где $\hat{\varepsilon}_{ABC}$ – полностью антисимметричная тензорная плотность третьего ранга, легко вычислить интеграл (2.39):

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int dx \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} (\partial_\alpha y^\mu e_\mu^A \partial_\beta y^\nu e_\nu^B \partial_\gamma y^\rho e_\rho^C) \left(-\frac{i}{2}\right)^3 2i \hat{\varepsilon}_{ABC} = \\ &= -\frac{1}{12} \int dx \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} (\partial_\alpha y^\mu \partial_\beta y^\nu \partial_\gamma y^\rho) e_\mu^A e_\nu^B e_\rho^C \hat{\varepsilon}_{ABC} = -\frac{1}{2} \int dx \det(\partial_\alpha y^\mu) \sqrt{h}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $h_{\mu\nu} := e_\mu^A e_\nu^B \delta_{AB}$ – метрика в пространстве-мишени и $h := \det(h_{\mu\nu})$. Мы видим, что с точностью до нормировочного множителя функционал I равен индексу отображения (1.14):

$$I = -\frac{1}{2} \text{vol}_h \text{SU}(2) \deg S, \quad (2.42)$$

где $\text{vol}_h \text{SU}(2) = 16\pi^2$ как и ранее для базы (2.35).

Часто действие Черна–Саймонса нормируют

$$S_{CS} \mapsto \tilde{S}_{CS} := -\frac{2}{\text{vol}_h \mathbb{S}^3} S_{CS} = -\frac{1}{8\pi^2} S_{CS},$$

Тогда изменение действия при калибровочных преобразованиях будет в точности равно индексу отображения (1.14), который, по определению, принимает только целочисленные значения. Если индекс отображения равен нулю (т.е. калибровочное преобразование задается матрицей S , гомотопной единице), то действие Черна–Саймонса инвариантно. Если же калибровочное преобразование S не гомотопно единице, то нормированное действие Черна–Саймонса меняется на целое число. Мы видим, что, хотя действие Черна–Саймонса и не инвариантно относительно всех калибровочных преобразований, оно приводит к ковариантным уравнениям Эйлера–Лагранжа. Мы говорим, что действие Черна–Саймонса принимает значения в \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Отметим, что нормировочный множитель в действии Черна–Саймонса зависит от выбора калибровочной группы и представления. \square

Пример 2.1.3. Теперь рассмотрим связность на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{S}^3, \pi, \text{SO}(3))$. В данном случае матрица S задает отображение

$$S : \mathbb{M} = \mathbb{S}^3 \ni x \mapsto S(x) \in \text{SO}(3) \approx \frac{\mathbb{S}^3}{\mathbb{Z}_2}. \quad (2.43)$$

Поскольку алгебры Ли групп $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{SU}(2)$ совпадают, то вычисления в точности повторяют те, которые были проделаны в предыдущем примере. Для действия Черна–Саймонса получаем старое выражение (2.41), т.к. база осталась прежней.

Изменение действия Черна–Саймонса при калибровочных преобразованиях задается функционалом

$$I = -\frac{1}{2} \text{vol}_h \mathbb{SO}(3) \text{ deg } S, \quad (2.44)$$

где поменялся объем группы и отображение S . Поскольку группа $\mathbb{SU}(2)$ два раза покрывает группу вращений $\mathbb{SO}(3)$ (раздел ??), то объем группы вращений с прежней метрикой в два раза меньше:

$$\text{vol}_h \mathbb{SU}(2) = 2 \text{vol}_h \mathbb{SO}(3).$$

Данный пример показывает, что нормировочный множитель зависит от группы. \square

В случае произвольной структурной группы Ли \mathbb{G} , $\dim \mathbb{G} = N$, базис алгебры Ли удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[L_A, L_B] = f_{AB}^C L_C, \quad (2.45)$$

где f_{AB}^C – структурные константы группы Ли. Для присоединенного представления группы справедливо равенство

$$(\partial_\alpha S S^{-1})_D^E = \partial_\alpha y^\mu e_\mu^A (L_A S S^{-1})_D^E = \partial_\alpha y^\mu e_\mu^A f_{AD}^E,$$

где y^μ , $\mu = 1, \dots, N$ – координаты на групповом многообразии, а e_μ^A – репер, осуществляющий переход от координатного базиса касательного пространства к структурной группе к левоинвариантному. Будем рассматривать структурные константы f_{AD}^E как набор, состоящий из N матриц, которые нумеруются индексом A , а индексы D и E будем рассматривать как матричные. В таком виде они образуют присоединенное представление базиса алгебры Ли. Тогда выражение для функционала (2.39) примет вид

$$I = \frac{1}{3} \int_M dx \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} (\partial_\alpha y^\mu \partial_\beta y^\nu \partial_\gamma y^\rho) e_\mu^A e_\nu^B e_\rho^C \text{tr} (f_A f_B f_C), \quad (2.46)$$

где под знаком следа опущены матричные индексы. Обратим внимание, что в общем случае матрицы $\partial_\alpha y^\mu$ являются не квадратными, а прямоугольными.

След произведения трех структурных констант можно записать в виде

$$\text{tr} (f_A f_B f_C) = \text{tr} ([f_A, f_B] f_C) + \text{tr} (\{f_A, f_B\} f_C), \quad (2.47)$$

где квадратные и фигурные скобки обозначают коммутатор и антикоммутатор структурных констант. Воспользовавшись равенством (2.45) и определением формы Киллинга–Картана (??), первое слагаемое переписывается в виде

$$f_{AB}^D f_{DE}^F f_{CF}^E = -f_{AB}^D \eta_{DC} =: -f_{ABC}.$$

Напомним, что структурные константы со всеми опущенными индексами антисимметричны относительно перестановки любой пары индексов. Второе слагаемое в (??), напротив, симметрично относительно перестановки любой пары индексов из-за следа. Обозначим его d_{ABC} . Тогда

$$\text{tr} (f_A f_B f_C) = f_{ABC} + d_{ABC}. \quad (2.48)$$

Для группы $\text{SU}(2)$ выполнено равенство $d_{\text{ABC}} = 0$. Однако в общем случае группы $\text{SU}(N)$, $N \geq 3$, а также других групп Ли коэффициенты $d_{\text{ABC}} \neq 0$. Тем не менее они не дают вклада в интеграл (2.46) из-за наличия полностью антисимметричного тензора третьего ранга. Следовательно,

$$I = -\frac{1}{3} \int_{\mathbb{M}} dx \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} (\partial_\alpha y^\mu \partial_\beta y^\nu \partial_\gamma y^\rho) e_\mu^A e_\nu^B e_\rho^C f_{\text{ABC}}. \quad (2.49)$$

Если база \mathbb{M} является трехмерной сферой, то при соответствующей нормировке этот интеграл дает элемент третьей гомотопической группы $\pi_3(\mathbb{M})$ и также принимает только целочисленные значения при соответствующей нормировке.

В выражения для действия Черна–Саймонса и функционала I входят объемы базы и структурной группы. Для некомпактных многообразий эти функционалы, как правило, расходятся.

Рассмотренные примеры показывают, что для того, чтобы функционал I для компактных баз и структурных групп Ли принимал целочисленные значения, необходимо введение нормирующего множителя. Мы его не вводим, поскольку он свой для каждой структурной группы Ли и каждого представления. Его явное вычисление для групп Ли больших размерностей представляет существенные трудности.

2.2 Действие Гильберта–Эйнштейна

Рассмотрим трехмерное пространство-время \mathbb{M} с координатами x^α , $\alpha = 0, 1, 2$. Будем считать, что на \mathbb{M} задана геометрия Римана–Картана (см. раздел ??), т.е. компоненты метрики $g_{\alpha\beta}$ лоренцевой сигнатуры $(+ - -)$ и кручения $T_{\alpha\beta}^\gamma$. Мы будем использовать переменные Картана: репер e_α^a и лоренцеву $\mathbb{SO}(1, 2)$ -связность $\omega_\alpha^{ab} = -\omega_\alpha^{ba}$, $a, b = 0, 1, 2$. Тензоры кривизны и кручения в переменных Картана имеют вид (??), (??). Каждый репер однозначно определяет на \mathbb{M} метрику лоренцевой сигнатуры:

$$g_{\alpha\beta} := e_\alpha^a e_\beta^b \eta_{ab}, \quad \eta_{ab} := \text{diag}(+ - -).$$

Подъем и опускание греческих и латинских индексов, как всегда, осуществляется с помощью метрик $g_{\alpha\beta}$ и η_{ab} , а переход от греческих индексов к латинским и наоборот – с помощью репера и его обратного e^α_a .

Обозначения дифференциальных форм оказываются удобными при изучении действия и его инвариантности. В рассматриваемом случае на \mathbb{M} заданы две 1-формы (корепер и лоренцева связность):

$$e^a := dx^\alpha e_\alpha^a, \quad \omega_a^b := dx^\alpha \omega_{\alpha a}^b. \quad (2.50)$$

Они определяют локальные 2-формы кривизны (??) и кручения (??),

$$\begin{aligned} R_a^b &:= \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta R_{\alpha\beta a}^b := d\omega_a^b - \omega_a^c \wedge \omega_c^b, \\ T^a &:= \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta T_{\alpha\beta}^a := de^a - e^b \wedge \omega_b^a, \end{aligned} \quad (2.51)$$

которые удовлетворяют тождествам Бианки (??):

$$\begin{aligned} dT^a + T^b \wedge \omega_b^a &= e^b \wedge R_b^a, \\ dR_a^b + R_a^c \wedge \omega_c^b - \omega_a^c \wedge R_c^b &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Заметим, что последнее тождество не зависит от репера.

В трех измерениях возникают некоторые упрощения вида тензоров кривизны и кручения, которые были описаны в разделах ?? и ?. В частности, тензор Вейля тождественно обращается в нуль.

Наличие полностью антисимметричного тензора третьего ранга позволяет ввести следующую параметризацию лоренцевой связности:

$$\omega_\alpha{}^{ab} = \omega_{\alpha c} \varepsilon^{cab}, \quad \omega_{\alpha c} := \frac{1}{2} \omega_\alpha{}^{ab} \varepsilon_{abc}, \quad (2.53)$$

с помощью 1-формы $\omega_a := dx^\alpha \omega_{\alpha a}$. В этой параметризации компоненты тензоров кривизны и кручения имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta c} &:= \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}{}^{ab} \varepsilon_{abc} = \partial_\alpha \omega_{\beta c} - \partial_\beta \omega_{\alpha c} + \omega_\alpha{}^a \omega_\beta{}^b \varepsilon_{abc}, \\ T_{\alpha\beta}{}^a &= \partial_\alpha e_\beta{}^a - \partial_\beta e_\alpha{}^a + \varepsilon^{abc} (e_{ab} \omega_{\beta c} - e_{\beta b} \omega_{\alpha c}). \end{aligned} \quad (2.54)$$

В обозначениях форм эти выражения приобретают следующую форму

$$\begin{aligned} R^a &= d\omega^a + \frac{1}{2} \varepsilon^a{}_{bc} \omega^b \wedge \omega^c, \\ T^a &= de^a + \varepsilon^a{}_{bc} e^b \wedge \omega^c. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Поскольку в определениях (2.53) и (2.54) участвует полностью антисимметричный тензор третьего ранга, то компоненты $\omega_{\alpha a}$ и $R_{\alpha\beta a}$ соответствуют псевдоковекторам (по индексу a). Если дискретные преобразования (обращение времени и преобразование четности) отождествлены в координатном (индексы α, β, \dots) и “внутреннем” (индексы a, b, \dots) пространствах, то компоненты $\omega_{\alpha c}$ (два индекса) меняют свой знак при отражении всех осей, а $R_{\alpha\beta c}$ (три индекса) – нет.

Действие Гильберта–Эйнштейна в трехмерном пространстве-времени стандартно:

$$S_{\text{HE}} = \int_{\mathbb{M}} dx L_{\text{HE}} = \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{g} R = \int_{\mathbb{M}} R^{ab} \wedge e^c \varepsilon_{abc} = 2 \int_{\mathbb{M}} R^a \wedge e^b \eta_{ab}, \quad (2.56)$$

где последние два выражения записаны в обозначениях дифференциальных форм и гравитационная постоянная положена равной единице.

Как обычно, к действию Гильберта–Эйнштейна можно добавить космологическую постоянную Λ . Тогда в обозначениях дифференциальных форм действие примет вид

$$S_{\text{HE}\Lambda} := \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{g} (R - \Lambda) = \int_{\mathbb{M}} \left(R^{ab} - \frac{1}{6} \Lambda e^a \wedge e^b \right) \wedge e^c \varepsilon_{abc}. \quad (2.57)$$

Предположим, что кручение равно нулю. Тогда вариация действия Гильберта–Эйнштейна по реперу (или по метрике) дает вакуумные уравнения Эйнштейна с космологической постоянной (??)

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \Lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{R}_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}, \quad (2.58)$$

где тензор кривизны отмечен знаком тильды. Это значит, что тензор кривизны построен для лоренцевой связности $\tilde{\omega}_\alpha{}^{ab}(e, \partial e)$ при нулевом кручении, которая в этом случае выражается через репер и его первые производные по формуле (??).

Можно поставить другую вариационную задачу. А именно, рассмотрим репер $e_\alpha{}^a$ и лоренцеву связность $\omega_\alpha{}^{ab}$ в качестве независимых переменных в действии Гильберта–Эйнштейна (2.57) (формализм первого порядка). Это означает, что кручение

при вариации действия отлично от нуля. Тогда вариация действия по лоренцевой связности примет вид

$$\begin{aligned}\delta_\omega S_{\text{HEA}} &= \int \delta R^{ab} \wedge e^c \varepsilon_{abc} = \int \delta(d\omega^{ab} - \omega^{ad} \wedge \omega_d^b) \wedge e^c \varepsilon_{abc} = \\ &= \int \left[d(\delta\omega^{ab} \wedge e^c \varepsilon_{abc}) + \delta\omega^{ab} \wedge T^c \varepsilon_{abc} \right],\end{aligned}$$

где мы использовали формулу

$$\omega_a^d \varepsilon_{dbc} + \omega_b^d \varepsilon_{adc} + \omega_c^d \varepsilon_{abd} = 0,$$

вытекающую из симметрии полностью антисимметричного тензора третьего ранга относительно преобразований Лоренца. Первое слагаемое в вариации действия представляет собой граничное слагаемое и не влияет на вид уравнений движения. Следовательно, уравнения Эйлера–Лагранжа для лоренцевой связности имеют вид $T^a = 0$, т.е. кручение равно нулю на уравнениях движения. Поскольку общее решение части системы уравнений Эйлера–Лагранжа можно подставлять в действие (см. раздел ??), то последующая вариация действия Гильберта–Эйнштейна по реперу снова приведет к уравнениям Эйнштейна (3.45).

Таким образом, в действии Гильберта–Эйнштейна в качестве независимых переменных можно выбрать либо репер, считая кручение равным нулю (формализм второго порядка), либо репер и лоренцеву связность (формализм первого порядка). В последнем случае равенство кручения нулю является следствием уравнений Эйлера–Лагранжа. В любом варианте для репера возникают вакуумные уравнения Эйнштейна с космологической постоянной (3.45). Заметим также, что наличие полей материи в действии может привести к нетривиальному кручению, если слагаемое с полями материи зависит от лоренцевой связности в формализме первого порядка.

Спецификой трехмерия является то обстоятельство, что тензор Вейля тождественно равен нулю, и полный тензор кривизны однозначно определяется своим тензором Риччи (см. раздел ??):

$$\tilde{R}_{abcd} = \eta_{ac} \tilde{R}_{bd} - \eta_{ad} \tilde{R}_{bc} - \eta_{bc} \tilde{R}_{ad} + \eta_{bd} \tilde{R}_{ac} - \frac{1}{2}(\eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc}) \tilde{R}. \quad (2.59)$$

Если подставить в это выражение произвольное решение вакуумных уравнений Эйнштейна (3.45), то получим полный тензор кривизны

$$\tilde{R}_{abcd} = \frac{1}{2} \Lambda (\eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc}). \quad (2.60)$$

Мы видим, что любое решение вакуумных уравнений Эйнштейна в трехмерном случае локально представляет собой пространство постоянной кривизны (?). При $\Lambda = 0$ тензор кривизны равен нулю, $R_{abcd} = 0$, и пространство-время локально является пространством Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$. Если космологическая постоянная отлична от нуля, то пространство-время локально изометрично либо пространству де Ситтера $\text{SO}_0(1, 3)/\text{SO}_0(1, 2)$ при $\Lambda > 0$, либо анти-де Ситтера $\text{SO}_0(2, 2)/\text{SO}_0(1, 2)$ при $\Lambda < 0$.

Если решать вакуумные уравнения Эйнштейна с космологической постоянной (3.45), то возникает соблазн сказать, что модель тривиальна, т.к. описывает пространства постоянной кривизны. Это действительно так, если искать решения уравнений движения, т.е. пары (\mathbb{M}, g) , в классе гладких метрик на геодезически полных

многообразиях. Тогда универсальное накрывающее пространство будет либо пространством де Ситтера ($\Lambda > 0$), либо пространством Минковского ($\Lambda = 0$), либо пространством анти-де Ситтера ($\Lambda < 0$). Все остальные решения получатся как фактор пространства универсальных накрывающих по группам изометрий, действующих свободно и собственно разрывно. Ситуация существенно меняется, если рассматривать более широкий класс решений (M, g) , допустив геодезически неполные многообразия с метриками, имеющими особенности на крае. В дальнейшем мы увидим, что точечной массивной частице при $\Lambda = 0$, покоящейся в начале координат, соответствует пространство-время вида $(t, x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ с конической особенностью на пространственных сечениях $t = \text{const}$. Это пространство-время геодезически не полно и имеет край, которым является мировая линия частицы $\mathbb{R} \times \{0\}$. Именно решения с особенностями представляют основной интерес в трехмерном варианте общей теории относительности. В общем случае сингулярный край многообразия ∂M может представлять собой точку, линию, поверхность или их произвольные комбинации.

Гамильтонова формулировка общей теории относительности, проведенная в главе ??, не зависит от числа измерений и можно подсчитать число физических (распространяющихся) степеней свободы, для которых возможна постановка задачи Коши. Каноническими переменными в данном случае являются пространственные компоненты метрики $g_{\mu\nu}$ и сопряженные импульсы $p^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2$), которые имеют по три независимые компоненты. В теории имеется три связи первого рода, связанные с инвариантностью действия относительно общих преобразований координат. Поэтому трехмерная гравитация описывает $3 - 3 = 0$ физических (распространяющихся) степеней свободы. Это значит, что в трехмерной гравитации, основанной на действии Гильберта–Эйнштейна, невозможно поставить задачу Коши ни для какой компоненты метрики и, следовательно, отсутствуют гравитационные волны. Отсюда не следует, однако, что модель тривиальна. Если к действию Гильберта–Эйнштейна добавить слагаемое с полями материи, то возникнет нетривиальное пространство-время, которое в целом уже не будет пространством постоянной кривизны. Ниже в разделе 2.6 мы рассмотрим трехмерную гравитацию с точечными частицами.

Выбор знака гравитационной постоянной, на которую умножается действие Гильберта–Эйнштейна, обусловлен положительностью квадратичной формы импульсов для физических степеней свободы. Поскольку в трехмерной общей теории относительности физические степени свободы отсутствуют, то и знак гравитационной постоянной может быть произвольным. Это обстоятельство будет использовано при определении энергии гравитационного поля в трехмерной гравитации.

По построению, действие Гильберта–Эйнштейна (2.56), которое мы рассмотрим в формализме первого порядка, не зависит от выбора координат в пространстве-времени. Кроме этого, оно обладает еще двумя типами локальных симметрий. Первый тип очевиден и также следует из построения. А именно, действие Гильберта–Эйнштейна инвариантно относительно локальных лоренцевых $\mathbb{SO}_0(1, 2)$ -вращений. Покажем это в обозначениях дифференциальных форм. В инфинитезимальной форме локальные лоренцевы вращения параметризуются антисимметричным тензором второго ранга $\lambda^{ab}(x) := -\lambda^{ba}(x) \ll 1$:

$$\begin{aligned} \delta\omega_{\alpha a}{}^b &= \nabla_{\alpha}\lambda_a{}^b := \partial_{\alpha}\lambda_a{}^b + \lambda_a{}^c\omega_{\alpha c}{}^b - \omega_{\alpha a}{}^c\lambda_c{}^b, \\ \delta e_{\alpha}{}^a &= -e_{\alpha}{}^b\lambda_b{}^a. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Перепишем преобразования (2.61) в обозначениях дифференциальных форм:

$$\begin{aligned}\delta\omega_a{}^b &= d\lambda_a{}^b + \lambda_a{}^c\omega_c{}^b - \omega_a{}^c\lambda_c{}^b, \\ \delta e^a &= -e^b\lambda_b{}^a.\end{aligned}\tag{2.62}$$

Это приводит к следующему тензорному преобразованию 2-формы кривизны:

$$\delta R^{ab} = -R^{ac}\lambda_c{}^b - R^{cb}\lambda_c{}^a.$$

Полностью антисимметричный тензор третьего ранга инвариантен относительно локальных $\mathbb{SO}_0(1, 2)$ -вращений. Поэтому справедливо равенство

$$\delta\varepsilon_{abc} = \lambda_a{}^d\varepsilon_{dbc} + \lambda_b{}^d\varepsilon_{adc} + \lambda_c{}^d\varepsilon_{abd} = 0.\tag{2.63}$$

Теперь нетрудно проверить инвариантность лагранжиана Гильберта–Эйнштейна (2.56):

$$\begin{aligned}\delta L_{\text{HE}} &= [\delta R^{ab} \wedge e^c + R^{ab} \wedge \delta e^c] \varepsilon_{abc} = -[(R^{ad}\lambda_d{}^b + R^{db}\lambda_d{}^a) \wedge e^c + R^{ab} \wedge e^d\lambda_d{}^c] \varepsilon_{abc} = \\ &= -R^{ab} \wedge e^c [\lambda_b{}^d\varepsilon_{adc} + \lambda_a{}^d\varepsilon_{dbc} + \lambda_c{}^d\varepsilon_{abd}] = 0,\end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством (2.63). Таким образом, лагранжиан и, следовательно, действие Гильберта–Эйнштейна инвариантны относительно локальных лоренцевых вращений (2.62).

Слагаемое с космологической постоянной в действии S_{HEL} (2.57), очевидно, также инвариантно относительно локальных лоренцевых вращений (2.61).

В трехмерном случае действие Гильберта–Эйнштейна с космологической постоянной и еще двумя слагаемыми инвариантно относительно дополнительных локальных преобразований – локальных трансляций, которые будут рассмотрены в следующем разделе.

2.3 Калибровочные поля для группы Пуанкаре

В настоящем разделе мы рассмотрим калибровочные поля для группы Пуанкаре (неоднородной группы Лоренца $\mathbb{ISO}_0(1, 2)$), действующей в трехмерном пространстве-времени. Основная проблема для группы Пуанкаре сводится к тому, что она не является полупростой, и в ее алгебре Ли в общем случае не существует метрики, инвариантной относительно действия присоединенного представления, что, в свою очередь, является серьезной проблемой при построении инвариантов, в частности, инвариантного действия. Однако в трехмерном случае существует действие Черна–Саймонса, для которого инвариантная квадратичная форма в алгебре Ли может быть вырождена. Кроме этого, в трех измерениях в алгебре Ли группы Пуанкаре существуют не одна, а две “естественные” инвариантные метрики и, следовательно, два различных действия Черна–Саймонса. Одно из этих действий сводится к действию Гильберта–Эйнштейна с космологической постоянной (соответствующая инвариантная метрика была рассмотрена в [?]).

Алгебра Ли группы Пуанкаре $\mathbb{ISO}_0(1, 2)$ возникает в результате формальной контракции простой алгебры Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 3)$ (алгебра де Ситтера) или алгебры анти де Ситтера $\mathbb{SO}_0(2, 2)$ (см. раздел ??). Поэтому сначала мы построим калибровочную модель для группы (анти-)де Ситтера, а затем проведем контракцию до группы

Пуанкаре. Все кинематические конструкции (до построения инвариантов) не зависят от размерности пространства-времени и естественным образом переносятся на пространства более высоких размерностей.

Рассмотрим четырехмерную метрику $g_{AB} := \text{diag}(+ - - \nu)$, $A, B = 0, 1, 2, 3$, где $\nu \in \mathbb{R}$ – постоянная. Матрицы вращений, оставляющие эту метрику инвариантной, определяются уравнением

$$g_{AB} = S_A^C S_B^D g_{CD}. \quad (2.64)$$

Мы рассмотрим только связные компоненты единиц групп, чтобы не отвлекаться на отражения, которые не меняют алгебр Ли. Матрицы вращений в формуле (2.64) принадлежат следующим группам:

$$S \in \mathbb{G} = \begin{cases} \text{SO}_0(1, 3), & \nu = -1, \\ \text{SO}_0(2, 2), & \nu = 1, \\ \text{ISO}_0(1, 2), & \nu = 0. \end{cases}$$

Группа Пуанкаре возникает из группы (анти-)де Ситтера в формальном пределе $\nu \rightarrow 0$ (контракция).

В инфинитезимальной форме матрицы вращений мало отличаются от единицы:

$$S_A^B \approx \delta_A^B + \lambda_A^B, \quad \lambda_A^B \ll 1,$$

и уравнение (2.64) принимает вид

$$\lambda_{AB} + \lambda_{BA} = 0, \quad \lambda_{AB} := \lambda_A^C g_{CB}.$$

Алгебры Ли \mathfrak{g} рассматриваемых групп хорошо известны,

$$[L_{AB}, L_{CD}] = -g_{AC} L_{BD} + g_{AD} L_{BC} + g_{BC} L_{AD} - g_{BD} L_{AC},$$

где $L_{AB} = -L_{BA}$ – генераторы (базис алгебры Ли). Теперь произведем $3+1$ разбиение индексов: $\{A\} = \{a, 3\}$, $a = 0, 1, 2$. Тогда

$$\{L_{AB}\} \mapsto \{L_{ab}, P_a := L_{a3}\},$$

и алгебра Ли примет вид

$$\begin{aligned} [L_{ab}, L_{cd}] &= -\eta_{ac} L_{bd} + \eta_{ad} L_{bc} + \eta_{bc} L_{ad} - \eta_{bd} L_{ac}, \\ [L_{ab}, P_c] &= -\eta_{ac} P_b + \eta_{bc} P_a, \\ [P_a, P_b] &= -\nu L_{ab}, \end{aligned}$$

где $\eta_{ab} := \text{diag}(+ - -)$. Ясно, что алгебра Ли группы Пуанкаре возникает при $\nu = 0$. Поэтому локальные преобразования, соответствующие генераторам L_{ab} и P_a , будем называть вращениями и сдвигами. $3+1$ разбиение параметров преобразований имеет следующий вид

$$\lambda^{AB} = \begin{pmatrix} \lambda^{ab} & \lambda^a \\ -\lambda^b & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{ab} = -\lambda^{ba}, \quad \lambda^a := \lambda^{a3}.$$

Компоненты локальной формы связности принимают значения в алгебре Ли и потому равны

$$\omega_\alpha^{AB} L_{AB} = \omega_\alpha^{ab} L_{ab} + e_\alpha^a P_a, \quad e_\alpha^a := \omega_\alpha^{a3}, \quad (2.65)$$

где ω_α^{ab} – калибровочное поле для подгруппы Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 2)$ и e_α^a – калибровочное поле для сдвигов.

Для вычисления компонент тензора кривизны введем ковариантную производную, действующую на векторные поля, преобразующиеся по некоторому представлению рассматриваемой группы,

$$D_\alpha := \partial_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha^{AB}L_{AB},$$

где L_{AB} – представление генераторов группы Ли (матричные индексы опущены). Тогда коммутатор ковариантных производных определяется тензором кривизны:

$$[D_\alpha, D_\beta] = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}^{AB}L_{AB},$$

у которого компоненты имеют вид

$$\{F_{\alpha\beta}^{AB}\} = \{F_{\alpha\beta}^{ab} := R_{\alpha\beta}^{ab} + \nu(e_\alpha^a e_\beta^b - e_\beta^a e_\alpha^b), \quad F_{\alpha\beta}^{a3} := T_{\alpha\beta}^a\}, \quad (2.66)$$

где

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^{ab} &:= \partial_\alpha \omega_\beta^{ab} - \partial_\beta \omega_\alpha^{ab} - \omega_\alpha^{ac} \omega_{\beta c}^b + \omega_\beta^{ac} \omega_{\alpha c}^b, \\ T_{\alpha\beta}^a &:= \partial_\alpha e_\beta^a - \partial_\beta e_\alpha^a - e_\alpha^b \omega_{\beta b}^a + e_\beta^b \omega_{\alpha b}^a. \end{aligned}$$

Постоянная ν в выражении для $F_{\alpha\beta}^{ab}$ (2.66) возникает после опускания индекса: $\omega_{\alpha 3}^a = \nu \omega_\alpha^{3a}$.

Полученные выражения для компонент $R_{\alpha\beta}^{ab}$ и $T_{\alpha\beta}^a$ совпадают с тензорами кривизны и кручения (2.51), если калибровочные поля ω_α^{ab} и e_α^a отождествить с лоренцевой $\mathbb{SO}(1, 2)$ -связностью и репером. Именно по этой причине для них были выбраны соответствующие обозначения в определении (2.65).

При локальных калибровочных преобразованиях компоненты связности преобразуются по правилу (матричные индексы опущены)

$$\omega'_\alpha = S \omega_\alpha S^{-1} + \partial_\alpha S S^{-1}$$

или, в инфинитезимальной форме,

$$\delta \omega_{\alpha A}^B = \nabla_\alpha \lambda_A^B = \partial_\alpha \lambda_A^B + \lambda_A^C \omega_{\alpha C}^B - \omega_{\alpha A}^C \lambda_C^B.$$

После $3+1$ разбиения групповых индексов инфинитезимальные преобразования принимают вид

$$\begin{aligned} \delta \omega_{\alpha a}^b &= \lambda_a^c \omega_{\alpha c}^b - \omega_{\alpha a}^c \lambda_c^b + \partial_\alpha \lambda_a^b + \nu(e_{\alpha a} \lambda^b - e_\alpha^b \lambda_a), \\ \delta e_\alpha^a &= -e_\alpha^b \lambda_b^a + \partial_\alpha \lambda^a + \lambda^b \omega_{\alpha b}^a, \end{aligned} \quad (2.67)$$

где $\lambda^{ab}(x)$, $\lambda^a(x)$ – параметры локальных вращений и сдвигов, соответственно.

Компоненты тензора кривизны преобразуются по тензорному закону:

$$F'_{\alpha\beta}{}^{AB} = F_{\alpha\beta}{}^{CD} S_C^{-1A} S_D^{-1B}.$$

В инфинитезимальной форме это преобразование приобретает вид

$$\delta F_{\alpha\beta}{}^{AB} = -F_{\alpha\beta}{}^{AC} \lambda_C^B - F_{\alpha\beta}{}^{CB} \lambda_C^A.$$

Отсюда вытекают правила преобразования кривизны и кручения при локальных вращениях и сдвигах:

$$\begin{aligned}\delta R_{\alpha\beta}{}^{ab} &= -R_{\alpha\beta}{}^{ac}\lambda_c{}^b - R_{\alpha\beta}{}^{cb}\lambda_c{}^a + \nu(-T_{\alpha\beta}{}^a\lambda^b + T_{\alpha\beta}{}^b\lambda^a + \\ &\quad + e_\alpha{}^a D_\beta\lambda^b - e_\alpha{}^b D_\beta\lambda^a - e_\beta{}^a D_\alpha\lambda^b + e_\beta{}^b D_\alpha\lambda^a), \\ \delta T_{\alpha\beta}{}^a &= -T_{\alpha\beta}{}^b\lambda_b{}^a - R_{\alpha\beta}{}^{ab}\lambda_b - \nu(e_\alpha{}^a\lambda_\beta - e_\beta{}^a\lambda_\alpha),\end{aligned}\quad (2.68)$$

где ковариантная производная от параметра сдвига определена следующим образом:

$$D_\alpha\lambda^a := \left(\partial_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha{}^{cd}L_{cd}\right)\lambda^a = \partial_\alpha\lambda^a + \frac{1}{2}\omega_\alpha{}^{cd}\left(\lambda_c\frac{\partial}{\partial\lambda^d} - \lambda_d\frac{\partial}{\partial\lambda^c}\right)\lambda^a = \partial_\alpha\lambda^a + \lambda^b\omega_{\alpha b}{}^a.$$

Локальные вращения, которые параметризуются параметрами $\lambda^{ab}(x)$, имеют стандартный вид, и никаких проблем при построении инвариантов не представляют, т.к. группа Лоренца $\mathbb{SO}_0(1, 2)$ является простой. Поэтому опишем подробно симметрию относительно локальных трансляций, параметризующихся тремя функциями $\lambda^a(x)$.

Для дальнейших вычислений в алгебре Ли \mathfrak{g} введем новый базис:

$$L_{ab} = \varepsilon_{ab}{}^c L_c \quad \Leftrightarrow \quad L_a := \frac{1}{2}\varepsilon_a{}^{bc} L_{bc},$$

оставив сдвиги P_a без изменения. Кроме того, чтобы отличать индексы, относящиеся к сдвигам, обозначим их греческими буквами, т.е. элемент алгебры Ли \mathfrak{g} запишем в виде

$$X = X^{ab}L_{ab} + X^\mu P_\mu = 2X^a L_a + X^\mu P_\mu \in \mathfrak{g},$$

где $\mu = 0, 1, 2$ и

$$X^{ab} = \varepsilon^{ab}{}_c X^c \quad \Leftrightarrow \quad X^a := \frac{1}{2}\varepsilon^a{}_{bc} X^{bc}.$$

При этом справедливо равенство

$$X^{ab}L_{ab} = 2X^a L_a.$$

Прямые вычисления приводят к следующим коммутационным соотношениям для нового базиса алгебры Ли \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned}[L_a, L_b] &= -\varepsilon_{ab}{}^c L_c, \\ [L_a, P_\mu] &= -\varepsilon_{a\mu}{}^\rho P_\rho, \\ [P_\mu, P_\rho] &= -\nu\varepsilon_{\mu\rho}{}^c L_c.\end{aligned}\quad (2.69)$$

В любой полупростой алгебре Ли \mathfrak{g} существует невырожденная инвариантная метрика – это форма Киллинга–Картана $\eta_{AB} := -f_{AC}{}^D f_{BD}{}^C$ (?). В нашем случае прямые вычисления приводят к следующему ответу:

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 4\eta_{ab} & 0 \\ 0 & 4\nu\eta_{\mu\rho} \end{pmatrix}.\quad (2.70)$$

При $\nu \neq 0$ метрика невырождена. Для группы Пуанкаре $\nu = 0$, и, как и следовало ожидать, форма Киллинга–Картана вырождается. Форма Киллинга–Картана определяет в алгебре Ли инвариантное скалярное произведение

$$(X, Y)_{(\eta)} := 4X^a Y^b \eta_{ab} + 4\nu X^\mu Y^\rho \eta_{\mu\rho},$$

которое мы пометили индексом (η) . Чтобы убедиться в инвариантности формы Киллинга–Картана, вычислим структурные константы со всеми опущенными индексами $f_{ABC} := f_{AB}{}^D \eta_{DC}$:

$$f_{abc} = -4\varepsilon_{abc}, \quad f_{a\mu\rho} = -4\nu\varepsilon_{a\mu\rho}, \quad f_{\mu\rho c} = -4\nu\varepsilon_{\mu\rho c},$$

где выписаны только отличные от нуля и линейно независимые компоненты. Мы видим, что структурные константы со всеми опущенными индексами полностью антисимметричны, и, следовательно, форма Киллинга–Картана инвариантна, как и должно было быть.

Специфическим свойством трех измерений является наличие второй “естественной” инвариантной метрики

$$\gamma_{AB} := \begin{pmatrix} 0 & \eta_{a\rho} \\ \eta_{\mu b} & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{a\mu} := \eta_{\mu a} := \text{diag}(+ - -). \quad (2.71)$$

Эта метрика не вырождена при всех значениях параметра ν ($\det \gamma_{AB} = -1$) и определяет в алгебре Ли скалярное произведение

$$(X, Y)_{(\gamma)} := X^a Y^\mu \eta_{a\mu} + X^\mu Y^a \eta_{\mu a}, \quad (2.72)$$

которое, очевидно, инвариантно относительно вращений. Чтобы доказать инвариантность метрики относительно трансляций, вычислим структурные константы со всеми опущенными индексами $\hat{f}_{ABC} := f_{AB}{}^D \gamma_{DC}$:

$$\hat{f}_{ab\sigma} = -\varepsilon_{ab\sigma}, \quad \hat{f}_{a\rho c} = -\varepsilon_{a\rho c}, \quad \hat{f}_{\mu\rho\sigma} = -\nu\varepsilon_{\mu\rho\sigma},$$

где выписаны только отличные от нуля и линейно независимые компоненты. Отсюда вытекает инвариантность метрики (2.71), поскольку структурные константы \hat{f}_{ABC} оказались антисимметричными по всем индексам.

Вторая инвариантная метрика (2.71) определяет в алгебре Ли скалярное произведение, которое дает не скаляр, а псевдоскаляр, т.к. при ее определении был использован полностью антисимметричный тензор третьего ранга.

Для построения действия Черна–Саймонса перепишем компоненты тензора кривизны (2.66) в базисе $L_a, P_\mu \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} F^a &= R^a + \frac{1}{2}\nu\varepsilon^a{}_{\mu\rho} e^\mu \wedge e^\rho = d\omega^a + \frac{1}{2}\varepsilon^a{}_{bc}\omega^b \wedge \omega^c + \frac{1}{2}\nu\varepsilon^a{}_{\mu\rho} e^\mu \wedge e^\rho, \\ F^\mu &:= F^{\mu 3} = T^\mu = de^\mu + \varepsilon^\mu{}_{\rho\sigma} e^\rho \wedge \omega^\sigma. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Поскольку в алгебре Ли существует две “естественные” инвариантные метрики, то есть возможность построения двух различных действий Черна–Саймонса. Для формы Киллинга–Картана (2.72) действие Черна–Саймонса (2.26) имеет вид

$$S_{CS}^{(\eta)} = \int_{\mathbb{M}} \left(4R^a \wedge \omega_a + 4\nu T^a \wedge e_a - \frac{2}{3}\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c \varepsilon_{abc} \right), \quad (2.74)$$

где использованы выражения для компонент полного тензора кривизны (2.66) и мы вернулись к прежним обозначениям индексов латинскими буквами. Оно является псевдоскаляром.

Для второй инвариантной метрики (2.71) действие Черна–Саймонса равно

$$S_{CS}^{(\gamma)} = \int_{\mathbb{M}} \left(R^a \wedge e_a + T^a \wedge \omega_a - \frac{1}{2}\omega^a \wedge \omega^b \wedge e^c \varepsilon_{abc} + \frac{1}{3}\nu e^a \wedge e^b \wedge e^c \varepsilon_{abc} \right). \quad (2.75)$$

Первое слагаемое в этом выражении является действием Гильберта–Эйнштейна (2.56), а четвертое – космологической постоянной (2.57). Это действие – скаляр.

По построению, оба действия Черна–Саймонса (2.74) и (2.75) инвариантны относительно общих преобразований координат (исключая обращение времени и преобразования четности), локальных лоренцевых вращений и трансляций (2.76) при любых значениях параметра ν , включая нуль. Инвариантность относительно преобразований координат очевидна. Инвариантность относительно локальных вращений и трансляций нетривиальна. Рассмотрим трансляции подробно.

Локальные трансляции для репера и лоренцевой связности (3.30) параметризуются инфинитезимальным векторным полем $\lambda^a(x) \ll 1$:

$$\begin{aligned}\delta e^a &= d\lambda^a + \varepsilon^a{}_{bc}\omega^b\lambda^c, \\ \delta\omega^a &= \nu\varepsilon^a{}_{bc}e^b\lambda^c\end{aligned}\quad (2.76)$$

При этом кривизна и кручение преобразуются по правилам:

$$\begin{aligned}\delta_e R^a &= 0, & \delta_e T^a &= \varepsilon^a{}_{bc}R^b\lambda^c, \\ \delta_\omega R^a &= \nu[d(\varepsilon^a{}_{bc}e^b\lambda^c) + \omega^b \wedge e^a\lambda_b - \omega^b \wedge e_b\lambda^a], & \delta_\omega T^a &= \nu e^b \wedge e^a\lambda_b,\end{aligned}\quad (2.77)$$

где индексы e и ω у знака вариации δ обозначают поля, по которым проводится варьирование.

Теорема 2.3.1. *При локальных трансляциях (2.76) лагранжианы Черна–Саймонса для действий (2.74) и (2.75) меняются на внешние дифференциалы:*

$$\delta L_{\text{CS}}^{(\eta)} = 4\nu d(de^a\lambda_a), \quad (2.78)$$

$$\delta L_{\text{CS}}^{(\gamma)} = d(R^a\lambda_a) - \frac{1}{2}d(\omega^a \wedge \omega^b\lambda^c\varepsilon_{abc}). \quad (2.79)$$

Доказательство. Доказательство проводится прямыми вычислениями. Для контроля приведем вариации отдельных слагаемых в лагранжианах. Для слагаемых первого лагранжиана в действии (2.74) справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\delta(R^a \wedge \omega_a) &= \nu d(e^b \wedge \omega^a\lambda^c\varepsilon_{abc}) + \nu e^a \wedge \omega_a \wedge \omega_b\lambda^b, \\ \delta_e(T^a \wedge e_a) &= R^b \wedge e^a\lambda^c\varepsilon_{abc} + T^a \wedge (d\lambda_a - \varepsilon_{abc}\lambda^b\omega^c), \\ \delta_\omega(T^a \wedge e_a) &= 0, \\ \delta(\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c\varepsilon_{abc}) &= 6\nu e^a \wedge \omega_a \wedge \omega_b\lambda^b,\end{aligned}\quad (2.80)$$

где использованы формулы (2.85). После сложения вариаций получаем формулу (2.78). Вариации слагаемых во втором лагранжиане равны

$$\delta_e(R^a \wedge e_a) = d(R^a\lambda_a), \quad (2.81)$$

$$\delta_\omega(R^a \wedge e_a) = -\nu d(e^a \wedge e^b\lambda^c\varepsilon_{abc}) + \nu T^a \wedge e^b\lambda^c\varepsilon_{abc}, \quad (2.82)$$

$$\delta_e(T^a \wedge \omega_a) = -R^a \wedge \omega^b\lambda^c\varepsilon_{abc},$$

$$\delta_\omega(T^a \wedge \omega_a) = -\nu\omega^a \wedge e_a \wedge e_b\lambda^b + \nu T^a \wedge e^b\lambda^c\varepsilon_{abc},$$

$$\delta_e(\omega^a \wedge \omega^b \wedge e^c\varepsilon_{abc}) = d(\omega^a \wedge \omega^b\lambda^c\varepsilon_{abc}) - 2R^a \wedge \omega^b\lambda^c\varepsilon_{abc},$$

$$\delta_\omega(\omega^a \wedge \omega^b \wedge e^c\varepsilon_{abc}) = -2\nu\omega^a \wedge e_a \wedge e_b\lambda^b,$$

$$\delta(e^a \wedge e^b \wedge e^c\varepsilon_{abc}) = 3d(e^a \wedge e^b\lambda^c\varepsilon_{abc}) - 6T^a \wedge e^b\lambda^c\varepsilon_{abc}.$$

Складывая полученные выражения, получаем вариацию (2.79). \square

Прямое доказательство инвариантности действий Черна–Саймонса относительно локальных лоренцевых вращений с точностью до внешнего дифференциала оставляется читателю.

Локальные трансляции для лоренцевой связности (2.76) зависят от параметра ν , который может быть произволен. Поэтому, в частности, можно положить $\nu = 0$, т.е. рассмотреть случай, когда лоренцева связность вообще не преобразуется. Этот случай соответствует инвариантности относительно локального действия группы Пуанкаре. При $\nu = 0$ действие Черна–Саймонса для формы Киллинга–Картана (2.74) вообще не зависит от репера, и потому его инвариантность относительно локальных трансляций тривиальна. Инвариантность второго действия Черна–Саймонса (2.75), содержащего действие Гильберта–Эйнштейна, относительно локальных трансляций нетривиальна.

Из явных формул для вариаций (3.8), (2.82) следует, что действие Гильберта–Эйнштейна (2.56) инвариантно относительно локальных трансляций

$$\delta e^a = d\lambda^a + \varepsilon^a{}_{bc}\omega^b\lambda^c, \quad \delta\omega^a = 0,$$

при $\nu = 0$. Это свойство является специфическим для трех измерений. Более того, действие Гильберта–Эйнштейна в геометрии Римана–Картана линейно по реперу, и поэтому инвариантно относительно локальных трансляций для конечных преобразований. Предположим, что параметр локальных трансляций λ^a в формуле (2.76) не мал. Тогда можно поставить следующую задачу: “Можно ли с помощью локальных трансляций привести репер и (или) лоренцеву связность к некоторому наперед заданному виду?” Для этого необходимо решить систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\partial_\alpha\lambda^a = e_\alpha{}^a - \lambda^b\omega_{ab}{}^a,$$

где функции $e_\alpha{}^a$ и $\omega_{ab}{}^a$ являются заданными. Данная система уравнений имеет условия разрешимости. Чтобы их получить, необходимо продифференцировать уравнение по x^β и антисимметризовать по индексам α и β . В результате получим необходимое и достаточное условие локальной разрешимости:

$$T_{\alpha\beta}{}^a - R_{\alpha\beta b}{}^a\lambda^b = 0,$$

где мы воспользовались исходным уравнением для исключения частных производных $\partial_\alpha\lambda^a$. К сожалению, последнее равенство содержит неизвестные функции λ^a и поэтому не является условием разрешимости в строгом смысле слова.

Зависимость уравнений движения

Поскольку действия Черна–Саймонса инвариантны относительно общих преобразований координат и инфинитезимальных локальных преобразований (3.30), то, согласно второй теореме Нетер, между уравнениями Эйлера–Лагранжа есть линейная зависимость. Чтобы ее получить, надо приравнять соответствующую вариацию действия нулю.

При общих инфинитезимальных преобразованиях координат (см. раздел ??) $x^\alpha \mapsto x^\alpha + \epsilon^\alpha(x)$ репер и лоренцева связность преобразуются по правилам:

$$\begin{aligned} \delta e_\alpha{}^a &= -\partial_\alpha\epsilon^\beta e_\beta{}^a - \epsilon^\beta\partial_\beta e_\alpha{}^a, \\ \delta\omega_\alpha{}^a &= -\partial_\alpha\epsilon^\beta\omega_\beta{}^a - \epsilon^\beta\partial_\beta\omega_\alpha{}^a. \end{aligned}$$

Вариация действия имеет вид

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[\frac{\delta S}{\delta e_\alpha^a} (-\partial_\alpha \epsilon^\beta e_\beta^a - \epsilon^\beta \partial_\beta e_\alpha^a) + \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha^a} (-\partial_\alpha \epsilon^\beta \omega_\beta^a - \epsilon^\beta \partial_\beta \omega_\alpha^a) \right] = \\ &= \int \left[\left(\tilde{\nabla}_\beta \frac{\delta S}{\delta e_\beta^a} \right) e_\alpha^a + \left(\tilde{\nabla}_\beta \frac{\delta S}{\delta \omega_\beta^a} \right) \omega_\alpha^a \right] \epsilon^\alpha = 0, \end{aligned}$$

где проведено интегрирование по частям и знак тильды напоминает, что ковариантная производная $\tilde{\nabla}_\beta$ берется при нулевом кручении. Поскольку параметры ϵ^α произвольны, то между уравнениями движения имеется линейная зависимость:

$$\left(\tilde{\nabla}_\beta \frac{\delta S}{\delta e_\beta^a} \right) e_\alpha^a + \left(\tilde{\nabla}_\beta \frac{\delta S}{\delta \omega_\beta^a} \right) \omega_\alpha^a = 0. \quad (2.83)$$

Действия Черна–Саймонса инвариантны также относительно локальных лоренцевых вращений с инфинитезимальным параметром $\lambda_b^a(x)$:

$$\delta e_\alpha^a = -e_\alpha^b \lambda_b^a, \quad \delta \omega_\alpha^a = -\omega_\alpha^b \lambda_b^a,$$

которые приводят к следующей вариации действия:

$$\delta S = \int \left[\frac{\delta S}{\delta e_\alpha^a} (-e_\alpha^b \lambda_b^a) + \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha^a} (-\omega_\alpha^b \lambda_b^a) \right] = 0.$$

С учетом антисимметрии параметров вращений получаем зависимость уравнений движения

$$\frac{\delta S}{\delta e_\alpha^b} e_{\alpha a} - \frac{\delta S}{\delta e_\alpha^a} e_{\alpha b} + \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha^b} \omega_{\alpha a} - \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha^a} \omega_{\alpha b} = 0. \quad (2.84)$$

Спецификой трехмерия является наличие дополнительной симметрии относительно инфинитезимальных локальных трансляций (2.76). Соответствующая вариация действия имеет вид

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[\frac{\delta S}{\delta e_\alpha^a} (\partial_\alpha \lambda^a + \varepsilon^a_{bc} \omega_\alpha^b \lambda^c) + \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha^a} \nu \varepsilon^a_{bc} e_\alpha^b \lambda^c \right] = \\ &= \int \left[-\tilde{\nabla}_\alpha \frac{\delta S}{\delta e_\alpha^a} + \nu \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha^c} \varepsilon^c_{ba} e_\alpha^b \right] \lambda^a = 0, \end{aligned}$$

где мы проинтегрировали по частям. Отсюда вытекает зависимость уравнений Эйлера–Лагранжа:

$$-\tilde{\nabla}_\alpha \frac{\delta S}{\delta e_\alpha^a} + \nu \frac{\delta S}{\delta \omega_\alpha^c} \varepsilon^c_{ba} e_\alpha^b = 0. \quad (2.85)$$

При исследовании зависимости уравнений Эйлера–Лагранжа необходимо учитывать, что каждое слагаемое в действии Черна–Саймонса может обладать определенной симметрией, что приводит к определенным тождествам. Например, в действии Черна–Саймонса каждое слагаемое инвариантно относительно общих преобразований координат, что приводит к тождествам (2.83) для каждого слагаемого в отдельности.

Отметим также, что локальные трансляции репера (2.76) можно записать в виде

$$\delta e_\alpha^a = -\partial_\alpha \epsilon^\beta e_\beta^a - \epsilon^\beta \partial_\beta e_\alpha^a + \lambda^\beta T_{\alpha\beta}^a - e_\alpha^b \lambda_b^a,$$

где

$$\epsilon^\alpha := -\lambda^\alpha := -\lambda^a e_\alpha^a, \quad \lambda_b^a := -\lambda^\alpha \omega_{\alpha b}^a.$$

Мы видим, что локальные трансляции репера представляют собой комбинацию общих преобразований координат с параметром ϵ^α и локальных лоренцевых вращений с параметром λ_b^a с точностью до слагаемого, пропорционального тензору кручения.

2.4 Действие Черна–Саймонса в аффинной и римановой геометрии

Пусть на трехмерном многообразии M задана аффинная геометрия, т.е. задана тройка: многообразие, метрика и связность, (M, g, Γ) . Покажем, что действие Черна–Саймонса можно записать в терминах аффинной связности Γ . Как отмечено в разделе ??, аффинную геометрию можно рассматривать в переменных Картана: репер e_α^a и линейная связность $\omega_{\alpha a}^b$. При этом переменные Картана определены с точностью до локальных $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ -преобразований, которые действуют на латинские индексы. Если репер задан, то между компонентами связностей $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ и $\omega_{\alpha a}^b$ существует взаимно однозначное соответствие, которое задается формулой (??). Для линейной связности существует действие Черна–Саймонса (2.18). Чтобы переписать это действие через аффинную связность зафиксируем систему координат и выберем репер в виде $e_\alpha^a = \delta_\alpha^a$. Тогда различие между греческими и латинскими индексами пропадает, а аффинная и линейная связность совпадут: $\omega_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$. Поэтому действие Черна–Саймонса можно записать в виде

$$S_{\text{CS}}[\Gamma] := \int dx \operatorname{tr} \left(d\Gamma \wedge \Gamma - \frac{2}{3} \Gamma \wedge \Gamma \wedge \Gamma \right) = \int dx \operatorname{tr} \left(R \wedge \Gamma + \frac{1}{3} \Gamma \wedge \Gamma \wedge \Gamma \right), \quad (2.86)$$

где, допуская вольность в обозначениях, введены 1- и 2-формы со значениями в алгебре $n \times n$ матриц:

$$\Gamma = (\Gamma_\gamma^\delta := dx^\alpha \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta), \quad R = (R_\gamma^\delta := \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta R_{\alpha\beta\gamma}^\delta), \quad (2.87)$$

и след берется по индексам γ, δ .

В общем случае действие Черна–Саймонса инвариантно относительно выбора системы координат и инфинитезимальных калибровочных преобразований. Чтобы сохранить условие $e_\alpha^a = \delta_\alpha^a$, каждое преобразование координат должно сопровождаться соответствующим $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ -преобразованием. Поэтому действие Черна–Саймонса (2.86) в аффинной геометрии инвариантно только относительно инфинитезимальных общих преобразований координат.

Аффинная связность Γ взаимно однозначно определяется метрикой g , кручением T и тензором неметричности Q формулой (??). Поэтому в качестве независимых переменных в действии Черна–Саймонса (2.86) можно рассматривать либо связность Γ , либо тройку (g, T, Q) . Мы не будем рассматривать эту общую ситуацию, но остановимся подробно на простейшем случае (псевдо)римановой геометрии, где кручение и неметричность равны нулю. Тогда действие Черна–Саймонса можно рассматривать в качестве действия трехмерной гравитации для метрики. Оно имеет тот же вид, только вместо независимой аффинной связности Γ надо подставить символы Кристоффеля $\tilde{\Gamma}$, определенные формулой (??). Тогда действие Черна–Саймонса примет вид

$$\tilde{S}_{\text{CS}}[g] = \int dx \operatorname{tr} \left(d\tilde{\Gamma} \wedge \tilde{\Gamma} - \frac{2}{3} \tilde{\Gamma} \wedge \tilde{\Gamma} \wedge \tilde{\Gamma} \right) = \int dx \operatorname{tr} \left(\tilde{R} \wedge \tilde{\Gamma} + \frac{1}{3} \tilde{\Gamma} \wedge \tilde{\Gamma} \wedge \tilde{\Gamma} \right), \quad (2.88)$$

где знак тильды, как и прежде, означает, что кручение и неметричность равны нулю.

Прямая вариация действия (2.88) по метрике представляет существенные технические проблемы. Поэтому поступим следующим образом. Представим вариацию действия в виде

$$\delta \tilde{S}_{\text{CS}} = \int dx \hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma} \tilde{R}_{\beta\gamma\delta}{}^\epsilon \delta \tilde{\Gamma}_{\alpha\epsilon}{}^\delta,$$

где мы воспользовались полученной ранее формулой (2.24) для произвольной связности. Теперь вспомним, что полный тензор кривизны в трехмерном случае взаимно однозначно определяется тензором Риччи (2.59). Поэтому справедливо равенство

$$\hat{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma}\tilde{R}_{\beta\gamma\delta}{}^\epsilon = 2\hat{\varepsilon}^{\alpha\delta\gamma}\tilde{R}_\gamma{}^\epsilon - 2\hat{\varepsilon}^{\alpha\epsilon\gamma}\tilde{R}_{\gamma\delta} - \hat{\varepsilon}^{\alpha\delta}{}^\epsilon\tilde{R}.$$

Подставив в вариацию действия Черна–Саймонса выражение для вариации символов Кристоффеля через вариацию метрики, проинтегрировав по частям и приведя подобные члены, получим выражение

$$\delta\tilde{S}_{\text{CS}} = \int dx 2\hat{\varepsilon}^{\alpha\gamma\delta}\nabla_\gamma\tilde{R}_\delta{}^\beta\delta g_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, вариационная производная действия Черна–Саймонса (2.88) по метрике с точностью до множителя равна тензору Коттона $C^{\alpha\beta}$ (??):

$$\frac{\delta\tilde{S}_{\text{CS}}}{\delta g_{\alpha\beta}} = 2\sqrt{|g|}C^{\alpha\beta}. \quad (2.89)$$

Действие Черна–Саймонса для метрики обладает важным свойством.

Предложение 2.4.1. *Действие Черна–Саймонса (2.88) инвариантно относительно инфинитезимальных преобразований Вейля $g_{\alpha\beta} \mapsto \bar{g}_{\alpha\beta} := e^{2\phi(x)}g_{\alpha\beta}$ с точностью до граничных слагаемых.*

Доказательство. Бесконечно малое преобразование Вейля (??) метрики имеет вид

$$\delta g_{\alpha\beta} := \bar{g}_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} = 2g_{\alpha\beta}\delta\phi.$$

При этом вариация действия равна нулю:

$$\delta\tilde{S}_{\text{CS}} = \int dx 4\sqrt{|g|}C^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\delta\phi = 0$$

в силу свойств тензора Коттона (Предложение ??). □

Поскольку тензор Коттона возникает как вариационная производная действия, инвариантного относительно общих инфинитезимальных преобразований координат и зависящего только от метрики, то, согласно второй теореме Нетер, он ковариантно сохраняется (??):

$$\nabla_\alpha C_\beta{}^\alpha = 0. \quad (2.90)$$

Впрочем, это утверждение уже было доказано в произвольной размерности (??).

2.5 Топологически массивные модели

Действие Черна–Саймонса позволят построить в трехмерном пространстве-времени модели, обладающие интересными свойствами. В частности, задать массу калибровочных полей калибровочно инвариантным образом. Эти модели называются топологически массивными, т.к. массовый член определяется действием Черна–Саймонса, которое имеет топологическую природу. В настоящем разделе мы рассмотрим три таких модели: топологически массивное абелево калибровочное поле, топологически массивные неабелевы калибровочные поля и топологически массивную гравитацию [?, ?].

2.5.1 Топологически массивное абелево калибровочное поле

Пусть в трехмерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$ задано абелево калибровочное поле с компонентами A_α . То есть компоненты локальной формы связности на главном расслоении $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{1,2}, \pi, \mathbb{U}(1)) \approx \mathbb{R}^{1,2} \times \mathbb{U}(1)$. Его тензор кривизны (напряженности) имеет компоненты $F_{\alpha\beta} := \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Введем дуальный тензор кривизны с компонентами $*F_\alpha$:

$$F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} *F^\gamma \quad \Leftrightarrow \quad *F^\gamma := \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}. \quad (2.91)$$

Тогда тождества Бианки примут вид

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\alpha *F^\alpha = 0. \quad (2.92)$$

Пусть абелево калибровочное поле описывается действием

$$S = \int dx L, \quad (2.93)$$

где лагранжиан состоит из двух слагаемых:

$$L := -\frac{1}{4e^2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{\mu}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta} A_\gamma, \quad e \neq 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.94)$$

где e – “электромагнитный” заряд. Первое слагаемое – это обычный лагранжиан Максвелла электромагнитного поля в трехмерном случае ($\mu = 0$). Второе слагаемое представляет собой действие Черна–Саймонса (2.85) для абелева калибровочного поля. Знак постоянной μ не фиксируем.

Размерности полей и постоянных следующие:

$$[A_\alpha] = l^{-1}, \quad [F_{\alpha\beta}] = l^{-2}, \quad [e] = l^{-1/2}, \quad [\mu] = 1.$$

Оба слагаемых в действии (2.93) калибровочно инвариантны с точностью до граничных слагаемых и приводят к ковариантным уравнениям движения.

Заметим, что добавление действия Черна–Саймонса к действию Максвелла в общей теории относительности не меняет тензора энергии-импульса $\delta S / \delta g_{\alpha\beta}$, т.к. действие Черна–Саймонса не зависит от метрики.

Уравнения движения для действия (2.93) ковариантны линейны и имеют второй порядок:

$$\frac{\delta S}{\delta A_\alpha} = \frac{1}{e^2} \partial_\beta F^{\beta\alpha} + \mu *F^\alpha = 0. \quad (2.95)$$

Умножим эти уравнения на полностью антисимметричный тензор, и они примут вид

$$\frac{1}{e^2} (\partial_\alpha *F_\beta - \partial_\beta *F_\alpha) - \mu F_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.96)$$

Дивергенция этой системы уравнений ($\times \partial^\alpha$) равна

$$\frac{1}{e^2} (\square + \mu^2 e^4) *F_\beta = 0, \quad (2.97)$$

где $\square := \partial^\alpha \partial_\alpha$ – волновой оператор, а также использованы тождества Бианки (2.92) и уравнения движения (2.95). Мы видим, что каждая компонента дуального тензора кривизны удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона–Фока с массой $m^2 := \mu^2 e^4$. Таким образом, добавление действия Черна–Саймонса с множителями $\pm \mu$ приводит к

появлению одного и того же массивного члена. Заметим, что массовый член в уравнении Клейна–Гордона–Фока имеет правильный знак, независимо от знака постоянной μ в исходном действии, и правильную размерность, $[m] = l^{-1}$. Это указывает на то, что абелево калибровочное поле с действием (2.93) описывает массивные распространяющиеся степени свободы.

Для того, чтобы разобраться в том, какие именно степени свободы распространяются, необходим более глубокий анализ действия и уравнений движения, который мы не приводим, а только сформулируем результат [?, ?]. Известно, что лагранжиан Максвелла в трех измерениях описывает одну безмассовую степень свободы нулевого спина. Топологически массивное абелево калибровочное поле с параметром $\pm\mu$ описывает одну нарушающую четность массивную степень свободы со спином ± 1 . При этом топологически массивная модель абелева калибровочного поля не содержит гостов (слагаемых с отрицательным кинетическим членом в гамильтониане) и тахионов (слагаемых с отрицательным массовым членом в гамильтониане). Отметим также, что безмассовый предел топологически массивного абелева калибровочного поля, $\mu \rightarrow 0$, является сингулярным.

2.5.2 Топологически массивное неабелево калибровочное поле

Пусть задано главное расслоение $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{1,2}, \pi, \mathbb{G}) \approx \mathbb{R}^{1,2} \times \mathbb{G}$, базой которого является пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,2}$, с компактной полупростой структурной группой Ли \mathbb{G} . Допустим, что на \mathbb{P} задана связность. Она взаимно однозначно определяется локальной формой связности, принимающей значения в алгебре Ли \mathfrak{g} . Будем работать в декартовой системе координат в $\mathbb{R}^{1,2}$ и с точным представлением алгебры Ли \mathfrak{g} . Тогда компоненты локальной формы связности (поля Янга–Миллса) определяются матричнозначной 1-формой с компонентами $A_{\alpha i}^j$, где матричные индексы i, j относятся к представлению алгебры Ли \mathfrak{g} . В дальнейшем матричные индексы мы будем, как правило, опускать.

Выкладки для неабелевых калибровочных полей во многом повторяют вычисления, проделанные в предыдущем разделе.

Тензор кривизны имеет матричнозначные компоненты (??)

$$F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}A_{\beta} - \partial_{\beta}A_{\alpha} - [A_{\alpha}, A_{\beta}],$$

В трехмерном случае он эквивалентен своему дуальному псевдовектору также матричнозначному:

$$F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} *F^{\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad *F^{\gamma} := \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta}. \quad (2.98)$$

Тождества Бианки имеют вид

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\nabla_{\alpha}F_{\beta\gamma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_{\alpha} *F^{\alpha} = 0, \quad (2.99)$$

где введена ковариантная производная

$$\nabla_{\alpha}F_{\beta\gamma} = \partial_{\alpha}F_{\beta\gamma} - [A_{\alpha}, F_{\beta\gamma}].$$

Допустим, что поля Янга–Миллса описываются действием S с лагранжианом

$$L = \frac{1}{4e^2} \text{tr} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{\mu}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{tr} (F_{\alpha\beta} A_{\gamma} + \frac{2}{3} A_{\alpha} A_{\beta} A_{\gamma}), \quad e \neq 0, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.100)$$

Первое слагаемое – это обычный лагранжиан Янга–Миллса (?). Обратный знак по сравнению с лагранжианом Максвелла связан с определением формы Киллинга–Картана (?). Второе слагаемое представляет собой лагранжиан Черна–Саймонса (2.20). Как и в абелевом случае лагранжиан (2.100) инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований (2.11) с точностью до дивергенции, но не инвариантен относительно обращения времени и пространственных отражений.

Уравнения движения для полей Янга–Миллса с лагранжианом (2.100) имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta A_\alpha} = -\frac{1}{e^2} \nabla_\beta F^{\beta\alpha} + \mu *F^\alpha = 0. \quad (2.101)$$

Они нелинейны ковариантны, но не инвариантны относительно дискретных преобразований. Умножим это уравнение на полностью антисимметричный тензор и возьмем ковариантную дивергенцию. Тогда получим систему уравнений

$$(\square + \mu^2 e^4) *F_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} *F^\beta *F^\gamma, \quad (2.102)$$

где использованы уравнения движения (2.101), тождества Бианки (2.99) и формула (?) для коммутатора ковариантных производных. Уравнения (2.102) являются неабелевым обобщением уравнений движения топологически массивного абелева калибровочного поля (2.97). В линейном приближении они совпадают.

Поскольку физические распространяющиеся степени свободы в рассматриваемом случае определяются линейным приближением, то топологически массивные поля Янга–Миллса описывают распространяющиеся степени свободы, которые имеют массу $m^2 := \mu^2 e^4$, спин ± 1 и нарушают четность. Число этих степеней свободы равно размерности структурной группы Ли \mathbb{G} [?, ?].

2.5.3 Топологически массивная гравитация

Рассмотрим (псевдо)риманово трехмерное многообразие (\mathbb{M}, g) . Пусть действие для метрики представляет собой сумму действия Гильберта–Эйнштейна (?) и действия Черна–Саймонса (2.88):

$$S := \kappa \int dx \sqrt{g} \tilde{R} + \frac{1}{2\mu} \int dx \operatorname{tr} \left(\tilde{R} \wedge \tilde{\Gamma} + \frac{1}{3} \tilde{\Gamma} \wedge \tilde{\Gamma} \wedge \tilde{\Gamma} \right). \quad (2.103)$$

Вариационная производная этого действия по метрике равна

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} = -\kappa \sqrt{g} \left(\tilde{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \tilde{R} \right) + \frac{1}{\mu} \sqrt{g} C^{\alpha\beta},$$

где использованы формулы (?) и (2.89). То есть уравнения движения принимают вид

$$-\kappa \left(\tilde{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \tilde{R} \right) + \frac{1}{\mu} C^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.104)$$

Поскольку свертка тензора Коттона равна нулю, то свертка полученного уравнения приводит к равенству нулю скалярной кривизны, $\tilde{R} = 0$. Поэтому уравнения движения принимают вид

$$-\kappa \tilde{R}^{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu} C^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.105)$$

На уравнениях движения тензор Коттона выражается через тензор Риччи:

$$C^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\gamma\delta} \tilde{\nabla}_\gamma \tilde{R}_\delta^\beta, \quad (2.106)$$

а свернутые тождества Бианки принимают вид

$$\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{R}^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.107)$$

Проделаем с уравнением (2.105) те же выкладки, что и для топологически массивного неабелева калибровочного поля. Сначала умножим его на $\varepsilon_{\alpha\gamma\delta}$. В результате получим равенство

$$-\kappa \tilde{R}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\gamma\delta} + \frac{1}{\mu} (\tilde{\nabla}_\gamma \tilde{R}_\delta^\beta - \tilde{\nabla}_\delta \tilde{R}_\gamma^\beta) = 0.$$

Возьмем ковариантную дивергенцию ($\times \tilde{\nabla}^\gamma$) и получим уравнения

$$(\square + \kappa^2 \mu^2) \tilde{R}_{\alpha\beta} = 3 \tilde{R}_\alpha^\gamma \tilde{R}_{\gamma\beta} - g_{\alpha\beta} \tilde{R}_{\gamma\delta} \tilde{R}^{\gamma\delta}, \quad (2.108)$$

где мы использовали уравнения движения (2.105), свернутые тождества Бианки (2.107), равенства (??), (??) для коммутатора ковариантных производных и выражение тензора кривизны через тензор Риччи (2.59).

В рассматриваемом случае распространяющиеся степени свободы определяются линейным приближением уравнений (2.108), правая часть которых квадратична и может быть отброшена. Мы видим, что среди степеней свободы могут быть массивные с массой $m^2 := \kappa^2 \mu^2$. Детальный анализ линейного приближения [?, ?] показывает, что топологически массивная гравитация описывает распространение массивной степени свободы со спином 2. Напомним, что само действие Гильберта–Эйнштейна в трех измерениях не описывает ни одной распространяющейся степени свободы метрики. Добавление действия Черна–Саймонса меняет модель кардинальным образом: появляется массивная нарушающая четность степень свободы, которая распространяется и имеет спин 2. При этом, несмотря на наличие третьих производных метрики в уравнениях движения (2.105), в модели отсутствуют госты и тахионы.

2.6 Точечные частицы в трехмерной гравитации

Пусть (\mathbb{M}, g) – трехмерное псевдориманово многообразие с координатами x^α , $\alpha = 0, 1, 2$. Как всегда, мы предполагаем, что нулевая координата является временем, $x^0 := t$, и все сечения $t = \text{const}$ пространственноподобны. Рассмотрим N точечных массивных частиц, взаимодействующих посредством гравитационного поля. Мировые линии частиц обозначим $q_I(\tau)$, $I = 1, \dots, N$, где $\tau \in \mathbb{R}$ – некоторый параметр вдоль мировых линий. Для гравитационного поля (метрики) выберем действие Гильберта–Эйнштейна. Тогда суммарное действие примет вид

$$S = \int dx \sqrt{g} R - \sum_{I=1}^N m_I \int d\tau \sqrt{\dot{q}_I^\alpha \dot{q}_I^\beta g_{\alpha\beta}}, \quad (2.109)$$

где скалярная кривизна R зависит только от метрики (кручение равно нулю), опущен знак тильды и гравитационная постоянная положена равной единице, точка обозначает производную по τ и m_I – массы частиц. Мировые линии частиц, по предположению, времениподобны, и, следовательно, подкоренное выражение во втором

слагаемом положительно. Кроме этого, мы предполагаем, что параметр τ вдоль мировых линий частиц выбран так, что $\dot{q}_1^0 > 0$, т.е. частицы движутся в будущее.

Уравнения движения возникают после вариации действия (2.109) по метрике и мировым линиям частиц. Они имеют вид (см. раздел ??)

$$\sqrt{g} \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{g} T_m^{\alpha\beta}, \quad (2.110)$$

$$g_{\alpha\beta} (\ddot{q}_1^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}^{\beta} \dot{q}_1^\gamma \dot{q}_1^\delta) = 0, \quad (2.111)$$

где тензор энергии-импульса частиц определен равенством

$$T_m^{\alpha\beta} := \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathbf{I}} \frac{m_{\mathbf{I}} \dot{q}_1^\alpha \dot{q}_1^\beta}{\dot{q}_1^0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_{\mathbf{I}}) \quad (2.112)$$

и τ – теперь уже канонический параметр вдоль мировых линий, которые являются экстремальями (геодезическими). Выше

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_{\mathbf{I}}) := \delta(x^1 - q_{\mathbf{I}}^1) \delta(x^2 - q_{\mathbf{I}}^2)$$

– двумерная δ -функция на пространственных сечениях $t = \text{const}$.

Как было отмечено в разделе 2.2, вне мировых линий частиц полный тензор кривизны равен нулю и пространство-время локально является пространством Минковского. Нетривиальность метрики пространства-времени возникает только благодаря особенностям тензора энергии-импульса, которые сосредоточены на мировых линиях частиц.

Рассмотрим простейшую задачу для действия (2.109) [?]. Будем считать, что пространство-время топологически тривиально $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, где $t \in \mathbb{R}$ – ось времени, и $(x^\mu) \in \mathbb{R}^2$ – пространственные координаты. Предположим, что все частицы покоятся:

$$q_{\mathbf{I}}^0 = \tau, \quad q_{\mathbf{I}}^\mu = \text{const}, \quad \mu = 1, 2. \quad (2.113)$$

Ясно, что параметр τ совпадает с длиной мировой линии частицы и, следовательно, является каноническим. Пусть метрика имеет блочно диагональный вид (статическая метрика)

$$ds^2 = N^2 dt^2 + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.114)$$

где $N(\mathbf{x})$ – функция хода и $g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ – отрицательно определенная двумерная метрика на пространственных сечениях. Мы ищем статическое решение уравнений движения, и поэтому все функции зависят только от пространственных координат $\mathbf{x} = (x^\mu) = (x^1, x^2)$.

Выпишем отличные от нуля символы Кристоффеля для метрики (2.114):

$$\Gamma_{00}^\mu = -N g^{\mu\nu} \partial_\nu N, \quad \Gamma_{\mu 0}^0 = \Gamma_{0\mu}^0 = \frac{\partial_\mu N}{N}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho, \quad (2.115)$$

где $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$ – пространственные символы Кристоффеля, построенные по двумерной пространственной метрике $g_{\mu\nu}$. Тензор кривизны имеет только две линейно независимые отличные от нуля компоненты:

$$R_{\mu 0\nu}^0 = \frac{1}{N} \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu N, \quad R_{\mu\nu\rho}^\sigma = \hat{R}_{\mu\nu\rho}^\sigma,$$

где $\hat{R}_{\mu\nu\rho}{}^\sigma$ – двумерный тензор кривизны и $\hat{\nabla}_\mu$ – двумерная ковариантная производная. Выпишем также отличные от нуля компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну:

$$R_{00} = N\hat{\nabla}^\mu\hat{\nabla}_\mu N, \quad R_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} + \frac{1}{N}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu N, \quad R = \hat{R} + \frac{2}{N}\hat{\nabla}^\mu\hat{\nabla}_\mu N,$$

где шляпкой отмечены двумерные объекты. Теперь уравнения Эйнштейна (2.110) принимают вид

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\hat{g}}N^3\hat{R} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{I}} m_{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_{\mathbf{I}}), \quad (2.116)$$

$$\sqrt{\hat{g}}(\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu N - g_{\mu\nu}\hat{\nabla}^\sigma\hat{\nabla}_\sigma N) = 0. \quad (2.117)$$

Метрика (2.114) все еще инвариантна относительно преобразований координат x^μ на пространственных сечениях. Используем эту инвариантность для фиксирования конформной калибровки:

$$g_{\alpha\beta} = -e^{2\phi}\delta_{\alpha\beta}, \quad (2.118)$$

где $\phi(\mathbf{x})$ – некоторая функция. Согласно теореме ?? такая система координат существует по крайней мере локально. После этого свертка уравнения (2.117) приводит к двумерному уравнению Лапласа $\Delta N = 0$. Наложим граничное условие на бесконечности: $N|_{|\mathbf{x}|=\infty} = \text{const}$. Тогда $N = \text{const}$ – единственное решение. Не ограничивая общности, положим $N = 1$, чего всегда можно добиться растяжкой временной координаты. Оставшееся уравнение (2.116) сводится к уравнению на двумерную скалярную кривизну:

$$\sqrt{\hat{g}}\hat{R} = \sum_{\mathbf{I}} m_{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_{\mathbf{I}}), \quad (2.119)$$

которое в конформной калибровке (2.118) приводит к уравнению Пуассона

$$\Delta\phi = 2\pi\sum_{\mathbf{I}} \theta_{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}_{\mathbf{I}}), \quad \theta_{\mathbf{I}} := -\frac{1}{4\pi}m_{\mathbf{I}}, \quad (2.120)$$

где мы воспользовались формулой (??) для скалярной кривизны в конформной калибровке. Общее решение этого уравнения хорошо известно (см., например, [?], глава III, §11, раздел 7):

$$\phi = \sum_{\mathbf{I}} \theta_{\mathbf{I}} \ln|\mathbf{x} - \mathbf{q}_{\mathbf{I}}| + \frac{1}{2} \ln C, \quad C > 0.$$

Следовательно, положительно определенная метрика на плоскости $(x^1, x^2) := (x, y)$ в полярных координатах имеет вид

$$dl^2 = C \prod_{\mathbf{I}} |\mathbf{x} - \mathbf{q}_{\mathbf{I}}|^{2\theta_{\mathbf{I}}} (dr^2 + r^2 d\varphi^2), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (2.121)$$

Положим $C = 1$, чего всегда можно добиться растяжкой радиуса. Тогда метрика пространства-времени примет вид

$$ds^2 = dt^2 - \prod_{\mathbf{I}} |\mathbf{x} - \mathbf{q}_{\mathbf{I}}|^{2\theta_{\mathbf{I}}} (dr^2 + r^2 d\varphi^2). \quad (2.122)$$

Это и есть общее статическое решение уравнений Эйнштейна (2.110) для произвольного числа покоящихся точечных массивных частиц с точностью до преобразования координат.

Метрика (2.121), помимо обычной особенности в начале полярной системы координат $r = 0$, имеет особенности в точках расположения точечных частиц \mathbf{q}_i . Эти особенности можно удалить из многообразия, считая их точками края. Тогда метрика станет гладкой, а многообразие будет представлять собой топологическое произведение $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N\})$, где краем являются мировые линии частиц: $\partial\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N\}$. Это многообразие геодезически не полно, т.к. геодезические линии достигают особенностей при конечном значении канонического параметра.

Определим полную энергию (численное значение гамильтониана) гравитационного поля равенством (??)

$$E := - \int d\mathbf{x} (NH_{\perp} + N^{\mu}H_{\mu}), \quad (2.123)$$

где H_{\perp} и H_{μ} – динамическая и кинематические связи (??), а N^{μ} – функции сдвига. В рассматриваемом случае все импульсы, сопряженные пространственным компонентам метрики $g_{\mu\nu}$, равны нулю, и потому

$$H_{\perp} = -\sqrt{\hat{g}}\hat{R}, \quad H_{\mu} = 0.$$

Используя уравнение (2.119), получаем равенство

$$E = \int d\mathbf{x} \sqrt{\hat{g}}\hat{R} = \sum_i m_i. \quad (2.124)$$

То есть полная энергия (статического) гравитационного поля равна сумме масс всех частиц, что является естественным результатом с физической точки зрения.

Заметим, что интеграл (2.124) пропорционален эйлеровой характеристике для замкнутых пространственных сечений и потому сохраняется во времени, что следует из непрерывности метрики. Мы также использовали то обстоятельство, что в трехмерной общей теории относительности знак действия Гильберта–Эйнштейна и, следовательно, гамильтониана, не фиксирован из-за отсутствия распространяющихся степеней свободы. Поэтому в определение полной энергии (2.123) добавлен знак минус по сравнению с четырехмерным случаем с тем, чтобы получить физически разумный ответ.

Таким образом, получено общее статическое решение уравнений Эйнштейна для произвольного числа N покоящихся точечных частиц в трехмерном пространстве-времени $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, расположенных в точках $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^2$. Метрика имеет блочно-диагональный вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (2.125)$$

т.е. решение получено в синхронной системе координат (см. раздел ??). Двумерная пространственная часть метрики задана равенством (2.121). Символы Кристоффеля для метрики (2.125) были вычислены (2.115). Поскольку при $N = 1$ выполнены равенства: $\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^{\mu} = 0$, то прямые линии, параллельные оси времени (2.113) являются геодезическими. Тем самым задним числом показано, что решение совместной задачи самосогласованно, и мировые линии частиц являются геодезическими. Мы видим, что наличие гравитационного поля в трехмерном пространстве-времени не приводит к взаимодействию частиц, покоящихся в синхронной системе координат.

Пространство-время с метрикой (2.122) является плоским всюду за исключением мировых линий частиц, которым на пространственных сечениях соответствуют конические особенности, рассмотренные в следующем разделе.

2.7 Коническая особенность

Римановы метрики на гладких двумерных поверхностях могут иметь конические особенности, которые играют большую роль в математике и математической физике. В частности, они описывают космические струны в гравитации и клиновые дислокации в геометрической теории дефектов. В трехмерной гравитации, которая рассматривалась в предыдущем разделе, каждой точечной массивной частице соответствует коническая особенность на пространственном сечении, причем масса частицы пропорциональна углу дефицита конической особенности. Конические особенности являются сингулярностями метрики и, следовательно, связности и кривизны. Они возникают потому, что параллельный перенос вектора по бесконечно малому контуру вокруг особенности не стремится к нулю, когда контур стягивается к особенности.

Чтобы получить представление о конической особенности и ее связи с конусом, рассмотрим построение конуса из евклидовой плоскости, которое изображено на рис.2.1. Возьмем евклидову плоскость \mathbb{R}^2 , вырежем клин с углом $-2\pi\theta$, как показано

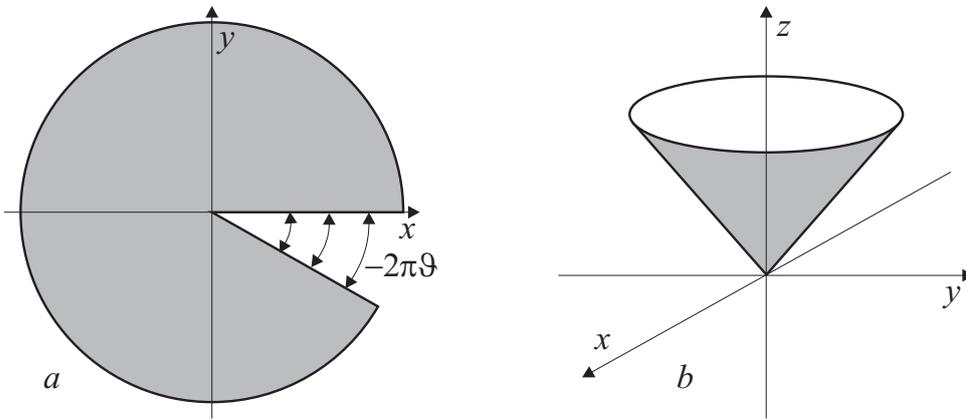


Рис. 2.1: Построение конуса из евклидовой плоскости. (a) Из плоскости вырезается клин с углом $-2\pi\theta$ и края разреза отождествляются. (b) Изометричное вложение конуса в трехмерное евклидово пространство $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

на рис.2.1, a, и отождествим (склеим) края разреза, лежащие на одинаковом расстоянии от начала координат. В результате получим конус, изображенный на рис.2.1, b. По построению, соответствующий интервал в полярных координатах \hat{r} , $\hat{\varphi}$ на исходной евклидовой плоскости имеет вид

$$ds^2 = d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\hat{\varphi}^2, \quad 0 < \hat{r} < \infty, \quad 0 < \hat{\varphi} < 2\pi\alpha, \quad (2.126)$$

где

$$\alpha := 1 + \theta = \text{const} > 0 \quad (2.127)$$

– некоторая положительная постоянная, характеризующая коническую сингулярность. Угол $2\pi\theta$ называется *углом дефицита*. Метрика (2.126) для конической особенности отличается от евклидовой метрики только областью изменения полярного угла. При $\theta \in (-1, 0)$ клин вырезается, а при $\theta \in (0, \infty)$ – вставляется в евклидову плоскость. При $\theta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ коническая особенность отсутствует. Нормированный на единицу угол θ (без множителя 2π) также будем называть углом дефицита. По построению, угол дефицита меняется в пределах $-1 < \theta < \infty$. Это ограничение связано с тем, что из плоскости нельзя удалить больше, чем вся плоскость. Будем считать,

что при отождествлении краев клина, дуги окружностей $\hat{r} = \text{const}$, $\hat{\varphi} \in (0, 2\pi\alpha)$ переходят в концентрические окружности с центром в начале координат, что соответствует вращательной симметрии. В общем случае радиус дуг до и после отождествления может отличаться. После отождествления краев клина метрика является гладкой функцией всюду, кроме начала координат.

Подчеркнем, что коническая особенность является особенностью метрики, а не многообразия. Бесконечно дифференцируемая структура на конусе, изображенном на рис.2.1, *b*, задается простым проектированием на плоскость x, y . То есть конус является гладким многообразием. При этом вершина конуса является не особенностью самого двумерного многообразия, а его вложения в трехмерное евклидово пространство.

Теперь покажем связь конических особенностей с точечными массивными частицами в трехмерной гравитации, которые были рассмотрены в предыдущем разделе. Рассмотрим одну массивную частицу, которая покоится в начале координат. Ее мировая линия совпадает с осью времени t . Тогда трехмерные уравнения Эйнштейна (2.110) сводятся к уравнениям (2.119) на пространственную отрицательно определенную двумерную часть метрики $g_{\mu\nu}$:

$$\sqrt{\hat{g}}\hat{R} = m\delta(\mathbf{x}) = -4\pi\theta\delta(\mathbf{x}), \quad (2.128)$$

Это – двумерное ковариантное уравнение, поскольку δ -функция является скалярной плотностью.

Поскольку в правой части уравнения (2.128) стоит δ -функция, то решение необходимо понимать в слабом смысле после интегрирования с пробной функцией. Однако здесь возникает серьезная проблема. Если компоненты метрики ищутся в пространстве обобщенных функций, то левая часть уравнения в общем случае не определена, т.к. нелинейна, а умножение в пространстве обобщенных функций отсутствует. К счастью, в двумерном случае левая часть уравнения (2.128) в конформной калибровке для метрики сводится к линейному оператору Лапласа, и можно действовать стандартными методами.

Замечание. При рассмотрении точечной массивной частицы в четырехмерной общей теории относительности (см. раздел ??) уравнение (2.128) записывается для трехмерной метрики и в конформной калибровке становится нелинейным. Тем не менее ему удастся придать математический смысл после аналитической регуляризации. Ковариантное уравнение (2.128), которое, по-видимому, имеет глубокий смысл, в конформной калибровке нелинейно также в больших размерностях. \square

Вернемся к уравнению (2.128) для двумерной метрики. В конформной калибровке (2.118) получаем уравнение Пуассона

$$\Delta\phi = 2\pi\theta\delta(\mathbf{x}). \quad (2.129)$$

Его общее решение имеет вид

$$\phi = \theta \ln r, \quad r = |\mathbf{x}|,$$

где мы отбросили несущественную постоянную интегрирования. Следовательно, положительно определенная двумерная метрика на пространственных сечениях, соответствующая точечной частице, в полярных координатах имеет вид

$$dl^2 = r^{2\theta}(dr^2 + r^2d\varphi^2), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (2.130)$$

Эта метрика определена на всей плоскости x, y , является конформно плоской и имеет особенность в начале координат. Впрочем, особенность в начале координат имеет и сама полярная система координат.

Пусть $-1 < \theta < \infty$. Тогда $\alpha > 0$. Если угол дефицита равен нулю, $\theta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$, то метрика (2.130) совпадает с евклидовой, и ничего делать не надо. При $0 < \alpha < 1$ или $1 < \alpha < \infty$ перейдем к новым координатам:

$$\begin{aligned}\hat{r} &:= \frac{1}{\alpha} r^\alpha, & 0 < r < \infty, \\ \hat{\varphi} &:= \alpha \varphi, & 0 < \varphi < 2\pi.\end{aligned}\tag{2.131}$$

Тогда метрика примет вид (2.126). Тем самым метрика (2.130) действительно описывает коническую особенность.

Заметим, что преобразованный радиус совпадает с исходным, $\hat{r} = r$, при

$$r = r_* := \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Поскольку интервал (2.130) отличается от исходного только конформным множителем, то углы между векторами сохраняются. Это означает, что преобразование координат (2.131) является конформным. Действительно, в комплексных координатах $z := r e^{i\varphi}$ оно принимает вид

$$\hat{z} = \frac{1}{\alpha} z^\alpha.\tag{2.132}$$

Таким образом, каждая точечная частица в трехмерной гравитации создает коническую особенность на пространственном сечении.

В геометрической теории дефектов конические особенности описывают клиновые дислокации (см. раздел ??).

Для конуса, который был построен в начале раздела, есть ограничение на угол дефицита $-1 < \theta < \infty \Leftrightarrow 0 < \alpha < \infty$. В то же время при решении уравнения (2.129) на угол дефицита никаких ограничений нет. Чтобы дать геометрическую интерпретацию решений при $\alpha < 0$, совершим преобразование

$$r := \frac{1}{\rho}, \quad \alpha =: -\zeta - 1.$$

Тогда метрика (2.130) примет вид

$$dl^2 = \rho^{2\zeta} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2).$$

То есть отрицательные значения постоянной α соответствуют конической особенности в бесконечности $r = \infty \Leftrightarrow \rho = 0$ с “нормальным” углом дефицита

$$\zeta = -\theta - 2, \quad \theta < -1.$$

В случае $\alpha = 0 \Leftrightarrow \theta = -1$ метрика (2.130) совпадает с евклидовой метрикой

$$dl^2 = d(\ln r)^2 + d\varphi^2, \quad -\infty < \ln r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

где $(\ln r, \varphi)$ рассматриваются, как декартовы координаты на плоскости. Из-за периодичности угла, $\varphi \sim \varphi + 2\pi$, с топологической точки зрения мы имеем цилиндр.

Таким образом, коническая особенность является геометрическим объектом, поскольку определяется ковариантным уравнением (2.128). Поэтому метрику конической особенности можно рассматривать в произвольной системе координат. Приведем

еще один вид этой метрики, который часто используется в приложениях. А именно, перейдем в штрихованную систему координат:

$$\begin{aligned}\hat{r} &=: \frac{1}{\alpha}r', & 0 < r' < \infty, \\ \hat{\varphi} &=: \alpha\varphi', & 0 < \varphi' < 2\pi,\end{aligned}\tag{2.133}$$

Тогда интервал (2.126) примет вид

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha^2}dr'^2 + r'^2d\varphi'^2, \quad 0 < r' < \infty, \quad 0 < \varphi' < 2\pi.\tag{2.134}$$

Новая система координат покрывает всю плоскость, причем длина окружности радиуса r' равна $2\pi r'$.

Замечание. Метрику (2.134) при $0 < \alpha < 1$ можно получить как метрику, индуцированную на конусе при его вложении в трехмерное евклидово пространство (см. рис. 2.1, *b*). Действительно, рассмотрим конус, заданный в декартовой системе координат $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ уравнением

$$x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}z^2.\tag{2.135}$$

Тогда, исключая из евклидова трехмерного интервала

$$ds^2 := dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

дифференциал dz с помощью уравнения (2.135), получим интервал (2.134), записанный в декартовых координатах. \square

Поскольку метрики (2.134) и (2.130) получены из евклидовой метрики преобразованием координат, которое невырождено всюду, кроме начала системы отсчета, то тензор кривизны, построенный по символам Кристоффеля, равен нулю везде, кроме начала координат, где он имеет δ -образную особенность (2.128). Мы говорим, что конус является гладкой поверхностью с конической особенностью метрики в вершине.

Выше метрика конической особенности была получена как решение уравнения (2.128). Поставим обратную задачу: по заданной метрике вычислить скалярную кривизну и получить δ -функцию. Этот вопрос нетривиален, т.к. мы работаем с обобщенными функциями. Для простоты и наглядности сделаем замену координат $r' \mapsto \alpha r$ в метрике (2.134). Тогда метрика конической особенности примет вид

$$ds^2 := dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi.\tag{2.136}$$

Если, как и прежде, пометить шляпкой полярные координаты $(\hat{r}, \hat{\varphi})$ на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 до того как был вырезан клин, то приведенная выше форма метрики конической особенности связана с евклидовой метрикой только растяжкой полярного угла:

$$\hat{r} := r, \quad \hat{\varphi} := \alpha\varphi.$$

Определитель метрики (2.136) равен $\alpha^2 r^2$ и вырожден в начале координат. Это – координатная особенность, присущая полярной системе координат. Поскольку система координат вырождена, то она не пригодна для исследования особенности в начале координат. Чтобы исследовать метрику конической особенности на всей плоскости,

перейдем к декартовой системе координат $(x^\mu) = (x, y)$, в которой метрика (2.136) имеет вид

$$ds^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} [(x^2 + \alpha^2 y^2) dx^2 + 2xy(1 - \alpha^2) dx dy + (\alpha^2 x^2 + y^2) dy^2] \quad (2.137)$$

или

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x^2 + \alpha^2 y^2 & (1 - \alpha^2)xy \\ (1 - \alpha^2)xy & \alpha^2 x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \alpha^2 \delta_{\mu\nu} + (1 - \alpha^2) \frac{x_\mu x_\nu}{x^2 + y^2},$$

где $x_\mu := x^\nu \delta_{\nu\mu}$. Теперь определитель метрики равен α^2 и всюду отличен от нуля. То есть метрика конической особенности в декартовой системе координат не вырождена. Обратная метрика имеет следующие компоненты:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha^2(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} \alpha^2 x^2 + y^2 & -(1 - \alpha^2)xy \\ -(1 - \alpha^2)xy & x^2 + \alpha^2 y^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2} \delta^{\mu\nu} + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \frac{x^\mu x^\nu}{x^2 + y^2}. \quad (2.138)$$

Посмотрим, как ведут себя компоненты метрики в начале координат. Совершим двойной предельный переход $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ для компоненты g_{xx} в разной последовательности:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 : & \quad g_{xx} \rightarrow \alpha^2, \\ y \rightarrow 0, x \rightarrow 0 : & \quad g_{xx} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Аналогично ведет себя компонента g_{yy} . Таким образом, начало координат является для компонент метрики существенно особой точкой. В связи с этим вычисление символов Кристоффеля и компонент тензора кривизны требует особой тщательности.

Сначала вычислим символы Кристоффеля и компоненты тензора кривизны вне начала координат $x \neq 0$ и $y \neq 0$, где все компоненты являются гладкими. Несложные вычисления дают следующие выражения для символов Кристоффеля со всеми опущенными индексами:

$$\begin{aligned} \Gamma_{xxx} &= (1 - \alpha^2) \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \Gamma_{xxy} &= (1 - \alpha^2) \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \Gamma_{xyx} = \Gamma_{yxx} &= -(1 - \alpha^2) \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, & \Gamma_{xyy} = \Gamma_{yyx} &= -(1 - \alpha^2) \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \Gamma_{yyx} &= (1 - \alpha^2) \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \Gamma_{yyy} &= (1 - \alpha^2) \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Подъем третьего индекса с помощью метрики (2.138) приводит к тому же результату, что и подъем индекса с помощью евклидовой метрики:

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}{}^x &= (1 - \alpha^2) \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \Gamma_{xx}{}^y &= (1 - \alpha^2) \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \Gamma_{xy}{}^x = \Gamma_{yx}{}^x &= -(1 - \alpha^2) \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, & \Gamma_{xy}{}^y = \Gamma_{yx}{}^y &= -(1 - \alpha^2) \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \Gamma_{yy}{}^x &= (1 - \alpha^2) \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \Gamma_{yy}{}^y &= (1 - \alpha^2) \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления показывают, что все компоненты тензора кривизны равны нулю вне начала координат, как и следовало ожидать.

Для того, чтобы провести вычисления в окрестности начала координат, перейдем к комплексным координатам на евклидовой плоскости. Выберем метрику в виде (2.136). Введем комплексные координаты:

$$z := r e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{z\bar{z}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{z - \bar{z}}{i(z + \bar{z})}.$$

Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{1}{4z\bar{z}} [(1 - \alpha^2)z^2 d\bar{z}^2 + 2(1 + \alpha^2)z\bar{z} dzd\bar{z} + (1 - \alpha^2)\bar{z}^2 dz^2].$$

Или, в матричных обозначениях,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \alpha^2 \bar{z}}{4} & \frac{1 + \alpha^2}{4} \\ \frac{1 + \alpha^2}{4} & \frac{1 - \alpha^2 z}{4} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1 - \alpha^2 z}{\alpha^2 \bar{z}} & \frac{1 + \alpha^2}{\alpha^2} \\ \frac{1 + \alpha^2}{\alpha^2} & -\frac{1 - \alpha^2 \bar{z}}{\alpha^2 z} \end{pmatrix}.$$

Символы Кристоффеля имеют вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{zz}^z &= -\frac{1 - \alpha^2}{4} \frac{1}{z}, & \Gamma_{z\bar{z}}^{\bar{z}} &= -\frac{1 - \alpha^2}{4} \frac{\bar{z}}{z^2}, \\ \Gamma_{z\bar{z}}^z &= \Gamma_{\bar{z}z}^z = \frac{1 - \alpha^2}{4} \frac{1}{\bar{z}}, & \Gamma_{z\bar{z}}^{\bar{z}} &= \Gamma_{\bar{z}z}^{\bar{z}} = \frac{1 - \alpha^2}{4} \frac{1}{z}, \\ \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^z &= -\frac{1 - \alpha^2}{4} \frac{z}{\bar{z}^2}, & \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} &= -\frac{1 - \alpha^2}{4} \frac{1}{\bar{z}}. \end{aligned}$$

При вычислении компонент тензора кривизны необходимо дифференцировать символы Кристоффеля, которые сингулярны в начале координат. Чтобы учесть эти особенности используем известные формулы дифференцирования (??):

$$\partial_{\bar{z}} \frac{1}{z} = \pi \delta(z), \quad \partial_z \frac{1}{\bar{z}} = \pi \delta(z). \quad (2.139)$$

Тогда получим следующие выражения для линейно независимых компонент тензора кривизны:

$$\begin{aligned} R_{z\bar{z}z}^z &= \frac{1 - \alpha^2}{2} \pi \delta(z), & R_{z\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} &= \frac{1 - \alpha^2}{2} \frac{\bar{z}}{z} \pi \delta(z), \\ R_{z\bar{z}\bar{z}}^z &= -\frac{1 - \alpha^2}{2} \frac{z}{\bar{z}} \pi \delta(z), & R_{z\bar{z}z}^{\bar{z}} &= -\frac{1 - \alpha^2}{2} \pi \delta(z). \end{aligned}$$

Для существенного облегчения вычислений заметим, что в двумерном случае компоненты тензора кривизны не содержат слагаемых, квадратичных по символам Кристоффеля. Поэтому при вычислении компонент тензора кривизны достаточно только продифференцировать символы Кристоффеля.

Компоненты тензора Риччи и скалярная кривизна равны

$$\begin{aligned} R_{zz} &= \frac{1 - \alpha^2}{2} \frac{\bar{z}}{z} \pi \delta(z), \\ R_{z\bar{z}} &= R_{\bar{z}z} = -\frac{1 - \alpha^2}{2} \pi \delta(z), \\ R_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1 - \alpha^2}{2} \frac{z}{\bar{z}} \pi \delta(z), \\ R &= -2 \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \pi \delta(z). \end{aligned}$$

Чтобы записать ковариантное уравнение, заметим, что

$$\det g_{\mu\nu} = -\frac{\alpha^2}{4}, \quad \sqrt{g} = \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому получаем следующее равенство

$$\sqrt{g}R = (2 + \alpha)\pi\delta(z).$$

То, что скалярная кривизна, умноженная на элемент объема, пропорциональна δ -функции, – правильно. Однако коэффициент перед δ -функцией неверный. Это связано с тем, что при переходе к новой системе отсчета уравнение (2.128) умножается на якобиан преобразования координат. Чтобы получить правильный ответ, проведем такие же вычисления, но для вейлевски плоской метрики (2.130).

Введем комплексные координаты на плоскости r, φ для метрики (2.130). Тогда метрика конической особенности примет вид

$$ds^2 = (z\bar{z})^\theta dzd\bar{z}. \quad (2.140)$$

Или, в матричных обозначениях,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(z\bar{z})^\theta}{2} \\ \frac{(z\bar{z})^\theta}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{(z\bar{z})^\theta} \\ \frac{2}{(z\bar{z})^\theta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.141)$$

Для такой метрики отличны от нуля только два символа Кристоффеля (??):

$$\Gamma_{zz}^z = \frac{\theta}{z}, \quad \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} = \frac{\theta}{\bar{z}}.$$

Они, как мы видим, сингулярны в начале координат. Полный тензор кривизны имеет также две отличные от нуля линейно независимые компоненты:

$$R_{\bar{z}zz}^z = R_{z\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} = \theta\pi\delta(z),$$

где мы воспользовались формулами дифференцирования (2.139). У соответствующего тензора Риччи отличны от нуля только две компоненты:

$$R_{z\bar{z}} = R_{\bar{z}z} = \theta\pi\delta(z).$$

Скалярная кривизна получается после свертки с обратной метрикой:

$$R = 2R_{z\bar{z}}g^{z\bar{z}} = \frac{4\pi\theta}{(z\bar{z})^\theta}\delta(z).$$

При переходе от уравнения (2.119) к (2.120) был использован элемент объема

$$\sqrt{g} = e^{2\phi} = r^{2\theta} = (z\bar{z})^\theta.$$

Поэтому ковариантное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\sqrt{g}R = 4\pi\theta\delta(z), \quad (2.142)$$

что совпадает с равенством (2.119) для одной особенности. Разница в знаке обусловлена тем, что сейчас рассматривается положительно, а не отрицательно определенная метрика на пространственных сечениях.

Таким образом, для метрики конической особенности мы вычислили тензор кривизны. При этом не только скалярная кривизна, но и все нетривиальные компоненты тензора кривизны пропорциональны δ -функции.

До сих пор мы обсуждали коническую особенность для метрики. Покажем, что ее можно определить в терминах связности. Введем понятие конической особенности для произвольной поверхности, на которой задана геометрия Римана–Картана. Пусть на поверхности задана диада e^a и $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$ -связность ω_α , которые являются достаточно гладкими функциями везде, за исключением конечного числа изолированных особых точек. Рассмотрим параллельный перенос произвольного вектора X вдоль гладкого замкнутого контура γ , охватывающего одну из особых точек. Вычислим изменение угла между этим вектором и, например, первым базисным вектором e^1 . Для простоты проведем вычисление в изотермических координатах (конформная калибровка), а затем покажем, что выражение для угла дефицита не зависит ни от системы координат, ни от локального вращения ортонормального базиса.

Поскольку углы между векторами в изотермических координатах такие же, как и на евклидовой плоскости, то они складываются (??). При бесконечно малом повороте вектора X^a против часовой стрелки на угол $d\omega$, он получает приращение

$$\delta X^a = d\omega X^b \varepsilon_b^a.$$

Сравнивая это выражение с приращением вектора при параллельном переносе,

$$\delta X^a = -dx^\alpha \omega_\alpha X^b \varepsilon_b^a,$$

где $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$ -связность ω_α определена соотношением (??), получим, что при бесконечно малом параллельном переносе вектор X поворачивается на угол

$$d\omega = -dx^\alpha \omega_\alpha \quad (2.143)$$

против часовой стрелки. Интегрируя это соотношение вдоль замкнутого контура, получим суммарный угол поворота вектора

$$\omega = - \oint_\gamma dx^\alpha \omega_\alpha. \quad (2.144)$$

Ясно, что этот интеграл не зависит от выбора системы координат. С точностью до знака, это – элемент суженной группы голономии $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$ -связности (??).

Если коническая особенность отсутствует, то полный угол поворота для малых контуров должен быть равен нулю, как и для евклидовой плоскости. В противном случае внутри замкнутого контура имеется коническая особенность с некоторым углом дефицита. В наших обозначениях отрицательному углу дефицита соответствует положительный поворот вектора. Поэтому угол дефицита имеет противоположный знак полного поворота (2.144):

$$2\pi\theta = \oint_\gamma dx^\alpha \omega_\alpha = \int_{\mathbb{S}} dx^\alpha \wedge dx^\beta \partial_\alpha \omega_\beta = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}} d^2x \sqrt{g} R, \quad (2.145)$$

где \mathbb{S} – поверхность, натянутая на контур γ , мы воспользовались формулой Грина (??), формулой для интеграла внешних форм (??) и выражением (??) для двумерной

скалярной кривизны. Формула (2.145) совпадает с (2.128) в случае нулевого кручения.

Отметим два важных обстоятельства. Во-первых, интеграл (2.145) не зависит от выбора системы координат, поскольку связность ω_α является ковектором по индексу α . Во-вторых, интеграл (2.145) не зависит от локального вращения, т.к. скалярная кривизна в последнем интеграле (2.145) инвариантна. Это означает, что определение угла дефицита (2.145) является инвариантным, и его вычисление можно проводить в произвольной системе координат.

Таким образом, коническую особенность можно определить и для метрики, и для связности. Дадим общее

Определение. Пусть на поверхности \mathbb{M} задана геометрия Римана–Картана. Если точка $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$ является изолированной особой точкой для тензора кривизны, где он имеет δ -образную особенность вида (2.128), то мы говорим, что в точке \mathbf{x} имеется *коническая особенность*. \square

Это определение подходит как для римановых поверхностей со связностью Леви–Чивиты, так и в более общем случае геометрии Римана–Картана с нетривиальным кручением.

Конечно, конических особенностей на поверхности \mathbb{M} может быть несколько. В таком случае проведенный выше анализ применим в некоторой окрестности каждой конической особенности.

Если угол дефицита θ конической особенности таков, что

$$\alpha = \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

то евклидову плоскость с конической особенностью можно представить в виде факторпространства \mathbb{R}^2/\mathbb{G} , где циклическая группа преобразований \mathbb{G} порядка n просто сдвигает полярный угол:

$$\varphi \mapsto \varphi + 2\pi\alpha,$$

что соответствует повороту плоскости \mathbb{R}^2 на угол $2\pi\alpha$. Эта группа преобразований действует свободно и собственноразрывно на угловую координату, но не на плоскость, потому что начало координат является неподвижной точкой. Тем не менее на факторпространстве можно ввести структуру гладкого многообразия.

Угол дефицита (2.145) зависит только от $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$ -связности, и диада в его определение не входит. Если на поверхности заданы независимо диада e_α^a и $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$ -связность ω_α , то по диаде можно построить вторую $\mathbb{S}\mathbb{O}(2)$ -связность $\tilde{\omega}_\alpha$, соответствующую нулевому кручению, и которая, вообще говоря, отличается от ω_α . В этом случае возможна ситуация, когда коническую особенность будет иметь только одна из связностей.

В проведенном анализе мы предполагали, что точка \mathbf{x} , в которой сосредоточена особенность, принадлежит многообразию, которое является гладким. Если эту точку удалить, то получится плоское, но топологически нетривиальное многообразие. В этом случае коническую особенность можно определить с помощью замкнутых контуров, приводящих к нетривиальному углу дефицита (2.144). При этом нельзя применять формулу Стокса и говорить о δ -образной особенности тензора кривизны.

Глава 3

Бозонная струна

Начиная с 70-х годов прошлого века, теория (супер)струн привлекает большое внимание физиков и математиков. В отличие от точечной частицы, в каждый момент времени мы имеем не точку, а одномерный протяженный объект – струну, которая эволюционирует в соответствии с некоторыми уравнениями движения. Первоначально теория бозонных струн использовалась в физике адронов. Затем была предложена теория суперструн путем добавления фермионных полей таким образом, чтобы результирующая модель обладала локальной суперсимметрией. После квантования каждая суперструна описывает не один тип, а бесконечный набор частиц с некоторыми массами и спинами: $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$. При этом оказалось, что расходимостей в квантовой теории суперструн существенно меньше, чем в обычной квантовой теории поля. Поэтому возникла надежда на построение последовательной единой квантовой теории всех взаимодействий элементарных частиц, включая гравитационные. Несмотря на значительные усилия, эта цель достигнута не была. Тем не менее теория (супер)струн привлекает большой интерес и по сей день своими богатством содержания и глубокими теоретическими результатами. Теория суперструн изложена, например, в монографиях [?, ?, ?, ?, ?].

В основе теории суперструн лежит модель бозонной струны, которая и является предметом исследования настоящей главы. Это – интересная модель сама по себе и с богатым содержанием.

3.1 Струна Намбу–Гото

Рассмотрим два многообразия: евклидову плоскость \mathbb{R}^2 с координатами

$$\mathbb{R}^2 \ni x = (x^\alpha) := (\tau, \sigma), \quad \alpha = 0, 1,$$

и D -мерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,D-1}$ с декартовыми координатами

$$\mathbb{R}^{1,D-1} \ni X = (X^A), \quad A = 0, 1, \dots, D-1, \quad D \geq 2,$$

и метрикой Лоренца

$$\eta_{AB} := \text{diag} \left(+ \underbrace{- \dots -}_{D-1} \right).$$

В дальнейшем мы предположим, что на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 задана псевдориманова метрика лоренцевой сигнатуры с компонентами $g_{\alpha\beta}(x)$, а в настоящем разделе ее существование изначально не предполагается. Пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,D-1}$

рассматривается, как аффинное пространство (см. раздел ??), т.е. будем считать, что в нем, помимо линейной структуры, заданы смещения точек на векторы. В этом пространстве-мишени мы будем использовать только декартовы координаты.

Пусть задано достаточно гладкое вложение

$$\mathbb{R}^2 \supset \mathbb{U} \ni (\tau, \sigma) \mapsto (X^A(\tau, \sigma)) \in \mathbb{R}^{1, D-1}, \quad (3.1)$$

возможно, только части \mathbb{U} евклидовой плоскости. Основными переменными в теории бозонных струн являются координатные функции $X^A(x)$, определяющие данное вложение. Этот набор функций задает в пространстве Минковского некоторую поверхность, которая называется *мировой поверхностью струны* и обозначается $\mathbb{M} = X(\mathbb{U})$. В дальнейшем подмножество \mathbb{U} и его образ $X(\mathbb{U})$ мы будем отождествлять. Из определения вложения следует, что мировая поверхность струны не имеет точек самопересечения.

Поскольку в пространстве-мишени задана метрика Лоренца, то на мировой поверхности струны возникает индуцированная вложением метрика с компонентами

$$h_{\alpha\beta} := \partial_\alpha X^A \partial_\beta X^B \eta_{AB}. \quad (3.2)$$

Мы *предполагаем*, что мировая поверхность струны вложена в пространство Минковского $\mathbb{R}^{1, D-1}$ таким образом, что индуцированная метрика $h_{\alpha\beta}$ имеет лоренцеву сигнатуру: $\text{sign } h_{\alpha\beta} := (+-)$. В противном случае мировую поверхность нельзя интерпретировать, как поверхность, которую “заметает” струна в процессе эволюции. В случае общего положения индуцированная метрика метрика может не быть псевдоримановой: на двуполостном гиперboloиде, вложенным в трехмерное пространство Минковского, индуцируется риманова метрика (см. раздел ??).

Координаты x^α на евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 совсем не обязательно являются декартовыми. С точки зрения общих преобразований координат $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x)$ вложение (3.1) задается D скалярными полями $X^A(x)$. Введем обозначения для векторов в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1, D-1}$, касательных к мировой поверхности струны:

$$\dot{X} := \partial_0 X, \quad X' := \partial_1 X. \quad (3.3)$$

Эти векторы линейно независимы в каждой точке \mathbb{M} , что следует из определения вложения. Здесь и в дальнейшем индексы A, B, \dots , относящиеся к пространству-мишени будут часто опускаться для краткости. Мы предполагаем, что координаты τ, σ на мировой поверхности струны выбраны таким образом, что координата τ является времениподобной, т.е.

$$(\partial_0 X)^2 := \dot{X}^2 := \dot{X}^A \dot{X}^B \eta_{AB} > 0, \quad (3.4)$$

а σ – пространственноподобной:

$$(\partial_1 X)^2 := X'^2 := X'^A X'^B \eta_{AB} < 0.$$

Тогда

$$h := \det h_{\alpha\beta} = \dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X}, X')^2 < 0,$$

где круглые скобки в правой части обозначают скалярное произведение в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1, D-1}$. В дальнейшем мы увидим, что условие (3.4) для открытой струны нарушается: оно выполнено на внутренней части мировой поверхности, а не краях нарушается, т.к. мировые линии концов открытой струны светоподобны.

Определитель h индуцированной метрики не может обратиться в нуль, т.к. мы предположили, что отображение (3.1) является вложением.

В силу сделанных предположений параметр τ является параметром эволюции а σ – пространственной координатой на мировой поверхности струны. С точки зрения внешнего наблюдателя, находящегося в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,D-1}$, временем является координата $X^0(x)$, а не τ .

В общем случае отображение (3.1) определено не для всех точек евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 , а только в некоторой двумерной области \mathbb{M} , возможно, с краем. Если струна *открыта*, то ее мировая поверхность при бесконечной эволюции представляет собой бесконечную ленту, на которой пространственная координата σ меняется в конечном интервале. Поскольку мы допускаем общие преобразования координат на мировой поверхности струны, то, не ограничивая общности, можно считать, что пространственная координата меняется в фиксированном интервале

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi,$$

длина которого выбрана из соображений удобства разложения Фурье, которое будет проведено позже. При этом линии $X(\tau, 0)$ и $X(\tau, \pi)$ являются мировыми линиями концов струны, которые, как мы увидим позже, светоподобны. Иногда рассматривают бесконечные, $\sigma \in (-\infty, \infty)$, и полубесконечные, $\sigma \in [0, \infty)$, открытые струны.

Если пространственная координата меняется в конечном интервале

$$-\infty < \tau < \infty, \quad -\pi \leq \sigma \leq \pi,$$

и координатные функции на концах гладко склеены:

$$\partial_1^n X|_{\sigma=-\pi} = \partial_1^n X|_{\sigma=\pi}, \quad \forall \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

то струна называется *замкнутой*. С топологической точки зрения мировая поверхность замкнутой струны является бесконечным цилиндром. При этом каждое пространственное сечение, определенное равенством $\tau = \text{const}$, диффеоморфно окружности. Интервал изменения пространственной координаты выбран в два раза бóльшим, чем для открытой струны, из соображений удобства дальнейшего анализа.

Чтобы написать уравнения движения для координатных функций $X^A(x)$, постулируем действие, которое пропорционально площади мировой поверхности струны:

$$S_{\text{NG}} := -\rho c \int_{\mathbb{M}} dx \sqrt{|h|} = -\rho c \int_{\mathbb{M}} d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X}, X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}, \quad (3.5)$$

где $\rho = \text{const}$, как мы увидим позже, – линейная плотность массы струны и c – скорость света. Постоянную перед действием для бозонной струны часто записывают в виде

$$\rho c := \frac{1}{2\pi\alpha'},$$

где константа связи α' имеет в физике адронов смысл угла наклона траекторий Редже (см., конец раздела ??).

Определим размерности. Пусть

$$[x^\alpha] = [X^A] = l.$$

Тогда

$$[c] = 1, \quad [\rho] = l^{-2}, \quad [\alpha'] = l^2.$$

Для упрощения последующих формул положим $c = 1$.

Действие (3.5) было предложено несколькими авторами [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?]. В настоящее время для струны с действием (3.5) установилось название *струны Намбу–Гото*.

Замечание. Пространство Минковского является однородным пространством (см. раздел ??), т.к. его можно представить в виде факторпространства группы Пуанкаре по группе Лоренца:

$$\mathbb{R}^{1,D-1} = \frac{\mathbb{ISO}_0(1, D-1)}{\mathbb{SO}_0(1, D-1)}.$$

В математической литературе отображение вида (3.1), где пространством-мишенью является произвольное однородное пространство, принято называть “гармоническим”, а интеграл (3.5) – “функционалом энергии” или “функционалом Дирихле”. В физической литературе модель такого типа называется “ σ -моделью”.

Модель струны Намбу–Гото допускает естественное обобщение. Если исходное пространство есть евклидово пространство большего числа измерений \mathbb{R}^N , $N > 2$, а пространством-мишенью – пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,D-1}$, $D \geq N$, то говорят не о струнах, а о “мембранах”. Теория мембран значительно сложнее теории струн, и в настоящее время изучена мало. Кроме того, она неперенормируема в отличие от теории струн, и поэтому привлекает меньше интереса. \square

По построению, действие (3.5) инвариантно относительно общих преобразований координат на мировой поверхности струны, $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x)$. Мы предполагаем, что преобразования координат на мировой поверхности струны таковы, что область их определения не меняется и физический смысл координат τ, σ остается прежним. Этого достаточно для выполнения второй теоремы Нетер. Действие Намбу–Гото инвариантно также относительно глобальных преобразований Пуанкаре в пространстве-мишени $\mathbb{R}^{1,D-1}$. По этой причине действие (3.5) описывает *релятивистскую* бозонную струну.

При бесконечной эволюции действие Намбу–Гото расходится. Поэтому для постановки вариационной задачи будем считать, что временная координата меняется в конечном интервале $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, а начальное и конечное положение струны фиксированы. Вариация действия Намбу–Гото имеет вид

$$\delta S_{\text{NG}} = \rho \int_{\mathbb{M}} dx \partial_\alpha \left(\sqrt{|h|} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^A \right) \delta X_A - \rho \int_{\partial\mathbb{M}} ds_\alpha \sqrt{|h|} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^A \delta X_A, \quad (3.6)$$

где ds_α – ориентированный элемент края мировой поверхности струны. Второе слагаемое в действии возникло при интегрировании по частям. Отсюда следуют уравнения Эйлера–Лагранжа и для открытых, и для замкнутых струн:

$$\frac{1}{\rho \sqrt{|h|}} \frac{\delta S_{\text{NG}}}{\delta X_A} = \square_h X^A = \frac{1}{\sqrt{|h|}} \partial_\alpha \left(\sqrt{|h|} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^A \right) = h^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta X^A = 0, \quad (3.7)$$

где волновой оператор \square_h (??) построен по индуцированной метрике $h_{\alpha\beta}$ (3.2) и $\tilde{\nabla}_\alpha$ – ковариантная производная с символами Кристоффеля. Эта система дифференциальных уравнений второго порядка нелинейна, поскольку индуцированная метрика зависит от переменных X .

Уравнения движения (3.7) записаны в явно ковариантном виде. Поскольку лагранжиан Намбу–Гото зависит только от производных,

$$L_{\text{NG}} = -\rho \sqrt{(\dot{X}, X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}, \quad (3.8)$$

то уравнения движения можно переписать в следующей форме

$$\partial_0 \frac{\partial L_{\text{NG}}}{\partial \dot{X}^A} + \partial_1 \frac{\partial L_{\text{NG}}}{\partial X'^A} = 0, \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\text{NG}}}{\partial \dot{X}^A} &= \rho \frac{X'^2 \dot{X}_A - (\dot{X}, X') X'_A}{\sqrt{|h|}}, \\ \frac{\partial L_{\text{NG}}}{\partial X'^A} &= \rho \frac{\dot{X}^2 X'_A - (\dot{X}, X') \dot{X}_A}{\sqrt{|h|}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Так как производные лагранжиана Намбу–Гото (3.10) зависят только от производных координатных функций, то уравнения движения (3.9) можно переписать в эквивалентном виде

$$\ddot{X}^B \frac{\partial^2 L_{\text{NG}}}{\partial \dot{X}^B \partial \dot{X}^A} + \dot{X}'^B \frac{\partial^2 L_{\text{NG}}}{\partial X'^B \partial \dot{X}^A} + \dot{X}''^B \frac{\partial^2 L_{\text{NG}}}{\partial \dot{X}^B \partial X'^A} + X''^B \frac{\partial^2 L_{\text{NG}}}{\partial X'^B \partial X'^A} = 0. \quad (3.11)$$

Мы предполагаем, что начальное и конечное положение струны при $\tau = \tau_{1,2}$ фиксированы. То есть вариации координат струны равны нулю, $\delta X(\tau_{1,2}, \sigma) \equiv 0$. При этом мы рассматриваем произвольные вариации координат открытой струны на пространственном крае $\sigma = 0, \pi$, что соответствует свободным концам. Тогда из равенства нулю вариации действия (3.6) для открытой струны вытекают также граничные условия:

$$h^{1\beta} \partial_\beta X^A \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0. \quad (3.12)$$

Для замкнутой струны граничные условия не возникают, т.к. у окружности нет края.

По предположению, векторы \dot{X} и X' линейно независимы. Поэтому из равенства (3.12) следует, что на свободных концах открытой струны выполнены равенства:

$$h^{1\beta} \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0, \quad \beta = 0, 1. \quad (3.13)$$

Это означает, что на концах струны индуцированная метрика вырождается.

Поскольку действие для струны инвариантно относительно общих преобразований координат на мировой поверхности струны, которые в инфинитезимальной форме имеют вид

$$X^A \mapsto X^A - \epsilon^\alpha \partial_\alpha X^A, \quad \epsilon^\alpha(x) \ll 1, \quad (3.14)$$

то, согласно второй теореме Нетер, между уравнениями движения имеются линейные зависимости:

$$\frac{\delta S_{\text{NG}}}{\delta X^A} \partial_\alpha X^A = 0, \quad \alpha = 0, 1. \quad (3.15)$$

Так как между D уравнениями движения имеются две линейные зависимости, то струна Намбу–Гото описывает не более $D - 2$ физических (распространяющихся) степеней свободы, для которых можно поставить задачу Коши, что будет сделано позже.

Перепишем тождества (3.15) для уравнений движения в форме (3.11):

$$\left(\ddot{X}^B \frac{\partial^2 L_{\text{NG}}}{\partial \dot{X}^B \partial \dot{X}^A} + \dot{X}'^B \frac{\partial^2 L_{\text{NG}}}{\partial X'^B \partial \dot{X}^A} + \dot{X}''^B \frac{\partial^2 L_{\text{NG}}}{\partial \dot{X}^B \partial X'^A} + X''^B \frac{\partial^2 L_{\text{NG}}}{\partial X'^B \partial X'^A} \right) \partial_\alpha X^A = 0. \quad (3.16)$$

Это – два тождества, которые выполняются независимо от того выполнены ли уравнения движения или нет. Приравнивая в этих тождествах нулю коэффициенты при вторых производных \ddot{X}^B для всех значений индексов B, получаем два равенства:

$$\frac{\partial^2 L_{\text{NG}}}{\partial \dot{X}^B \partial \dot{X}^A} \dot{X}^A = 0, \quad \frac{\partial^2 L_{\text{NG}}}{\partial \dot{X}^B \partial \dot{X}^A} X'^A = 0.$$

Мы видим, что гессиан модели вырожден и имеет по крайней мере два линейно независимых собственных вектора \dot{X}^A и X'^A , соответствующих нулевому собственному значению. Этому соответствует появление в теории по крайней мере двух первичных связей в гамильтоновой формулировке, которая рассматривается в следующем разделе.

Из инвариантности действия Намбу–Гото относительно глобальных преобразований из группы Пуанкаре, согласно первой теореме Нетер, следуют законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения. Эти законы будут выписаны после фиксирования конформной калибровки, в которой формулы упрощаются и становятся прозрачнее.

3.1.1 Каноническая формулировка

Канонические импульсы для координат струны X^A имеют вид

$$P_A := \frac{\partial L_{\text{NG}}}{\partial \dot{X}^A} = \rho \frac{X'^2 \dot{X}_A - (\dot{X}, X') X'_A}{\sqrt{|h|}}. \quad (3.17)$$

Благодаря наличию множителя $\sqrt{|h|}$ в знаменателе, каждая компонента импульса является не функцией на мировой поверхности струны, а скалярной плотностью степени 1.

Из определения импульсов следует, что в теории присутствуют две первичные связи:

$$H_0 := -\frac{P^2}{2\rho} - \frac{\rho X'^2}{2} = 0, \quad (3.18)$$

$$H_1 := (P, X') = 0, \quad (3.19)$$

в чем убеждаемся простой проверкой. Общие коэффициенты в связях не определяются из равенств (3.17) и выбраны из соображений удобства. В дальнейшем мы увидим, что связь H_0 совпадает с выражением для двумерного тензора энергии-импульса струны. Поэтому знак минус в связи H_0 выбран с тем, чтобы вклад *пространственных* компонент струны был положительным.

Эквивалентная каноническая формулировка для действия бозонной струны в форме Полякова (раздел ??) показывает, что других связей в теории нет.

Канонический гамильтониан для струны Намбу–Гото тождественно равен нулю:

$$H := P_A \dot{X}^A - L_{\text{NG}} = 0, \quad (3.20)$$

т.к. лагранжиан является однородной функцией первой степени по скоростям.

Для канонических переменных постулируются следующие одновременные скобки Пуассона:

$$\begin{aligned} [X^A(\tau, \sigma), P_B(\tau, \sigma')] &= \delta_B^A \delta(\sigma', \sigma). \\ [X^A(\tau, \sigma), X^B(\tau, \sigma')] &= 0, \quad [P_A(\tau, \sigma), P_B(\tau, \sigma')] = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Нетрудно вычислить алгебру связей:

$$\begin{aligned} [H_0(\tau, \sigma), H_0(\tau, \sigma')] &= - (H_1(\tau, \sigma) + H_1(\tau, \sigma')) \delta'(\sigma', \sigma), \\ [H_0(\tau, \sigma), H_1(\tau, \sigma')] &= - (H_0(\tau, \sigma) + H_0(\tau, \sigma')) \delta'(\sigma', \sigma), \\ [H_1(\tau, \sigma), H_1(\tau, \sigma')] &= - (H_1(\tau, \sigma) + H_1(\tau, \sigma')) \delta'(\sigma', \sigma), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $\delta'(\sigma', \sigma) := \partial \delta(\sigma', \sigma) / \partial \sigma'$ – производная δ -функции. Это – конформная алгебра, которая уже была получена в двумерной гравитации (??).

Таким образом, в модели релятивистской струны Намбу–Гото имеется только две первичные связи первого рода, которые удовлетворяют конформной алгебре (3.22). Следовательно, полный гамильтониан (см. раздел ??) равен линейной комбинации связей:

$$H_T = \lambda H_0 + \mu H_1, \quad (3.23)$$

где $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ – множители Лагранжа.

Полное действие равно

$$S_T := \int_{\mathbb{M}} dx (P_A \dot{X}^A - \lambda H_0 - \mu H_1). \quad (3.24)$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для этого действия имеют вид

$$\frac{\delta S_T}{\delta X^A} : \quad - \dot{P}_A + 2\rho^2 \partial_1(\lambda X'_A) + \partial_1(\mu P_A) = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta P_A} : \quad \dot{X}^A - 2\lambda P^A - \mu X'^A = 0, \quad (3.26)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta \lambda} : \quad - P^2 - \rho^2 X'^2 = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{\delta S_T}{\delta \mu} : \quad - (X', P) = 0. \quad (3.28)$$

Рассмотрим генераторы преобразований, соответствующие связям первого рода:

$$T_0(\epsilon) := \int d\sigma \epsilon H_0, \quad T_1(\eta) := \int d\sigma \eta H_1, \quad (3.29)$$

где $\epsilon(\tau, \sigma)$ и $\eta(\tau, \sigma)$ – локальные параметры преобразования. Они генерируют следующие инфинитезимальные преобразования:

$$\begin{aligned} \delta_0 X^A &:= [X^A, T_0(\epsilon)] = -\frac{\epsilon}{\rho} P^A, \\ \delta_0 P_A &:= [P_A, T_0(\epsilon)] = -\rho \partial_1(\epsilon X'_A), \\ \delta_1 X^A &:= [X^A, T_1(\eta)] = \eta \partial_1 X^A, \\ \delta_1 P_A &:= [P_A, T_1(\eta)] = \partial_1 \eta P_A + \eta \partial_1 P_A. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Связь H_0 является “динамической”. Она генерирует сдвиг вдоль параметра τ на величину $\epsilon = -2\rho\lambda d\tau$, что следует из уравнений (3.25), (3.26) при $\mu = 0$. Вторая связь H_1 – “кинематическая”. Она генерирует преобразования пространственной координаты $\sigma \mapsto \sigma - \eta$.

Из коммутационных соотношений (3.22) следуют коммутационные соотношения для генераторов преобразований:

$$\begin{aligned} [T_0(\epsilon), T_0(\eta)] &= T_1(\epsilon \partial_1 \eta - \eta \partial_1 \epsilon), \\ [T_0(\epsilon), T_1(\eta)] &= T_0(\epsilon \partial_1 \eta - \eta \partial_1 \epsilon), \\ [T_1(\epsilon), T_1(\eta)] &= T_1(\epsilon \partial_1 \eta - \eta \partial_1 \epsilon). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Согласно теореме ?? полное действие (3.24) инвариантно относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований с точностью до граничных членов

$$\begin{aligned}\delta X^A &= -\frac{\epsilon}{\rho} P^A, & \delta\lambda &= \dot{\epsilon} + \epsilon\partial_1\mu - \mu\partial_1\epsilon, \\ \delta P_A &= -\rho\partial_1(\epsilon X'_A), & \delta\mu &= \epsilon\partial_1\lambda - \lambda\partial_1\epsilon\end{aligned}\quad (3.32)$$

с параметром $\epsilon(x)$, а также преобразований

$$\begin{aligned}\delta X^A &= \eta X'^A, & \delta\lambda &= \eta\partial_1\lambda - \lambda\partial_1\eta, \\ \delta P_A &= \partial_1(\eta P_A), & \delta\mu &= \dot{\eta} + (\eta\partial_1\mu - \mu\partial_1\eta)\end{aligned}\quad (3.33)$$

с параметром $\eta(x)$. В инвариантности действия нетрудно убедиться прямой проверкой. Для того, чтобы пренебречь граничными вкладами, достаточно предположить, что параметры преобразований ϵ и η равны нулю на краях открытой струны.

3.1.2 Конформная калибровка

Используем произвол в выборе координат на мировой поверхности струны. Согласно теореме ?? на \mathbb{M} существует такая система координат, что индуцированная метрика $h_{\alpha\beta}$ является конформно плоской:

$$h_{\alpha\beta} = e^{2\phi}\eta_{\alpha\beta}, \quad \eta_{\alpha\beta} := \text{diag}(+-),$$

где $\phi(x)$ – некоторая функция. В такой системе координат выполнены равенства:

$$h_{00} = -h_{11} \Leftrightarrow \dot{X}^2 + X'^2 = 0, \quad h_{01} = 0 \Leftrightarrow (\dot{X}, X') = 0. \quad (3.34)$$

Конформная калибровка для метрики определена с точностью до конформных преобразований координат x^α (см. раздел ??). Этой свободы достаточно, чтобы считать интервал изменения пространственной координаты прежним, $\sigma \in [0, \pi]$ для открытой струны и $\sigma \in [-\pi, \pi]$ для замкнутой. В конформной калибровке уравнения движения (3.7) принимают простой вид

$$\square X^A = 0, \quad (3.35)$$

где $\square := \partial_0^2 - \partial_1^2$ – обычный оператор Даламбера на плоскости Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$. Это связано с тем, что в конформной калибровке выполнено равенство

$$\sqrt{|h|}h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(+-).$$

Хотя уравнения (3.35) линейны, в целом рассматриваемая модель нелинейна, т.к. уравнения движения необходимо дополнить квадратичными условиями (3.34).

Замечание. В линейном приближении мы должны отбросить связи, т.к. они квадратичны по полям. Это значит, что бозонная струна дает пример теории, в которой линейное приближение вовсе не является каким-либо приближением для полной теории. \square

В конформной калибровке граничные условия (3.12) для открытой струны принимают вид

$$X'^A \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0. \quad (3.36)$$

Это значит, что концы струны не растянуты, и упругие напряжения отсутствуют, т.е. свободны. С учетом первого равенства (3.34) из граничного условия (3.36) следует, что на концах струны выполнено также равенство

$$\dot{X}^2 = 0.$$

Отсюда вытекает, что концы открытой свободной струны движутся со скоростью света.

Уравнения движения (3.35) для бозонной струны можно получить из вариационного принципа для действия

$$S = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{M}} dx \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^A \partial_\beta X_A = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{M}} dx \left(\dot{X}^2 - X'^2 \right), \quad (3.37)$$

которое, конечно, необходимо дополнить условиями (3.34). Это действие представляет собой стандартное действие для D свободных безмассовых скалярных полей в двумерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ с метрикой Лоренца $\eta^{\alpha\beta} := \text{diag}(+,-)$. Знак минус в действии (3.37) выбран таким образом, чтобы канонический гамильтониан для пространственных компонент струны X^i , $i = 1, \dots, D-1$, был положительно определен.

Действие (3.37) инвариантно относительно глобальных преобразований из группы Пуанкаре в пространстве-мишени. Поэтому из первой теоремы Нетер следует, что на уравнениях движения сохраняются тензоры энергии-импульса и момента количества движения (см. раздел ??). Глобальные трансляции в пространстве-мишени имеют вид

$$X^A \mapsto X^A + \epsilon^A, \quad x^\alpha \mapsto x^\alpha \quad \Rightarrow \quad R_B^A = \delta_B^A, \quad (3.38)$$

где $\epsilon^A \in \mathbb{R}$ – параметр и R_B^A – генераторы трансляций. Ток (??), соответствующий трансляциям, равен

$$J_A^\alpha = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha X^B)} R_B^A = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha X^A)}. \quad (3.39)$$

Бесконечно малые вращения параметризуются постоянным параметром $\omega^{AB} := -\omega^{BA} \ll 1$ и имеют вид

$$X^A \mapsto X^A - X^B \omega_B^A, \quad x^\alpha \mapsto x^\alpha \quad \Rightarrow \quad R_{AB}^C = X_B \delta_A^C - X_A \delta_B^C, \quad (3.40)$$

где R_{AB}^C – генераторы вращений. Поэтому сохраняющийся ток (??) имеет вид

$$J_{AB}^\alpha = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha X^C)} R_{AB}^C = X_A \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha X^B)} - X_B \frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha X^A)}. \quad (3.41)$$

На уравнениях движения токи сохраняются: $\partial_\alpha J_A^\alpha = 0$ и $\partial_\alpha J_{AB}^\alpha = 0$.

Полный момент и полный момент количества движения открытой струны для каждого значения τ определяются интегралами:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_A &:= - \int_0^\pi d\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^A}, \\ \mathcal{M}_{AB} &:= \int_0^\pi d\sigma \left(X_A \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^B} - X_B \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^A} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Они сохраняются в процессе эволюции. Для замкнутой струны полный момент и момент количества движения определяются теми же формулами, но интегрирование ведется на отрезке $[-\pi, \pi]$.

При получении выражений для полного импульса и момента количества движения (3.42) мы стартовали с действия (3.37). Можно действовать по-другому. Стартовать с действия Намбу–Гото (3.5), определить полные импульс и момент количества движения и только затем перейти к конформной калибровке. Нетрудно проверить, что ответы получатся те же.

Напомним, что выражения (3.42) соответствуют внешнему наблюдателю, который находится в пространстве-мишени.

Задача Коши

Для простоты, рассмотрим задачу Коши для бесконечной струны, $-\infty < \sigma < \infty$. С незначительными изменениями начальных данных эта задача может быть переформулирована для открытой и замкнутой струны. Поскольку в конформной калибровке (3.34) для всех компонент струны мы имеем уравнение Даламбера (3.35), то на поверхности Коши необходимо задать значения координат струны и их скорости. Однако сделать это нужно таким образом, чтобы были выполнены дополнительные условия (3.34). Здесь возникает вопрос, что будет с дополнительными условиями в последующие моменты времени?

Предложение 3.1.1. *Рассмотрим задачу Коши для бесконечной струны. Пусть в начальный момент времени на поверхности Коши $\tau = 0$ заданы координаты струны и скорости,*

$$\begin{aligned} X_0^A(\sigma) &:= X^A(0, \sigma), & X_0'^2 &< 0 \\ V^A(\sigma) &:= \dot{X}^A(0, \sigma), & V^2 &> 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

таким образом, что выполнены дополнительные условия (3.34). Тогда дополнительные условия будут выполнены во все последующие моменты τ .

Доказательство. Продифференцируем первое дополнительное условие по τ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\dot{X}^2 + X'^2) = 2\dot{X}\ddot{X} + 2X'\dot{X}' = 2\dot{X}X'' + 2X'\dot{X}' = 2(\dot{X}, X')' = 0,$$

где мы воспользовались уравнениями движения (3.35). Отсюда следует, что если дополнительные условия (3.34) выполнены на поверхности Коши и второе условие выполнено в процессе эволюции, то первое дополнительное условие также будет выполнено в последующие моменты эволюции.

Теперь рассмотрим второе дополнительное условие. Сначала продифференцируем первое дополнительное условие по σ :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(\dot{X}^2 + X'^2) = 2\dot{X}\dot{X}' + 2X'X'' = 0. \quad (3.44)$$

Теперь продифференцируем по τ второе условие:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\dot{X}, X') = (\ddot{X}, X') + (\dot{X}, \dot{X}') = (X'', X') - (X'', X') = 0,$$

где учтены уравнения движения и равенство (3.44). Тем самым, если оба дополнительных условия выполнены на поверхности Коши и первое условие выполняется при эволюции, то второе дополнительное условие будет выполняться при эволюции струны.

Суммируя результаты, получаем, что оба дополнительных условия сохраняются в процессе эволюции, если они выполнены в начальный момент $\tau = 0$. \square

Из доказанного Предложения следует, что дополнительные условия позволяют устранить одну степень свободы. В дальнейшем мы увидим, что конформные преобразования, которые остались после фиксирования конформной калибровки, позволяют устранить еще одну степень свободы. Тем самым бозонная струна описывает $D - 2$ физические степени свободы.

Общее решение уравнения Даламбера (3.35) имеет вид

$$X^A = F^A(\xi) + G^A(\eta), \quad (3.45)$$

где $F^A(\xi)$ и $G^A(\eta)$ – произвольные достаточно гладкие функции конусных координат

$$\xi := x^0 + x^1 = \tau + \sigma, \quad \eta := x^0 - x^1 = \tau - \sigma.$$

Функции (F^A) и (G^A) описывают волны, распространяющиеся, соответственно, влево и вправо.

Для того, чтобы решения уравнения Даламбера описывали бозонную струну, функции X^A должны удовлетворять дополнительным условиям (3.34), которые мы перепишем в эквивалентном виде:

$$(\dot{X} + X')^2 = 0, \quad (\dot{X} - X')^2 = 0. \quad (3.46)$$

Поскольку выполнены равенства

$$\dot{X} + X' = 2F', \quad \dot{X} - X' = 2G',$$

где штрихи у функций F' и G' обозначают дифференцирование по их аргументам ξ и η , соответственно, то дополнительные условия для решения (3.45) принимают вид

$$F'^2 = 0, \quad G'^2 = 0. \quad (3.47)$$

Для точек струны с фиксированным значением пространственной координаты σ выполнены равенства

$$\partial_\tau F = \partial_\xi F = F', \quad \partial_\tau G = \partial_\eta G = G = G'.$$

Поэтому равенства (3.47) означают, что каждая волна с точки зрения внешнего наблюдателя распространяется по мировой поверхности струны влево или вправо со скоростью света в пространстве-мишени.

Общее решение задачи Коши для бесконечной струны с начальными данными (3.43) задается формулой Даламбера (см., например, [?], гл. III, §13):

$$X(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [X_0(\sigma + \tau) + X_0(\sigma - \tau)] + \frac{1}{2} \int_{\sigma - \tau}^{\sigma + \tau} d\lambda V(\lambda). \quad (3.48)$$

Дополнительные условия на начальные данные имеют вид

$$V^2 + X_0'^2 = 1, \quad (V, X_0') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (V + X_0')^2 = 0, \quad (V - X_0')^2 = 0. \quad (3.49)$$

Кроме того, на начальные данные существует еще одно условие, связанное с тем, что световой конус является объединением световых конусов прошлого и будущего. Для того, чтобы его получить, запишем производные координатных функций через начальные данные, используя формулу Даламбера (3.48),

$$\begin{aligned} \dot{X} + X' &= V(\sigma + \tau) + X_0'(\sigma + \tau), \\ \dot{X} - X' &= V(\sigma - \tau) - X_0'(\sigma - \tau). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Справедливо тождество

$$4\dot{X}^2 = (\dot{X} + X')^2 + 2(\dot{X} + X')(\dot{X} - X') + (\dot{X} - X')^2,$$

которое, с учетом дополнительных условий (3.46) и равенств (3.50), приводит к неравенству

$$2\dot{X}^2 = [V(\sigma + \tau) + X'_0(\sigma + \tau)]^A [V(\sigma - \tau) - X'_0(\sigma - \tau)]_A > 0. \quad (3.51)$$

Поскольку векторы (3.50) изотропны, то это неравенство можно переписать в виде

$$2\dot{X}^2 = [V(\sigma + \tau) + X'_0(\sigma + \tau)]^0 [V(\sigma - \tau) - X'_0(\sigma - \tau)]_0 (1 \pm \cos \varphi(\tau, \sigma)) > 0,$$

где $\varphi(\tau, \sigma)$ – угол между пространственными составляющими векторов (3.50). Таким образом, условие (3.51) сводится к требованию, чтобы временные компоненты векторов (3.50) имели одинаковый знак:

$$[V(\sigma + \tau) + X'_0(\sigma + \tau)]^0 [V(\sigma - \tau) - X'_0(\sigma - \tau)]_0 > 0, \quad (3.52)$$

т.е. одновременно лежали либо на световом конусе будущего, либо прошлого. Этим определяется то, в какую сторону решается задача Коши: либо вперед по времени, либо назад. Условие (3.52) при $\tau = 0$ является независимым дополнительным условием на начальные данные при постановке задачи Коши.